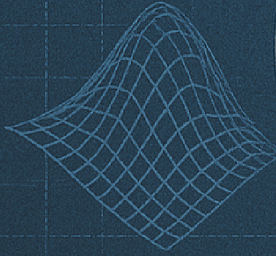
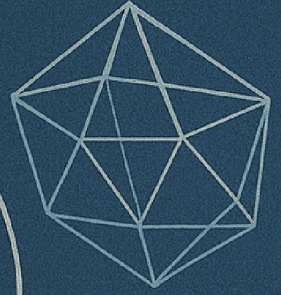
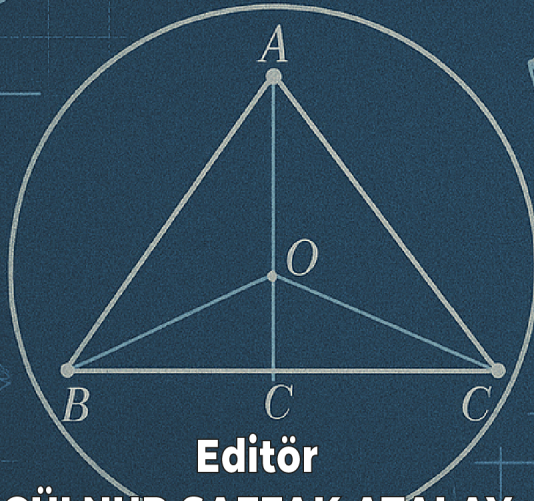
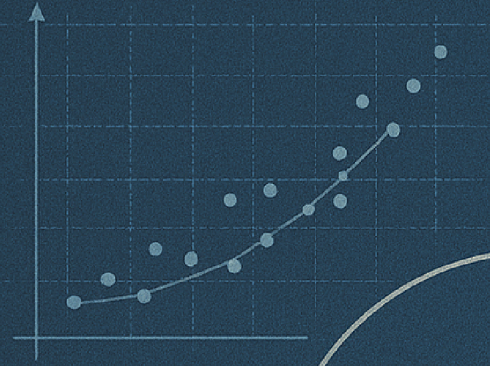


MATEMATİKSEL YAPILAR: ANALİZ GEOMETRİ PERSPEKTİFİYLE



Editör
GÜLNUR ŞAFFAK ATALAY

$f(x)$



BİDGE Yayınları

**MATEMATİKSEL YAPILAR: ANALİZ VE GEOMETRİ
PERSPEKTİFİYLE**

Editör: GÜLNUR ŞAFFAK ATALAY

ISBN: 978-625-372-722-2

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 2025-06-25

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltpe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /
Ankara



ÖNSÖZ

Bu kitap, matematiğin iki temel dalı olan **analiz** ve **geometri** alanında yapılan çeşitli çalışmaları bir araya getirmeyi amaçlamaktadır. Bu kitapta yer alan çalışmalar, farklı bakış açılarıyla bu iki alanın kuramsal temellerine, yöntemlerine ve uygulamalarına ışık tutmaktadır. Kitap, analiz ve geometriye ilgi duyan lisansüstü öğrenciler, araştırmacılar ve bu alanlarda çalışma yapan akademisyenler için faydalı bir kaynak olmayı hedeflemektedir. Ayrıca temel matematik bilgisine sahip olan okuyucular için de derinleşme fırsatı sunmaktadır.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında katkı sunan tüm yazarlarımıza, editör kuruluna ve yayına hazırlık sürecinde emeği geçen herkese teşekkür ederiz.

Bilimin ışığında ilerleyen herkes için faydalı ve ilham verici bir kaynak olması dileğiyle...

Doç. Dr. Gülnur ŞAFFAK ATALAY
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

İÇİNDEKİLER

HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITY FOR FUNCTION OF HYPERBOLIC VARIABLE	1
<i>ERDEM TOKSOY</i>	
INVARIANT SUBMANIFOLDS OF ALMOST BRONZE RIEMANNIAN MANIFOLDS	17
<i>MUSTAFA GÖK</i>	
RİCCİ SOLİTONA SAHİP A-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI SONUÇLAR	27
<i>ORÇUN ÇELİK, HAKAN ÖZTÜRK</i>	
SÜPER ÇÖZÜLEBİLİR AMBİVALENT GRUPLAR VE GAP UYGULAMALARI	40
<i>DİDEM ÖZTÜRK, ÖZLEM YILMAZ, GÜLAY İLONA TELSİZ KAYAOĞLU</i>	
(P,Q)-MEYER-KÖNİG-ZELLER-KANTOROVİCH-STANCU OPERATÖRLERİNİN İSTATİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE	63
<i>ESMA KANGAL, ÜLKÜ DİNLEMEZ KANTAR</i>	
Demi-limited Operatörler Sınıfı	79
<i>BİROL ALTIN, GÜL SİNEM KELEŞ</i>	
SMARANDACHE ADJOİNT EĞRİLİ YÜZEY AİLELERİ ÜZERİNE	85
<i>GÜLNUR ŞAFFAK ATALAY</i>	
GEOGEBRA İLE MATEMATİK EĞİTİMİ: 2007-2024 DÖNEMİ KAPSAMLI LİTERATÜR ANALİZİ	126
<i>CEYDA CEVAHİR YILDIZ</i>	
(Λ, M)-BERNSTEIN-DURRMEYER-STANCU OPERATÖR DİZİSİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE	161
<i>ÜLKÜ DİNLEMEZ KANTAR, GÜLTEN TORUN</i>	
DEMİ B-AM-KOMPAKT OPERATÖRLER	170
<i>GÜL SİNEM KELEŞ, BİROL ALTIN</i>	

BÖLÜM 1

HERMİTE-HADAMARD TYPE INEQUALITY FOR FUNCTION OF HYPERBOLIC VARIABLE

ERDEM TOKSOY¹

Introduction

Hyperbolic numbers are a simpler subalgebra that preserves numerous significant geometric and algebraic properties, in contrast to bicomplex numbers, which offer a more complex algebraic structure with two commuting imaginary units. Our comprehension of hypercomplex systems and their applications in a variety of disciplines of mathematics and physics is enhanced by the examination of hyperbolic numbers in the context of bicomplex numbers. This connection between hyperbolic numbers and bicomplex numbers is advantageous in both theoretical and applied mathematics, particularly in domains that involve higher-dimensional number systems. These advancements are primarily concerned with the extension of function theory, algebraic structures, and applications of bicomplex and hyperbolic numbers to fields such as computational sciences, engineering, and physics. In addition, the adaptability of hyperbolic numbers has made it possible to investigate the characteristics of hyperbolic and bicomplex

¹ Ph.D., Department of Mathematics, Faculty of Sciences Ondokuz Mayıs University, Samsun, Turkey

functional analysis. A comprehensive explanation of hyperbolic numbers and the functions they serve can be found in the works of literature (Alpay & et al., 2016; Datta & et al., 2020; Saini & et al., 2020; Shapiro & et al., 2012).

The study of hyperbolic numbers as a subset of bicomplex numbers has made significant progress in both theoretical mathematics and applied domains in recent years. In this context, it is pertinent to initially provide a succinct introduction to bicomplex numbers, followed by a discussion of the features of hyperbolic numbers, which constitute a subset of bicomplex numbers and will serve as the foundation of this study. The following knowledge regarding hyperbolic numbers and bicomplex numbers is derived from (Alpay & et al., 2014; Luna-Elizarrarás, 2022; Luna-Elizarrarás & et al., 2015; Balankin & et al., 2016; Ghosh & et al., 2021).

The set of bicomplex numbers, denoted as $\mathbb{BC}$, is described as

$$\mathbb{BC} = \{z + jw | z, w \in \mathbb{C}(i)\}.$$

The set $\mathbb{BC}$ can be interpreted as

$$\mathbb{BC} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

according to the previously mentioned conditions. Addition and multiplication operations are defined in the following ways:

$$(z_1 + jw_1) + (z_2 + jw_2) = (z_1 + z_2) + j(w_1 + w_2)$$

and

$$(z_1 + jw_1)(z_2 + jw_2) = (z_1z_2 - w_1w_2) + j(z_1w_2 + w_1z_2).$$

By performing these operations, the set $\mathbb{BC}$ becomes a commutative ring and, as a result, a module on itself. The hyperbolic number set $\mathbb{D}$, a significant subset of $\mathbb{BC}$, is defined as

$$\mathbb{D} = \{x + ky | x, y \in \mathbb{R}\}$$

by substituting z and w for x and iy in the definition of $\mathbb{BC}$, where $x, y \in \mathbb{R}$. The significant elements in $\mathbb{BC}$ are $e_1 = \frac{1+ij}{2}$ and $e_2 = \frac{1-ij}{2}$, which satisfy the conditions outlined below:

$$e_1 e_2 = 0, e_1 + e_2 = 1, e_1 e_1 = e_1, e_2 e_2 = e_2.$$

Both e_1 and e_2 could be taken as hyperbolic numbers. These elements comprise the idempotent basis of bicomplex numbers. An expression that represents a bicomplex number $z + jw$ in a particular form is

$$z + jw = e_1 z_1 + e_2 z_2,$$

where $z_1 = z - iw$, $z_2 = z + iw \in \mathbb{C}(i)$. The term used to refer to this mathematical expression is idempotent representation of bicomplex numbers. As a result, each hyperbolic number is corresponding to the following idempotent representation:

$$x + ky = e_1 a_1 + e_2 a_2,$$

where $a_1 = x + y$, $a_2 = x - y \in \mathbb{R}$. The set $\mathbb{D}$ is a commutative ring with the operations of addition and multiplication defined as

$$a + b = (x_1 + ky_1) + (x_2 + ky_2) = (x_1 + x_2) + k(y_1 + y_2)$$

and

$$ab = (x_1 + ky_1)(x_2 + ky_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + k(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

where $a = x_1 + ky_1$, $b = x_2 + ky_2$ for $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. The ring of hyperbolic numbers has zero-divisors. Let us take the hyperbolic

numbers $e_1 = \frac{1+k}{2}$ and $e_2 = \frac{1-k}{2}$, then $e_1 e_2 = 0$. Therefore these hyperbolic numbers are zero-divisors of $\mathbb{D}$. Also, these zero-divisors are also idempotent elements such that $e_1 e_1 = e_1$, $e_2 e_2 = e_2$ and $e_1 + e_2 = 1$, $e_1 - e_2 = k$. The only zero-divisors on $\mathbb{D}$ are the real multiples of e_1 and of e_2 . Therefore, $a \in \mathbb{D}$ is a zero-divisor if and only if $a = x e_1$ or $a = y e_2$ for $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also, we can describe the zero-divisors as following: $a = e_1 a_1 + e_2 a_2 \in \mathbb{D}$ is a zero-divisor if and only if $a_1 = 0$ or $a_2 = 0$. The set of zero-divisors will be represented by $\mathfrak{S}$, and in conjunction with zero, it will be designated as $\mathfrak{S}_0$.

The set of non-negative hyperbolic numbers is given by

$$\mathbb{D}^+ = \{e_1 a_1 + e_2 a_2 | a_1, a_2 \geq 0\}.$$

Consider $a, b \in \mathbb{D}$. For hyperbolic numbers, the partial order relation $\preceq$ is denoted as

$$a \preceq b \text{ if and only if } b - a \in \mathbb{D}^+.$$

Moreover, we have

$$a < b \text{ if and only if } a \preceq b \text{ but } a \neq b.$$

If $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$, $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$, then $a \leq b$ if and only if $a_1 \leq b_1$ and $a_2 \leq b_2$. Let us give some of the features of the partial order relation $\preceq$ (see, Section 2.6.2 of (Luna-Elizarrarás & et al., 2015)).

If a and b are comparable with respect to $\leq$, then exactly one of the following relations is true:

$$a < b \text{ or } a > b \text{ or } a = b.$$

Consider $a, b, c, d \in \mathbb{D}$. The inequalities $a < c$ and $c \leq b$ imply that $a < b$. Similarly, the inequalities $a \leq c$ and $c < b$ imply that $a < b$. Also, $a < b$ implies that $a + c < b + c$, $a \leq b$ implies that $a + c \leq b + c$, $0 < a$ implies that $-a < 0$, $c \leq d$ and $a \leq b$ imply that $c + a \leq$

$d + b, c \leq d$ and $a < b$ imply that $c + a < d + b$. If a and b are non-negative hyperbolic numbers, then their product is also a non-negative hyperbolic number. If a and b are strictly positive hyperbolic numbers, then their product is also a strictly positive hyperbolic number. If a and b are strictly negative hyperbolic numbers, then their product is a strictly positive number. The product of a and b is a strictly negative number if one of them is strictly positive and the other is strictly negative. If $a < b$ and $c > 0$, then $a \cdot c < b \cdot c$. If $a < b$ and $c < 0$, then $a \cdot c > b \cdot c$.

Let us now provide a brief overview of $\mathbb{D}$ -boundedness as presented in Section 2.6.3 of (Luna-Elizarrarás & et al., 2015). Let $X \subset \mathbb{D}$. If X has a $\mathbb{D}$ -upper bound (or a $\mathbb{D}$ -lower bound) l , then this means that for any $x \in X$ there holds that x is comparable with l and $x \lesssim l$ (or $l \lesssim x$). A set is said to be $\mathbb{D}$ -bounded if it is $\mathbb{D}$ -bounded from above and from below. If X is a set $\mathbb{D}$ -bounded, we define its $\mathbb{D}$ -supremum $\sup_{\mathbb{D}} X$ to be the least $\mathbb{D}$ -upper bound for X , and its $\mathbb{D}$ -infimum $\inf_{\mathbb{D}} X$ to be the greatest $\mathbb{D}$ -lower bound for X . The least $\mathbb{D}$ -upper bound here means that $\sup_{\mathbb{D}} X \lesssim l$ for any $\mathbb{D}$ -upper bound l even if not all of the $\mathbb{D}$ -upper bounds are comparable. The least $\mathbb{D}$ -lower bound here means that $l \lesssim \inf_{\mathbb{D}} X$ for any $\mathbb{D}$ -lower bound l even if not all of the $\mathbb{D}$ -lower bounds are comparable. If the set X contains a finite number of elements, we can describe $\sup_{\mathbb{D}} X = \max_{\mathbb{D}} X$ and $\inf_{\mathbb{D}} X = \min_{\mathbb{D}} X$.

Given $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ and $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ in $\mathbb{D}$ such that $a \leq b$, the closed hyperbolic interval $[a, b]_{\mathbb{D}}$ is defined by $[a, b]_{\mathbb{D}} = \{c \in \mathbb{D} | a \leq c \leq b\}$. By the features of the partial order relation $\lesssim$, $c = c_1 e_1 + c_2 e_2 \in [a, b]_{\mathbb{D}}$ if and only if $a_1 \leq c_1 \leq a_2$ and $b_1 \leq c_2 \leq b_2$. Also, $(a, b)_{\mathbb{D}}$ is an open hyperbolic interval, where $(a, b)_{\mathbb{D}} = \{c \in \mathbb{D} | a < c < b\}$. The hyperbolic interval is considered degenerate

if the number $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ is a non-negative zero-divisor hyperbolic number. As an illustration, consider $\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2$ and $\mathbf{b} = a_1e_1 + b_2e_2$. Then, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ equals $(b_2 - a_2)e_2$, and these two variables constitute a degenerate hyperbolic interval. We can likewise assert that the hyperbolic interval is non-degenerate if $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ constitutes an invertible positive hyperbolic number.

The hyperbolic modulus $|\cdot|_k: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^+$ of a hyperbolic number $\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2$ is given by

$$|\mathbf{a}|_k = |a_1e_1 + a_2e_2|_k = |a_1|e_1 + |a_2|e_2.$$

Let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{D}$. The hyperbolic modulus fulfills the following features:

- i. $|\mathbf{a}|_k \geq 0$ and $|\mathbf{a}|_{\mathbb{D}} = 0$ if and only if $\mathbf{a} = 0$.
- ii. $|\mathbf{a}\mathbf{b}|_k = |\mathbf{a}|_k|\mathbf{b}|_k$.
- iii. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|_k \leq |\mathbf{a}|_k + |\mathbf{b}|_k$.

The aforementioned definitions clearly enable us to define a hyperbolic-valued metric d on $\mathbb{D}$ as denoted by (see, Example 2 of (Ghosh & et al., 2021)):

$$d_{\mathbb{D}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|_k.$$

Let us take a function $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Then this function is $\mathbb{D}$ -continuous at a point $\mathbf{a} \in \mathbb{D}$ if and only if for every $\epsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $d_{\mathbb{D}}(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{x})) < \epsilon$ where $d_{\mathbb{D}}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \delta$. Consider $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{D}$ where $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ and $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ is not a zero-divisor, then the length of the hyperbolic interval $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\mathbb{D}}$ is denoted by

$$\ell_{\mathbb{D}}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\mathbb{D}}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

The Riemann integral of a $\mathbb{D}$ -valued function defined on the interval $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\mathbb{D}}$ is defined and characterized in detail in (Luna-Elizarrarás, 2022). However, the most critical property that will be employed in this investigation is as follows:

If $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ is $\mathbb{D}$ -continuous on $[a, b]_{\mathbb{D}}$, then the function g integrable on the non-degenerate closed hyperbolic interval $[a, b]_{\mathbb{D}}$.

Within the framework of the theory of bicomplex functions, the role that the hyperbolic numbers play is quite comparable to the role that the real numbers play within the framework of the theory of complex functions. According to this point of view, it is essential to conduct research on the extension of a great deal of properties that are present in real numbers to hyperbolic numbers. Hermite-Hadamard's inequality is one of the fundamental inequalities in real numbers. In the case of the real numbers, the Hermite-Hadamard inequality can be stated as follows: Let $f: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ be a convex function, then the following Hermite-Hadamard inequality

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v f(x) dx \leq \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

holds (Pecaric & et al., 1992).

The primary issue addressed in this study is the generalization of this inequality for hyperbolic numbers. This study will present the concept of the $\mathbb{D}$ -Hermite-Hadamard inequality by developing the ideas of hyperbolic convex sets ($\mathbb{D}$ -convex sets) and hyperbolic convex functions ($\mathbb{D}$ -convex functions) while examining this novel generalized inequality.

Main Results

Definition 2.1. Let A be a non-empty subset of $\mathbb{D}$. Then the set A is a $\mathbb{D}$ -convex set if

$$\beta v + (1 - \beta)\mu \in A$$

for all $v, \mu \in A$ and $\beta \in \mathbb{D}^+$, where $0 \preceq \beta \preceq 1$.

Remark 2.2. The fact that the hyperbolic number set $\mathbb{D}$ is a ring is commonly known (see, (Luna-Elizarrarás & et al., 2015)). Therefore, the set $\mathbb{D}$ is close under addition and multiplication. This implies that the hyperbolic number set $\mathbb{D}$ is a $\mathbb{D}$ -convex set.

Proposition 2.3. Let $[u, v]_{\mathbb{D}}$ be any hyperbolic interval with $u = e_1u_1 + e_2u_2$ and $v = e_1v_1 + e_2v_2$. Then the hyperbolic interval $[u, v]_{\mathbb{D}}$ is a $\mathbb{D}$ -convex set.

Proof. Let $[u, v]_{\mathbb{D}}$ be any hyperbolic interval with $u = e_1u_1 + e_2u_2$ and $v = e_1v_1 + e_2v_2$. Let us take $a, b \in [u, v]_{\mathbb{D}}$ such that $a = e_1a_1 + e_2a_2$ and $b = e_1b_1 + e_2b_2$. By the definition of the hyperbolic interval $[u, v]_{\mathbb{D}}$, we have

$$u_1 \leq a_1 \leq v_1, u_1 \leq b_1 \leq v_1$$

and

$$u_2 \leq a_2 \leq v_2, u_2 \leq b_2 \leq v_2.$$

This means that $a_1, b_1 \in [u_1, v_1]$ and $a_2, b_2 \in [u_2, v_2]$. Consider $\beta \in \mathbb{D}^+$, where $0 \preceq \beta \preceq 1$ for $\beta = e_1\beta_1 + e_2\beta_2$. Hence, we get $0 \leq \beta_i \leq 1$ for $i = 1, 2$. Therefore, we can write

$$\begin{aligned} \beta a + (1 - \beta)b &= b + \beta(a - b) \\ &= (e_1b_1 + e_2b_2) \\ &\quad + (e_1\beta_1 + e_2\beta_2)(e_1(a_1 - b_1) + e_2(a_2 - b_2)) \\ &= e_1(\beta_1a_1 + (1 - \beta_1)b_1) \\ &\quad + e_2(\beta_2a_2 + (1 - \beta_2)b_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Given that the intervals $[u_1, v_1]$ and $[u_2, v_2]$ are convex sets in $\mathbb{R}$, it follows that

$$\beta_1a_1 + (1 - \beta_1)b_1 \in [u_1, v_1]$$

and

$$\beta_2a_2 + (1 - \beta_2)b_2 \in [u_2, v_2].$$

By using (1), we obtain $\beta a + (1 - \beta)b \in [u, v]_{\mathbb{D}}$. This indicates the intended result..

Definition 2.4. Let A be a $\mathbb{D}$ -convex subset of $\mathbb{D}$ and g be a function from A into $\mathbb{D}$. Then the function g is said to be $\mathbb{D}$ -convex function if

$$g(\beta a + (1 - \beta)b) \preceq \beta g(a) + (1 - \beta)g(b)$$

for all $a, b \in \mathbb{D}$ and $\beta \in [0, 1]_{\mathbb{D}}$.

Theorem 2.5. Let g be a $\mathbb{D}$ -convex function from $(u, v)_{\mathbb{D}}$ into $\mathbb{D}$. Then the function g is $\mathbb{D}$ -continuous on $(u, v)_{\mathbb{D}}$.

Proof. Since the function g from $(u, v)_{\mathbb{D}}$ into $\mathbb{D}$ is $\mathbb{D}$ -convex, then we write

$$g(\beta a + (1 - \beta)b) \preceq \beta g(a) + (1 - \beta)g(b) \quad (2)$$

for all $a, b \in (u, v)_{\mathbb{D}}$ and $\beta \in [0, 1]_{\mathbb{D}}$. Let us take a $c \in (u, v)_{\mathbb{D}}$. Then, we will show that the function g is $\mathbb{D}$ -continuous at the point c . There exist hyperbolic numbers $\eta_1, \eta_2 \in (u, v)_{\mathbb{D}}$ such that $\eta_1 \prec c \prec \eta_2$, where

$$\eta_2 - \eta_1, c - \eta_1, \eta_2 - c \in \mathbb{D}^+ \setminus \mathcal{S}_0.$$

By utilizing the characteristics of the partial order relation $\preceq$, we get

$$0 \prec c - \eta_1 \prec \eta_2 - \eta_1$$

and

$$0 \prec \frac{c - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \prec 1.$$

Also, we can write

$$c = \frac{c - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \eta_2 + \left(1 - \frac{c - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}\right) \eta_1.$$

By employing the $\mathbb{D}$ -convexity of the function g , as specified in (2), we can establish

$$g(c) \lesssim \frac{c - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} g(\eta_2) + \left(1 - \frac{c - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}\right) g(\eta_1). \quad (3)$$

Following that, by performing readily obvious algebraic operations, we get

$$\frac{g(c) - g(\eta_1)}{c - \eta_1} \lesssim \frac{g(\eta_2) - g(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \quad (4)$$

and

$$\frac{g(\eta_2) - g(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \lesssim \frac{g(\eta_2) - g(c)}{\eta_2 - c}. \quad (5)$$

Let us take any $\mathfrak{z} \in (\eta_1, \eta_2)_{\mathbb{D}}$. Assume without loss of generality $c > \mathfrak{z}$. As $(u, v)_{\mathbb{D}}$ is an open hyperbolic interval, there exist $\eta_0, \eta_3 \in (u, v)_{\mathbb{D}}$ such that $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3$, where

$$c - \mathfrak{z}, \eta_3 - \mathfrak{z}, \eta_3 - \eta_2, c - \eta_0, \eta_1 - \eta_0 \in \mathbb{D}^+ \setminus \mathfrak{S}_0$$

and

$$\frac{|g(\eta_3) - g(\eta_2)|_k}{\eta_3 - \eta_2}, \frac{|g(\eta_1) - g(\eta_0)|_k}{\eta_1 - \eta_0} \in \mathbb{D}^+ \setminus \mathfrak{S}_0,$$

when the hyperbolic numbers

$$\frac{|g(\eta_3) - g(\eta_2)|_k}{\eta_3 - \eta_2}$$

and

$$\frac{|g(\eta_1) - g(\eta_0)|_k}{\eta_1 - \eta_0}$$

are comparable with respect to the partial order relation $\lesssim$. Afterward, we have

$$u < \eta_0 < \eta_1 < \mathfrak{z} < c < \eta_2 < \eta_3 < v. \quad (6)$$

By using (4), (5) and (6), we obtain

$$\frac{g(\mathfrak{c}) - g(\mathfrak{z})}{\mathfrak{c} - \mathfrak{z}} \lesssim \frac{g(\mathfrak{v}_3) - g(\mathfrak{z})}{\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{z}} \lesssim \frac{g(\mathfrak{v}_3) - g(\mathfrak{v}_2)}{\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_2} \quad (7)$$

and

$$\frac{g(\mathfrak{v}_1) - g(\mathfrak{v}_0)}{\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_0} \lesssim \frac{g(\mathfrak{c}) - g(\mathfrak{v}_0)}{\mathfrak{c} - \mathfrak{v}_0} \lesssim \frac{g(\mathfrak{c}) - g(\mathfrak{z})}{\mathfrak{c} - \mathfrak{z}}. \quad (8)$$

Let us take $M = \max_{\mathbb{D}} \left\{ \frac{|g(\mathfrak{v}_3) - g(\mathfrak{v}_2)|_k}{\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_2}, \frac{|g(\mathfrak{v}_1) - g(\mathfrak{v}_0)|_k}{\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_0} \right\}$. By using (7) and (8), we get

$$\left| \frac{g(\mathfrak{c}) - g(\mathfrak{z})}{\mathfrak{c} - \mathfrak{z}} \right|_k \lesssim M.$$

Let $\epsilon > 0$ be given. According to the given ϵ number, let the hyperbolic numbers $\mathfrak{v}_1$ and $\mathfrak{v}_2$ be chosen again so that the hyperbolic numbers $\frac{\epsilon}{M}$ and $\frac{\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1}{2}$ can be compared with respect to the partial order relation $\lesssim$. Assume that $\delta = \min_{\mathbb{D}} \left\{ \frac{\epsilon}{M}, \frac{\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1}{2} \right\}$. For any

$$\mathfrak{z} \in (\mathfrak{c} - \delta, \mathfrak{c} + \delta)_{\mathbb{D}} \subset (\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)_{\mathbb{D}},$$

we determine

$$|g(\mathfrak{c}) - g(\mathfrak{z})|_k \lesssim M|\mathfrak{c} - \mathfrak{z}|_k < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Therefore, g is $\mathbb{D}$ -continuous at the point $\mathfrak{c}$. Since $\mathfrak{c}$ is an arbitrary hyperbolic number in $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})_{\mathbb{D}}$, then the function g is $\mathbb{D}$ -continuous on $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})_{\mathbb{D}}$.

Remark 2.6. Let us calculate the integrals $\int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} \beta \, d\beta$ and $\int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} (1 - \beta) \, d\beta$ using the method given in Example 4.7 in (Luna-Elizarrarás, 2022). Clearly, the functions $g(\beta) = \beta$ and $g(\beta) = 1 - \beta$ are hyperbolic valued $\mathbb{D}$ -continuous functions. We can write $0 = e_1 0 + e_2 0$ and $1 = e_1 1 + e_2 1$. Then $\varphi(t) = e_1 t + e_2 t$ and $\varphi'(t) = e_1 1 + e_2 1$, for $t \in [0,1]$. Therefore, we obtain

$$\int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} \beta d\beta = e_1 \int_0^1 t dt + e_2 \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \frac{1}{2} \quad (9)$$

and

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} (1 - \beta) d\beta &= e_1 \int_0^1 (1 - t) dt + e_2 \int_0^1 (1 - t) dt \\ &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Theorem 2.7. ($\mathbb{D}$ -Hermite-Hadamard inequality) Let $[u, v]_{\mathbb{D}}$ be a non-degenerate closed hyperbolic interval. Let g be a $\mathbb{D}$ -convex function from $[u, v]_{\mathbb{D}}$ into $\mathbb{D}$. Then the following inequalities hold

$$g\left(\frac{u + v}{2}\right) \lesssim \frac{1}{v - u} \int_{[u,v]_{\mathbb{D}}} g(x) dx \lesssim \frac{g(u) + g(v)}{2}.$$

Proof. By Theorem 2.5, we can indicate that the $\mathbb{D}$ -convex function g from $[u, v]_{\mathbb{D}}$ into $\mathbb{D}$ is $\mathbb{D}$ -continuous on $(u, v)_{\mathbb{D}}$. Therefore, according to Theorem 4.5 in (Luna-Elizarrarás, 2022), the function g is $\mathbb{D}$ -Riemann integrable on every closed subset of the open hyperbolic interval $(u, v)_{\mathbb{D}}$. The uncertainty of the continuity at the endpoints of the interval can be neglected considering that a finite number of discontinuity points makes no difference to integrability. Let $a, b \in [u, v]_{\mathbb{D}}$. Since the function g from $[u, v]_{\mathbb{D}}$ into $\mathbb{D}$ is $\mathbb{D}$ -convex, then we have

$$g(\beta a + (1 - \beta)b) \lesssim \beta g(a) + (1 - \beta)g(b) \quad (11)$$

for $\beta \in [0, 1]_{\mathbb{D}}$. Replaced $\beta = \frac{1}{2}$ into this inequality yields

$$g\left(\frac{a + b}{2}\right) \lesssim \frac{g(a) + g(b)}{2} \quad (12)$$

for all $\alpha, \mathfrak{b} \in [\mathfrak{u}, \mathfrak{v}]_{\mathbb{D}}$. In the inequality (12), if we take

$$\alpha = \beta \mathfrak{v} + (1 - \beta) \mathfrak{u}$$

and

$$\mathfrak{b} = \beta \mathfrak{u} + (1 - \beta) \mathfrak{v}.$$

Then, we get

$$g\left(\frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{2}\right) \lesssim \frac{g(\beta \mathfrak{v} + (1 - \beta) \mathfrak{u}) + g(\beta \mathfrak{u} + (1 - \beta) \mathfrak{v})}{2}.$$

Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} g\left(\frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{2}\right) d\beta \\ \lesssim \frac{1}{2} \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} g(\beta \mathfrak{v} + (1 - \beta) \mathfrak{u}) d\beta \\ + \frac{1}{2} \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} g(\beta \mathfrak{u} + (1 - \beta) \mathfrak{v}) d\beta. \end{aligned}$$

Hence, we determine

$$g\left(\frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{2}\right) \lesssim \frac{1}{\mathfrak{v} - \mathfrak{u}} \int_{[\mathfrak{u}, \mathfrak{v}]_{\mathbb{D}}} g(x) dx. \quad (13)$$

Assuming that $\alpha = \mathfrak{u}$ and $\mathfrak{b} = \mathfrak{v}$ in the inequality (11) and integrating over the interval $[0,1]_{\mathbb{D}}$, we get

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} g(\beta \mathfrak{u} + (1 - \beta) \mathfrak{v}) d\beta \\ \lesssim g(\mathfrak{u}) \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} \beta d\beta + g(\mathfrak{v}) \int_{[0,1]_{\mathbb{D}}} (1 - \beta) d\beta. \end{aligned}$$

By using (9) and (10), we obtain

$$\frac{1}{v - u} \int_{[u,v]_{\mathbb{D}}} g(x) dx \lesssim \frac{g(u) + g(v)}{2}. \quad (14)$$

Combining (12), (13) and (14), we have

$$g\left(\frac{u + v}{2}\right) \lesssim \frac{1}{v - u} \int_{[u,v]_{\mathbb{D}}} g(x) dx \lesssim \frac{g(u) + g(v)}{2}.$$

Conclusions

There are a number of important inequality in the literature, and one of them is the Hermite-Hadamard inequality. This inequality has applications in a variety of domains, including engineering, economics, and mathematics, among others, engineering. This study, which discusses the existence of a generalization of this inequality for hyperbolic numbers, will illuminate the research on the generalizability of all results and applications obtained for convex functions defined in real numbers with the assistance of this inequality for $\mathbb{D}$ -convex functions defined in hyperbolic numbers.

REFERENCES

Alpay, D., Luna-Elizarrarás, M. E. & Shapiro, M. (2016). Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1–21.

Alpay D., Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M. & Struppa, D. C. (2014). *Basics of functional analysis with bicomplex scalars, and bicomplex Schur analysis*. Springer Science & Business Media.

Balankin, A. S., Bory-Reyes, J., Luna-Elizarrarás, M. E. & Shapiro, M. (2016). Cantor-type sets in hyperbolic numbers. *Fractals*, 24 (4), 1–12.

Datta, S. K., Ghosh, C. & Saha, J. (2020). On the ring of hyperbolic valued functions. *Ganita*, 70 (2), 175-184.

Ghosh, C., Bandyopadhyay, A. & Mondal, S. (2021). Hyperbolic valued metric space. *arXiv preprint*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.07100>.

Luna-Elizarrarás, M. E. (2022). Integration of functions of a hyperbolic variable. *Complex Analysis and Operator Theory*, 16 (3), 1-21.

Luna-Elizarraras M. E., Shapiro M, Struppa, D. C. & Vajiac, A. (2015). *Bicomplex holomorphic functions: The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers*. Basel: Frontiers in Mathematics, Birkhauser.

Pecaric, E., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*, Academic Press.

Saini, H., Sharma, A., & Kumar, R. (2020). Some fundamental theorems of functional analysis with bicomplex and hyperbolic scalars, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30, 1–23.

Shapiro, M., Struppa, D. C., Vajiac, A., & Vajiac, M. B.
(2012). Hyperbolic numbers and their functions, *Anal. Univ. Oradea*, 19 (1), 265–283.

BÖLÜM 2

Invariant Submanifolds of Almost Bronze Riemannian Manifolds

Mustafa GÖK¹

Introduction

B. Şahin (Şahin, 2018) defined and studied poly-Norden structures on (semi-)Riemannian manifolds. In the Riemannian setting, S. Y. Perктаş (Perктаş, 2020) gave the fundamental properties of submanifolds endowed with Σ -almost poly-Norden Riemannian structures and investigated invariant and anti-invariant submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds. M. Özkan and S. Doğan (Özkan & Doğan, 2022) introduced almost bronze structures on Riemannian manifolds by as a particular case of poly-Norden structures and analyzed the parallelism and integrability conditions of such a structure. M. Gök and E. Kılıç (Gök & Kılıç, 2024) examined non-invariant submanifolds of almost bronze Riemannian manifolds. Moreover, Ç. Karaman and Z. Topuz (Karaman & Topuz, 2020) explored the holomorphicity of almost poly-Norden semi-Riemannian manifolds.

¹Associate Professor, National Defence University, Turkish Military Academy, 06420 Ankara, Turkey, Orcid: 0000-0001-6346-0758, mustafa.gok@email.com

This paper deals with invariant submanifolds of almost bronze Riemannian manifolds. We find an equivalent condition for a submanifold in almost bronze Riemannian manifolds to be invariant. In the case that the ambient manifold is a bronze Riemannian manifold, we get two results for a submanifold to be both invariant and totally geodesic. We also give a sufficient condition that a totally umbilical invariant submanifold of a bronze Riemannian manifold to be totally geodesic.

Preliminaries

A polynomial structure $\tilde{\theta}$ of degree 2 on a differentiable manifold $\tilde{M}$ is named a poly-Norden structure if it verifies the equation

$$\tilde{\theta}^2 = m\tilde{\theta} - I, \quad (1)$$

where m is an arbitrary real number and I is the identity transformation on $\tilde{M}$. It follows that the characteristic values of $\tilde{\theta}$ are B_m and $m - B_m$, where B_m is the Bronze mean, i.e., $B_m = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$. Also, the inverse of $\tilde{\theta}$, denoted by $\tilde{\theta}^{-1}$, is given by

$$\tilde{\theta}^{-1} = -\tilde{\theta} + mI. \quad (2)$$

For this reason, it is understood that $\tilde{\theta}^{-1}$ is not a poly-Norden structure. Additionally, if there is a semi-Riemannian metric $\tilde{g}$ such that

$$\tilde{g}(\tilde{\theta}U, V) = \tilde{g}(U, \tilde{\theta}V), \quad (3)$$

or equivalently

$$\tilde{g}(\tilde{\theta}U, \tilde{\theta}V) = m\tilde{g}(\tilde{\theta}U, V) - \tilde{g}(U, V) \quad (4)$$

for all $U, V \in \Gamma(T\tilde{M})$, then the pair $(\tilde{g}, \tilde{\theta})$ is termed an almost poly-Norden semi-Riemannian structure and the triple $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$ is said to be an almost poly-Norden semi-Riemannian manifold. Particularly, if $\tilde{\nabla}\tilde{\theta} = 0$, then $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$ is named a poly-Norden

semi-Riemannian manifold (Şahin, 2018). In the Riemannian setting, if $m^2 < 4$, then $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$ is referred to as an almost bronze Riemannian manifold (Özkan & Doğan, 2022).

We consider an n -dimensional submanifold M of codimension k , isometrically immersed in an almost poly-Norden Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$. In this situation, the tangent space $T_x \tilde{M}$ of $\tilde{M}$ at a point $x \in M$ is given by

$$T_x \tilde{M} = T_x M \oplus T_x M^\perp, \quad (5)$$

where $T_x M$ and $T_x M^\perp$ are the tangent and normal spaces of M at x , respectively. The induced Riemannian metric g on M is defined by

$$g = i_* \tilde{g}, \quad (6)$$

where i_* denotes the differential of the immersion $i: M \rightarrow \tilde{M}$. We also denote by TM and $TM^\perp$ the tangent and normal bundles of M , respectively.

Let $\{N_1, \dots, N_k\}$ be a local orthonormal frame of $TM^\perp$. Then we have the following decompositions:

$$\tilde{\theta}(i_* U) = i_*(\theta(U)) + \sum_{\lambda=1}^k v_\lambda(U) N_\lambda \quad (7)$$

and

$$\tilde{\theta} N_\lambda = i_*(\zeta_\lambda) + \sum_{\mu=1}^k \theta_{\lambda\mu} N_\mu, \quad (8)$$

respectively, where U is an arbitrary tangent vector field on M , θ is a tensor field of type (1,1) on M , ζ_λ 's are tangent vector fields on M , v_λ 's are 1-forms on M and $[\theta_{\lambda\mu}]$ is a matrix of type $k \times k$ of real functions on M . Therefore, we get a structure $\Sigma = (\theta, g, v_\lambda, \zeta_\lambda, [\theta_{\lambda\mu}]_{k \times k})$ on M induced by $\tilde{\theta}$. Such a structure is named a Σ -almost poly-Norden Riemannian structure on M .

Denoting by $\tilde{\nabla}$ the Levi-Civita connection on $\tilde{M}$, the Gauss and Weingarten formulas of M in $\tilde{M}$ are given, respectively, by

$$\tilde{\nabla}_{i_*U} i_*V = i_*\nabla_U V + \sum_{\lambda=1}^k h_\lambda(U, V)N_\lambda \quad (9)$$

and

$$\tilde{\nabla}_{i_*U} N_\lambda = -i_*A_\lambda U + \sum_{\mu=1}^k \sigma_{\lambda\mu}(U)N_\mu \quad (10)$$

for all $U, V \in \Gamma(TM)$, where ∇ stands for the induced connection on M , h_λ 's are the second fundamental tensors associated to N_λ 's, i.e., $h(U, V) = \sum_{\lambda=1}^k h_\lambda(U, V)N_\lambda$, A_λ 's are the Weingarten endomorphisms in the direction of N_λ 's and $\sigma_{\lambda\mu}$'s are the 1-forms on M associated to the normal connection $\nabla^\perp$, i.e., $\nabla_U^\perp N_\lambda = \sum_{\mu=1}^k \sigma_{\lambda\mu}(U)N_\mu$.

Moreover, if $h = 0$, or equivalently $h_\lambda = 0$ for all $\lambda \in \{1, \dots, k\}$, then M is said to be a totally geodesic submanifold; if $H = 0$, then M is called a minimal submanifold; if $h(U, V) = g(U, V)H$ for all $U, V \in \Gamma(TM)$, then M is termed a totally umbilical submanifold, where H denotes the mean curvature vector of M (Yano & Kon, 1984).

Finally, we give a brief review of invariant submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds. For more information, we refer the reader to (Perktaş, 2020).

Any isometrically immersed submanifold M of an almost poly-Norden Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$ is called invariant if

$$\tilde{\theta}(T_x M) \subseteq T_x M \quad (11)$$

for each point $x \in M$. Thus, it is seen that $\tilde{\theta}(T_x M^\perp) \subseteq T_x M^\perp$ for each point $x \in M$.

Let $\Sigma = (\theta, g, v_\lambda, \zeta_\lambda, [\theta_{\lambda\mu}]_{k \times k})$ be the Σ -almost poly-Norden Riemannian structure on an n -dimensional invariant submanifold (M, g) of an $(n + k)$ -dimensional almost poly-Norden Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$. Then we have $\zeta_\lambda = 0$, or equivalently $v_\lambda = 0$, for all $\lambda \in \{1, \dots, k\}$. For the reason, (7) and (8) are given by

$$\tilde{\theta}(i_*U) = i_*(\theta(U)) \quad (12)$$

and

$$\tilde{\theta}(N_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^k \theta_{\lambda\mu} N_\mu, \quad (13)$$

respectively. Also, we have the following expressions:

$$\theta^2 U = m\theta U - U, \quad (14)$$

$$\theta_{\lambda\mu} = \theta_{\mu\lambda}, \quad (15)$$

$$\sum_{\nu=1}^k \theta_{\lambda\nu} \theta_{\mu\nu} = m\theta_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu}, \quad (16)$$

$$g(\theta U, V) = g(U, \theta V) \quad (17)$$

and

$$g(\theta U, \theta V) = mg(\theta U, V) - g(U, V) \quad (18)$$

for all $U, V \in \Gamma(TM)$, where $\delta_{\lambda\mu}$ denotes the Kronecker delta. Moreover, if $\tilde{\nabla} \tilde{\theta} = 0$, i.e., $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$ is a poly-Norden Riemannian manifold, then the expressions below are satisfied:

$$\nabla \theta = 0, \quad (19)$$

$$h_\lambda(U, \theta V) - \sum_{\mu=1}^k h_\mu(U, V) \theta_{\lambda\mu} = 0, \quad (20)$$

$$\theta(A_\lambda U) - \sum_{\mu=1}^k \theta_{\lambda\mu} A_\mu U = 0 \quad (21)$$

and

$$U(\theta_{\lambda\mu}) + \sum_{\nu=1}^k \theta_{\lambda\nu} \sigma_{\nu\mu}(U) + \sum_{\nu=1}^k \theta_{\mu\nu} \sigma_{\nu\lambda}(U) = 0 \quad (22)$$

for all $U, V \in \Gamma(TM)$.

Main Results

From now on, unless otherwise stated, we assume that the ambient manifold is an almost poly-Norden Riemannian manifold with $m^2 < 4$, i.e., an almost bronze Riemannian manifold. Besides, a bronze Riemannian manifold means that the covariant derivative of the poly-Norden structure of the ambient manifold vanishes identically.

Theorem 1. Let M be an n -dimensional submanifold of codimension k , isometrically immersed in an almost bronze Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$. Then M is an invariant submanifold if and only if the set consisting of characteristic vectors of the almost bronze structure $\tilde{\theta}$ is a local orthonormal frame for the normal bundle $TM^\perp$.

Proof. We consider a suitable map of a local orthonormal frame $\{N_1, \dots, N_k\}$ of $TM^\perp$ to another one $\{N'_1, \dots, N'_k\}$ such that $N'_\lambda = \sum_{\gamma=1}^k a_\lambda^\gamma N_\gamma$, $\zeta'_\lambda = \sum_{\gamma=1}^k a_\lambda^\gamma \zeta_\gamma$ and $\theta'_{\lambda\mu} = \sum_{\gamma=1}^k \sum_{\nu=1}^k a_\lambda^\gamma \theta_{\gamma\nu} a_\mu^\nu$, where $[a_\lambda^\gamma]$ is an orthogonal matrix of type $k \times k$. For more details, see (Adati, 1981). Thus, $\theta_{\lambda\mu}$ can be transformed into $\theta'_{\lambda\mu} = B_\lambda \delta_{\lambda\mu}$, where B_λ 's denote the characteristic values of $[\theta_{\lambda\mu}]_{k \times k}$ for all $\lambda, \mu \in \{1, \dots, k\}$.

We assume that M is an invariant submanifold. In this case, $\zeta'_\lambda = 0$ for all $\lambda \in \{1, \dots, k\}$. From (13), we obtain

$$\tilde{\theta}(N'_\lambda) = B_\lambda N'_\lambda, \lambda = 1, \dots, k, \quad (23)$$

which implies that N'_λ 's are characteristic vectors of $\tilde{\theta}$. Conversely, if $\tilde{\theta}(N'_\lambda) = B_\lambda N'_\lambda$ for all $\lambda \in \{1, \dots, k\}$, then it follows from (8) that

$$\zeta'_\lambda = 0, \lambda = 1, \dots, k, \quad (24)$$

which ends the proof.

Theorem 2. Let M be an n -dimensional submanifold of codimension k , isometrically immersed in a bronze Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$. Then M is a totally geodesic invariant submanifold if two statements hold below:

- a) The tangent vector fields ζ_λ 's of M are characteristic vectors of the almost bronze structure $\tilde{\theta}$ with regard to the characteristic value B_m , i.e., $\tilde{\theta} i_* = B_m i_*$,
- b) The normal vector fields N_λ 's of M are characteristic vectors of the almost bronze structure $\tilde{\theta}$ with regard to the characteristic value $m - B_m$, i.e., $\tilde{\theta} N_\lambda = (m - B_m) N_\lambda$.

Proof. It follows from (a) and (b) that M is an invariant submanifold. By considering (7) and (8), (a) and (b) also imply that

$$\theta = B_m I \quad (25)$$

and

$$\theta_{\lambda\mu} = (m - B_m) \delta_{\lambda\mu}, \lambda, \mu \in \{1, \dots, k\}, \quad (26)$$

respectively. Hence, by a direct computation, it results from (20) that $h_\lambda = 0$ for all $\lambda \in \{1, \dots, k\}$, i.e., M is a totally geodesic submanifold.

Theorem 3. Let M be an n -dimensional submanifold of codimension k , isometrically immersed in a bronze Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$. Then M is a totally geodesic invariant submanifold if two statements below are true:

- a) The tangent vector fields ζ_λ 's of M are characteristic vectors of the almost bronze structure $\tilde{\theta}$ with regard to the characteristic value $m - B_m$, i.e., $\tilde{\theta} i_* = (m - B_m) i_*$,

- b) The normal vector fields N_λ 's of M are characteristic vectors of the almost bronze structure $\tilde{\theta}$ with regard to the characteristic value B_m , i.e., $\tilde{\theta} N_\lambda = B_m N_\lambda$.

Proof. The proof can be demonstrated by an argument similar to that of Theorem 2.

Theorem 4. Let M be an n -dimensional totally umbilical invariant submanifold of codimension k in a bronze Riemannian manifold $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\theta})$. Then M is a totally geodesic submanifold if

$$\{trace(\theta)\}^2 \neq n\{-n + trace(\theta)m\}. \quad (27)$$

Proof. We consider an orthonormal basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ of $T_x M$ at a point $x \in M$. Since M is a totally umbilical submanifold, h_λ 's can be written in the forms $h_\lambda = \rho_\lambda g$, where ρ_λ 's are constants for all $\lambda \in \{1, \dots, k\}$. Thus, it follows from (20) that

$$\rho_\lambda g(U, \theta V) = \sum_{\mu=1}^k \theta_{\mu\lambda} \rho_\mu g(U, V) \quad (28)$$

for all $U, V \in \Gamma(TM)$. Taking $U_x = V_x = e_i$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$ at x in (28), then we get

$$\rho_\lambda g(e_i, \theta e_i) = g(e_i, e_i) \sum_{\mu=1}^k \theta_{\mu\lambda} \rho_\mu. \quad (29)$$

Summing over i in (29), we have

$$trace(\theta) \rho_\lambda = n \sum_{\mu=1}^k \theta_{\mu\lambda} \rho_\mu. \quad (30)$$

Multiplying (30) by $\theta_{\mu\lambda}$ and then summing over λ , we obtain

$$trace(\theta) \sum_{\lambda=1}^k \theta_{\mu\lambda} \rho_\lambda = n \sum_{\nu=1}^k \sum_{\lambda=1}^k \theta_{\mu\lambda} \theta_{\lambda\nu} \rho_\nu. \quad (31)$$

By means of (16), (31) can be expressed by

$$\text{trace}(\theta) \sum_{\lambda=1}^k \theta_{\mu\lambda} \rho_{\lambda} = -n\rho_{\mu} + nm \sum_{\nu=1}^k \theta_{\mu\nu} \rho_{\nu}, \quad (32)$$

which implies that

$$\rho_{\mu} = -\frac{1}{n}(\text{trace}(\theta) - nm) \sum_{\lambda=1}^k \theta_{\mu\lambda} \rho_{\lambda}. \quad (33)$$

Replacing (16) into (30), we derive

$$\{\text{trace}(\theta)(\text{trace}(\theta) - nm) + n^2\} \sum_{\mu=1}^k \theta_{\lambda\mu} \rho_{\mu} = 0. \quad (34)$$

By (27), we get from (34) that

$$\sum_{\mu=1}^k \theta_{\lambda\mu} \rho_{\mu} = 0. \quad (35)$$

Hence, from (33), we have

$$\rho_{\mu} = 0, \mu = 1, \dots, k, \quad (36)$$

which means that M is a totally geodesic submanifold.

References

- Adati, T. (1981). Submanifolds of an almost product Riemannian manifold. *Kodai Mathematical Journal*, 4(2), 327-343.
- Gök, M., & Kılıç, E. (2024). Non-invariant submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds. *Journal of Science and Arts*, 24(3), 453-464.
- Karaman, Ç., & Topuz, Z. (2020). On holomorphic poly-Norden manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1388-1400.
- Özkan, M., & Doğan, S. (2022). Almost bronze structures on differentiable manifolds. *Journal of Mathematics*, 2022, 6940387.
- Perktaş, S. Y. (2020). Submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(1), 31-49.
- Şahin, B. (2018). Almost poly-Norden manifolds. *International Journal of Maps in Mathematics*, 1(1), 68-79.
- Yano, K., & Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*. Singapore: World Scientific.

RİCCİ SOLİTONA SAHİP α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI SONUÇLAR

BÖLÜM 3

Hakan ÖZTÜRK¹, Orçun ÇELİK²

Giriş

Simetrik uzaylar, geometrinin zarif ve oldukça derin yapıtaşlarından biridir. Riemann manifoldlarının bu özel alt sınıfı, matematiğin farklı alanlarında karşımıza çıkan sayısız örneği ihtiva eder. Kompakt Lie gruplarının dengeli dokusu, Grassmann manifoldlarının geniş perspektifi ve sınırlı simetrik bölgelerin uyumlu yapısı gibi... Her simetrik uzay, tıpkı bir sanat eseri gibi kendine has geometrik bir kimlik taşır. Kimi Öklid'in katıksız düzenini yansıtır, kimi eliptik geometrinin kıvrımlı zarafetini, kimi de hiperbolik dünyanın genişleyen büyüsünü gösterir. Dahası, bu uzaylar sadece güzel örnekler değil, aynı zamanda güçlü teorik yapılar sunar. Bir yandan paralel eğrilik tensörüyle donanmış Lie grupları olarak karşımıza çıkarken, diğer yandan her noktasında yansıma simetrisi barındıran geometrik mekânlar olarak da düşünülebilirler. Simetrinin bu denli merkezde olduğu bir dünyada, her bakış açısı yeni bir keşif kapısı aralayabilir.

Matematiksel geometrinin ilgi çekici bir konusu olan yarı simetrik uzaylar, temelde lokal simetrik uzay kavramının daha esnek bir versiyonu olarak düşünülebilir. Bir Riemann manifoldu (M, g) nin yarı-simetrik olarak nitelendirilebilmesi için, manifold üzerinde tanımlı herhangi X ve Y vektör alanlarına karşılık, $R(X, Y) \cdot R = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu denklemde R eğrilik tensörü, bir cebirsel operatör gibi davranarak uzayın geometrik yapısını kodlar. Bu tür uzaylara yarı-simetrik denilmesinin nedeni, herhangi bir q noktasında manifoldun eğrilik tensörünün, klasik simetrik uzaylardaki eğrilik tensörüyle örtüşebilmesidir. Ancak bu uyum, noktadan noktaya değişiklik gösterebilen bir özelliktir. Lokal simetrik uzaylar ise daha katı bir simetri koşulu getirir, yani; $\nabla R = 0$ ile tanımlıdır. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonunu temsil eder ve bu koşul, eğrilik tensörünün manifold boyunca sabit kaldığını ifade eder. Bu tür uzaylar, matematiksel fiziğin yanı sıra sayılar teorisi ve cebirsel geometri gibi çeşitli alanlarda doğal olarak ortaya çıkarlar. Yarı-simetrik uzaylar, eğriliğin cebirsel davranışına bir kısıtlama getirirken; lokal simetrik uzaylar, eğriliğin uzayda nasıl değiştiğine (diferensiyel yapısına) bir kısıtlama getirir. Yarı-simetri cebirsel ve lokal simetri ise diferensiyel geometrik bir gerekliliktir.

Matematik literatüründe yarı-simetrik uzayların sistematik sınıflandırması, Szabó'nun 1982 yılındaki çalışmasıyla yeni bir boyut kazandı (Szabó, 1982). Ancak bu alandaki ilk kıvılcım, Nomizu'nun 1968 yılında tanımladığı ve günümüzde onun adıyla anılan $R \cdot R = 0$ koşulunda saklıdır (Nomizu, 1968).

Enteresan bir gelişme olarak, $n > 3$ boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında yer alan tam bağlantılı yarı simetrik hiperyüzeylerde, $R \cdot R = 0$ koşulunun beklenmedik bir şekilde $\nabla R = 0$ lokal simetri koşulunu gerektirdiği ortaya çıktı. Bu durum, cebirsel bir özelliğin diferensiyel geometrik bir sonuca yol açmasının çarpıcı bir örneğini teşkil etmektedir. Kaehler geometrisi bağlamında Ogawa, kompakt yapılar söz konusu olduğunda yarı-simetrik olmanın doğrudan lokal simetrik olmayı beraberinde getirdiğini kanıtladı (Ogawa, 1977). Daha şaşırtıcı olan ise Tanno'nun 1969 yılındaki çalışmasıydı. K -değme manifoldlar üzerinde tam yarı-simetrik veya Ricci yarı-simetrik yapıların bulunamayacağını kesin bir şekilde gösterdi. Bu sonuç, söz konusu manifoldların simetri özellikleri açısından sergilediği özgün davranışın matematiksel bir ifadesini yansıtmaktaydı (Tanno, 1969).

¹ Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, hakser23@gmail.com

² Y. Lisans Öğr., Afyon Kocatepe Üniv., Fen Bil. Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, orcuncelik27@icloud.com

Kenmotsu manifoldları, değme geometrisinin önemli bir alt sınıfını oluşturan, hemen hemen değme metrik manifoldların özel bir türüdür (Kenmotsu, 1972). Temel olarak, bir Kenmotsu manifoldu (M, ϕ, ξ, η, g) değme yapısıyla ifade edilir. Burada η , 1-form ξ , bir karakteristik vektör alanı, ϕ bir (1,1)-tipinde tensör alanı ve g ise uyumlu bir Riemann metrik tensörüdür. Bu yapılar, $\eta \wedge d\eta = 0$ koşulunu sağlamaz (yani, değme yapı tam değildir) ve bu nedenle klasik Sasakian manifoldlarından ayrışır. Bu manifoldların temel karakterizasyonu, Levi-Civita konneksiyonu ∇ cinsinden ifade edilen $\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi$ denkleminde saklıdır. Bu özdeşlik, manifoldun geometrik dokusuna dair önemli ipuçları verir. Aslında, her Kenmotsu manifoldu lokal olarak, tabanı bir N Kaehler manifoldu olan ve üstel katlı fonksiyonu e^t ile deforme edilmiş bir katlı çarpım $\mathbb{R} \times N$ olarak görülebilir. Bu özel yapı, Kenmotsu manifoldlarını hem teorik açıdan zengin hem de uygulamalara elverişli kılar. Katlı çarpım yapısı, manifoldun hem yerel hem de global geometrik özelliklerini analiz etmede güçlü bir araçtır. Burada yapının Sasakian olmama özelliği ayrı bir matematiksel anlam kazandırır (De & Pathak, 2004), (Jun & ark., 2005), (Dileo & Pastore, 2007). Daha sonra, Janssens ve Vanhecke klasik Kenmotsu yapılarını α parametresiyle genelleştirerek hemen hemen α -Kenmotsu manifoldlar kavramını geometri literatürüne kazandırmıştır (Janssens & Vanhecke, 1981). Daha sonraki yıllarda, Kim ve Pak bu gelişmeyi bir adım öteye taşıyarak, hemen hemen α -Kenmotsu yapıları ile hemen hemen kosimplektik yapıları sentezleyen yeni bir sınıf tanımlamışlardır (Kim & Pak, 2005). Hemen hemen α -kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılan bu yapılar, hemen hemen değme metrik manifoldlar ailesinin önemli bir alt sınıfını oluşturmaktadır. Bu sentez, geometrik yapıların sınıflandırılmasına yeni bir boyut kazandırmıştır.

Matematiksel fizik ve diferensiyel geometrinin kesişiminde yer alan Ricci akışı, Riemann manifoldlarındaki metrik yapının zamana bağlı evrimini modelleyen güçlü bir araç olarak karşımıza çıkmıştır. Richard Hamilton'ın 1982 yılındaki öncü çalışmasıyla matematik dünyasına kazandırılan bu yöntem, topolojinin en zorlu problemlerinden biri olan Poincaré hipotezine giden yolu açmıştır (Hamilton, 1982). Hamilton'un 1988 yılında yüzeyler üzerindeki Ricci akışını detaylıca incelemesi, sürecin temel özelliklerini ortaya çıkarmıştır (Hamilton, 1988). Ancak bu çalışmalar, akış sırasında ortaya çıkan ve eğriliğin sonsuza ıraksadığı metrik tekilliklerin varlığını da göstermiştir. Bu kritik engel, "cerrahi operasyonlar" adı verilen ve manifoldun tekillik bölgelerinin kontrollü bir şekilde çıkarılmasını sağlayan yenilikçi tekniklerin geliştirilmesini gerektirmiştir. Grigori Perelman'ın 2002 yılındaki çığır açıcı çalışması, 3-boyutlu manifoldlarda Ricci akışının tekilliklerini sistematik olarak sınıflandırarak bu sorunu aşmayı başarmıştır (Perelman, 2002). Perelman'ın geliştirdiği entropi tabanlı yaklaşım, akışın tekilliklerden arındırılmasını sağlamış ve nihayetinde Poincaré hipotezinin ispatlanmasıyla sonuçlanmıştır. Bu başarı, modern geometri analizinde Ricci akışının merkezi önemini pekiştirmiş ve matematik tarihinde yeni bir dönüm noktası oluşturmuştur.

Ricci akışı, bir manifoldun eğrilik özelliklerini evrimleştirerek daha düzenli bir geometrik yapıya ulaşmayı amaçlayan dinamik bir süreçtir. Temel prensibi, metrik tensörün zamana bağlı değişiminin, manifoldun eğrilik dağılımını optimize etmesi ve böylece topolojik karakteristikleri ortaya çıkarmasıdır. Bu mekanizma, termodinamikteki ısı denklemine benzer şekilde çalışır: Nasıl ki, ısı akışı sıcaklık gradyanlarını dengeliyorsa, Ricci akışı da eğrilik heterojenliklerini zamanla homojenleştirir. Bu süreçte ortaya çıkan Ricci solitonlar, akışın öz-benzer çözümleridir ve metrik tekilliklerin oluşum süreçlerine ışık tutar. Matematiksel olarak, bu yapılar Einstein manifoldlarının genelleştirilmiş halleri olarak düşünülebilir. Literatürde, quasi-Einstein olarak adlandırılan bu solitonlar, özellikle genel görelilik ve kuantum alan teorisi gibi fiziksel teorilerde önem taşır. Ricci solitonların varlığı, hem geometrik evrimin kritik noktalarını yansıtır hem de manifoldların sabit eğrilikli yapılara nasıl yakınsayabileceğine dair ipuçları verir. Bu nedenlerden dolayı, Ricci solitonlar konusu önemli bir araştırma alanı olarak görülmüştür (Yadav & Öztürk, 2019), (Öztürk & Yadav, 2023), (Öztürk & Bektaş, 2023), (Öztürk, 2024).

Bu çalışmada, bazı tensör özellikleri ve eğrilik tensör alanları yardımıyla α -kosimplektik manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir. Özellikle, Ricci yarı-simetrik, projektif yarı-

simetrik, konsirküler yarı-simetrik, projektif ve konsirküler flat ve global ϕ -simetrik özelliklerini sağlayan Ricci solitonlu α -kosimplektik manifoldlar araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçları geçerli kılan 3-boyutlu bir Ricci solitonlu α -kosimplektik manifold örneği inşa edilmiştir.

Temel Kavramlar

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir manifold M olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için; ϕ , $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η 1-form olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad (1)$$

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \phi = 0 \quad (2)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3)$$

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (4)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (5)$$

denklemlerini sağlayan g metriği ile donatılmış (M, ϕ, ξ, η, g) ye bir hemen hemen değme metrik manifold denir, burada $g(\xi, \xi) = 1$ dir. Bir hemen hemen değme metrik manifoldun temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (6)$$

ile tanımlıdır (Blair, 1976). R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (7)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, n -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde $(0,2)$ -tipli Ricci tensörü ve Ricci operatörü

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^n g(R(E_j, X)Y, E_j) \quad (8)$$

ve

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (9)$$

ile tanımlıdır. Burada $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal bir bazdır (Yano & Kon, 1984).

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold M (ϕ, ξ, η) -yapısı ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünersek, her vektör alanı X için, $(X, f \frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (10)$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer J integrallenebilir ise hemen hemen değme metrik (ϕ, ξ, η) -yapısının normal olduğu açıktır. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad (11)$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). Bir hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g)

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 0 \quad (12)$$

şartlarını sağlıyorsa M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir. M nin bir kosimplektik

manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Olszak, 1981). Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (13)$$

denklemleri sağlanıyorsa, M ye bir hemen hemen α -Kenmotsu manifold denir (Janssens & Vanhecke, 1981). Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1972). (M, ϕ, ξ, η, g) normal ise o zaman α -Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

(M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, (13) denklemleri sağlanıyorsa, M ye hemen hemen α -kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik manifold, $\alpha \neq 0$ için hemen hemen α -Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Eğer hemen hemen değme metrik yapı (M, ϕ, ξ, η, g) Kaehler yapıya sahipse α reel sayısı için M ye α -kosimplektik manifold denir. Yani, $\alpha = 0$ için (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ için α -Kenmotsu olarak adlandırılır (Kim & Pak, 2005).

Önerme 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen α -kosimplektik manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, M nin bir α -kosimplektik manifoldu olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \quad (14)$$

eşitliğinin sağlamasıdır (Öztürk, 2021).

Önerme 2. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -kosimplektik manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha\eta(X)\xi \quad (15)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] \quad (16)$$

$$R(X, Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (17)$$

$$R(X, \xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \quad (18)$$

$$R(X, \xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \quad (19)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)] \quad (20)$$

$$S(X, \xi) = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\eta(X) \quad (21)$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \quad (22)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))S(X, Y) + 2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X)\eta(Y) \quad (23)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Tanım 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\bar{C}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (24)$$

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (25)$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ -tipli $\bar{C}$ ve P tensör alanlarına sırasıyla, konsirküler ve projektif eğrilik tensör alanları denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = \mu_1 g(X, Y) + \mu_2 \eta(X) \eta(Y) \quad (26)$$

koşulu sağlanıyorsa, M ye bir η -Einstein manifoldu denir, burada μ_1 ve μ_2 , M üzerindeki keyfi fonksiyonlardır. Özel olarak, $\mu_2 = 0$ alındığında M bir Einstein manifoldu olur (Blair, 1976).

α -Kosimplektik Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar

Bu bölümde temel sonuçlar bölümünde kullanılacak temel kavramlar ve temel eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 3. (M, g_0) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Aşağıda verilen kısmi türevli diferensiyel denkleme g metrik tensörünü değiştiren Ricci akışı denir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(t)) + 2S(g(t)) = 0, \quad g(0) = g_0 \quad (27)$$

(Hamilton, 1982). Burada t zaman parametresidir.

Ricci akışı, Grigori Perelman'ın 2002 yılında Poincaré Sanısı'nı çözmedeki kritik rolüyle matematik tarihine geçen olağanüstü bir araçtır. Temelde, bir manifoldun metrik yapısının zaman içindeki evrimini yöneten bir kısmi diferansiyel denklem olarak görülebilir. Yani, bu akış tıpkı bir heykeltıraşın mermeri şekillendirmesi gibi, uzayın geometrisini Ricci eğriliğine göre yeniden biçimlendirir. Bu denklem, g metrik tensörünün zamana bağlı değişimini, manifoldun eğrilik özelliklerine göre düzenler. Sürecin temel felsefesi, uzayın pürüzlü eğrilik dağılımını adeta bir ütü gibi düzleştirmektir. İlginç olan, bu düzleşme sürecinin eğriliğin işaretine göre farklı davranmasıdır. Pozitif eğrilikli bölgeler (küresel yapılar) zamanla büzülür (küçülür), tıpkı sıcak havayla temas eden bir balonun küçülmesi gibi. Diğer yandan, negatif eğrilikli bölgeler (hiperbolik yapılar) zamanla genişler (büyür) tıpkı bir kâğıdın buruşukluklarının açılmasında olduğu gibi.

Ricci akışı teorisinde özel bir yere sahip olan Ricci solitonları, bu dinamik sürecin sabit formu çözümleridir. Örnek olarak, okyanusta şeklini koruyarak ilerleyen bir dalga gibi, Ricci solitonları da akış boyunca temel geometrik karakterini muhafaza eder. Yani, ya tamamen değişmez kalır ya da yalnızca ölçek değişikliğine uğrar. Bu yapılar, Ricci akışının uzun vadeli davranışını analiz etmede kilit rol oynar. Soliton terimi, ilk olarak dalga mekaniğinde kendini koruyan lokalize çözümleri tanımlamak için kullanılmıştır. Geometrik manası ise, bir Ricci solitonu metrik tensörün Ricci akışı altındaki öz-benzerlik özelliğini yansıttığıdır. Bu durum, akışın zaman evriminde adeta bir dengeli sabit nokta gibi davranan özel metrik konfigürasyonlar sunar.

Tanım 4. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfi vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (28)$$

denklemini sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ değerinin $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 5. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (29)$$

dır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 6. (M, g, V, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı Killing vektör alanı ($L_V g = 0$) ise o zaman (M, g, V, λ) ye basit Ricci soliton adı verilir (Chen 2015).

Tanım 7. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -kosimplektik manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa, (M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu α -kosimplektik manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 3. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu α -kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (30)$$

denklemini sağlar. Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 4. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu α -kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \quad (31)$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \quad (32)$$

$$Q\xi = -\lambda\xi \quad (33)$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \quad (34)$$

$$r = \alpha - (2n + 1)(\alpha + \lambda). \quad (35)$$

Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Temel Sonuçlar

Bu bölümde, Ricci yarı-simetrik, projektif yarı-simetrik, konsirküler yarı-simetrik, projektif ve konsirküler flat ve global ϕ -simetrik tensör alanları yardımıyla Ricci solitonlu α -kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M Ricci yarı-simetrik ise o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $\alpha = 0$ durumunda M de basit sabit Ricci soliton mevcuttur,

(ii) $\alpha \neq 0$ durumunda M de Ricci soliton daima genişleyendir.

İspat. Öztürk (2017) deki ispat metodolojisine göre, keyfi vektör alanları için, $\alpha \neq 0$ olmak üzere, $R \cdot S = 0$ tensörel çarpımın tanımından

$$R(Y, \xi)S(W, X) = S(R(Y, \xi)W, X) + S(W, R(Y, \xi)X) \quad (36)$$

şeklinde yazılır. (36) denklemini $X = \xi$ ve $\xi(\alpha) = 0$ eşitlikleri yardımıyla,

$$S(Y, W) = \eta(Y)S(W, \xi) - \eta(W)S(Y, \xi) + g(Y, W)S(\xi, \xi) \quad (37)$$

haline dönüşür. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (37) eşitliği

$$[2n\alpha^4 g(Y, W) + \alpha^2 S(Y, W)] = 0 \quad (38)$$

formuna indirgenir. Burada $\alpha^2 > 0$ dır. O halde, (38) eşitliğinden

$$S(Y, W) = -2n\alpha^2 g(Y, W) \quad (39)$$

elde edilir. Yani, bir Ricci yarı-simetrik α -Kenmotsu manifoldu Einstein yapıdadır. Şimdi, M üzerinde Ricci solitonu inceleyelim. (31), (34) ve (39) eşitlikleri $Y = W = \xi$ için birlikte hesaba katılırsa,

$$\lambda = 2n\alpha^2 \quad (40)$$

elde edilir. O halde, $\alpha \neq 0$ olmak üzere, $\nabla_{\xi}\alpha = 0$ olduğundan α değeri ξ boyunca sabittir. Başka bir ifadeyle, $\alpha^2 > 0$ olduğundan λ değeri daima pozitifdir. Diğer yandan $\alpha = 0$ için $\lambda = 0$ olacaktır. Ancak, Ricci soliton tanımında kullanılan iki operatörde özdeş olarak sıfır değerini alır. Yani, bu durum geometrik olarak manifoldun trivial (basit) Ricci flat olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde projektif flat şartı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu aşağıdaki şartları sağlar:

- (i) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton mevcuttur,
- (ii) $\alpha \neq 0$ olduğunda α -Kenmotsu manifoldu (M, g, ξ, λ) daima genişleyendir.

İspat. (25) eşitliği ve hipotez gereğince ($P = 0$),

$$R(U, V)W - \frac{1}{2n}[S(V, W)U - S(U, W)V] = 0 \quad (41)$$

yazılır. (41) eşitliğinden

$$R(U, V, W, X) = \frac{1}{2n}[[S(V, W)g(X, U) - S(U, W)g(V, X)] \quad (42)$$

bulunur. (42) eşitliğinde X yerine ξ seçilirse,

$$g(R(U, V)W, \xi) = \frac{1}{2n}[S(V, W)\eta(U) - S(U, W)\eta(V)] \quad (43)$$

elde edilir. $U = \xi$ ve $\xi(\alpha) = 0$ için (17), (18) ve (43) eşitlikleri birlikte kullanılırsa (39) denkleminde ulaşılır. Son olarak, (31), (34) ve (39) eşitliklerinden dolayı $\lambda = 2n\alpha^2$ bulunur. Gerçekten, Ricci yarı simetri yarı simetriyi kapsadığından ispat Teorem 1 den dolayı aşıkardır.

Teorem 3. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde projektif yarı-simetrik şartı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu aşağıdaki şartları sağlar:

- (i) $\alpha = 0$ olduğunda (M, g, ξ, λ) basit sabit Ricci solitondur,
- (ii) $\alpha \neq 0$ olduğunda (M, g, ξ, λ) Ricci soliton daima genişleyendir, asla büzülmez.

İspat. Öncelikle, hipotezden dolayı, $R \cdot P = 0$ tensörel çarpımını hesap ederken kullanacağımız bazı eşitlikleri verelim: (17) ve (25) eşitlikleri göz önüne alındığında, $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\eta(P(U, V)W) + \alpha^2\eta(U)g(V, W) - \alpha^2\eta(V)g(U, W) \\ &+ \frac{1}{2n}[\eta(U)S(V, W) - \eta(V)S(U, W)] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

bulunur. (44) eşitliğinde sırasıyla, $W = \xi$ ve $U = \xi$ alınırsa,

$$\eta(P(U, V)\xi) = 0 \quad (45)$$

ve

$$\eta(P(\xi, V)W) + \alpha^2 g(V, W) + \frac{1}{2n} S(V, W) = 0 \quad (46)$$

elde edilir. Şimdi, $R \cdot P = 0$ tensörel çarpımını dikkate alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} R(U, V)P(X, Y)W &= P(R(U, V)X, Y)W \\ &+ P(X, R(U, V)Y)W + P(X, Y)R(U, V)W \end{aligned} \quad (47)$$

eşitliğine indirgenir. $U = \xi$ için, (47) eşitliğinin her iki tarafı ξ karakteristik vektör alanına göre iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} -P(X, Y, W, V) + \eta(V)\eta(P(X, Y)W) - \eta(X)\eta(P(V, Y)W) \\ + g(V, X)\eta(P(\xi, Y)W) - \eta(Y)\eta(P(X, V)W) \\ + g(V, Y)\eta(P(X, \xi)W) - \eta(W)\eta(P(X, Y)V) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

yazılır. Burada $P(X, Y, W, V) = g(P(X, Y)W, V)$ dır. (48) eşitliğinde $V = X = U$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} P(U, Y, W, U) - g(U, U)\eta(P(\xi, Y)W) + \eta(Y)\eta(P(U, U)W) \\ - g(U, Y)\eta(P(U, \xi)W) + \eta(W)\eta(P(U, Y)U) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

bulunur. (49) eşitliğinin her iki tarafına U ya göre kontraksiyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \eta(P(\xi, Y)W) + \frac{1}{2n(2n+1)} S(Y, W) + \frac{\alpha^2}{2n+1} g(Y, W) \\ - (\alpha^2 + \frac{r}{2n(2n+1)})\eta(Y)\eta(W) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

sonucuna ulaşılır. (44) ve (50) eşitlikleri birlikte kullanılarak,

$$S(Y, W) = -2n\alpha^2 g(Y, W) - ((2n+1)\alpha^2 + \frac{r}{2n})\eta(Y)\eta(W) \quad (51)$$

elde edilir. Ayrıca, (51) eşitliğinin Y ve W ya göre izi alınır,sa,

$$r = -2n(2n+1)\alpha^2 \quad (52)$$

dir. (31), (34), (51) ve (52) eşitliklerinden $\lambda = 2n\alpha^2$ bulunur. Böylece ispat açıktır.

Sonuç 1. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $R \cdot P = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci soliton asla büzülmez.

Sonuç 2. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $R \cdot P = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyor ve $r \neq -2n(2n+1)\alpha^2$ ise o zaman M bir η -Einstein manifoldudur.

Teorem 4. (M, ϕ, ξ, η, g) , bir $(2n+1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde konsirküler flat şartı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $\alpha = 0$ olduğunda (M, g, ξ, λ) basit sabit Ricci solitondur,

(ii) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir.

İspat. M nin konsirküler flat yani, $\bar{C} = 0$ olduğunu kabul edelim. (24) eşitliğinden

$$R(U, V)Z = \frac{r}{2n(2n+1)} [g(V, Z)U - g(U, Z)V] \quad (53)$$

dir. (53) eşitliğinin her iki tarafı W ile iç çarpılırsa,

$$R(U, V, Z, W) = \frac{r}{2n(2n+1)} [g(V, Z)g(U, W) - g(U, Z)g(V, W)] \quad (54)$$

bulunur. Bu son eşitliğin U ve W ya göre izi alındığında

$$S(V, Z) = \left(\frac{r}{(2n+1)} \right) g(V, Z) \quad (55)$$

elde edilir. Buradan (52) yardımıyla

$$S(V, Z) = -2n\alpha^2 g(V, Z)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece bu son eşitlik, (31) ve (34) eşitlikleri birlikte düşünülürse $\lambda = 2n\alpha^2$ denkleminde ispat tamamlanır.

Teorem 5. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde konsirküler yarı-simetrik şartı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $\alpha = 0$ olduğunda (M, g, ξ, λ) basit sabit Ricci solitondur,

(ii) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir.

İspat. (17) ve (24) eşitlikleri kullanılarak

$$\eta(\bar{C}(U, V)Z) = (\alpha^2 + \frac{r}{2n(2n+1)}) (\eta(V)g(U, Z) - \eta(U)g(V, Z)) \quad (56)$$

elde edilir. (56) eşitliği $Z = \xi$ için

$$\eta(\bar{C}(U, V)\xi) = 0 \quad (57)$$

dir. Ayrıca, (56) eşitliği $U = \xi$ için

$$\eta(\bar{C}(\xi, Y)Z) = ((\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \frac{r}{2n(2n+1)}) (\eta(V)\eta(Z) - g(V, Z)) \quad (58)$$

bulunur. $R \cdot \bar{C} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$\begin{aligned} R(X, Y)\bar{C}(U, V)Z &= \bar{C}(R(X, Y)U, V)Z \\ &+ \bar{C}(U, R(X, Y)V)Z + \bar{C}(U, V)R(X, Y)Z \end{aligned} \quad (59)$$

yazılır. Metodoloji olarak Teorem 3 uygulanırsa, (56)-(59) eşitlikleri göz önüne alındığında,

$$S(V, Z) = -2n\alpha^2 g(V, Z)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik, (31) ve (34) eşitlikleri birlikte kullanılarak $\lambda = 2n\alpha^2$ denklemi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $R \cdot \bar{C} = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci soliton asla büzülmez.

Teorem 6. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde global ϕ -simetrik şartı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu aşağıdaki şartları sağlar:

- (i) $\alpha = 0$ olduğunda (M, g, ξ, λ) basit sabit Ricci solitondur,
(ii) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir.

İspat. M nin bir global ϕ -simetrik olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\phi^2((\nabla_W R)(X, Y)Z) = 0 \quad (60)$$

koşulu geçerlidir (De & ark. 2009). O halde,

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z - \eta((\nabla_W R)(X, Y)Z)\xi = 0 \quad (61)$$

ve

$$g((\nabla_W R)(X, Y)Z, V) - \eta((\nabla_W R)(X, Y)Z)\eta(V) = 0 \quad (62)$$

dır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$ cümlesi M nin her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (62) eşitliğine $X = V = E_j$ için kontraksiyon uygulanırsa,

$$-(\nabla_W S)(Y, Z) + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta((\nabla_W R)(E_j, Y)Z)\eta(E_j) = 0 \quad (63)$$

bulunur. Burada (63) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci ifade $Z = \xi$ seçildiğinde,

$$\eta((\nabla_W R)(E_j, Y)\xi)\eta(E_j) = g((\nabla_W R)(E_j, Y)\xi, \xi)\eta(E_j) \quad (64)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &g((\nabla_W R)(E_j, Y)\xi, \xi) - g(\nabla_W R(E_j, Y)\xi, \xi) + g(R(\nabla_W E_j, Y)\xi, \xi) \\ &+ g(R(E_j, \nabla_W Y)\xi, \xi) + g(R(E_j, Y)\nabla_W \xi, \xi) = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

denklemini sağlar. Ayrıca,

$$g((\nabla_W R)(E_j, Y)\xi, \xi) = -g(R(E_j, Y)\xi, \nabla_W \xi) - g(R(E_j, Y)\nabla_W \xi, \xi) \quad (66)$$

$$g((\nabla_W R)(E_j, Y)\xi, \xi) = 0 \quad (67)$$

$$(\nabla_W S)(Y, \xi) = 0 \quad (68)$$

$$(\nabla_W S)(Y, \xi) = \nabla_W S(Y, \xi) - S(\nabla_W Y, \xi) - S(\nabla_W \xi, Y) \quad (69)$$

yazılır. (16), (21), (63) ve (69) eşitlikleri birlikte ele alındığında

$$S(Y, W) = -(\nabla_W S)(Y, \xi) - 2n\alpha^2 g(Y, W) \quad (70)$$

elde edilir. Son olarak, (68 ve (70) eşitliklerinden

$$S(Y, W) = -2n\alpha^2 g(Y, W)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (31) ve (34) yardımıyla ispat sonlandırılır.

Sonuç 4. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde global ϕ -simetrik şartı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci soliton asla büzülmez.

Örnek 1. M manifoldunu $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart koordinatlar olan (x, y, z) ile ele alalım. M üzerindeki koordinat baz vektör alanlarını

$$E_1 = \partial/\partial x, E_2 = \partial/\partial y, E_3 = \partial/\partial z$$

şeklinde alalım. M üzerinde g Riemann metrik tensör alanını

$$g = e^{2\alpha z}(dx^2 + dy^2) + dz^2.$$

ile tanımlayalım. M üzerinde keyfi vektör alanı X olmak üzere, η 1-formu

$$g(X, E_3) = \eta(X), E_3 = \xi = \partial/\partial z$$

dır. Ayrıca, ϕ (1,1)-tipli tensör alanı

$$\phi(E_1) = E_2, \phi(E_2) = -E_1, \phi(E_3) = 0$$

ile verilsin. Metrik bileşen değerleri

$$g_{xx} = g_{yy} = e^{-2\alpha z}, \quad g_{zz} = 1$$

ve diğerleri ise sıfırdır. $\eta = dz$ (değme 1-form) ve $\xi = \partial/\partial z$ Reeb vektör alanı olmak üzere,

$$\nabla_X \xi = \alpha X, \nabla_{E_1} \xi = \alpha E_1, \nabla_{E_2} \xi = \alpha E_2, \nabla_{E_3} \xi = 0$$

olup, α -Kenmotsu şartı sağlanır. Dolayısıyla $\alpha = 0$ durumunu da göz önüne aldığımızda M manifoldu 3-boyutlu bir α -kosimplektik manifold olarak düşünülebilir. Şimdi, Levi-Civita konneksiyonu yardımıyla M deki Ricci tensör alanı

$$S = -2\alpha^2 e^{2\alpha z}(dx^2 + dy^2) - 2\alpha^2 dz^2$$

ve

$$S_{xx} = S_{yy} = -2\alpha^2 e^{2\alpha z}, S_{zz} = -2\alpha^2$$

dır. Burada Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \alpha$$

ve diğer kalanlar sıfırdır. Ricci tensör bileşenleri yardımıyla skalar eğrilik

$$r = g_{xx}S_{xx} + g_{yy}S_{yy} + g_{zz}S_{zz}$$

$$r = e^{-2\alpha z}(-2\alpha^2 e^{2\alpha z}) + e^{-2\alpha z}(-2\alpha^2 e^{2\alpha z}) + 1.(-2\alpha^2)$$

$$r = S(E_1, E_1) + S(E_2, E_2) + S(E_3, E_3) = -6\alpha^2$$

bulunur. Son olarak, M üzerinde tanımlanan (g, V, λ) Ricci solitonun denklemini araştıralım. Lie türevi tanımından

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(\nabla_Y V, X)$$

yazılır. Burada V potansiyel vektör alanını

$$V = a\partial/\partial z = a\xi$$

olarak seçelim. Burada a sabit bir sayı olsun. Bu durumda,

$$L_V g = 2\alpha a g$$

elde edilir. Ricci soliton tanımından

$$2\alpha a g + 2(-2\alpha^2 g) + 2\lambda g = 0$$

yazılır. Bu son denklemin çözümünden

$$a = 2\alpha, \quad V = 2\alpha\xi, \quad \lambda = 2\alpha^2$$

bulunur. Burada potansiyel vektör alanı V Ricci solitonun genişleme dinamiğini kontrol eder. α -Kenmotsu manifoldu ($\alpha \neq 0$) için, z -ekseni boyunca üstel olarak genişler (genişleyen Ricci soliton mevcuttur). Burada α parametresi genişleme oranını kontrol eder. $\alpha = 0$ durumunda M manifoldu

düz uzay metriğine indirgenir. M manifoldu basit sabit Ricci solitona sahiptir. Yani, $\lambda = 0, V = 0, S = 0$ ve $r = 0$ olur.

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, bazı tensör şartlarını sağlayan Ricci solitonlu α -kosimplektik manifoldlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Burada yapılan hesaplamalarda $\alpha, d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyon ve ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır. Gelecek çalışmalarda motivasyon kaynağımız farklı türde solitonları hemen hemen α -kosimplektik (κ, μ, ν) -uzaylarında ele almak ve daha genel sonuçlar bulmak olacaktır.

KAYNAKÇA

- Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Lecture Notes in Math., Vol. 509, New York: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Chen, B. (2015). Some Results on Concircular Vector Fields and Their Applications to Ricci Solitons, *Bull. Korean Math. Soc.*, 52(5), 1535-1547.
- De, U. C. & Pathak, G. (2004). On 3-dimensional Kenmotsu manifolds. *Ind. J. Pure Applied Math.*, 35, 159-165.
- Dileo, G. & Pastore, M. (2007). Almost Kenmotsu Manifolds and Local Symmetry, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 14, 343-354.
- Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255-306. Doi: 10.4310/jdg/1214436922
- Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and General Relativity (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math*, 71, 301-307.
- Janssens, D. & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 1-27.
- Jun, J. B. & De, U. C. & Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *J. Korean Math. Soc.*, 42, 435-445. Doi: <https://doi.org/10.4134/JKMS.2005.42.3.435>
- Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Math. J.*, 24, 93-103. Doi: 10.2748/tmj/1178241594
- Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug.*, 21, 841-846. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10114-004-0520-2>
- Nomizu, K. (1968). On Hypersurfaces Satisfying a Certain Condition on the Curvature Tensor, *Tôhoku Mathematical Journal*, 20, 46-69.
- Ogawa, Y. (1977), A Condition for a Compact Kaehlerian Space to be Locally Symmetric, *Natural Science Report. Ochanomizu University*, 28, 21-23.
- Olszak, Z. (1981). On Almost Cosymplectic Manifolds, *Kodai Mathematical Journal*, 4, 239-250.
- Öztürk, H., Aktan, N. & Murathan, C. (2010). On α -Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Conditions, *Applied Sciences*, 12, 115-126.

- Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α -cosymplectic manifolds, *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 9277175, 9 pages. Doi: <https://doi.org/10.1155/2021/9277175>
- Öztürk H., Mısırlı İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α -Cosymplectic Manifolds with η -Parallel Tensor Fields, *Academic Journal of Science*, 7(3), 605-612.
- Öztürk, S. (2022). A Study on α -Kenmotsu Manifolds, Science and Mathematics Sciences, *Theory, Current Researches and New Trends* 5, Chapter V, 45-58, Ivpe, Montenegro.
- Öztürk, H. & Öztürk, S. (2024). Lokal Simetrik Hemen Hemen α -Kenmotsu Psödo-Metrik Yapılar Üzerinde Bazı Sonuçlar, *Teori ve Uygulamada Doğa Bilimleri ve Matematik*, 209-2220, Duvar Yayınları, ISBN: 978-625-5530-51-6, İzmir.
- Öztürk, H. & Öztürk, S. (2024). Some Notes on Locally Symmetric Almost α -Kenmotsu Pseudo-Metric Manifolds, *Unified Perspectives in Mathematics and Geometry*, 100-118, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-450-4, Ankara.
- Öztürk, H. (2024). Some Results on α -Kenmotsu Manifolds Admitting Ricci Solitons, *Unified Perspectives in Mathematics and Geometry*, 119-141, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-450-4, Ankara.
- Öztürk, H. (2024). Ricci Solitonlu ϕ -Rekürent α -Kenmotsu Manifoldlar, *Matematikte İnovasyon: Modüller, Denklemler ve Yöntemler*, 209-232, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-451-1, Ankara.
- Öztürk, H. (2024). Bazı Tensör Şartlarını Sağlayan Ricci Solitonlu α -Kenmotsu Manifoldlar, *Matematikte İnovasyon: Modüller, Denklemler ve Yöntemler*, 233-255, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-451-1, Ankara.
- Öztürk, S. & Öztürk, H. (2023). Three-Dimensional Semi-Symmetric Almost α -Cosymplectic Manifolds, *Symmetry*, 15, 2022. Doi: <https://doi.org/10.3390/sym15112022>
- Öztürk, H. & Yadav, S. K. (2023). A Note on Ricci and Yamabe Solitons on Almost Kenmotsu Manifolds, *Novi Sad J. of Maths.*, 53(2), 223-239. Doi: <https://doi.org/10.30755/NSJOM.13375>
- Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). α -Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar, *Modern Matematikte Yeni Yaklaşımlar*, Chapter III, 22-43, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-065-0, Ankara.
- Perelman, G. (2002). The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications, *arXiv preprint math/0211159*.
- Szabó, Z. I. (1982). Structure Theorem on Riemannian Spaces Satisfying $R \cdot R = 0$, *Journal of Differential Geometry*, 17, 531-582.
- Tanno, S. (1969). The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tôhoku Mathematical Journal*, 21, 21-38.
- Yadav, S. K. & Öztürk, H. (2019). On (ϵ) -Almost Paracontact Metric Manifolds with Conformal η -Ricci Solitons, *Diff. Geo. Dynamical Systems*, 21, 202-215.
- Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Series in Pure Math., Vol. 3, Singapore: World Scientific Publishing Co.

BÖLÜM 4

Süper Çözülebilir Ambivalent Gruplar ve GAP Uygulamaları

Didem ÖZTÜRK¹

Özlem YILMAZ²

Gülay İlona TELSİZ KAYAOĞLU³

Giriş

Grupların gösteriliş teorisi, soyut grupların, lineer tasvirlerle ait matrislerin belirlediği grupların içine tanımlanmış homomorfilerinin sınıflandırılması esasına dayanmaktadır. Bir grubun gösterişleri üzerinde çalışma fikri, grup teorisi ve uygulamaları konusunda yeni araştırma yöntemlerinin doğmasına

¹ Dr. Öğretim Üyesi Didem Öztürk, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0002-4973-8140, didem.ozturk@msgsu.edu.tr

² Dr. Öğretim Üyesi Özlem Yılmaz, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0002-8418-0146, ozlem.yilmaz@msgsu.edu.tr

³ Dr. Öğretim Üyesi Gülay İlona Telsiz Kayaoğlu, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0001-8926-2899, gulay.telsiz@msgsu.edu.tr

Bu çalışma, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: 2023-11

sebebi olmuştur. Karakter teorisi de bu konuda belirleyici rol oynar. Bu bağlamda, Q-gruplarının ve Ambivalent gruplarının yapılarını incelemek, Adi Gösteriliş Teorisinin önemli araştırma konularındandır. Günümüzde bir abelyen Sylow 2-alt grubu içeren Q-grupları ve asal involüsyon içeren Q-grupları tamamen sınıflandırılmıştır.

Ayrıca, süper çözülebilir Q-gruplarının mertebeleri ve asal bölenleri belirlenmiştir. Diğer yandan, Q-gruplarının temel kavramlarından yararlanılarak, Ambivalent gruplarının bazı özel alt grupları sayesinde, izomorf olduğu yapılar elde edilmiştir. Bu çalışmada Q-gruplarının, Ambivalent gruplarının temel tanım ve teoremleri irdelenmiş; elde edilen sonuçlar yorumlanarak, daha önce araştırılmamış olan Süper Çözülebilir Ambivalent Grupları, bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiğinde, bu alt grup yardımıyla sınıflandırılmıştır. Söz konusu sınıflandırma işlemi yapılırken, GAP yazılım programı da kullanılmıştır. GAP, Grup Teori çalışma alanında bir grubun temel özelliklerini, alt gruplarının yapısını tanımlayan bir dil ile donatılmıştır. GAP yazılım diliyle, $D_3, D_4, V_4, Q_8, A_4, A_5$ gruplarının, alt grupları, bölüm grupları, kompozisyon serileri ve karakter tabloları oluşturularak, bu grupların, “Q-grup”, “Ambivalent grup” ve “Süper Çözülebilir Ambivalent grup” olma özellikleri araştırılmıştır. Böylece, Adi Gösteriliş Teorisinin uygulama alanına örnekler sunulmuştur.

Süper Çözülebilir Ambivalent Grupların Sınıflandırılması

Bu çalışmada, konunun bütünlüğü açısından sırasıyla, adi gösteriliş teorisinin temel kavramları, Q-grupları ve Ambivalent gruplarının yapısal özellikleri ayrıntıları ile ele alınacaktır. Öte yandan, araştırma problemine ışık tutan grup teorisinin temel tanım ve teoremlerine yer verilecektir. Böylece elde edilen bilgiler sentezlenerek, “Süper Çözülebilir Ambivalent Gruplar” bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiğinde, bu alt grup yardımıyla

sınıflandırılacak, izomorf olduğu cebirsel yapı belirlenecektir. Son olarak, GAP uygulamalarıyla somut örnekler verilecektir.

Tanım 1: G sonlu bir grup, R komütatif ve birimli bir halka ve V , n -boyutlu serbest bir R - modül olsun. Bu durumda, $T: G \rightarrow GL(V)$ şeklinde tanımlanan bir grup homomorfisine, G nin n -inci dereceden bir R -gösterilişi denir. V nin baz seçiminden bağımsız olarak, $GL(V) \cong GL(n, R)$ olduğu dikkate alındığında, $\varphi: G \rightarrow GL(n, R)$ grup homomorfisi, G nin R üzerindeki n -inci dereceden bir matris gösterilişi olarak adlandırılır. G nin V üzerindeki bir gösterilişi, bir matris gösterilişine tekabül eder. [5]

Tanım 2: $R = k$ bir cisim, V sonlu boyutlu bir k -vektör uzayı ve $T: G \rightarrow GL(V)$, G nin bir k -gösterilişi olsun. $\aleph: G \rightarrow k$, $\aleph(x) = \text{iz } T(x)$ şeklinde tanımlanan $\aleph$ fonksiyonuna, T gösterilişine karşılık gelen bir kG -karakteri denir ve $\aleph(1_G) = \text{iz } T(1_G) = \dim_k V$ dir. [5]

Tanım 3: G , n -inci mertebeden sonlu bir grup olsun. G nin adi kompleks gösterilişli tüm karakterleri rasyonel değerli ise G ye bir Q -grubu denir. [8]

Teorem 1: Sonlu bir G grubunun bir Q - grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s, t \in G$ aynı devresel grubu doğurduğunda, bu elemanların birbirine konjüge olmasıdır. Bir Q -grubunda bir alt devresel grubun doğuraylarının konjüge olması zorunluğuna karşılık, konjüge elemanların aynı devresel grubu doğurmaları gerekmez. [8]

Teorem 2: Sonlu bir G grubunun bir Q - grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall s \in G$ için $N(< s >)/C(< s >) \cong \text{Aut}(< s >)$ olmasıdır. [8]

Tanım 4: G , n -inci mertebeden sonlu bir grup olsun. G nin adi kompleks gösterilişli tüm karakterleri reel değerli ise G ye bir bir ambivalent grup denir. Başka bir deyişle, G bir ambivalent grup ise G nin $\mathbb{C}$ üzerinde n -inci dereceden bir gösterilişi, $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ grup homomorfisi ve bu gösterilişe ait bir χ , $\mathbb{C}G$ -karakteri verildiğinde, $\forall s \in G$ için $\chi(s) \in \mathbb{R}$ dir. Q-grupları, ambivalent olma özelliğini kapsamaktadır. [4]

Sonuç 1: S_n simetrik grubu hem bir Q- grubu hem de bir ambivalent gruptur. [4]

Teorem 3: Sonlu bir G grubunun bir ambivalent grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall s \in G$ için $s^t = tst^{-1} = s^{-1}$ olacak şekilde bir $t \in G$ nin bulunmasıdır. [4]

Tanım 5: G sonlu bir grup, $s \in G$ olsun. Eğer, s ve s^{-1} elemanları, G içinde birbirine konjüge ise s ye gerçek eleman denir. Bir ambivalent grubunun tüm elemanları gerçektir. [8]

Tanım 6: G sonlu bir grup, p bir asal sayı ve $s \in G$ olsun. $P \leq C(s)$ olacak şekilde bir $P \in Syl_p(G)$ mevcutsa s ye bir p – merkezi eleman denir. [8]

Teorem 4: G sonlu bir grup, p bir asal sayı olsun. Şu halde, $\{G \text{ nin } p - \text{merkezi elemanları}\} = \bigcup_{P \in Syl_p(G)} C(P)$ dir. Üstelik, $s \in G$ nin her p bir asal sayısına karşılık, p – merkezi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s \in Z(G)$ olmasıdır. [8]

Tanım 7: Bir G grubu ve G nin bir $\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$ alt normal serisi verilmiş olsun. $\forall i = 0, 1, \dots, s-1$ için G_{i+1} / G_i abelyen ise G ye çözülebilir bir grup denir. [9]

Teorem 5: Çözülebilir grupların alt grupları ve bölüm grupları da çözülebilirdir. [9]

Tanım 8: Bir G grubu ve G nin bir $\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$ alt normal serisi verilmiş olsun. $\forall i = 0, 1, \dots, s-1$ için $G_i \trianglelefteq G$ ve $|G_{i+1}/G_i|$ değerleri asal ise G ye süper çözülebilir bir grup denir. Süper çözülebilir gruplar çözülebilirdir. [9]

Tanım 9: G bir grup, $Z_0(G) = \{1_G\}$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Her i için $Z_{i+1}(G)$, $Z_i(G) \subseteq Z_{i+1}(G)$ ve $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ bağıntılarını sağlayan G nin tek türlü belirli normal alt grubunu gösterebilirsin. Bu taktirde, $\{1_G\} \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \dots$ alt normal serisine, G grubunun artan merkezi serisi denir. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n(G) = G$ ise G grubuna bir nilpotent grup denir. Bu eşitliği gerçekleyen $n \in \mathbb{N}$ değerlerinin en küçüğü, G grubunun nilpotentlik sınıfı adını alır. [9]

Teorem 6: G bir grup ve G' , G nin komütatör grubu olmak üzere $G' \trianglelefteq G$ dir. Üstelik,
 $N \trianglelefteq G$ için G/N grubunun bir abelyen grup olması için gerek ve yeter koşul $G' \leq N$ olmasıdır. [1]

Teorem 7: G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun.
 $G = SN$, $S \cap N = \{1_G\}$ ve $|S| = [G : N]$ olacak biçimde bir $N \trianglelefteq G$ varsa, N ye G içinde bir p -tamamlayıcısı denir. [9]

Teorem 8: G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun.
 $S \subseteq Z(N_G(S))$ ise S nin G içinde bir p -tamamlayıcısı vardır. [9]

Teorem 9: G bir ambivalent grup olsun.

- a. $N \trianglelefteq G$ ise G/N bir ambivalent gruptur.
 - b. G nin birimden farklı her 2-merkezi elemanı bir involüsyondur.
 - c. $Z(G)$ bir elementer abelyen 2-grubudur.
 - d. G abelyen ise G bir elementer abelyen 2-grubudur.
 - e. G' , G nin komütatör grubu olmak üzere, G/G' bir elementer abelyen 2-grubudur.
- G nin tek mertebeli elemanları, G' içindedir.
- f. G grubu 2-elemanları tarafından üretilir. [4]

Teorem 10: G bir ambivalent grup ve $S \in Syl_2(G)$ ise $C_G(S) = Z(S)$ dir.[4]

Teorem 11: G çözülebilir bir ambivalent grup ve $S \in Syl_2(G)$ ise $N_G(S) = S$ dir. [4]

Teorem 12: G çözülebilir bir ambivalent grup, $S \in Syl_2(G)$ ve $S \leq H \leq G$ ise $N_G(H) = H$ dir. [4]

Teorem 13: G çözülebilir bir ambivalent grup ve s, G nin 2-merkezi elemanı ise $N_G(C(S)) = C(S)$ dir. [4]

Teorem 14: G süper çözülebilir bir grup olsun.

- a. G' nilpotenttir.
- b. p, G nin mertebesini bölen en büyük asal sayı olsun.
Bu durumda, G nin bir p -Sylow alt grubu G grubu içinde normaldir. [7]

O halde, süper çözülebilir ambivalent gruplar için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 15: G süper çözülebilir bir ambivalent grup ve G_2, G nin bir abelyen Sylow 2-alt grubu olsun.

- a. G, G' üzerine G_2 tamamlayıcısı ile yayılır.
- b. G_2 grubu ambivalenttir.
- c. G_2 grubu bir elementer abelyen 2- grubudur.
- d. G' grubu nilpotenttir.

GAP (Computer Algebra System) Uygulamaları

Aşağıda, GAP programı yardımıyla $D_3, D_4, V_4, Q_8, A_4, A_5$ grupları için çözümlemeler yapılmıştır. GAP kodları, bu grupların normal alt gruplarını, Sylow-p alt gruplarını, bölüm gruplarını, komütatör gruplarını, merkezlerini, kompozisyon serilerini, karakter tablolarını incelemiş, “Q-grup”, “Ambivalent grup” ve “Süper Çözülebilir Ambivalent grup” olma özelliklerini belirlemiştir.

1. D_3 grubunun GAP ile incelenmesi:

```
gap> D3 := Group( (1,2,3), (2,3) );
Group([ (1,2,3), (2,3) ])
gap> Elements(D3);
[ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
gap> SylowSubgroup(D3, 2);
Group([ (2,3) ])
gap> Sylow2D3 := SylowSubgroup(D3, 2);
Group([ (2,3) ])
gap> Elements(Sylow2D3);
[ (), (2,3) ]
gap> SylowSubgroup(D3, 3);
Group([ (1,2,3) ])
gap> Sylow3D3 := SylowSubgroup(D3, 3);
Group([ (1,2,3) ])
gap> Elements(Sylow3D3);
[ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
gap> tbl := CharacterTable(D3);
CharacterTable( Sym( [ 1 .. 3 ] ) )
```

gap> Display(tbl);

1a 2a 1a

X.1 1 -1 1

X.2 2 . -1

X.3 1 1 1

1. Konjugasyon Sınıfları:

Tabloda görülen sütunlar grubun konjugasyon sınıflarını (conjugacy classes) temsil eder:

1a: Birim elemanı.

2a: Bir yansıma sınıfı (simetrik bir yansıma).

3a: Bir döngüsel sınıf (dönme simetrisi).

2. Karakterler:

Tablodaki satırlar ise grubun temsillerini temsil eder. Karakterler, bu temsillerin her bir konjugasyon sınıfına karşılık gelen izlerini içerir.

X.1, X.2, ve X.3: Dihedral grup

D_3 'ün farklı karakterlerini temsil eder.

X.1: Bu, 1 boyutlu bir temsili ifade eder.

2a yansıması için karakter -1 , diğer sınıflar için karakterler 1 'dir.

X.2: 2 boyutlu bir temsil.

2a için karakter 0 iken, 3a için karakter -1 ve birim elemanı için 2 'dir.

X.3: Başka bir 1 boyutlu temsil. Tüm konjugasyon sınıflarında karakterler 1 'dir.

Noktalı (.) hücreler: bu temsil için bu sınıflarda bir değer olmadığını gösterir.

Görüldüğü gibi karakter tablosundaki bütün değerler birer reel sayıdır. Dolayısıyla, D_3 bir Ambivalent gruptur. Bu değerler rasyonel olduğundan D_3 aynı zamanda bir Q-grubudur.

gap> normalSubgroups := NormalSubgroups(D_3);

[Group([(1,2,3), (1,2)]), Group([(1,2,3)]), Group(())]

```
gap> for H in normalSubgroups do
>   Print("Normal Alt Grup: ", Elements(H), "\n");
> od;
Normal Alt Grup: [ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
Normal Alt Grup: [ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
Normal Alt Grup: [ () ]
```

```
gap> D3 := Group((1,2,3), (1,2));
Group([ (1,2,3), (1,2) ])
gap> N := Group([ (1,2,3), (1,3,2) ]);
Group([ (1,2,3), (1,3,2) ])
gap> F := FactorGroup(D3, N);
<pc group with 1 generator>
gap> chiTable := CharacterTable(F);
CharacterTable( <pc group of size 2 with 1 generator> )
gap> Display(chiTable);
      1a 2a
X.1    1  1
X.2    1 -1
```

1.Konjugasyon Sınıfları:

1a: Birim elemanını temsil eder.

2a: İki elemanlı bir eşlenik sınıfı, bölüm grubunun kalan sınıflarından biridir.

2.Karakterler:

X.1: Trivial karakter. Bütün grup elemanları için 1 değeri alır.

X.2: İşaret (sign) karakteri. Birim elemanı için 1, diğer sınıflar için -1 değeri alır. Bu, iki elemanlı gruplar için tipik bir karakterdir.

O halde, D_3/N bölüm grubunun karakter tablosundaki tüm değerler reel sayı olduğundan bölüm grubu da Ambivalenttir.

```
gap> M := Centre(D3);
```

Group())

Merkez, birim gruba eşit olduğundan D_3 ün komütatif bir grup olmadığını söyleyebiliriz.

D_3 komütatör alt grubu aşağıda verilmiştir:

```
gap> CommutatorGroup := DerivedSubgroup(G);
Group([ (1,3,2) ])
gap> Elements(CommutatorGroup);
[(), (1,2,3), (1,3,2)]
```

D_3 grubunun kompozisyon serisi aşağıda verilmiştir:

```
gap> compSeries := CompositionSeries(G);
[ Group([ (2,3), (1,2,3) ]), Group([ (1,2,3) ]), Group() ]
gap> for i in [1..Length(compSeries)] do
> Print("G", i, ": ");
> elements := SortedList(Elements(compSeries[i]));
> Print("[");
> for j in [1..Length(elements)] do
> Print(String(elements[j]));
> if j < Length(elements) then
> Print(", ");
> fi;
> od;
> Print("]\n");
> od;
G1: [(), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3)]
G2: [(), (1,2,3), (1,3,2)]
G3: [()]
```

$G_3, G_2 \trianglelefteq D_3$ ve elde edilen bölüm gruplarının mertebeleri birer asal sayı olduğundan, bölüm grupları devreseldir. O halde, D_3 Süper

çözülebilir bir gruptur. Dolayısıyla, D_3 bir Süper Çözülebilir Ambivalent gruptur.

2. D_4 grubunun GAP ile incelenmesi:

```
gap> D4 := Group( (1,2,3,4), (1,4)(2,3) );
Group([ (1,2,3,4), (1,4)(2,3) ])
gap> SylowSubgroup(D4, 2);
Group([ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ])
gap> Sylow2D4 := SylowSubgroup(D4, 2);
Group([ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ])
gap> Elements(Sylow2D4);
[ (), (2,4), (1,2)(3,4), (1,2,3,4), (1,3), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,4)(2,3)
]
gap> tbl1 := CharacterTable(D4);
CharacterTable( Group([ (1,2,3,4), (1,4)(2,3) ]) )
gap> Display(tbl1);
      1a 2a 2b 4a 2c
X.1    1  1  1  1  1
X.2    1 -1 -1  1  1
X.3    1 -1  1 -1  1
X.4    1  1 -1 -1  1
X.5    2  .  .  . -2
```

1. Konjugasyon Sınıfları:

Tabloda yer alan sütunlar, grubun konjugasyon sınıflarını (conjugacy classes) temsil ediyor. Konjugasyon sınıfları genellikle grubun elemanlarının simetrilerine göre gruplandırılır.

1a: Birim elemanı (tüm gruplar için bir sınıf).

2a, 2b, 2c: Farklı yansıma simetrilerini veya sıralı dönüş simetrilerini temsil eder.

4a: 4. mertebede bir dönüş simetrisi.

2. Karakterler:

Satırlar, farklı temsillerin karakterlerini ifade eder.

X.1, X.2, X.3, X.4, X.5: Grubun farklı temsillerine karşılık gelen karakterlerdir. Her bir satır, ilgili temsilin konjugasyon sınıfları üzerindeki karakterlerini (izlerini) içerir.

Noktalı (.) hücreler: bu temsil için bu sınıflarda bir değer olmadığını gösterir.

Görüldüğü gibi karakter tablosundaki bütün değerler birer reel sayıdır. Dolayısıyla, D_4 bir Ambivalent gruptur.

```
gap> M := Centre(D4);
Group([ (1,3)(2,4) ])
gap> Elements(M);
[ (), (1,3)(2,4) ]
```

Merkez, bir elementer abelyen 2-grubudur.

```
gap> normalSubgroups := NormalSubgroups(D4);
[ Group([ (1,2,3,4), (1,4)(2,3) ]), Group([ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,4)(2,3), (1,3)(2,4) ]), Group([ (2,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,3)(2,4) ]), Group(()) ]
gap> for H in normalSubgroups do
>   Print("Normal Alt Grup: ", Elements(H), "\n");
> od;
Normal Alt Grup: [ (), (2,4), (1,2)(3,4), (1,2,3,4), (1,3), (1,3)(2,4),
(1,4,3,2), (1,4)(2,3) ]
Normal Alt Grup: [ (), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2) ]
Normal Alt Grup: [ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]
Normal Alt Grup: [ (), (2,4), (1,3), (1,3)(2,4) ]
Normal Alt Grup: [ (), (1,3)(2,4) ]
Normal Alt Grup: [ () ]
gap> compSeries := CompositionSeries(D4);
[ Group([ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]), Group([ (1,2,3,4), (1,3)(2,4)
]), Group([ (1,3)(2,4) ]), Group(()) ]
```



```

gap> for i in [1..Length(compSeries)] do
    Print("G", i, ": ");
    elements := SortedList(Elements(compSeries[i])); # Grup
    elemanlarını alıp sıralıyoruz
    Print("[");
    for j in [1..Length(elements)] do
        Print(String(elements[j]));
        if j < Length(elements) then
            Print(", ");
        fi;
    od;
    Print("]\n");
    od;
G1: [(0, (2,4), (1,2)(3,4), (1,2,3,4), (1,3), (1,3)(2,4), (1,4,3,2),
(1,4)(2,3)]
G2: [(0, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)]
G3: [(0, (1,3)(2,4)]
G4: [(0)]
gap> IsNormal(G3, G1);
true

```

$G_4, G_3, G_2 \trianglelefteq D_4$ ve elde edilen bölüm gruplarının mertebeleri 2 olduğundan, bölüm grupları devreseldir. O halde, D_4 Süper çözülebilir bir gruptur. Dolayısıyla, D_4 bir Süper Çözülebilir Ambivalent gruptur.

D_4 ün komütatör grubu ve nilpotentlik sınıfı da aşağıda belirtilmiştir:

```

CommutatorGroup := DerivedSubgroup(D4);
Group([ (1,3)(2,4) ])
gap> IsNilpotent( D4 );
true
gap> NilpotencyClassOfGroup( D4 );

```

3. V_4 grubunun GAP ile incelenmesi:

```

gap> V4 := Group( (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) );
Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) ])
gap> elements := Elements(V4);
[ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]
gap> SylowSubgroups := SylowSubgroup(V4, 2);
Group([ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) ])
gap> V4 := Group( (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) );
Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ])
gap> elements := Elements(V4);
[ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]
gap> SylowSubgroup2 := SylowSubgroup(V4, 2);
Group([ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) ])
gap> subgroupElements := Elements(SylowSubgroup2);
[ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]
gap> tbl := CharacterTable(V4);
CharacterTable( Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]) )
gap> Display(tbl);
      1a 2a 2b 2c
X.1   1  1  1  1
X.2   1  1 -1 -1
X.3   1 -1  1 -1
X.4   1 -1 -1  1

```

Görüldüğü gibi karakter tablosundaki bütün değerler birer reel sayıdır. Dolayısıyla, V_4 bir Ambivalent gruptur.

```

gap> normalSubgroups := NormalSubgroups(V4);
[ Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]), Group([ (1,2)(3,4) ]),
  Group([ (1,4)(2,3) ]), Group([ (1,3)(2,4) ]), Group(()) ]
gap> Print(normalSubgroups);

```

```

[ Group( [ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ] ), Group( [ (1,2)(3,4) ]
), Group( [ (1,4)(2,3) ] ), Group( [ (1,3)(2,4) ] ), Group( () ) ]
gap> normalSubgroup := Group( (), (1,2)(3,4) );
Group([ (), (1,2)(3,4) ])
gap> centerV4 := Center(V4);
Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ])
gap> elementsCenter := Elements(centerV4);
[ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]

```

Merkez, grubun kendisine eşit olduğundan grubun komütatif olduğunu gözlemliyoruz. Üstelik birimin dışında tüm elemanları 2. mertebeden olduğundan bu grup elementer abelyen 2-grubudur.

```

gap> compSeries := CompositionSeries(V4);
[ Group([ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) ], Group([ (1,2)(3,4) ], Group(() ) ]
gap> for i in [1..Length(compSeries)] do
Print("G", i, ": ");
elements := SortedList(Elements(compSeries[i]));
# Grup elemanlarını alıp sıralıyoruz
Print("[");
for j in [1..Length(elements)] do
    Print(String(elements[j]));
    if j < Length(elements) then
        Print(", ");
    fi;
od;
Print("]\n");
od;
G 1: [(), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)]
G 2: [(), (1,2)(3,4)]
G 3: [()]

```

$G_3, G_2 \trianglelefteq V_4$ ve burada elde edilen bölüm gruplarının mertebeleri 2 olduğundan, bölüm grupları devreseldir. Demek ki, V_4 Süper Çözülebilir bir gruptur. O halde, V_4 bir Süper Çözülebilir Ambivalent gruptur.

4. Q_8 grubunun GAP ile incelenmesi:

```
gap> g := SmallGroup(8,4);
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> Elements(g);
[ <identity> of ..., f1, f2, f3, f1*f2, f1*f3, f2*f3, f1*f2*f3 ]
gap> q := QuaternionAlgebra(Rationals);
<algebra-with-one of dimension 4 over Rationals>
gap> gens := GeneratorsOfAlgebraWithOne(q);
[ e, i, j, k ]
gap> e := gens[1]; i := gens[2]; j := gens[3]; k := gens[4];
e
i
j
k
gap> Q8 := Group(i,j);
#I default 'IsGeneratorsOfMagmaWithInverses' method returns
'true' for [ i, j ]
<group with 2 generators>
gap> Elements(Q8);
[ (-1)*e, (-1)*i, (-1)*j, (-1)*k, k, j, i, e ]
gap> IsomorphismGroups(g,Q8);
[ f1, f2, f3 ] -> [ j, i, (-1)*e ]
#Buraya kadarki kısımda Q8'in [ -e, -i, -j, -k, k, j, i, e ] olarak
tanımlanmıştır.
gap> Sylow2Q8 := SylowSubgroup(Q8, 2);
<group of size 8 with 2 generators>
gap> Elements(Sylow2Q8);
[ (-1)*e, (-1)*i, (-1)*j, (-1)*k, k, j, i, e ]
```

```

gap> tbl := CharacterTable(Q8);
CharacterTable( <group of size 8 with 2 generators> )
gap> Display(tbl);
      1a 4a 4b 4c 2a
X.1   1  1  1  1  1
X.2   1 -1 -1  1  1
X.3   1 -1  1 -1  1
X.4   1  1 -1 -1  1
X.5   2  .  .  . -2

```

Sütunlar: Tablo başlığındaki 1a, 4a, 4b, 4c ve 2a sütunları, Q_8 grubunun eşlenik sınıflarını temsil eder.

1a: Birim elemanı.

4a, 4b, 4c: Mertebesi 4 olan elemanlar

2a: Mertebesi 2 olan elemanlar

Satırlar (X.1, X.2, X.3, X.4, X.5): Her satır, Q_8 grubunun farklı bir karakterini, yani bir temsilini ifade eder.

X.1: Trivial karakter, tüm elemanlar için 1 değeri alır.

X.2, X.3, X.4: Bu karakterler, 1 veya -1 değerini alır ve farklı temsil türlerini gösterir.

X.5: 2-boyutlu indirgenemez temsil; noktalı (.) hücreler, bu temsil için bu sınıflarda bir değer olmadığını gösterir.

Görüldüğü gibi karakter tablosundaki bütün değerler birer reel sayıdır. Dolayısıyla, Q_8 bir Ambivalent gruptur.

```

gap> CompositionSeries(Q8);
[ <group of size 8 with 2 generators>, <group of size 4 with 2
generators>, <group of size 2 with 1 generator>, <trivial group> ]
gap> Print(NormalSubgroups(Q8),"\n");
[ Group( [ j, i, (-1)*e ] ), Group( [ i, (-1)*e ] ), Group( [ k, (-1)*e ] ),
Group( [ j, (-1)*e ] ), Group( [ (-1)*e ] ), Group( e ) ]

```

```
gap> for n in NormalSubgroups(Q8) do Print(Elements(n),"\n");
od;
[ (-1)*e, (-1)*i, (-1)*j, (-1)*k, k, j, i, e ]
[ (-1)*e, (-1)*i, i, e ]
[ (-1)*e, (-1)*k, k, e ]
[ (-1)*e, (-1)*j, j, e ]
[ (-1)*e, e ]
[ e ]
```

Yukarıdaki normal alt gruplar serisi incelendiğinde, tüm alt grupların birbiri içinde normal olduğu ve oluşturulabilecek bölüm gruplarının mertebelerinin 2 olduğu gözlemlenmektedir.

Bu durumda Q_8 bölüm grupları devreseldir, sonuç olarak Q_8 Süper Çözülebilir bir gruptur. O halde, Q_8 bir Süper Çözülebilir Ambivalent gruptur.

```
gap> K := Group( [ k, (-1)*e ] );
#I default 'IsGeneratorsOfMagmaWithInverses' method returns
'true' for [ k, (-1)*e ]
<group with 2 generators>
gap> F := FactorGroup(Q8, K);
Group([ f1 ])
gap> chiTable := CharacterTable(F);
CharacterTable( Group([ f1 ]) )
gap> Display(chiTable);
      1a 2a
X.1    1  1
X.2    1 -1
```

Q_8/K bölüm grubunun karakter tablosu reel değerlidir. O halde, bu grup ta bir Ambivalent gruptur.

```
gap> M := Centre(Q8);
```

```

<group of size 2 with 5 generators>
gap> Elements(M);
[ (-1)*e, e ]

```

Merkez, bir elementer abelyen 2-grubudur.

Q_8 in komütatör grubu ve nilpotentlik sınıfı da aşağıda belirtilmiştir:

```

gap> CommutatorGroup := DerivedSubgroup(Q8);
<group of size 2 with 1 generator>
gap> Elements( CommutatorGroup );
[ (-1)*e, e ]
gap> IsNilpotent( Q8 );
true
gap> NilpotencyClassOfGroup( Q8 );
2

```

5. A_4 grubunun GAP ile incelenmesi:

```

gap> A4 := AlternatingGroup(4);
Alt( [ 1 .. 4 ] )
gap> Elements(A4);
[ (), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4),
(1,3)(2,4), (1,4,2), (1,4,3), (1,4)(2,3) ]
gap> Sylow2A4 := SylowSubgroup(A4, 2);
Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) ])
gap> Elements(Sylow2A4);
[ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]
gap> Sylow3A4 := SylowSubgroup(A4, 3);
Group([ (1,2,3) ])
gap> Elements(Sylow3A4);
[ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
gap> tbl := CharacterTable(A4);
CharacterTable( Alt( [ 1 .. 4 ] ) )

```

```
gap> Display(tbl);
X.1   1   1   1   1
X.2   1   1   A /A
X.3   1   1  /A  A
X.4   3  -1   .   .
```

$A = (-1 - \sqrt{-3}) / 2$
 $/A = A$ 'nın eşleniğidir.

A_4 grubunun karakter tablosu incelendiğinde bazı değerlerin reel olmayan kompleks sayılarla ifade edildiğini görüyoruz.
O halde, A_4 ne bir Q-grubu ne de bir Ambivalent gruptur.

```
gap> Size(A4);
12
gap> M := Centre(A4);
Group()
gap> Size(M);
1
```

Merkez, birim gruba eşit olduğundan A_4 ün komütatif olmadığı görülür.

6. A_5 grubunun GAP ile incelenmesi:

```
gap> A5 := AlternatingGroup(5);
Alt([ 1 .. 5 ])
gap> Elements(A5);
[ (), (3,4,5), (3,5,4), (2,3)(4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,3), (2,4,5),
(2,4)(3,5), (2,5,3), (2,5,4), (2,5)(3,4), (1,2)(4,5), (1,2)(3,4),
(1,2)(3,5), (1,2,3), (1,2,3,4,5), (1,2,3,5,4), (1,2,4,5,3), (1,2,4),
(1,2,4,3,5), (1,2,5,4,3), (1,2,5), (1,2,5,3,4), (1,3,2), (1,3,4,5,2),
(1,3,5,4,2), (1,3)(4,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,3)(2,4), (1,3,2,4,5),
(1,3,5,2,4), (1,3)(2,5), (1,3,2,5,4), (1,3,4,2,5), (1,4,5,3,2), (1,4,2),
```



```
(1,4,3,5,2), (1,4,3), (1,4,5), (1,4)(3,5), (1,4,5,2,3), (1,4)(2,3),
(1,4,2,3,5), (1,4,2,5,3), (1,4,3,2,5), (1,4)(2,5), (1,5,4,3,2), (1,5,2),
(1,5,3,4,2), (1,5,3), (1,5,4), (1,5)(3,4), (1,5,4,2,3), (1,5)(2,3),
(1,5,2,3,4), (1,5,2,4,3), (1,5,3,2,4), (1,5)(2,4) ]
```

```
gap> Size(A5);
```

```
60
```

```
gap> Sylow2A5 :=SylowSubgroup(A5, 2);
```

```
Group([ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) ])
```

```
gap> Elements(Sylow2A5);
```

```
[ (), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) ]
```

```
gap> Sylow3A5 :=SylowSubgroup(A5, 3);
```

```
Group([ (1,2,3) ])
```

```
gap> Elements(Sylow3A5);
```

```
[ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
```

```
gap> tbl := CharacterTable(A5);
```

```
CharacterTable( Alt( [ 1 .. 5 ] ) )
```

```
gap> Display(tbl);
```

```
X.1  1  1  1  1  1
```

```
X.2  3 -1  .  A *A
```

```
X.3  3 -1  . *A A
```

```
X.4  4  .  1 -1 -1
```

```
X.5  5  1 -1  .  .
```

```
A = -E(5)-E(5)^4
```

```
= (1-Sqrt(5))/2 = -b5
```

$A = -b_5$ değeri, tablodaki bazı karakterlerin irrasyonel bir bileşen içerdiğini ve bu bileşenin A olarak ifade edildiğini gösterir.

A_5 alterne grubunun karakter tablosu incelendiğinde bazı değerlerin rasyonel olmayıp irrasyonel değerler olarak karşımıza çıktığını görüyoruz. O halde, A_5 bir Q -grubu değildir fakat bir Ambivalent gruptur.

```

gap> CompositionSeries(A5);
[ Alt( [ 1 .. 5 ] ), Group() ]
gap> normalSubgroups := NormalSubgroups(A5);
[ Alt( [ 1 .. 5 ] ), Group() ]
gap> for H in normalSubgroups do Print("Normal Alt Grup: ",
Elements(H), "\n"); od;
Normal Alt Grup: [ (), (3,4,5), (3,5,4), (2,3)(4,5), (2,3,4), (2,3,5),
(2,4,3), (2,4,5), (2,4)(3,5), (2,5,3), (2,5,4), (2,5)(3,4), (1,2)(4,5),
(1,2)(3,4), (1,2)(3,5), (1,2,3), (1,2,3,4,5), (1,2,3,5,4), (1,2,4,5,3),
(1,2,4), (1,2,4,3,5), (1,2,5,4,3), (1,2,5), (1,2,5,3,4), (1,3,2),
(1,3,4,5,2), (1,3,5,4,2), (1,3)(4,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,3)(2,4),
(1,3,2,4,5), (1,3,5,2,4), (1,3)(2,5), (1,3,2,5,4), (1,3,4,2,5),
(1,4,5,3,2), (1,4,2), (1,4,3,5,2), (1,4,3), (1,4,5), (1,4)(3,5),
(1,4,5,2,3), (1,4)(2,3), (1,4,2,3,5), (1,4,2,5,3), (1,4,3,2,5), (1,4)(2,5),
(1,5,4,3,2), (1,5,2), (1,5,3,4,2), (1,5,3), (1,5,4), (1,5)(3,4),
(1,5,4,2,3), (1,5)(2,3), (1,5,2,3,4), (1,5,2,4,3), (1,5,3,2,4), (1,5)(2,4)
]
Normal Alt Grup: [ () ]
gap> M := Centre(A5);
Group()
gap> Size(M);
1

```

Merkezi birim grup olduğu için A_5 komütatif bir grup değildir; Üstelik kompozisyon serisi incelendiğinde trivial normal alt gruplarının dışında hiçbir normal alt grubu yoktur. Dolayısıyla, A_5 basit bir gruptur. Süper Çözülebilir bir grup değildir.

Kaynakça

- [1] Alperin, J. L., & Bell, R. B. (1995). *Groups and representations*. Springer-Verlag.
- [2] Armeanu, I. (1993). About the 2-Sylow subgroups of a Q-group. *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi*, 52, 45–46.
- [3] Armeanu, I. (1994). Supersolvable Q-groups. *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi*, 53, 1–2.
- [4] Armeanu, I. (1996). About ambivalent groups. *Annales de Mathématiques Blaise Pascal*, 3, 17–22.
- [5] Dornoff, L. (1971). *Group representation theory: Part A ordinary representation theory*. Marcel Dekker.
- [6] Gow, R. (1976). Real-valued characters and Schur index. *Journal of Algebra*, 40, 258–270.
- [7] Huppert, B., & Blackburn, N. (1982). *Finite groups* (Vol. 2). Springer-Verlag.
- [8] Kletzing, D. (1984). *Structure and representation of Q-groups*. Springer-Verlag.
- [9] Rose, J. S. (1978). *A course in group theory*. Dover Publications.

BÖLÜM 5

(p,q)-MEYER-KÖNİG-ZELLER-KANTOROVİCH- STANCU OPERATÖRLERİNİN İSTATİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Esma KANGAL ¹

Ülkü DİNLEMEZ KANTAR ²

Giriş

Fonksiyonların çok daha basit fonksiyonlarla nasıl yaklaşık olarak ifade edileceği konusu araştırmacıların yıllardır dikkatini çekmektedir. Yaklaşım teorisi olarak adlandırılan matematiğin bu dalı üzerinde çalışmak, özellikle analitik çözümlerin mümkün olmadığı veya zor olduğu durumlarda oldukça önemlidir. Yaklaşım teorisi hem teorik matematikte hem de uygulamalı bilimlerde geniş kullanım alanına sahiptir. Yaklaşım teorisi, sayısal analiz kapsamında integral ve türevlerin sayısal olarak hesaplanması ve diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması (Atkinson, 1989), veri bilimi ve makine öğrenmesi kapsamında karmaşık fonksiyonların öğrenilmesi ve genellenmesi (Toggio & ark., 2017), bilgisayarlarda görüntü sıkıştırma işleminin yapılması (Farin, 2002), Fourier analizi yoluyla sinyallerin temsil edilmesi (Mallat, 2008), istatistikte yoğunluk tahmini (Wasserman, 2006),

¹ Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 06500 Yenimahalle, Ankara ORCID:0000-0002-9873-4859

² Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500 Yenimahalle, Ankara ORCID: 0000-0002-5656-3924

mühendislikte kontrol teorisi ve sistemlerin modellenmesi (Rao, 2011) gibi alanlarda bir çok problemin çözümüne katkı sağlar. Pozitif lineer operatörlerle yaklaşım ise yaklaşım teorisinin oldukça yaygın bir çalışma alanıdır. Bizim de bu alanda yakın zamanda yapılmış çalışmalarımız bulunmaktadır (Su & ark., 2024; Lin & ark., 2024; Cai, & ark., 2025).

Yaklaşım teorisinde özellikle 19. ve 20. yüzyıllarda kayda değer gelişmeler yaşanmıştır. Öyle ki 1885 yılında Weierstrass kendi adıyla bilinen yaklaşım teorisinin temeli olarak kabul edebileceğimiz Weierstrass yaklaşım teoremini oluşturmuştur. Bu teorem kapalı bir aralıkta tanımlı her sürekli fonksiyona polinomlarla yaklaşılabileceğini ifade eder. 1912 yılında ise, Bernstein $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyona yaklaşan en az bir polinomun var olduğunu kendi adıyla anılan Bernstein serilerini inşa ederek ispatlamıştır. Bernstein polinomları $f \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bernstein, 1912). Bernstein polinomları basit yapıları ve kullanışlı özellikleri sayesinde araştırmacıların çok fazla dikkatini çekmiş ve birçok çalışmanın mihenk noktası olmuştur, öyle ki birçok bilim adamı bu polinomları geliştirerek bir diğer deyişle genelleştirerek sürekli olmak zorunda olmayan fonksiyonlar için bile yaklaşım sonucu veren operatörler inşa etmiştir. Bunlara ilk etapta Kantorovich operatörü (Kantorovich, 1930) ve Durrmeyer operatörü (Durrmeyer, 1967) örnek verilebilir. 1960 yılında Meyer-König- Zeller operatörü, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k}\right), \quad x \in [0, 1] \text{ ise,}$$

$$M_n(f; 1) = f(1), x = 1 \text{ ise,}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Meyer-König, Zeller, 1960). Bu operatör üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır, bunlardan bazılarına (Gupta, 2002), (Sofyaloğlu, Kanat, & Çekim, 2021) ve (Donga & Qiulan, 2025) çalışmalarını örnek verebiliriz.

18. yüzyılda q -analiz fikri ortaya çıkmış, 20. yüzyılın başlarında ise q -türev ve q -integral tanımlarının temelleri atılmıştır ve böylece bugünkü anlamda q -analiz modern bir teori haline gelmiştir. Kuantum gruplar ve kuantum cebirleri ortaya çıktığında, q -analiz kuantum mekaniği ve istatistiksel fizik gibi alanlarda da kullanılmaya başlanmıştır. q parametresinin kullanılması ile daha önce bahsettiğimiz operatörlerin, q -analizdeki modifikasyonları oluşturulmuştur. Bunlardan biri de 2000 yılında Trif tarafından tanımlanan, q -Meyer-König-Zeller operatörüdür. Bu operatör, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f \in C[0,1]$ için

$$M_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right), \quad x \neq 1 \text{ ise}$$

$$M_{n,q}(f; 1) = f(1), \quad x = 1 \text{ ise}$$

olarak tanımlanmıştır (Trif, 2000).

q -analizin özellikle kuantum fizik ve yaklaşım teorisindeki uygulamaları artınca matematikçiler bu yapıyı daha genel hale getirmek istemişlerdir. Bunun sonucu olarak daha genel durumları modelleyebilmeyi sağlayan iki parametrelili (p, q)-analiz ortaya çıkmıştır. Bu sistemin kullanılması ile daha önce bahsedilen operatörlerin (p, q)-analogları inşa edilmiş ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Buradan ilhamla Meyer-König-Zeller operatörünün (p, q)-parametrelili genellemesi, $P_n(x) = \prod_{s=0}^n (p^s - q^s x)$ olmak üzere

$$M_{(n,p,q)}(f, x) = \frac{1}{p^{n(n+1)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k p^{-kn} P_n(x) f\left(\frac{p^n[k]_{p,q}}{[n+k]_{p,q}}\right), x \in [0,1] \text{ ise,}$$

$$M_{(n,p,q)}(1, x) = f(1), x = 1 \text{ ise}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Kadık, Khan, & Mursaleen, 2021). Daha sonra (p, q) -Meyer-König-Zeller operatörünün Kantorovich modifikasyonu,

$$m_{n,k}^{p,q}(x) = \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{-kn} q^{-k} x^k P_{n-1}(x)$$

ve

$$P_n(x) = \prod_{s=0}^n (p^s - q^s x)$$

olmak üzere $f \in C[0,1]$ için

$$M_{n,p,q}(f; x) = \frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n(n-1)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}^{p,q}(x) \int_{\frac{[k]_{p,q}}{[n+k]_{p,q}}}^{\frac{[k+1]_{p,q}}{[n+k+1]_{p,q}}} f(p^{n-1}t) d_{p,q}t$$

şeklinde ifade edilmiştir (Maurya, Sharma, & Gupta, 2018). Tüm bu çalışmalardan ilhamla (Tüzün, 2024)'de (p, q) -Meyer-König-Zeller-Kantorovich operatörünün Stancu genellemesi tanıtılmış ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Biz de bu operatörün istatikselsel yakınsaklığı üzerinde duracağız, çalışmamızın ana parçası olan bu tipteki operatörün tanımı gelecek bölümde yapılacaktır.

Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde tamsayı, faktöriyel, binom katsayısı, binom açılımı, türev ve integral gibi kavramların (p, q) -analoglarını tanıatacağız. Bütün çalışma boyunca $0 < q < p \leq 1$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 1: $[n]_{p,q}$ ile gösterilen (p, q) -tamsayısı

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}, n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2: $[n]_{p,q}!$ ile gösterilen (p, q) -faktöriyel

$$[n]_{p,q}! = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ [1]_{p,q} [2]_{p,q} \dots [n]_{p,q}, & n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Tanım 3: $0 \leq k \leq n$ tam sayıları için, (p, q) -binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}! [n-k]_{p,q}!}$$

olarak verilmektedir.

Tanım 4: (p, q) -binom açılımı

$$(x + y)_{p,q}^n = \prod_{s=0}^{n-1} (p^s x + q^s y)$$

olarak ifade edilmektedir.

Tanım 5: Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için (p, q) -analizindeki türev

$$D_{p,q}(f(x)) = \frac{f(px) - f(qx)}{(p - q)x}, x \neq 0$$

ve limitin var olması koşuluyla

$$D_{p,q}(f(0)) = \lim_{x \rightarrow 0} D_{p,q}(f(x))$$

olarak tanımlamaktadır.

Tanım 6: $f: C[0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (p, q) -integrali

$$\int_0^a f(t) d_{p,q}t = (p - q) a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} a\right), \quad \left|\frac{p}{q}\right| > 1 \text{ ise}$$

olarak verilmektedir.

Şimdi çalışmamızda kullanacağımız bir yöntem olan istatistiksel yakınsaklık kavramını açıklayacağız. χ_S ile $S \subseteq \mathbb{N}$ 'nin karakteristik fonksiyonunu gösterelim. S kümesinin doğal yoğunluğu, limitin var olması şartıyla,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta(S) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_S(k)$$

şeklinde tanımlanır.

Her $\varepsilon > 0$ için $\delta\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} = 0$ ise $(x_n)_n$ dizisi bir L sayısına istatistiksel olarak yakınsaktır ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ olarak gösterilir.

Teorem 1: $C_b[a, b]$ pozitif reel ekseninde sınırlı ve $[a, b]$ üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayını gösterebilir. $L_n: C_b[a, b] \rightarrow C[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n e_i - e_i\|_{C[a, b]} = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2$$

şartı sağlanırsa, her $f \in C_B[a, b]$ için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{C([a, b])} = 0$$

sonucu elde edilir (Gadjiev & Orhan, 2002).

Ana sonucumuzu bulmak için yukarıda verilen teorem bize yol gösterecektir, bu yüzden oldukça önemlidir.

(p, q) –Meyer-König-Zeller-Kantorovich-Stancu operatörü

Bu aşamadan itibaren çalışma boyunca $0 < q < p \leq 1$ ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olduğunu kabul edeceğiz. (p, q) -Meyer-König-Zeller-

Kantorovich operatörünün Stancu tipi modifikasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$m_{n,k}^{p,q}(x) = \left[\begin{matrix} n+k+1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{-kn} q^{-k} x^k P_{n-1}(x),$$

ve

$$P_n(x) = \prod_{s=0}^n (p^s - q^s x)$$

olmak üzere, $f \in C[0,1]$ için (p,q) -Meyer-König-Zeller-Kantorovich-Stancu operatörü

$$\mathcal{H}_{n,p,q}(f; x)$$

$$= \frac{[n+1]_{p,q}}{p^{n(n-1)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}^{p,q}(x) \int_{\frac{[k]_{p,q}}{[n+k]_{p,q}}}^{\frac{[k+1]_{p,q}}{[n+k+1]_{p,q}}} f\left(\frac{p^{n-1}t[n]_{p,q} + \alpha}{[n]_{p,q} + \beta}\right) d_{p,q}t$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Tüzün, 2024).

$$f \in C[0,1]$$

fonksiyonu

için

$$I(f(t)) = \int_{\frac{[k]_{p,q}}{[n+k]_{p,q}}}^{\frac{[k+1]_{p,q}}{[n+k+1]_{p,q}}} f\left(\frac{p^{n-1}t[n]_{p,q} + \alpha}{[n]_{p,q} + \beta}\right) d_{p,q}t$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonel kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilmiştir (Tüzün, 2024).

Lemma 1: $e_i = t^i, i = 0,1,2$ olmak üzere $I(e_i)$ için aşağıda verilen eşitlikler elde edilir.

$$I(e_0) = \frac{(pq)^k [n]_{p,q}}{[n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}},$$

$$\begin{aligned}
I(e_1) &= \frac{1}{([n] + \beta)} \frac{(pq)^k [n]_{p,q}}{[n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}} \left\{ \frac{p^{n-1}}{[2]_{p,q}} \left([k]_{p,q} \left(\frac{q}{[n+k+1]_{p,q}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{[n+k]_{p,q}} \right) + \frac{p^k}{[n+k+1]_{p,q}} \right) + \alpha \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(e_2) &= \frac{1}{([n]_{p,q} + \beta)^2} \left(\frac{p^{2(n-1)} [n]_{p,q}^3}{[3]_{p,q}} \frac{(pq)^k}{[n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}} \right. \\
&\quad \times \{ [k]_{p,q}^2 U_2(n, k) + [k]_{p,q} U_1(n, k) + U_0(n, k) \} \\
&\quad + \frac{2\alpha p^{n-1} (pq)^k [n]_{p,q}^2}{[2]_{p,q} [n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}} \{ [k]_{p,q} U_3(n, k) + U_4(n, k) \} \\
&\quad \left. + \frac{\alpha^2 (pq)^k [n]_{p,q}}{[n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}} \right)
\end{aligned}$$

dir, burada U_1, U_2, U_3 ve U_4 ifadeleri

$$U_2(n, k) = \left(\frac{q^2}{[n+k+1]_{p,q}^2} + \frac{q}{[n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}} + \frac{1}{[n+k]_{p,q}^2} \right),$$

$$U_1(n, k) = \frac{2p^k q}{[n+k+1]_{p,q}^2} + \frac{p^k}{[n+k+1]_{p,q} [n+k]_{p,q}},$$

$$U_0(n, k) = \frac{p^k}{[n+k+1]_{p,q}},$$

$$U_3(n, k) = \frac{q}{[n+k+1]_{p,q}} + \frac{1}{[n+k]_{p,q}},$$

$$U_4(n, k) = \frac{p^k}{[n+k+1]_{p,q}}$$

şeklindedir.

Lemma 2: $i = 0, 1, 2$ ve $e_i = t^i$ olmak üzere momentler için
 $\mathcal{H}_{n,p,q}(e_0, x) = \mathcal{H}_{n,p,q}(1, x) = 1$

$$\mathcal{H}_{n,p,q}(e_1, x) \leq \frac{[n]_{p,q}}{[2]_{p,q}([n]_{p,q} + \beta)q} \left(2x + \frac{p^{n-1} - q^{n-1}x}{q[n-1]_{p,q}} \right) + \frac{\alpha}{[n]_{p,q} + \beta}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{n,p,q}(e_2, x) \\ & \leq \frac{1}{([n]_{p,q} + \beta)^2} \left\{ \left(\frac{3x[n]_{p,q}^2}{q^3[3]_{p,q}} + \frac{3[n]_{p,q}^2 x p}{[3]_{p,q} q^4} \right. \right. \\ & + \frac{p[n]_{p,q}^2}{[3]_{p,q} q^5} \frac{(p^{n-2} - q^{n-2}x)}{[n-2]_{p,q}} + \frac{2\alpha[n]_{p,q}}{[2]_{p,q} q^2} \left. \frac{(p^{n-1} - q^{n-1}x)}{[n-1]_{p,q}} \right. \\ & \left. \left. + \frac{3qx^2[n]_{p,q}^2}{q^3[3]_{p,q}} + \frac{4\alpha[n]_{p,q}}{[2]_{p,q} q} + \alpha^2 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde eşitsizlikler elde edilir (Tüzün, 2024).

$\mathcal{H}_{n,p,q}$ Operatörünün İstatiksel Yakınsaklığı

Teorem 2: $q_n \in (0,1)$ ve $p_n \in (q_n, 1]$ olmak üzere
 $st - \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1, st - \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = a,$
 $st - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1, st - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^n = b$

şartları sağlansın. Böylece, her $f \in C_b[0,1]$ için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}_{n,p,q}f - f\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilecektir.

İspat: $\mathcal{H}_{n,p,q}$ operatörünün Teorem 1'de bahsi geçen tüm şartları sağladığını göstermek yeterlidir. Bunu yaparken Lemma 2'de momentler için bulunan eşitsizlikleri kullanacağız.

$i = 0$ için $\|\mathcal{H}_{n,p,q}(e_0, \cdot) - e_0\|_{C[0,1]} = 0$ olduğu aşıkardır. Şimdi $i = 1$ için incelemeye başlayalım.

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{H}_{n,p_n,q_n}(e_1, x) - e_1(x)| \\
& \leq \left| \frac{(2[n]_{p_n,q_n} - [2]_{p_n,q_n}[n]_{p_n,q_n}q_n)x}{[2]_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} + \beta)q_n} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{[n]_{p_n,q_n}(p_n^{n-1} - q_n^{n-1}x)}{[2]_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} + \beta)q_n^2[n-1]_{p_n,q_n}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha}{[n]_{p_n,q_n} + \beta} \right| \\
& \leq \left| \frac{(2[n]_{p_n,q_n} - [2]_{p_n,q_n}[n]_{p_n,q_n}q_n)x}{[2]_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} + \beta)q_n} \right| \\
& \quad + \left| \frac{[n]_{p_n,q_n}}{[2]_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} + \beta)q_n} \left(\frac{p_n^{n-1} - q_n^{n-1}x}{q_n[n-1]_{p_n,q_n}} \right) \right| \\
& \quad + \left| \frac{\alpha}{[n]_{p_n,q_n} + \beta} \right| \\
& \leq \frac{(2 - [2]_{p_n,q_n}q_n)[n]_{p_n,q_n}}{[2]_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} + \beta)q_n} \\
& \quad + \frac{[n]_{p_n,q_n}}{[2]_{p_n,q_n}([n]_{p_n,q_n} + \beta)q_n} \left(\frac{p_n^{n-1} + q_n^{n-1}}{q_n[n-1]_{p_n,q_n}} \right) \\
& \quad + \frac{\alpha}{[n]_{p_n,q_n} + \beta}.
\end{aligned}$$

Herhangi verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$M = \left\{ i : \|\mathcal{H}_{n,p_i,q_i}(e_1, \cdot) - e_1\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon \right\},$$

$$M_1 = \left\{ i : \frac{(2 - [2]_{p_i,q_i}q_i)[i]_{p_i,q_i}}{[2]_{p_i,q_i}([i]_{p_i,q_i} + \beta)q_i} \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$M_2 = \left\{ i : \frac{[i]_{p_i, q_i}}{[2]_{p_i, q_i}([i]_{p_i, q_i} + \beta)q_i} \left(\frac{p_i^{i-1} + q_i^{i-1}}{q_i[i-1]_{p_i, q_i}} \right) \geq \frac{\epsilon}{3} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ i : \frac{\alpha}{[i]_{p_i, q_i} + \beta} \geq \frac{\epsilon}{3} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Buradan

$M \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3$ olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Aynı zamanda kümeler arasındaki bu ilişkiden

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ i \leq n : \|\mathcal{H}_{n, p_i, q_i}(e_1; \cdot) - e_1\|_{C[0,1]} \geq \epsilon \right\} \\ & \leq \delta \left\{ i : \frac{(2 - [2]_{p_i, q_i} q_i)[i]_{p_i, q_i}}{[2]_{p_i, q_i}([i]_{p_i, q_i} + \beta)q_i} \geq \frac{\epsilon}{3} \right\} \\ & + \delta \left\{ i : \frac{[i]_{p_i, q_i}}{[2]_{p_i, q_i}([i]_{p_i, q_i} + \beta)q_i} \left(\frac{p_i^{i-1} + q_i^{i-1}}{q_i[i-1]_{p_i, q_i}} \right) \geq \frac{\epsilon}{3} \right\} \\ & + \delta \left\{ i : \frac{\alpha}{[i]_{p_i, q_i} + \beta} \geq \frac{\epsilon}{3} \right\} \end{aligned}$$

sonucuna varabiliriz. $st - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$, $st - \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$, $st - \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^n = b$, $st - \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = a$ limitlerini kullanarak

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - [2]_{p_n, q_n} q_n)[n]_{p_n, q_n}}{[2]_{p_n, q_n}([n]_{p_n, q_n} + \beta)q_n} = 0,$$

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{p_n, q_n}}{[2]_{p_n, q_n}([n]_{p_n, q_n} + \beta)q_n} \left(\frac{p_n^{n-1} + q_n^{n-1}}{q_n[n-1]_{p_n, q_n}} \right) = 0,$$

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{[n]_{p_n, q_n} + \beta} = 0$$

eşitliklerini elde ederiz. Bulduğumuz bu sonuçlar

$$\delta\{i: ||\mathcal{H}_{n, p_n, q_n}(e_1; \cdot) - e_1||_{C[0,1]} \geq \epsilon\} = 0$$

olduğunu gösterir, böylece

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} ||\mathcal{H}_{n, p, q}(e_1, \cdot) - e_1||_{C[0,1]} = 0$$

sonucuna rahatlıkla ulaşırız.

$i = 2$ için ilk olarak üçgen eşitsizliğini, sonra $x \in [0,1]$ ve $0 < q_n < p_n \leq 1$ olması şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} & |\mathcal{H}_{n, p_n, q_n}(e_2, x) - e_2(x)| \\ & \leq \left| \frac{(3 - [3]_{p_n, q_n} q_n^2) q_n [n]_{p_n, q_n}^2}{[3]_{p_n, q_n} q_n^3 ([n]_{p_n, q_n} + \beta)^2} \right. \\ & + \frac{1}{([n]_{p_n, q_n} + \beta)^2} \left\{ \left(\frac{3x [n]_{p_n, q_n}^2}{q_n^3 [3]_{p_n, q_n}} + \frac{3 [n]_{p_n, q_n}^2 x p_n}{[3]_{p_n, q_n} q_n^4} \right. \right. \\ & + \frac{p_n [n]_{p_n, q_n}^2 (p_n^{n-2} - q_n^{n-2} x)}{[3]_{p_n, q_n} q_n^5 [n - 2]_{p_n, q_n}} + \frac{2\alpha [n]_{p_n, q_n}}{[2]_{p_n, q_n} q_n^2} \left. \right) \frac{(p_n^{n-1} - q_n^{n-1} x)}{[n - 1]_{p_n, q_n}} \\ & + \frac{4\alpha [n]_{p_n, q_n}}{[2]_{p_n, q_n} q_n} + \alpha^2 \left. \right\} \Big| \\ & < \frac{(3 - [3]_{p_n, q_n} q_n^2) [n]_{p_n, q_n}^2}{[3]_{p_n, q_n} q_n^3 ([n]_{p_n, q_n} + \beta)^2} \\ & + \frac{1}{([n]_{p_n, q_n} + \beta)^2} \left\{ \left(\frac{3 [n]_{p_n, q_n}^2}{q_n^3 [3]_{p_n, q_n}} + \frac{3 [n]_{p_n, q_n}^2}{[3]_{p_n, q_n} q_n^4} \right. \right. \\ & + \frac{[n]_{p_n, q_n}^2 (p_n^{n-2} + q_n^{n-2})}{[3]_{p_n, q_n} q_n^5 [n - 2]_{p_n, q_n}} + \frac{2\alpha [n]_{p_n, q_n}}{[2]_{p_n, q_n} q_n^2} \left. \right) \frac{p_n^{n-1} + q_n^{n-1}}{[n - 1]_{p_n, q_n}} \\ & + \frac{4\alpha [n]_{p_n, q_n}}{[2]_{p_n, q_n} q_n} + \alpha^2 \left. \right\}. \end{aligned}$$

Bir önceki adımda yapılan benzer işlemleri yaptığımız takdirde

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}_{n,p,q}(e_2, \cdot) - e_2\|_{C[0,1]} = 0$$

olduğunu gösterebiliriz. $\mathcal{H}_{n,p,q}$ operatörü Teorem 1'in hipotezlerini sağladığından dolayı kolaylıkla

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}_{n,p,q}f - f\|_{C[0,1]} = 0$$

sonucunu elde ederiz.

Kaynakça

- Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. New York: Wiley.
- Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Charkow Ser. 2 t., 13*, 1-2.
- Cai, Q.-B., Kangal, E., Dinlemez Kantar, Ü., Zhou, G., & Aslan, R. (2025). On a new kind of λ -Bernstein-Kantorovich operators for univariate and bivariate functions. *Filomat*, 39(5), 1437-1456.
- Donga, H., & Qiulan, Q. (2025). Approximation properties of Meyer-Konig-Zeller type operators. *Filomat*, 39(6), 2077-2089.
- Durrmeyer, J. L. (1967). Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: applications à la théorie des moments. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 265, 1447-1450.
- Farin, G. (2002). *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. San Francisco: Morgan Kaufmann.
- Gupta, V. (2002). On a new type of Meyer-Konig and Zeller operators. *J. Inequal. Pure Appl. Math*, 3(4).
- Kadak, U., Khan, A., & Mursaleen, M. (2021). Approximation by Meyer-König and Zeller Operators using (p,q)-Calculus. *Filomat*, 35(11), 3767-3779. doi:<https://doi.org/10.2298/FIL2111767K>
- Kantorovich, L. V. (1930). Sur certain développements suivant les polynômes de la forme de S, Bernstein, I, II. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 563–568.

- Lin , Z.-P., Torun, G., Kangal, E., Dinlemez Kantar, Ü., & Cai, Q.-B. (2024). On the Properties of the Modified λ -Bernstein-Stancu Operators. *Symmetry*, 16(10), 1276. doi:<https://doi.org/10.3390/sym16101276>
- Mallat, S. G. (2008). *A Wavelet Tour of Signal Processing (3rd ed.)*. Academic Press.
- Maurya, R., Sharma, H., & Gupta, C. (2018). Approximation Properties of Kantorovich Type Modifications of (p,q)-Meyer-König-Zeller Operators. *Constructive Mathematical Analysis*, 1(1), 58-72.
- Rao, S. S. (2011). *Engineering optimization: Theory and practice (4th ed.)*. Hoboken, NJ: Wiley.
- Sofyalıoğlu, M., Kanat, K., & Çekim, B. (2021). Parametric generalization of the Meyer-König-Zeller operators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 152, 111417. doi:<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111417>
- Su, L.-T., Kangal, E., Dinlemez Kantar, Ü., & Cai, Q.-B. (2024). Some Statistical and Direct Approximation Properties for a New Form of the Generalization of q-Bernstein Operators with the Parameter λ . *Axioms*, 13(7), 485. doi:<https://doi.org/10.3390/axioms13070485>
- Toggio, T., Mhaskar, H., Rosasco, L., Miranda, B., & Liao, Q. (2017). Why and when can deep-but not shallow-networks avoid the curse of dimensionality? *Neural Computation*, 29(5), 1185-1210.
- Trif, T. (2000). Meyer-König and Zeller Operators Based on the q-integers. *Revista de Análisis Numérico y Teoría de Aproximación*, 29(2), 221-229.

Tüzün, H. (2024). *(p, q)*-Meyer König Zeller Kantorovich Stancu Operatörlerinin Bazı Yaklaşım Özellikleri. Gazi Üniversitesi.

Wasserman, L. (2006). *All of Nonparametric Statistics*. New York: Springer.

BÖLÜM 6

DEMI-LIMITED OPERATÖRLER SINIFI

GÜL SİNEM KELEŞ¹
BİROL ALTIN²

Giriş

Demi notasyonu ilk kez “Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space” isimli makalede Petryshyn tarafından kullanılmıştır. (Petryshyn, 1966). Benkhaled H., Elleuch A., ve Jeribi A. 2020’de sıra zayıf demikompakt operatör sınıfını tanımladılar (Benkhaled, Elleuch & Jeribi, 2020). Daha sonra demi Dunford-Pettis operatörleri sınıfı Benkhaled H., Hajji M. ve Jeribi A., tarafından tanımlanmıştır (Benkhaled, Hajji & Jeribi, 2022). Son zamanlarda Demi gösterimi başka operatör sınıfları içinde tanımlanılmıştır. Bu çalışmada 1984’te “Limited Operators and Strict Cosingularity” isimli makalede J. Bourgain ve J. Diestel tarafından çalışılan limited operatörler sınıfının bir genelleştirilmesi olan demi-limited operatörler sınıfı tanımlanmıştır ve özellikleri incelenmiştir.

¹ Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara 0000-0001-5712-239X

² Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Teknikokullar, Ankara 0000-0002-1085-809X

E, F iki Banach uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir sınırlı operatör olsun. Eğer her $(f_n) \subseteq F'$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ iken $T'(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ oluyorsa T operatörüne limited operatör denir. E' den F' ye tanımlı bütün limited operatörlerin sınıfı $L_l(E, F)$ ile gösterilir (Bourgain & Diestel, 1984). Bu çalışmada özdeşlik dönüşümü I ile gösterilecektir. Tanımlanmayan tanım ve notasyonlar için (Aliprantis & Burkinshaw, 2006)' ya bağlı kalınacaktır.

Temel Sonuçlar

Tanım 1. E bir Banach uzayı, $T: E \rightarrow E$ bir sınırlı operatör olsun. Eğer her $(f_n) \subseteq E'$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $(f_n - T'(f_n)) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ iken $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne demi-limited operatör denir. E üzerinde tanımlı bütün demi-limited operatör sınıfı $DL_l(E)$ ile gösterilir.

Teorem 1 E bir Banach uzayı olsun. O zaman her $\alpha \neq 1$ için $\alpha I \in \mathcal{DL}_l(E)$ olur.

İspat Her $(f_n) \subseteq E'$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $(f_n - (\alpha I)'(f_n)) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olsun. Bu durumda

$$f_n(1 - \alpha) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

elde edilir ve sonuç olarak f_n sifıra norm yakınsak olur. Dolayısıyla α birden farklı olduğu durumda, αI demi-limited operatör olur.

Teorem 1, $\alpha = 1$ için genelde geçerli olmaz.

Örnek 1 $c_0, \mathbb{R}$ nin sifıra yakınsak dizilerinin uzayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $x = (x_n) \in c_0$ için $I: c_0 \rightarrow c_0$ dönüşümü $f_n: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x_n$ olarak tanımlansın. $(f_n) \subseteq (c_0)'$ ve $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olur ancak f_n sifıra norm yakınsak değildir dolayısıyla $I \notin DL_l(c_0)$ olur.

Teorem 2 Her limited operatör bir demi-limited operatördür.

İspat E bir Banach uzayı, $T: E \rightarrow E$ bir limited operatör ve $(f_n) \subseteq E'$ olsun. Kabul edelim ki $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $(f_n - T'(f_n)) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ sağlansın.

$$\begin{aligned}\|f_n\| &= \|f_n - T'(f_n) + T'(f_n)\| \\ &\leq \|f_n - T'(f_n)\| + \|T'(f_n)\|\end{aligned}$$

yazılabilir. T limited operatör olduğundan, kabulden ve yukarıdaki eşitsizlikten $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ sonucuna varılır. Dolayısıyla T bir demi-limited operatördür.

Bir sonraki örnek, Teorem 2' nin tersinin genellikle doğru olmadığını verir.

Örnek 2 $T: c_0 \rightarrow c_0$ ve $T = \frac{I}{2}$ olsun. Teorem 1'den T operatörü c_0 üzerinde demi-limited operatördür ancak limited operatör değildir.

Örnek 3 $T: c_0 \rightarrow c_0$ operatörü her $x = (x_i) \in c_0$ için $T(x) = x_1 e_1$ olarak tanımlansın. $T: c_0 \rightarrow c_0$ operatörü limited operatördür. Diğer yandan $H = I + T$ operatörünü tanımlayalım. Kolaylıkla görülebilir ki H operatörü demi-limited operatör değildir.

Teorem 3 E bir Banach uzayı, $T: E \rightarrow E$ bir limited operatör ve $S: E \rightarrow E$ bir demi-limited operatör olsun. Bu durumda $T + S$ bir demi-limited operatör olur.

İspat $(f_n) \subseteq E'$ için $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ ve $(f_n - (T + S)'(f_n)) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olsun.

$$\begin{aligned}\|f_n - S'(f_n)\| &= \|f_n - T'(f_n) + T'(f_n) - S'(f_n)\| \\ &\leq \|f_n - (T + S)'(f_n)\| + \|T'(f_n)\|\end{aligned}$$

olur. T limited operatör olduğundan $T'(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Dolayısıyla kabulden ve eşitsizlikten $f_n - S'(f_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. $S: E \rightarrow E$ bir demi-limited operatör olduğundan $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur ve ispat tamamlanır.

İki demi-limited operatörün toplamı genellikle demi-limited operatör olmayabilir.

Örnek 4 $T, S: c_0 \rightarrow c_0$, operatörleri her $x = (x_n) \in c_0$ için $T(x) = S(x) = \frac{1}{2}x$ olarak tanımlansın. T ve S operatörleri Teorem 1'den demi-limited operatördür ancak $T + S = I$ bir demi-limited operatör değildir.

Örnek 4 aynı zamanda bize demi-limited operatörler uzayının genellikle bir vektör uzayı olmadığını verir.

Aşağıdaki teorem yardımıyla ayrılabilir bir Banach uzayının sonlu boyutlu olmasının karakterizasyonu verilecektir.

Teorem 4 E bir ayrılabilir Banach uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) E sonlu boyutludur.

(ii) $L_l(E) = \mathfrak{D}L_l(E)$.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) E sonlu boyutlu olsun. E üzerindeki zayıf* yakınsama ile norm yakınsama denk olduğundan E üzerindeki her sürekli operatör limited operatör olur. Dolayısıyla $L_l(E) = \mathfrak{D}L_l(E)$ sonucu elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $L_l(E) = \mathfrak{D}L_l(E)$ olsun. Teorem 1'den $\frac{I}{2} \in \mathfrak{D}L_l(E)$ olduğu biliniyor. Kabulden $\frac{I}{2} \in L_l(E)$ olur. Dolayısıyla $I \in L_l(E)$ olur. E 'nin ayrılabilir olması dikkate alınırsa Teorem 3.20 ve Teorem 3.34 (Aliprantis & Burkinshaw, 2006) 'den E 'nin sonlu boyutlu olduğu kolaylıkla görülür.

Bir sonraki teorem, Teorem 4'ün bir sonucu olarak elde edilir.

Teorem 5 E bir ayrılabilir Banach uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) Her $T: E \rightarrow E$ sürekli operatör, bir demi-limited operatördür.
- (ii) $I: E \rightarrow E$ bir demi-limited operatördür.
- (iii) E sonlu boyutludur.

T bir demi-limited operatör olsun ve $0 \leq S \leq T$ sağlansın. S operatörü bir demi-limited operatör olmayabilir. Örnek 5 demi-limited operatörler sınıfının domination özelliğinin genellikle sağlanmadığını verir.

Örnek 5 $T, S : c_0 \rightarrow c_0$ iki operatör olmak üzere $T = 2I$ ve $S = I$ olacak şekilde tanımlansın ve $0 \leq S \leq T$ sağlansın. Bu durumda Teorem 1'den T bir demi-limited operatör iken S bir demi-limited operatör olmaz.

KAYNAKÇA

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (2006). Positive Operators. Berlin: Springer

Benkhaled, H. & Hajji, M. & Jeribi, A. (2022). On the class of Demi Dunford- Pettis Operators. Circolo Matematico di Palermo Ser 2, 1-11. Doi: 10.1007/s12215-021-00702-x.

Petryshyn, W.V. (1966). Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 14(2), 276-284. Doi: 10.1016/0022-247X(66)90027-8.

Bourgain, J. & Diestel, J. (1984). Limited Operators and Strict Cosingularity. Mathematische Nachrichten, 119. Doi: 10.1002/mana.19841190105

Benkhaled, H. & Elleuch, A. & Jeribi, A. (2020). The class of order weakly demicompact operators. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Serie A Matemáticas, 114(2), 1-8.

BÖLÜM 7

SMARANDACHE ADJOİNT EĞRİLİ YÜZEY AİLELERİ ÜZERİNE

GÜLNUR ŞAFFAK ATALAY¹

Giriş ve Genel Bilgiler

Eğriler, diferansiyel geometri ve matematiksel modelleme alanlarının temel yapı taşlarındandır. Eğrilerin eğrilik, torsiyon gibi geometrik özellikleri, yüzeylerin, uzay zamanının ve fiziksel sistemlerin anlaşılmasında kritik öneme sahiptir. Bu nedenle, diferansiyel geometriyi anlamak ve uygulamak için eğrilerin matematiksel analizinin büyük bir önemi vardır. Eğriler, hem teorik çalışmalar hem de pratik mühendislik ve fiziksel uygulamalar için temel bir araçtır. Bilgisayar grafiklerinde, 3D modelleme, animasyon ve görüntü işleme gibi alanlarda eğriler kullanılır. Bunun yanı sıra eğriler, yüzeylerin üzerinde belirli yolları tanımlamak için kullanılır. Örneğin, bir yüzeyin parametrizasyonu sırasında, yüzey üzerinde belirli eğriler (örneğin, kapalı eğriler, doğrusal eğriler) tanımlanabilir. Yüzeyler ve eğriler arasındaki ilişki, daha genel geometri ve analiz problemlerinin çözülmesinde önemli bir yer tutar. Frenet-Serret çatısı, bir eğrinin her noktasında tanjant, normal ve

¹ Doçent Doktor, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Samsun, Türkiye, Orcid: 0000-0003-4168-1642

binormal vektörlerini tanımlayan ve eğrilik ile torsiyonla ilişkili denklemler sunan bir teodir. Bu çatı, eğrinin bir noktasındaki geometrik özellikleri anlamak için güçlü bir araçtır. Özellikle bir eğri üzerindeki hareketin yönelimini ve eğriliğini hesaplamak için kullanılır. Bilindiğı üzere eğrilerin birçok sınıflandırılması mevcuttur. Adjoint (eşlenik) eğri (bağlantılı eğri, yön eğrisi veya eşlenik eş) ve Smarandache eğrileri bu sınıflandırmaya örnek olarak verilebilir. Adjoint eğrisi, belirli bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri tarafından oluşturulan bir vektör alanının integralinin alınmasıyla tanımlanır. Adjoint (eşlenik) eğri, herhangi bir s parametresine sahip bir eğrinin binormal vektörünün integrali yardımıyla tanımlanmıştır (Choi & vd., 2012a, Choi & vd., 2012b, Deshmukh & vd., 2018, Nurkan & vd., 2019). Frenet çatısına göre tanımlanan adjoint eğrisi, genellikle kontrol teorisi, optimal çözümleme, geometrik analiz ve fiziksel sistemlerin modellemesi gibi alanlarda önemli bir matematiksel araçtır. Bu tür eğriler, orijinal eğrinin geometrik özelliklerini optimize etmeye yönelik yan çözümler sağlayarak, sistemlerin daha etkili bir şekilde analiz edilmesine olanak tanır. Smarandache eğrisi, adını matematikçi Florentin Smarandache'den alır ve genellikle bir eğri üzerinde tanımlanan özel bir yol veya izdir. Bu eğri, belirli koşullar altında hareket eder ve geometrik olarak, farklı türde eğriler arasında bir bağlantı veya ilişkiler kurar. Frenet çatısı çerçevesinde, Smarandache eğrileri, bir eğrinin davranışını tanjant, normal ve binormal vektörlerine bağlı olarak tanımlanan özel eğrilerdir. Bu eğriler, belirli bir yüzeyde veya uzayda, eğriliğı ve torsiyonu optimize etmek veya başka geometrik özellikleri incelemek amacıyla kullanılır. Adjoint ve Smarandache eğrileri üzerine yapılan çalışmalar için (Izumiya & Takeuchi, 2003), (Izumiya & Takeuchi, 2004), (Ali, 2010), (Kahraman & Uğurlu, 2014), (Abdel- Aziz & Khalifa Saad, 2017), (Elzawy & Mosa, 2017), (Arıkan & Nurkan, 2020), (Bayram, 2020) ve (Nurkan & Güven, 2022) kaynaklarına bakılabilir. Üç boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğriden geçen ve

bu eğriyi özel bir eğri olarak kabul eden yüzey ailesi kavramı ilk olarak Wang ve arkadaşları tarafından ifade edilmiştir (Wang & vd., 2004) Kasap ve arkadaşları Wang'ın çalışmasını yeni tip sapma fonksiyonları getirerek genelleştirmişlerdir (Kasap & vd., 2006). Liu ve arkadaşları Wang'ın çalışmasında bahsi geçen eğriyi bir eğrilik çizgisi olarak ele alarak yüzey ailesi problemini incelemişlerdir (Liu & vd., 2011). Son zamanlarda özel eğri çiftlerini içeren yüzey ailesinin bulunması problemi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalardan bazıları (Atalay & Kasap, 2016a), (Atalay & Kasap, 2016b), (Atalay & Kasap, 2017), (Atalay, 2018a), (Atalay, 2018b), (Atalay & Ayvaci, 2021a), (Atalay & Ayvaci, 2021b), (Ayvaci & Atalay, 2023), (Atalay & Murat, 2024), (Atalay, 2024), (Atalay & Ayvaci Şimşek, 2025) (Atalay & Murat, 2025) dır.

Bu çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ile verilen eğrinin Smarandache eğrilerinin integral eğrilerinden elde edilen adjoint eğrilerinin (Smarandache adjoint eğrileri) parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde sırasıyla geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli koşullar verilmiştir. Ayrıca çalışmayı destekleyen örneklerde Maple 12 programı kullanılarak sunulmuştur.

Çalışmanın bulgular kısmında kullanılacak olan aşağıda verilen temel tanımlar ile, Smarandache eğrilerinin integral eğrilerinden elde edilen adjoint eğriler ile ilgili tanım, teorem ve sonuçlar (Nurkan & Güven, 2022) makalesinden alınmıştır.

Tanım 1. Eğriliği $\kappa \neq 0$ olan ve ikinci türevi sıfır olmayan yay uzunluğuna sahip $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisine Frenet eğrisi denir.

Tanım 2. $\alpha : I \rightarrow E^3$, $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen Frenet eğrisi olsun. α nın TN-adjoint eğrisi, TB-adjoint eğrisi, NB-adjoint eğrisi ve TNB-adjoint eğrisi, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (T_\alpha + N_\alpha) ds, \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (T_\alpha + B_\alpha) ds, \\ \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (N_\alpha + B_\alpha) ds, \\ \psi = \frac{1}{\sqrt{3}} \int (T_\alpha + N_\alpha + B_\alpha) ds. \end{array} \right. \quad (1)$$

Açıklama 1. Eğer α yay uzunluğu parametresi s olan bir eğri ise α 'nın adjoint eğrisinin de yay uzunluğu parametresi s dir.

Teorem 1. α , E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen yay uzunluğu parametrelili regüler bir eğri ve β da α 'nın TN-adjoint eğrisi olsun. β 'nın Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_\alpha + N_\alpha), \\ N_\beta = \frac{1}{\sqrt{2+f^2}} (-T_\alpha + N_\alpha + fB_\alpha), \\ B_\beta = \frac{1}{\sqrt{4+2f^2}} (fT_\alpha - fN_\alpha + 2B_\alpha), \\ \kappa_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_\alpha \sqrt{2+f^2}, \\ \tau_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_\alpha + \frac{\sqrt{2}f'}{2+f^2} \end{array} \right. \quad (2)$$

şeklinde tanımlı olup burada $f = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$ dır.

Sonuç 1. $\alpha:I \rightarrow E^3$ Frenet eğrisi genel helis olsun. Bu takdirde α eğrisinin TN-adjoint eğrisi de genel helistir.

Teorem 2. α, E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen yay uzunluğu parametrelili regüler bir eğri ve γ da α 'nın TB-adjoint eğrisi olsun. γ 'nın Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_\alpha + B_\alpha), \\ N_\gamma = N_\alpha, \\ B_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T_\alpha + B_\alpha), \\ \kappa_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_\alpha(1-f), \\ \tau_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_\alpha(1+f) \end{array} \right. \quad (3)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç 2. $\alpha:I \rightarrow E^3$ Frenet eğrisi genel helistir ancak α eğrisinin TB-adjoint eğrisi de genel helistir.

Sonuç 3. $\alpha:I \rightarrow E^3$ Frenet eğrisi slant helistir ancak α eğrisinin TB-adjoint eğrisi de slant helistir.

Sonuç 4. $\alpha:I \rightarrow E^3$ Frenet eğrisi ve α eğrisinin TB-adjoint eğrisi Bertrand eğri çiftidir

Teorem 3. α, E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen yay uzunluğu parametrelili regüler bir eğri ve

ζ da α 'nın NB-adjoint eğrisi olsun. ζ 'nın Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_{\alpha} + B_{\alpha}), \\ N_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2}}(-T_{\alpha} - fN_{\alpha} + fB_{\alpha}), \\ B_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2+4f^2}}(2fT_{\alpha} - N_{\alpha} + B_{\alpha}), \\ \kappa_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_{\alpha}\sqrt{1+2f^2}, \\ \tau_{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\kappa_{\alpha} + \sqrt{2}\frac{f'}{1+2f^2} \end{array} \right. \quad (4)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç 5. $\alpha: I \rightarrow E^3$ Frenet eğrisi genel helis olsun. Bu takdirde α eğrisinin NB-adjoint eğrisi de genel helistir.

Teorem 4. α, E^3 de $\{T_{\alpha}, N_{\alpha}, B_{\alpha}, \kappa_{\alpha}, \tau_{\alpha}\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen yay uzunluğu parametreli regüler bir eğri ve ψ da α 'nın TNB-adjoint eğrisi olsun. ψ 'nın Frenet vektör alanları, eğrilik ve burulması

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_\alpha + N_\alpha + B_\alpha), \\ N_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-f+f^2}}(-T_\alpha + (1-f)N_\alpha + fB_\alpha), \\ B_\psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{1-f+f^2}}((2f-1)T_\alpha - (1+f)N_\alpha + (2-f)B_\alpha), \\ \kappa_\psi = \frac{\sqrt{6}}{3} \kappa_\alpha \sqrt{1-f+f^2}, \\ \tau_\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_\alpha (1+f) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{f'}{(1-f+f^2)} \end{array} \right. \quad (5)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç 6. $\alpha: I \rightarrow E^3$ Frenet eğrisi genel helis olsun. Bu takdirde α eğrisinin TNB-adjoint eğrisi de genel helistir.

Bulgular

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında verilen α eğrisinin, sırasıyla, TN, TB, NB ve TNB-adjoint eğrilerinin parametrik denklemi ile verilen yüzey üzerinde hem parametrik hem de sırasıyla geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli koşullar incelenecektir.

TN-adjoint eğrili yüzey ailesi

α, E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen Frenet eğrisi olsun. β da α 'nın TN-adjoint eğrisi olsun. Amacımız α 'nın TN-adjoint eğrisi olan β eğrisinin yüzey üzerinde hem parametrik hem de sırasıyla geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli koşulları vermektir.

α eğrisini üzerinde bulunduran parametrik yüzey

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + x(s, v)T_\alpha(s) + y(s, v)N_\alpha(s) + z(s, v)B_\alpha(s),$$

$L_1 \leq s \leq L_2$, $K_1 \leq v \leq K_2$ şeklinde tanımlı olup burada $x(s, v)$, $y(s, v)$ ve $z(s, v)$ sapma fonksiyonları olarak adlandırılan C^1 sınıfından fonsksiyonlardır. Bu sapma fonksiyonlarını ilgili şartları sağlayacak şekilde her farklı seçişimizde aynı α eğrisine sahip yüzey ailesinin üyeleri elde edilmiş olur.

β , α 'nın TN-adjoint eğrisi ve $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta, \kappa_\beta, \tau_\beta\}$ β 'nın Frenet-Serret elemanları olmak üzere β eğrisini üzerinde bulunduran yüzey

$$\varphi_\beta(s, v) = \beta(s) + x(s, v)T_\beta(s) + y(s, v)N_\beta(s) + z(s, v)B_\beta(s) \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir.

İlk olarak bu β eğrisinin yüzey üzerinde parametrik olması şartından $v = v_0 = \text{sabit}$ için $x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \forall s$ elde edilir.

β , α 'nın TN-adjoint eğrisi olduğundan (6) denkleminde (1) ve (2) denklemlerindeki ilgili eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (T_\alpha + N_\alpha) ds + x(s, v) \frac{1}{\sqrt{2}} (T_\alpha + N_\alpha) \\ &+ y(s, v) \frac{1}{\sqrt{2 + f^2}} (-T_\alpha + N_\alpha + fB_\alpha) \\ &+ z(s, v) \frac{1}{\sqrt{4 + 2f^2}} (fT_\alpha - fN_\alpha + 2B_\alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir.

$\varphi_\beta(s, v)$ yüzeyinin normal vektörü $n(s, v) = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial s} \times \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial v}$ ile tanımlı olup $v = v_0 = \text{sabit}$ için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$n(s, v_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right) T_\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right) N_\alpha + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial y}{\partial v_0} A - f \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right) B_\alpha \quad (8)$$

elde edilir. Burada $A = \frac{1}{\sqrt{2+f^2}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{4+2f^2}}$ dır.

β eğrisinin ikinci türevi hesaplanırsa aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\kappa_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha N_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha) \quad (9)$$

β eğrisinin $\varphi_\beta(s, v)$ yüzeyi üzerinde geodezik olması için $\beta''(s) // n(s, v_0)$ geodeziklik şartının (8) ve (9) denklemlerinde kullanılmasıyla $\lambda(s) \neq 0$ olmak üzere

$$f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B = -\kappa_\alpha \lambda(s), \quad \text{ve}$$

$$2 \left(\frac{\partial y}{\partial v_0} A - f \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right) = \tau_\alpha \lambda(s)$$

elde edilir. Ayrıca yüzeyin regüler olması için yüzeyin normal vektörünün sıfırdan farklı olması gerektiğinden $\frac{\partial y}{\partial v_0} \neq 0$

veya $\frac{\partial z}{\partial v_0} \neq 0$ olmalıdır.

O halde buradan elde ettiğimiz bulgular doğrultusunda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5. α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nin (7) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B = -\kappa_\alpha \lambda(s), \lambda(s) \neq 0, \\ 2 \left(\frac{\partial y}{\partial v_0} A - f \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right) = \tau_\alpha \lambda(s), \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} \neq 0 \text{ veya } \frac{\partial z}{\partial v_0} \neq 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

olmalıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise $\tau_\alpha = 0$ ve dolayısıyla $f = 0$ olacağından α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nin (7) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = -\kappa_\alpha \lambda(s), \lambda(s) \neq 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

olmalıdır.

Sonuç 6. Eğer α düzlemsel ise α 'nın TN-adjoint eğrisi β da düzlemseldir. Ayrıca α ve β 'nin eğrilikleri de eşit yani $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$

dır.

β eğrisinin $\varphi_\beta(s, v)$ yüzeyi üzerinde asimptotik olması için

$B_\beta(s) // n(s, v_0)$ asimptotiklik şartından $\frac{\partial z}{\partial v_0} = 0$ ve

$\frac{\partial y}{\partial v_0} = h(s), h(s) \neq 0$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi

verebiliriz:

Teorem 6. α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nın (7) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = h(s), h(s) \neq 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

olmalıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise de α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nın (7) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için yine (12) nolu şart sağlanır.

Şimdi α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nın (7) nolu yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olması için gerekli koşulları inceleyelim:

$e(s)$, β eğrisine ortogonal bir vektör olsun.

$$e(s) = \cos \theta(s) N_\beta(s) + \sin \theta(s) B_\beta(s)$$

olup burada θ , β eğrisinin N_β asli normali ile e arasındaki açıdır. β 'nın (7) nolu yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul $e(s) // n(s, v_0)$ ve $\delta(s, v) = \beta(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin açılabilir olmasıdır.

İlk olarak $e(s)//n(s, v_0)$ şartının kullanılmasıyla gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B - 1 = 0, \text{ veya } \frac{\partial y}{\partial v_0} A - f \frac{\partial z}{\partial v_0} B = 0$$

elde edilir.

$\delta(s, v) = \beta(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin açılabilirlik şartı $\det(\beta'(s), e(s), e'(s)) = 0$ olup gerekli hesaplamaların yapılmasıyla

$$\theta' = -\tau_\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tau_\alpha - \frac{\sqrt{2} f'}{2 + f^2}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Theorem 7. α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nın (7) nolu yüzey üzerinde hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B - 1 = 0 \text{ veya } \frac{\partial y}{\partial v_0} A - f \frac{\partial z}{\partial v_0} B = 0, \\ \theta' = -\tau_\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tau_\alpha - \frac{\sqrt{2} f'}{2 + f^2}. \end{array} \right. \quad (13)$$

olmasıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise α 'nın TN-adjoint eğrisi β 'nın (7) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = h(s) \sin \theta(s), \quad h(s) \neq 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = -h(s) \cos \theta(s) \\ \theta(s) = c = \text{sabit}. \end{array} \right. \quad (14)$$

olmasıdır.

TB-adjoint eğrili yüzey ailesi

α , E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen Frenet eğrisi olsun. γ da α 'nın TB-adjoint eğrisi olsun. Amacımız α 'nın TB-adjoint eğrisi olan γ eğrisinin yüzey üzerinde hem parametrik hem de sırasıyla geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli koşulları vermektir.

γ , α 'nın TB-adjoint eğrisi ve $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma, \kappa_\gamma, \tau_\gamma\}$ γ 'nın Frenet-Serret elemanları olmak üzere γ eğrisini üzerinde bulunduran yüzey

$$\varphi_\gamma(s, v) = \gamma(s) + x(s, v)T_\gamma(s) + y(s, v)N_\gamma(s) + z(s, v)B_\gamma(s) \quad (15)$$

şeklinde ifade edilir.

γ , α 'nın TB-adjoint eğrisi olduğundan (15) denkleminde (1) ve (3) denklemlerindeki ilgili eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (T_\alpha + B_\alpha) ds + x(s, v) \frac{1}{\sqrt{2}} (T_\alpha + B_\alpha) \\ &+ y(s, v) N_\alpha + z(s, v) \frac{1}{\sqrt{2}} (-T_\alpha + B_\alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

elde edilir.

Bulgularımızın ilk kısmında yaptığımız işlemler göz önüne alınarak ilgili tanım ve denklemler kullanılırsa aşağıdaki teoremleri elde ederiz:

Teorem 8. α 'nın TB-adjoint eğrisi γ 'nın (16) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v_0} - \frac{\partial z}{\partial v_0} = \sqrt{2}(\kappa_\alpha - \tau_\alpha)g(s), g(s) \neq 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

olmalıdır.

Uyarı 1. (16) nolu yüzeyin regüler olması yani yüzeyin normalinin tanımlanabilmesi için (17) nolu şartta $\kappa_\alpha \neq \tau_\alpha$ olması gerektiği de unutulmamalıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise $\tau_\alpha = 0$ ve dolayısıyla $f = 0$ olacağından α 'nın TB-adjoint eğrisi γ 'nın (16) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v_0} - \frac{\partial z}{\partial v_0} = \sqrt{2}\kappa_\alpha g(s), g(s) \neq 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

şartları sağlanmalıdır.

Uyarı 2. (18) nolu şartta α eğrisi Frenet eğrisi olduğundan $\kappa_\alpha \neq 0$ olup dolayısıyla yüzeyin regülerliğini bozan bir durum söz konusu değildir.

Teorem 9. α 'nın TN-adjoint eğrisi γ 'nın (16) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} \neq 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v_0} = \frac{\partial z}{\partial v_0}. \end{array} \right. \quad (19)$$

olmalıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise de α 'nın TB-adjoint eğrisi γ 'nın (16) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için yine (19) nolu şart sağlanır.

Teorem 10. α 'nın TB-adjoint eğrisi γ 'nın (16) nolu yüzey üzerinde hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v_0} - \frac{\partial z}{\partial v_0} \right) = 2g(s), g(s) \neq 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} \neq 0, \tau_\alpha = -\kappa_\alpha, \\ \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (20)$$

olmasıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise α 'nın TB-adjoint eğrisi γ eğrilik çizgisi olamaz.

NB-adjoint eğrili yüzey ailesi

α , E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen Frenet eğrisi olsun. ζ da α 'nın NB-adjoint eğrisi olsun. Amacımız α 'nın NB-adjoint eğrisi olan ζ eğrisinin yüzey üzerinde hem parametrik hem de sırasıyla geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli koşulları vermektir.

ζ , α 'nın NB-adjoint eğrisi ve $\{T_\zeta, N_\zeta, B_\zeta, \kappa_\zeta, \tau_\zeta\}$ ζ 'nın Frenet-Serret elemanları olmak üzere γ eğrisini üzerinde bulunduran yüzey

$$\varphi_\zeta(s, v) = \zeta(s) + x(s, v)T_\zeta(s) + y(s, v)N_\zeta(s) + z(s, v)B_\zeta(s) \quad (21)$$

şeklinde ifade edilir.

ζ , α 'nın NB-adjoint eğrisi olduğundan (21) denkleminde (1) ve (4) nolu denklemlerdeki ilgili eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_\zeta(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (N_\alpha + B_\alpha) ds + x(s, v) \frac{1}{\sqrt{2}} (T_\alpha + B_\alpha) \\ &+ y(s, v) \frac{1}{\sqrt{2 + f^2}} (-T_\alpha + N_\alpha + fB_\alpha) \\ &+ z(s, v) \frac{1}{\sqrt{4 + 2f^2}} (2fT_\alpha - fN_\alpha + B_\alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

elde edilir.

Teorem 11. α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın (22) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \kappa_\alpha = -2m(s) \left(f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right), \\ \tau_\alpha = -m(s) \left(\frac{\partial y}{\partial v_0} A - 2f \frac{\partial z}{\partial v_0} B \right), \quad m(s) \neq 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise $\tau_\alpha = 0$ ve dolayısıyla $f = 0$ olacağından α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın (22) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = -\frac{1}{2} \kappa_\alpha n(s), \quad n(s) \neq 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

şartları sağlanmalıdır.

Uyarı 3. (23) nolu şartta α eğrisi Frenet eğrisi olduğundan $\kappa_\alpha \neq 0$ olup dolayısıyla yüzeyin regülerliğini bozan bir durum söz konusu değildir.

Teorem 12. α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın (22) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = 0, \\ \tau_\alpha = 0. \end{array} \right. \quad (25)$$

olmalıdır.

Sonuç 7. α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın asimptotik olması için α eğrisi düzlemsel ve $\frac{\partial z}{\partial v_0} = 0$ olmalıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın (22) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için

$$\begin{cases} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = k(s), k(s) \neq 0. \end{cases} \quad (26)$$

olmalıdır.

Teorem 13. α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın (22) nolu yüzey üzerinde hem parametre eğrisi hem de eğrilik çizgisi olması için

$$\begin{cases} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \sqrt{2}(f \frac{\partial y}{\partial v_0} A + 2 \frac{\partial z}{\partial v_0} B) = p(s)(-A \cos \theta(s) + 2fB \sin \theta(s)), \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} A - 2f \frac{\partial z}{\partial v_0} B = \sqrt{2}p(s)(fA \cos \theta(s) + B \sin \theta(s)), p(s) \neq 0, \\ \theta = -\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_\alpha + \sqrt{2} \frac{f'}{1+2f^2} \right) ds. \end{cases} \quad (27)$$

olmasıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise α 'nın NB-adjoint eğrisi ζ 'nın (22) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = l(s) \sin \theta(s), \quad l(s) \neq 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = -l(s) \cos \theta(s) \\ \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \kappa_\alpha ds. \end{array} \right. \quad (28)$$

olmasıdır.

TNB-adjoint eğrili yüzey ailesi

α , E^3 de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ Frenet-Serret elemanları ile verilen Frenet eğrisi olsun. ψ da α 'nın TNB-adjoint eğrisi olsun. Amacımız α 'nın TNB-adjoint eğrisi olan ψ eğrisinin yüzey üzerinde hem parametrik hem de sırasıyla geodezik, asimptotik ve eğrilik çizgisi olması için gerekli koşulları vermektir.

ψ , α 'nın TNB-adjoint eğrisi ve $\{T_\psi, N_\psi, B_\psi, \kappa_\psi, \tau_\psi\}$ ψ 'nın Frenet-Serret elemanları olmak üzere ψ eğrisini üzerinde bulunduran yüzey

$$\varphi_\psi(s, v) = \zeta(s) + x(s, v)T_\psi(s) + y(s, v)N_\psi(s) + z(s, v)B_\psi(s) \quad (29)$$

şeklinde ifade edilir.

ψ , α 'nın TNB-adjoint eğrisi olduğundan (29) denkleminde (1) ve (5) nolu denklemlerdeki ilgili eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_{\psi}(s, v) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int (T_{\alpha} + N_{\alpha} + B_{\alpha}) ds + x(s, v) \frac{1}{\sqrt{3}} (T_{\alpha} + N_{\alpha} + B_{\alpha}) \\
&+ y(s, v) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-f+f^2}} (-T_{\alpha} + (1-f)N_{\alpha} + fB_{\alpha}) \\
&+ z(s, v) \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{1-f+f^2}} ((2f-1)T_{\alpha} - (1+f)N_{\alpha} + (2-f)B_{\alpha})
\end{aligned} \tag{30}$$

elde edilir.

Teorem 14. α 'nın TNB-adjoint eğrisi ψ nın (30) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ f = \frac{\tau_{\alpha}}{\kappa_{\alpha}} = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = -\frac{\sqrt{18}}{6} \tau_{\alpha} m(s), \quad m(s) \neq 0. \end{array} \right. \tag{31}$$

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise $\tau_{\alpha} = 0$ ve dolayısıyla $f = 0$ olacağından α 'nın TNB-adjoint eğrisi ψ 'nın (30) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de geodezik olması için $\kappa_{\alpha} = 0$ olması gerekir. α eğrisi Frenet eğrisi olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla α eğrisinin düzlemsel olması durumunda α 'nın TNB-adjoint eğrisi ψ , yüzey üzerinde geodezik olamaz.

Teorem 15. α 'nın TNB-adjoint eğrisi ψ nın (30) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ f = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = l(s), \quad l(s) \neq 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

olmalıdır.

Özel olarak eğer α eğrisi düzlemsel ise $\tau_\alpha = 0$ ve dolayısıyla $f = 0$ olacağından α 'nın TNB-adjoint eğrisi ψ 'nın (30) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de asimptotik olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ f = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v_0} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = l(s), \quad l(s) \neq 0. \end{array} \right. \quad (33)$$

olmalıdır.

Teorem 16. α eğrisi düzlemsel ise α 'nın TNB-adjoint eğrisi ψ 'nın (30) nolu yüzey üzerinde hem parametrik hem de eğrilik çizgisi olması için

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s, v_0) = y(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} = q(s) \sin \theta(s), \quad q(s) \neq 0, \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} = q(s) \cos \theta(s), \\ \theta(s) = n\pi - \frac{5\pi}{6} \quad \text{veya} \quad \theta(s) = n\pi - \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (34)$$

olmalıdır.

Örnekler

Örnek 1. $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ birim hızlı çember eğrisini alalım. Bilindiği üzere $\kappa_\alpha = 1$, $\tau_\alpha = 0$ olup düzlemsel bir eğridir. α eğrisinin Frenet vektörleri

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\alpha = (-\sin s, \cos s, 0), \\ N_\alpha = (-\cos s, -\sin s, 0), \\ B_\alpha = (0, 0, 1). \end{array} \right.$$

olmak üzere α 'nın TN adjoint eğrisi

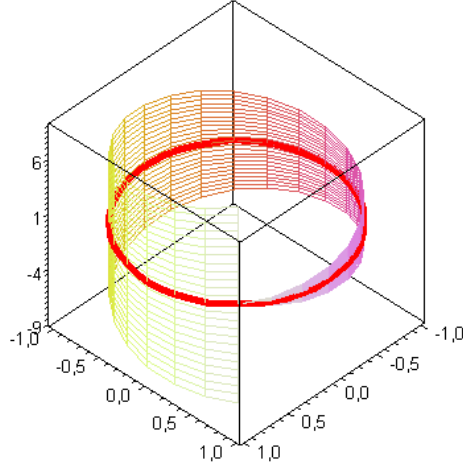
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s, 0) \text{ ile tanımlıdır.}$$

- a) $v_0 = 0$, $x(s, v_0) = y(s, v_0) \equiv 0$, $z(s, v_0) = -vs$ ve $\lambda(s) = s$ seçilirse (11) nolu şart sağlanmış olur. Böylece β geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\beta_1}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s - \sin s), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s + \sin s), -vs \right)$$

olup $0 \leq s \leq 2\pi$, $-\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 1 β geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

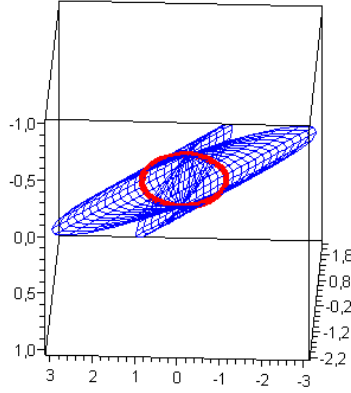


- b) $v_0 = 0$, $x(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0$, $y(s, v_0) = \sqrt{2}v$ seçilirse (12) nolu şart sağlanmış olur. Böylece β asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\beta_2}(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s - \sin s) + v(\sin s - \cos s), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s + \sin s) - v(\cos s + \sin s), 0 \end{pmatrix}$$

olup $0 \leq s \leq 2\pi$, $-\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 2 β asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



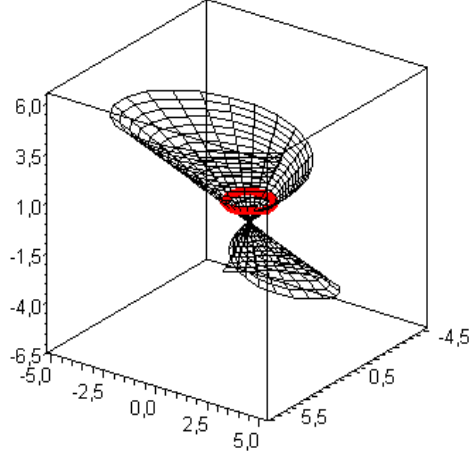
c) $v_0 = 0, \theta = \frac{\pi}{4}, x(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = sv \sin(\frac{\pi}{4}), z(s, v_0) = -sv \cos(\frac{\pi}{4})$

seçilirse (14) nolu şart sağlanmış olur. Böylece β eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\beta_3}(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s - \sin s) + \frac{sv}{2}(\sin s - \cos s), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s + \sin s) - \frac{sv}{2}(\cos s + \sin s), -\frac{sv\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

olup $0 \leq s \leq 2\pi, -\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 3 β eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi



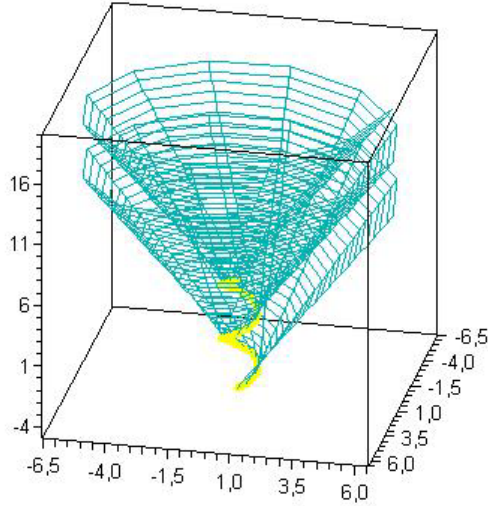
α 'nın TB adjoint eğrisi $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s)$ ile tanımlıdır.

- d) $v_0 = 0$, $x(s, v_0) = \sqrt{2}v + v$, $y(s, v) \equiv 0$, $z(s, v_0) = v$, $g(s) = 1$ seçilirse (18) nolu şart sağlanmış olur. Böylece γ geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\gamma_1}(s, v) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s + \frac{v}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + v \cos s - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos s, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} s + \frac{v}{\sqrt{2}} (2 + \sqrt{2}) \end{array} \right)$$

olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 4 γ geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

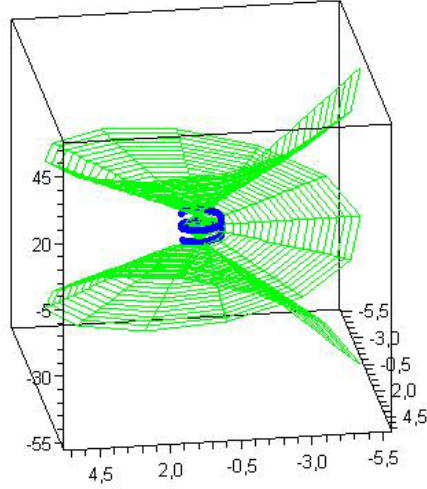


- e) $v_0 = 0$, $x(s, v_0) = z(s, v_0) = vs$, $y(s, v_0) = v$ seçilirse (19) nolu şart sağlanmış olur. Böylece γ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\gamma_2}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \sin s, \sqrt{2}vs \right)$$

olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 5 γ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



α eğrisi düzlemsel olduğundan TB adjoint eğrisi eğrilik çizgisi olamaz.

α 'nın NB adjoint eğrisi $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, s)$ ile tanımlıdır.

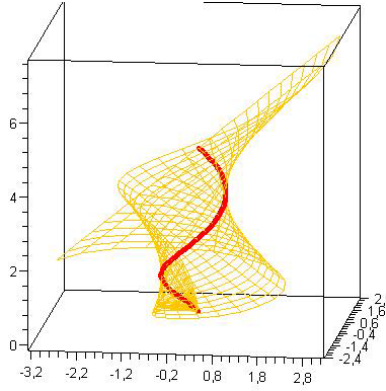
$$f) \quad v_0 = 0, \quad x(s, v_0) = y(s, v) \equiv 0, \quad z(s, v_0) = -\frac{1}{2}sv, \quad n(s) = s$$

seçilirse (24) nolu şart sağlanmış olur. Böylece δ geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\delta_1}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{sv}{2\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{sv}{2\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} s - \frac{sv}{2\sqrt{2}} \right)$$

olup $0 \leq s \leq 2\pi$, $-\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 6 δ geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

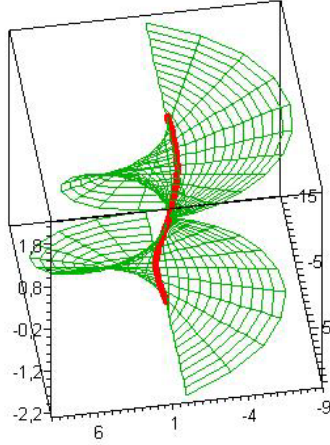


- g) $v_0 = 0$, $x(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0$, $y(s, v_0) = \sqrt{2}vs$ seçilirse (26) nolu şart sağlanmış olur. Böylece δ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\delta_2}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + \sqrt{2}vs \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \sqrt{2}vs \cos s, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

olup $-\pi \leq s, v \leq \pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

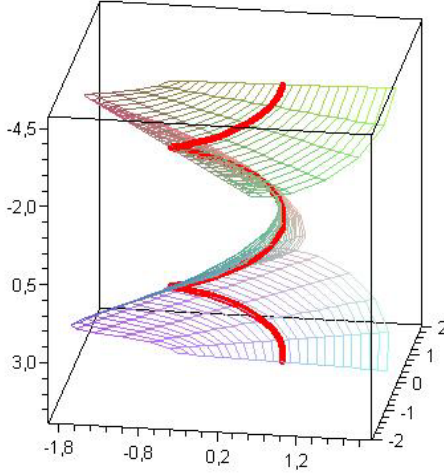
Şekil 7 δ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



- h) $v_0 = 0, \theta = -\frac{s}{\sqrt{2}}, x(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = v \sin(-\frac{s}{\sqrt{2}}), z(s, v_0) = -v \cos(-\frac{s}{\sqrt{2}})$
ve $l(s) = 1$ seçilirse (28) nolu şart sağlanmış olur. Böylece δ
eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\delta_3}(s, v) = \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos(s - \frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin(\frac{s}{\sqrt{2}} - s), \\ \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}) \end{array} \right)$$

Şekil 8 δ eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi



α 'nın

TNB

adjoint

eğrisi

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos s - \sin s, \sin s + \cos s, s) \text{ ile tanımlıdır.}$$

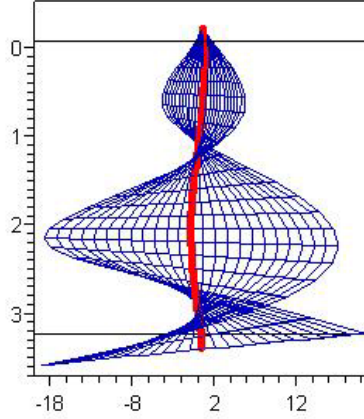
α eğrisi düzlemsel olduğundan TNB adjoint eğrisi geodezik olamaz.

- i) $v_0 = 0, s \neq 0, x(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = \sqrt{2}vs$
seçilirse (33) nolu şart sağlanmış olur. Böylece ζ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\zeta_1}(s, v) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos s - \sin s) + vs(\sin s - \cos s), \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos s + \sin s) - vs(\sin s + \cos s), \frac{s}{\sqrt{3}} \end{array} \right)$$

olup $0 \leq s \leq 2\pi, -\pi \leq v \leq \pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 9 ζ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



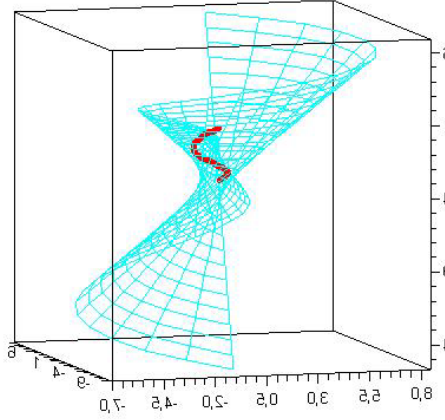
j) $v_0 = 0, \theta = \frac{\pi}{6}, x(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = vs \sin(\frac{\pi}{6}), z(s, v_0) = vs \cos(\frac{\pi}{6})$

ve $q(s) = s$ seçilirse (34) nolu şart sağlanmış olur. Böylece ζ eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\zeta_2}(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos s - \sin s) + \frac{vs}{2}(\sin s - \cos s) + \frac{\sqrt{2}}{4}vs(\cos s + \sin s), \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos s + \sin s) - \frac{vs}{2}(\sin s + \cos s) + \frac{\sqrt{2}}{4}vs(-\cos s + \sin s), \\ \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}vs \end{pmatrix}$$

olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi, -2\pi \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 10 ζ eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi



Örnek 2. $\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ birim hızlı

helis eğrisini alalım. Bilindiği üzere $\kappa_\alpha = \tau_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dır. α eğrisinin

Frenet vektörleri

$$\begin{cases} T_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1 \right), \\ N_\alpha = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right), \\ B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1 \right). \end{cases}$$

olmak üzere α 'nın TN adjoint eğrisi

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), s \right)$$

ile tanımlıdır.

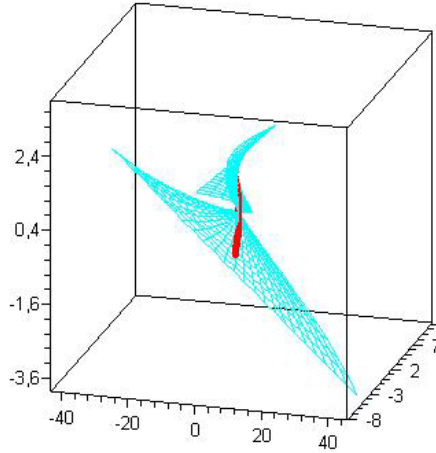
a) $v_0 = 0, x(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = -\frac{2}{3}sv, z(s, v_0) = \frac{sv}{\sqrt{2}}$

seçilirse (10) nolu şart sağlanmış olur. Böylece β geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\beta_1}(s, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{4}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)sv \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)sv \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)sv \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}sv \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \\ s + \left(\frac{3}{2\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)\right)sv \end{pmatrix}$$

olup $-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$, $-2\pi \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 11 β geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

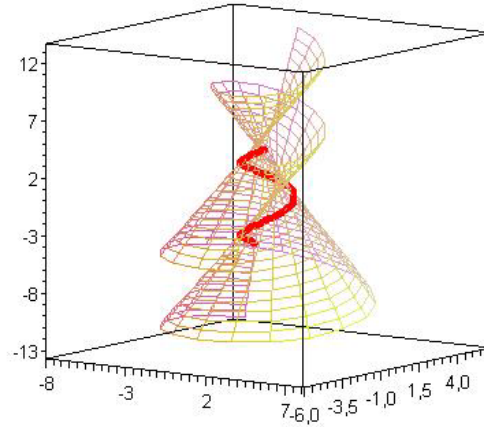


b) $v_0 = 0, x(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = \sqrt{2}v$ seçilirse (12) nolu şart sağlanmış olur. Böylece β asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\beta_2}(s, v) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + v \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - v \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + v \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \end{array} \right)$$

olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, $-2\pi \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 12 β asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



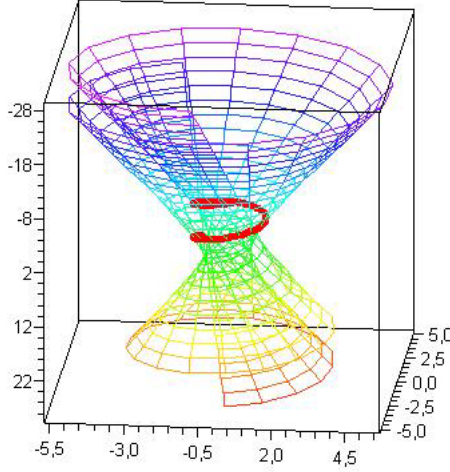
c) $v_0 = 0$, $\theta = -\frac{s}{2\sqrt{2}}$, $x(s, v_0) \equiv 0$, $y(s, v_0) = v\sqrt{3}$, $z(s, v_0) = v\sqrt{6}$

seçilirse (13) nolu şart sağlanmış olur. Böylece β eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\beta_3}(s, v) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + v \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - v \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}(4 + \sqrt{2}) \end{array} \right)$$

olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, $-2\pi \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 13 β eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi



α 'nın TB adjoint eğrisi $\gamma = (0, 0, s)$ ile tanımlıdır.

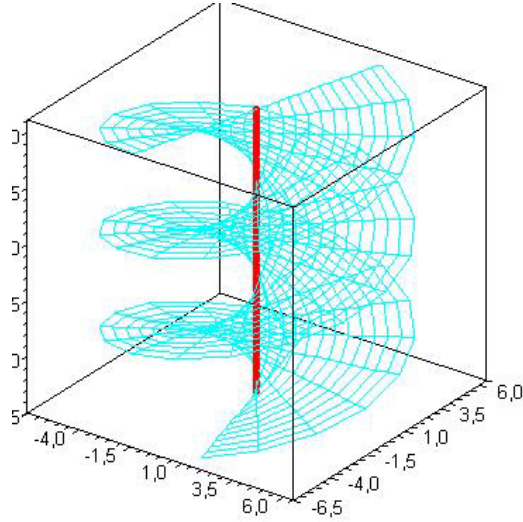
$\kappa_\alpha = \tau_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğundan $\frac{\partial x(s, v)}{\partial v_0} = \frac{\partial z(s, v)}{\partial v_0}$ olup yüzeyin normalini tanımlı olamaz. Dolayısıyla α 'nın TB adjoint eğrisi yüzey üzerinde geodezik olamaz.

- d) $v_0 = 0$, $x(s, v_0) = z(s, v_0) \equiv 0$, $y(s, v_0) = v$ seçilirse (19) nolu şart sağlanmış olur. Böylece γ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\gamma_2}(s, v) = \left(-v \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -v \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), s \right)$$

olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 14 γ asimptotik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



$\kappa_\alpha = \tau_\alpha$ olduğundan (20) nolu şart sağlanmayıp α 'nın TB adjoint eğrisi yüzey üzerinde eğrilik çizgisi de olamaz.

α 'nın NB adjoint eğrisi

$$\delta = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{2} \right)$$

ile tanımlıdır.

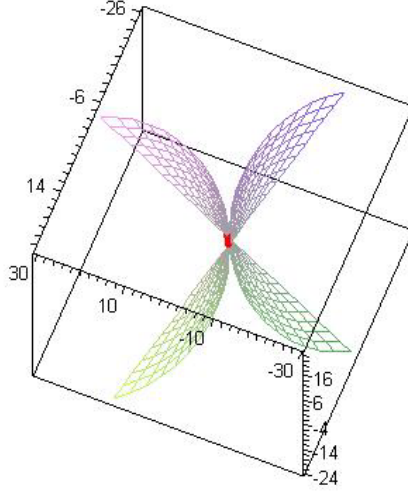
e) $v_0 = 0, \quad x(s, v_0) \equiv 0, \quad y(s, v) = -6\sqrt{3}sv \quad z(s, v_0) = \sqrt{6}sv$

seçilirse (23) nolu şart sağlanmış olur. Böylece δ geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\delta_1}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{sv}{2\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{sv}{2\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} s - \frac{sv}{2\sqrt{2}} \right)$$

olup $0 \leq s \leq 2\pi, -\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}$ değerleri için bu yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir:

Şekil 15 δ geodezik eğrili yüzey ailesinin bir üyesi



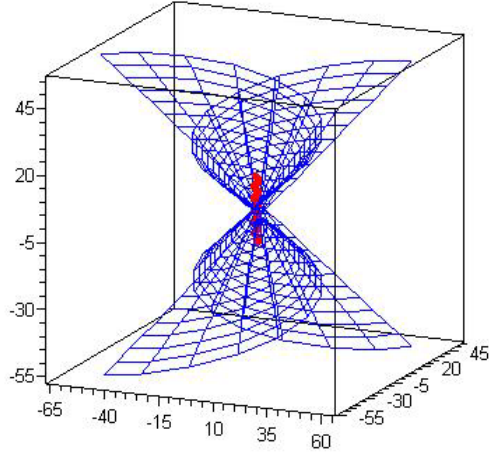
$\tau_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ olduğundan (25) nolu şart sağlanmaz.

Dolayısıyla α nın NB adjoint eğrisi yüzey üzerinde asimptotik olamaz.

- f) $v_0 = 0, \theta = -s\sqrt{2}, x(s, v_0) \equiv 0, y(s, v_0) = v(\sqrt{2} \cos(-s\sqrt{2}) + 2 \sin(-s\sqrt{2}) + \sqrt{2}),$
 $z(s, v) = v$ ve $p(s) = 1$ seçilirse (27) nolu şart sağlanmış
 olur. Böylece δ eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi

$$\varphi_{\delta_3}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos\left(s - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - s\right), \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

Şekil 16 δ eğrilik çizgili yüzey ailesinin bir üyesi



α 'nın TNB adjoint eğrisi

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sqrt{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{2s}{\sqrt{2}} \right) \text{ ile tanımlıdır.}$$

α eğrisi için $f = \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha} = 1 \neq 2$ olduğundan (31) ve (33) nolu şartlar sağlanmaz. Dolayısıyla α 'nın TNB adjoint eğrisi yüzey üzerinde geodezik ve asimptotik olamaz.

Kaynakça

Choi, J.H. & Kim, Y.H. (2012) Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Applied Math. and Comp.*, 218 (2012), 9116–9124.

Choi, J.H. , Kim, Y.H., & Ali, A.T. (2012). Some associated curves of Frenet non-lightlike curves in E^3_1 *J. Math. Anal. Appl.* , 394 (2012), 712–723.

Deshmukh, S. , Chen, B.Y., & Algehanemi, A. (2018) Natural Mates of Frenet Curves in Euclidean 3-space. *Turk. J. of Math.* , 42 (2018), 2826–2840.

Nurkan, S. K. , Güven, İ. A. , & Karacan, M.K. (2019). Characterizations of adjoint curves in Euclidean 3-space. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 89 (1), 155–161.

Izumiya, S. & Takeuchi, N. (2003). Special curves and ruled surfaces. *Beitrage zur Alg. und Geo. Contributions to Alg. and Geo.*, 44 (1), 203–212.

Izumiya, S. & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turk J. Math.* , 28 (2), 153–163.

Ali, A.T. (2010). Special Smarandache curves in the Euclidean space. *International J. Math. Combin.* , 2 (2010), 30–36.

Abdel-Aziz, H.S. & Khalifa Saad, M. (2017). Computation of Smarandache curves according to Darboux frame in Minkowski 3-space. *J. of Egyptian Math. Society*, 25 (4), 382–390.

Kahraman, T. & Ugurlu, H.H. (2014). Dual Smarandache curves and Smarandache ruled surfaces. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 2 (1), 83–98.

Elzawy, M. & Mosa, S. (2017). Smarandache curves in the Galilean 4-space G_4 . *J. of Egyptian Math. Society*, 25 (1), 53–56.

Arıkan, M. & Nurkan, S. K.(2020). Adjoint Curve According to Modified Orthogonal Frame with Torsion in 3-Space. *Usak University Journal of Science and Natural Sciences*, 2 (2020), 54–64.

Nurkan, S. K. & Güven, İ. A. (2022). A New Approach for Smarandache Curves. *Turk. J. Math. Comput. Sci.* 14 (1), 155–165.

Wang, G.J, Tang, K. , & Tai, C.L.(2004). Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. *Computer Aided Design*, 36 (2004); 36: 447-459.

Kasap, E, & Akyıldız, F.T. (2006). Surfaces with common geodesic in Minkowski 3-space. *Applied Mathematics and Computation*, 177 (2006), 260-270.

Li, C.Y. , Wang, R. H., & Zhu, C.G. (2011). Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature. *Computer Aided Design* 43 (2011); 43: 1110-1117.

Bayram, E. (2020). Surface pencil with a common adjoint curve. *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (2020), 1649-1659.

Atalay, G.Ş. & Kasap, E. (2016a). Surfaces family with common Smarandache asymptotic curve. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 34 (1), 9-20

Atalay, G.Ş & Kasap, E. (2016b). Surfaces family with common Smarandache geodesic curve according to Bishop frame in Euclidean space. *Math. Sci. Appl. E-Notes*, 4 (1), 164–174.

Atalay, G.Ş & Kasap, E. (2017). Surfaces family with common Smarandache geodesic curve. *Journal of Science and Arts*, 17 (4), 651-664

Atalay, G.Ş. (2018a). Surfaces family with a common Mannheim asymptotic curve, *J. Appl. Math. Comput.* 2 (4), 143–154.

Atalay, G.Ş. (2018b). Surfaces family with a common Mannheim geodesic curve,. *J. Appl.Math. Comput.* 2 (4), 155–165.

Atalay, G.Ş. & Ayvaci, K.H. (2021a). Surface family with a common Bertrand-B isoasymptotic curve. *SDU J. Nat. Appl. Sci.* 45 (2), 262–268.

Atalay, G.Ş. & Ayvaci, K.H. (2021b). Surface family with a common Mannheim B-geodesic curve. *Balkan J. Geom. Appl.* 26 (2), 1–12.

Ayvaci, K.H & Atalay, G.Ş. (2023). Surface family with a common Mannheim B-pair asymptotic curve. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 20 (13), 2350229 (13 pages).

Atalay, G.Ş. & Murat, H. (2024). Surface Families With Common Mannheim-B Curvature Line. *Journal of Science and Arts*, 24 (2), 357-368.

Atalay, G.Ş. (2024). A new approach to special curved surface families according to modified orthogonal frame. *AIMS Mathematics*, 9 (8), 20662–20676.

Atalay, G.Ş. & Ayvaci Şimşek, K.H. (2025). Family of Surfaces with a Common Special Polynomial Curves. *Bol. Soc. Paran. Mat.* 2025 (43), 1–14.

Atalay, G.Ş. & Murat, H. (2025). On structuring a family of parametric and ruled surfaces with common line of curvatures according to Bishop frame. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 18 (2), 14 pages.

BÖLÜM 8

GeoGebra ile Matematik Eğitimi: 2007-2024 Dönemi Kapsamlı Literatür Analizi

Ceyda CEVAHİR YILDIZ¹

GİRİŞ

Yüzyılın dijital çağında, eğitim sistemlerinin teknoloji ile entegrasyonu, özellikle matematik öğretimi alanında paradigmatik dönüşümlere yol açmıştır (Baydaş, Gökteş & Tatar, 2014; Şimşek & Yaşar, 2019). Teknolojinin eğitime entegrasyonu, geleneksel öğretim yaklaşımlarının sınırlılıklarını aşarak, öğrencilerin matematiksel kavramları daha derinlemesine anlamalarını ve bu kavramları gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendirebilmelerini sağlamaktadır (Kaya & Öçal, 2018; Saha, Ayub & Tarmizi, 2010; Zengin & Tatar, 2017). Bu dönüşüm sürecinde, dinamik matematik yazılımları, soyut matematiksel kavramları somutlaştırma, görselleştirme ve interaktif öğrenme deneyimleri sunma konularında benzersiz olanaklar sunmaktadır (Baki, Kosa & Güven, 2011; Güven & Kosa, 2008; Sarpkaya Aktaş & Erdoğan, 2024).

Dinamik matematik yazılımları arasında öne çıkan GeoGebra, Markus Hohenwarter tarafından 2001 yılında geliştirilen

¹ Dr. Öğr. Üyesi, İstanbul Gelişim Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Programcılığı Programı, Orcid: 0000-0002-9498-4930, ccevahir@gelisim.edu.tr

ve günümüzde dünya çapında milyonlarca kullanıcıya sahip olan açık kaynak kodlu bir matematik yazılımıdır (Hohenwarter & Jones, 2007; Hohenwarter & Lavicza, 2007; Preiner, 2008). GeoGebra'nın eğitim dünyasında bu denli yaygın kabul görmesinin temel nedenleri arasında; geometri, cebir ve analiz alanlarını entegre bir şekilde sunması, çoklu temsil sistemlerini (cebirsal, geometrik, sayısal ve grafik) eş zamanlı olarak kullanabilme imkanı, platform bağımsızlığı, ücretsiz erişim olanağı ve 60'tan fazla dilde kullanım desteği yer almaktadır (Baydaş, Göktaş & Tatar, 2014; Hohenwarter & Jones, 2007; Hohenwarter & Lavicza, 2007). Yazılımın dinamik yapısı, öğrencilerin matematiksel nesneleri manipüle etmelerine, parametreleri değiştirmelerine ve sonuçları anlık olarak gözlemlmelerine olanak tanıyarak, keşfedici ve yapılandırmacı öğrenme yaklaşımlarını desteklemektedir (Carter & Ferrucci, 2009; Preiner, 2008; Tatar & Zengin, 2016).

Matematik eğitimi araştırmalarında GeoGebra'nın etkinliğini değerlendiren çalışmaların sayısı, özellikle son on yılda hızlı bir artış göstermiştir (Baydaş, Göktaş & Tatar, 2014; Şimşek & Yaşar, 2019). Meta-analiz çalışmaları, GeoGebra kullanımının öğrencilerin matematik dersindeki akademik başarılarına pozitif etkiler sağladığını ve geleneksel öğretim yöntemlerine kıyasla daha etkili öğrenme sonuçları ortaya çıkardığını göstermektedir (Günhan & Açıkan, 2016; Kaya & Öçal, 2018; Zulnaidi & Zamri, 2017). Bu araştırmalar, yazılımın öğrenci motivasyonuna, matematiksel düşünme becerilerine, problem çözme yeteneklerine, kavramsal anlamaya ve uzamsal görselleştirme becerilerine olan olumlu etkilerini çeşitli metodolojik yaklaşımlarla ortaya koymaktadır (Baki, Kosa & Güven, 2011; Güven, 2012; Saha, Ayub & Tarmizi, 2010; Sarpkaya Aktaş & Erdoğan, 2024; Zulnaidi & Zamri, 2017).

Tematik ve metodolojik incelemeler, GeoGebra ile ilgili araştırmaların çoğunlukla geometri, fonksiyonlar, trigonometri ve analiz konularında yoğunlaştığını, araştırma yöntemlerinin ise

ağırlıklı olarak deneysel ve yarı-deneysel desenlerden oluştuğunu göstermektedir (Baydaş, Göktaş & Tatar, 2014; Çetin, Erdoğan & Yazlık, 2015; Günhan & Açıan, 2016; Şimşek & Yaşar, 2019). Ancak, bu alandaki araştırmaların sistematik bir şekilde analiz edilmesi, sentezlenmesi ve mevcut bulguların kapsamlı bir değerlendirmesinin yapılması, hem alan yazındaki mevcut durumun objektif bir şekilde ortaya konması hem de gelecekteki araştırma yönelimlerinin belirlenmesi açısından kritik önem taşımaktadır (Kaya & Öçal, 2018; Şimşek & Yaşar, 2019; Turgut, 2019). Bu bağlamda, GeoGebra ile ilgili yayınlanan akademik çalışmaların sistematik incelenmesi, eğitim teknolojisi ve matematik eğitimi alanlarındaki bilgi birikiminin konsolidasyonu için gerekli bir adım olarak değerlendirilmektedir (Baydaş, Göktaş & Tatar, 2014; Kaya & Öçal, 2018; Şimşek & Yaşar, 2019).

YÖNTEM

Bu çalışmada, GeoGebra ile ilgili akademik literatürün kapsamlı analizi için sistematik literatür tarama yöntemi kullanılmıştır. Çalışmaya dahil edilen 58 yayın, tematik içerik analizi ve kronolojik sınıflandırma yöntemleri ile incelenmiştir. Yayınlar beş ana tema altında gruplandırılmıştır: Öğrenme Başarısına Etki, Tutum ve Görüşler, Yazılım İncelemeleri, Öğretmen Çalışmaları, Kavramsal Anlama.

1. Öğrenme Başarısına Etki: GeoGebra'nın öğrenci akademik başarısına etkisini inceleyen deneysel çalışmalar
2. Tutum ve Görüşler: Öğrenci ve öğretmenlerin GeoGebra hakkındaki görüş ve tutumlarını inceleyen çalışmalar
3. Yazılım İncelemeleri: GeoGebra'nın özelliklerini, potansiyelini ve sınırlılıklarını inceleyen çalışmalar
4. Öğretmen Çalışmaları: Öğretmenlerin GeoGebra kullanımına yönelik mesleki gelişim çalışmaları

5. Kavramsal Anlama: GeoGebra'nın matematiksel kavramların anlaşılmasına etkisini inceleyen çalışmalar

BULGULAR

Yapılan çalışmaların kronolojik sırası ve temaları göz önüne alınarak bakıldığında (Tablo 1), GeoGebra araştırmalarının "etki odaklı" bir yaklaşım sergilediğini göstermektedir. Araştırmacılar öncelikle yazılımın işe yarayıp yaramadığını ve paydaşların ne düşündüğünü merak etmişlerdir.

Öğrenme başarısına etki teması %37,9 oranıyla araştırmaların üçte birinden fazlasını oluşturmaktadır. Bu durum, GeoGebra araştırmalarının ağırlıklı olarak deneysel nitelik taşıdığını ve yazılımın akademik başarıya etkisini ölçmeye odaklandığını göstermektedir. 2010 yılından itibaren bu alanda sürekli bir artış trendi gözlenmekte ve araştırmacıların nicel araştırma yöntemlerini tercih ettikleri anlaşılmaktadır.

Tutum ve görüşler teması %27,6 oranıyla ikinci en büyük araştırma alanını oluşturmaktadır. Bu tema altındaki çalışmalar, öğrenci, öğretmen ve öğretmen adaylarının GeoGebra'ya yönelik algılarını, tutumlarını ve deneyimlerini incelemektedir. Bu alandaki araştırmalar genellikle nitel veya karma yöntem yaklaşımlarını benimser ve paydaş perspektiflerine yoğun ilgi gösterir.

Yazılım incelemeleri teması %19,0 oranıyla üçüncü sırada yer almaktadır. Bu tema altındaki çalışmalar, meta-analiz ve sistematik değerlendirmeler içermekte, yazılımın potansiyeli ve sınırlılıklarını kapsamlı bir şekilde incelemektedir. 2007'den 2024'e kadar düzenli bir yayın akışı gözlenmekte ve alanın olgunlaşma sürecinde sistematik değerlendirmelere duyulan ihtiyacı yansıtmaktadır.

Kavramsal anlama teması %13,8 oranıyla dördüncü sırada bulunmaktadır. Bu alandaki çalışmalar özellikle uzamsal beceriler ve görselleştirme konularına odaklanmakta, bilişsel süreçleri

derinlemesine incelemektedir. Görece az sayıda olmakla birlikte, bu çalışmalar alanın teorik temellerini güçlendiren nitelikte derinlemesine araştırmalar sunmaktadır.

Öğretmen çalışmaları teması sadece %1,7 oranıyla en az araştırılan alanı oluşturmaktadır. Bu durum, GeoGebra araştırmalarında öğretmen perspektifinin ve mesleki gelişim boyutunun ihmal edildiğini göstermekte ve önemli bir araştırma boşluğuna işaret etmektedir.(Bknz. Tablo 2)

Araştırma alanının güçlü yönleri arasında deneysel kanıt zenginliği, paydaş perspektifi çeşitliliği, sistematik değerlendirme çalışmalarının varlığı ve 17 yıllık sürekli araştırma geleneği sayılabilir. Bu güçlü yönler, alanın sağlam bir temele oturduğunu ve sürdürülebilir bir gelişim seyri izlediğini göstermektedir.

Zayıf yönler ise öğretmen odaklı araştırmaların eksikliği, kavramsal derinliğin yetersizliği ve uygulama-teori dengesizliği olarak özetlenebilir. Özellikle öğretmen mesleki gelişimi alanındaki araştırma eksikliği, alanın en kritik zayıflığını oluşturmaktadır.

Tablo 1 Yayınlarının Yıllara Göre Sıralı Tematik Sınıflandırılması

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
1	2007	Yazılım İncelemeleri	Hohenwarter, M., & Jones, K.	Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra
2	2007	Öğretmen Çalışmaları	Hohenwarter, M., & Lavicza, Z.	Mathematics teacher development with ICT: Towards an international GeoGebra institute
3	2008	Kavramsal Anlama	Güven, B., & Kosa, T.	The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills
4	2008	Yazılım İncelemeleri	Preiner, J.	Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of GeoGebra

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
5	2009	Kavramsal Anlama	Şataf, H. A.	Bilgisayar destekli matematik öğretiminin ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi ve üçgenler alt öğrenme alanındaki başarısına etkisi
6	2009	Yazılım İncelemeleri	Dikovic, L.	Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level
7	2009	Yazılım İncelemeleri	Carter, J., & Ferrucci, B.	Using GeoGebra to Enhance Prospective Elementary School Teachers' Understanding of Geometry
8	2010	Öğrenme Başarısına Etki	Birgin, O., Çatlıoğlu, H., Gürbüz, R., & Aydın, S.	Investigation of the effectiveness of using GeoGebra software in teaching of quadratic functions
9	2010	Öğrenme Başarısına Etki	Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A.	The effects of GeoGebra on mathematics achievement: Enlightening coordinate geometry learning
10	2011	Öğrenme Başarısına Etki	Selçik, B., & Bilgici, G.	İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin çokgenler konusunu öğrenmelerinde GeoGebra destekli öğretimin etkisi
11	2011	Öğrenme Başarısına Etki	Selçik, N., & Bilgici, G.	GeoGebra yazılımının öğrenci başarısına etkisi
12	2011	Öğrenme Başarısına Etki	Dogan, M., & İçel, R.	The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles
13	2011	Öğrenme Başarısına Etki	İçel, R.	Bilgisayar destekli öğretimin matematik başarısı ve kaygısına etkisi: GeoGebra örneği

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
14	2011	Kavramsal Anlama	Baki, A., Kosa, T., & Güven, B.	A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers
15	2011	Öğretmen Çalışmaları	Aktümen, M., Yıldız, A., Horzum, T., & Ceylan, T.	İlköğretim matematik öğretmenlerinin GeoGebra yazılımının derslerde uygulanabilirliği hakkındaki görüşleri
16	2012	Tutum ve Görüşler	Yıldız, A., Baltacı, S., & Kurak, Y.	İlköğretim matematik öğretmenlerinin dinamik matematik yazılımı GeoGebra hakkındaki görüşleri
17	2012	Tutum ve Görüşler	Yıldız, Z., Baltacı, S., & Kurak, Y.	Öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı ile ilgili görüşleri
18	2012	Kavramsal Anlama	Güven, B.	GeoGebra destekli öğretimin öğretmen adaylarının geometriye yönelik tutumlarına etkisi
19	2013	Öğrenme Başarısına Etki	Kutluca, T.	The effect of geometry instruction with dynamic geometry software; GeoGebra on Van Hiele geometry understanding levels of students
20	2014	Öğrenme Başarısına Etki	Akgül, M. B.	The effect of using dynamic geometry software on eighth grade students' achievement and attitude towards triangles
21	2014	Öğrenme Başarısına Etki	Kan, O.	GeoGebra destekli öğretimin lineer cebir dersine ait bazı konularda akademik başarı üzerine etkisi

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
22	2014	Tutum ve Görüşler	Demir, S., & Bozkurt, A.	GeoGebra kullanımının matematik öğretmeni adaylarının teknoloji entegrasyonu öz-yeterlik algılarına etkisi
23	2014	Tutum ve Görüşler	Tatar, E., Kağızmanlı, T. B., & Akkaya, A.	Matematik öğretmenlerinin bilgisayar destekli matematik öğretimine yönelik tutumları
24	2014	Kavramsal Anlama	Ersoy, Y.	Öğretmen adaylarının GeoGebra destekli geometri öğretimi deneyimleri
25	2014	Yazılım İncelemeleri	Baydaş, Ö., Gökteş, Y., & Tatar, E.	Research trends on the use of GeoGebra in mathematics education: A content analysis study
26	2015	Öğrenme Başarısına Etki	Acar, H.	GeoGebra yazılımının ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarısına etkisi
27	2015	Öğrenme Başarısına Etki	Erdoğan, A., Çetin, İ., & Yazlık, D. Ö.	The effect of using GeoGebra software on students' achievement of transformation geometry
28	2015	Öğrenme Başarısına Etki	Özen, D.	GeoGebra kullanımının öğrencilerin matematik başarısına ve matematiğe karşı tutumuna etkisi
29	2015	Öğrenme Başarısına Etki	Çetin, İ., Erdoğan, A., & Yazlık, D. Ö.	Geogebra ile öğretimin sekizinci sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi konusundaki başarılarına etkisi
30	2015	Tutum ve Görüşler	Altun, M., & Yücel, E.	8. sınıf öğrencilerinin GeoGebra yazılımı hakkındaki görüşleri
31	2015	Tutum ve Görüşler	Ateş, S., & Bağcı, N.	Matematik öğretiminde GeoGebra yazılımının öğrenci görüşlerine göre değerlendirilmesi

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
32	2015	Tutum ve Görüşler	Baltacı, S., Yıldız, A., & Kösa, T.	Analitik Geometri Öğretiminde GeoGebra Yazılımının Potansiyeli: Öğretmen Adaylarının Görüşleri
33	2016	Tutum ve Görüşler	Genç, G., & Öksüz, C.	Pre-service mathematics teachers' attitudes towards the use of GeoGebra in mathematics teaching
34	2016	Tutum ve Görüşler	Gökçe, S., Yenmez, A. A., & Özpınar, İ.	Mathematics teachers' opinions on worksheets prepared with GeoGebra
35	2016	Kavramsal Anlama	Tatar, E., & Zengin, Y.	Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra
36	2016	Yazılım İncelemeleri	Günhan, B. C., & Açıkan, H.	Dinamik Geometri Yazılımı Kullanımının Geometri Başarısına Etkisi: Bir Meta-Analiz Çalışması
37	2017	Öğrenme Başarısına Etki	Zulnaidi, H., & Zamri, S. N. A. S.	The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievement in mathematics
38	2017	Öğrenme Başarısına Etki	Öçal, M. F.	The effect of GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge: The case of applications of derivative
39	2017	Öğrenme Başarısına Etki	Kepçeoğlu, İ., & Yavuz, İ.	GeoGebra yazılımıyla limit ve süreklilik öğretiminin öğretmen adaylarının başarısına etkisi

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
40	2017	Öğrenme Başarısına Etki	Zengin, Y., & Tatar, E.	The effect of GeoGebra software supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention
41	2017	Öğrenme Başarısına Etki	Özçakır, B.	GeoGebra yazılımı ile desteklenen matematik öğretiminin 8. sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi
42	2017	Tutum ve Görüşler	Horzum, T., & Ünlü, M.	Pre-Service Mathematics Teachers' Views about GeoGebra and Its Use
43	2018	Yazılım İncelemeleri	Kaya, A., & Öçal, M. F.	Geogebra'nın öğrencilerin matematikteki akademik başarılarına etkisi üzerine bir meta-analiz
44	2019	Tutum ve Görüşler	Yıldız, G.	7. sınıf öğrencilerinin GeoGebra destekli geometri öğretimine yönelik görüşleri
45	2019	Tutum ve Görüşler	Şimşek, N., & Yaşar, A.	GeoGebra ile ilgili lisansüstü tezlerin tematik ve yöntemsel eğilimleri: Bir içerik analizi
46	2019	Kavramsal Anlama	Turgut, M.	GeoGebra destekli matematik öğretiminin ortaokul öğrencilerinin uzamsal yeteneklerine etkisi
47	2019	Yazılım İncelemeleri	Köse, A., & Yılmaz, H.	GeoGebra eğitim programının öğretmenlerin mesleki gelişimine etkisi
48	2019	Yazılım İncelemeleri	Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A.	Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
49	2020	Tutum ve Görüşler	Celen, Y.	Student Opinions on the Use of Geogebra Software in Mathematics Teaching
50	2021	Öğrenme Başarısına Etki	Zengin, A., & Akçakın, V.	GeoGebra destekli matematik öğretiminin altıncı sınıf öğrencilerinin başarılarına etkisi: Alan ve hacim ölçme
51	2021	Tutum ve Görüşler	Kuzu, C. I.	Views of Mathematics Teacher Candidates on the Use of Geogebra in Probability Teaching
52	2022	Öğrenme Başarısına Etki	Sevgi, S., & Soylu, Y.	Trigonometrik Fonksiyonların Grafiklerini Yorumlama Konusunun Geogebra İle Tasarlanmış Etkinliklerle Öğretiminin Öğrencilerin Akademik Başarısına ve Kalıcılığa Etkisi
53	2022	Öğrenme Başarısına Etki	Yıldız, E., & Güleş, E.	Dörtgenlerin ailesel ilişkilerinin öğretiminde GeoGebra programı kullanımının 8. sınıf öğrencilerinin erişti düzeylerine etkisi
54	2022	Kavramsal Anlama	Özçakır Sümen, Ö.	Üç Boyutlu Tasarım Programlarıyla Gerçekleştirilen Etkinliklerin Sınıf Öğretmeni Adaylarının Uzamsal Becerilerinin Gelişimine Etkileri
55	2023	Tutum ve Görüşler	Barçın, N., & Yenmez, A. A.	GeoGebra Software on the Mathematical Language Developments and Self-Efficacy Perceptions of Students
56	2024	Öğrenme Başarısına Etki	Muhtarom, M., Murtianto, Y. H., Nizaruddin, N., & Khoirot, M.	Development of geometry module assisted Geogebra to improve the students' ability of visual representation

Sıra No	Yıl	Tema	Yazar(lar)	Çalışma Konu Başlığı
57	2024	Tutum ve Görüşler	Kılıç, B., & Yılmaz, G. K.	7. Sınıf Matematik Dersi Geometri Öğrenme Alanına Yönelik Hazırlanan GeoGebra Etkinliklerinin Etkililiğinin Öğretmen Görüşleri Kapsamında İncelenmesi
58	2024	Tutum ve Görüşler	Sarpkaya Aktaş, G., & Erdoğan, F.	GeoGebra'nın Ortaokul Öğrencilerinin Uzamsal Görselleştirme Becerilerine Katkıları ve Öğretmen Görüşleri

Bu tablo oluşturulurken bazı bilimsel çalışmaların her iki temayı da içerdği gözlemlenmiştir. Bu durumda baskın olan tema göz önüne alınarak tabloya işlenmiştir.

Tablo 2 Yıllara Göre Detaylı Yayın Dağılımı ve Tematik Analiz

Tema Yıl	Öğrenme Başarısı	Tutum Ve Görüşler	Öğretmen Çalışmaları	Yazılım İncelemeleri	Kavramsal Anlama	Toplam	Yüzde
2007	0	0	1	1	0	2	3.4%
2008	0	0	0	1	1	2	3.4%
2009	0	0	0	2	1	3	5.2%
2010	2	0	0	0	0	2	3.4%
2011	4	0	1	0	1	6	10.3%
2012	0	2	0	0	1	3	5.2%
2013	1	0	0	0	0	1	1.7%
2014	2	2	0	1	1	6	10.3%
2015	4	3	0	0	0	7	12.1%
2016	0	2	0	1	1	4	6.9%
2017	5	1	0	0	0	6	10.3%
2018	0	0	0	1	0	1	1.7%
2019	0	2	0	2	1	5	8.6%
2020	0	1	0	0	0	1	1.7%
2021	1	1	0	0	0	2	3.4%
2022	2	0	0	0	1	3	5.2%
2023	0	1	0	0	0	1	1.7%
2024	1	2	0	0	0	3	5.2%
TOPLAM	22	17	2	9	8	58	100%
YÜZDE	37.9%	29.3%	3.4%	15.5%	13.8%	100%	-

Dönemsel Analiz ve Araştırma Evrimleri

GeoGebra'nın matematik eğitimi alanındaki araştırma evrimini dönemsel olarak incelediğimizde, yazılımın 2001 yılında Markus Hohenwarter tarafından geliştirilmesinden günümüze kadar olan süreçte belirgin dönemsel karakteristikler ve araştırma paradigmalarındaki dönüşümler gözlemlenmektedir. Bu dönemsel analiz, teknolojik gelişmelerin matematik eğitimi araştırmalarına olan etkilerini ve araştırma metodolojilerindeki evrimsel değişimleri anlamak açısından kritik önem taşımaktadır.

Başlangıç Dönemi (2007-2009): Keşif ve Tanıtım Evresi

GeoGebra'nın ilk yılları, yazılımın temel özelliklerinin tanıtıldığı ve matematik eğitimcilerinin bu yeni teknolojik araçla tanıştığı bir dönem olarak karakterize edilmektedir. Bu dönemde yapılan araştırmalar, ağırlıklı olarak yazılımın teknik özelliklerinin tanıtımı, temel kullanım kılavuzları ve geometri öğretimindeki potansiyel uygulamalarına odaklanmıştır. Araştırma metodolojileri genellikle betimsel nitelikte olup, vaka çalışmaları ve küçük ölçekli pilot uygulamalar şeklinde gerçekleştirilmiştir.

Genişleme Dönemi (2010-2015): Deneysel Çalışmaların Artışı

Bu dönem, GeoGebra'nın eğitim camiasında daha geniş kabul görmesi ve deneysel araştırmaların sayısında belirgin artışların yaşandığı bir evre olarak öne çıkmaktadır. Matematik eğitimi araştırmacıları, yazılımın öğrenci başarısına olan etkilerini ölçmeye yönelik kontrollü deneysel çalışmalar gerçekleştirmeye başlamışlardır. Bu dönemde, özellikle geometri ve fonksiyonlar konularında yapılan araştırmalar, GeoGebra'nın geleneksel öğretim yöntemlerine kıyasla üstünlüklerini ortaya koyan bulgular sunmuştur.

Olgunlaşma Dönemi (2016-2019): Çok Boyutlu Araştırma Yaklaşımları

Bu dönem, GeoGebra araştırmalarının metodolojik çeşitliliğinin arttığı ve çok boyutlu araştırma yaklaşımlarının benimsendiği bir evre olarak karakterize edilmektedir. Karma yöntem araştırmaları, uzun süreli boylamsal çalışmalar ve çoklu veri toplama tekniklerinin kullanıldığı araştırmalar bu dönemin belirgin özelliklerini oluşturmaktadır. Ayrıca, yazılımın sadece akademik başarıya değil, öğrenci motivasyonu, tutum, öz-yeterlik algısı ve 21. yüzyıl becerilerine olan etkilerinin de incelenmeye başlandığı görülmektedir.

Sistematizasyon Dönemi (2019-2024): Meta-Analiz ve Sistemik İncelemeler

Günümüze yakın olan bu dönem, GeoGebra ile ilgili birikmiş araştırma bulgularının sistematik olarak analiz edildiği ve meta-analiz çalışmalarının yoğunlaştığı bir evre olarak öne çıkmaktadır. Bu dönemde, araştırmacılar mevcut bulguları sentezleyerek, yazılımın etkinliğine dair daha güçlü kanıtlar sunmaya odaklanmışlardır. Aynı zamanda, yapay zeka ve makine öğrenmesi teknolojilerinin GeoGebra ile entegrasyonu konularında da araştırmaların başladığı gözlemlenmektedir.

Bu dönemsal evrim, GeoGebra araştırmalarının sadece nicel artış göstermediğini, aynı zamanda metodolojik sofistikasyon ve teorik derinlik açısından da önemli gelişmeler kaydettiğini göstermektedir. Her dönemin kendine özgü araştırma soruları, metodolojik yaklaşımları ve bulgularının, matematik eğitimi alanındaki bilgi birikiminin kademeli olarak inşa edilmesine katkı sağladığı değerlendirilmektedir.

Tablo 3 Dönemsel Araştırma Odakları ve Karakteristikleri

Dönem	Yıl Aralığı	Yayın Sayısı	Baskın Temalar	Yüzde	Araştırma Özellikleri
Başlangıç	2007-2009	7	Yazılım İncelemeleri (%71.4)	%12.1	• Temel yazılım tanıtımı • Pedagojik potansiyel keşfi • İlk uygulama denemeleri
Genişleme	2010-2015	27	Öğrenci Başarısı (%48.1) Tutum ve Görüşler (%25.9)	%46.6	• Deneysel çalışmalar • Başarı ölçümleri • Tutum araştırmaları • Sistematik etki analizi
Olgunlaşma	2016-2019	16	Öğrenci Başarısı (%31.3) Tutum ve Görüşler (%31.3) Yazılım İncelemeleri (%18.8)	%27.6	• Meta-analiz çalışmaları • Öğretmen gelişimi • Eleştirel değerlendirmeler • Dengeli tema dağılımı
Sistemati-zasyon	2020-2024	8	Tutum ve Görüşler (%62.5) Öğrenci Başarısı (%37.5)	%13.8	• Öğrenci görüşleri odaklı • Pandemi etkisi araştırmaları • Kalıcılık çalışmaları • Hibrit öğretim modelleri

Tematik Gelişim Analizi

2001 yılında geliştirilen GeoGebra, araştırma alanının doğuşunu temsil eden 2007-2009 döneminde, yazılımın akademik camiaya tanıtılması ve potansiyelinin keşfedilmesi çerçevesinde derinleşmeye başlamıştır. Bu erken dönemin en karakteristik özelliği, çalışmaların büyük ölçüde “yazılım incelemeleri” temasına odaklanmasıdır. Hohenwarter ve Jones’un 2007 yılında gerçekleştirdikleri öncü çalışma, geometri ile cebir arasındaki ilişkileri GeoGebra perspektifinden ele alarak alanın kuramsal temelini atmıştır. Bu dönemde araştırmacıların temel sorusu, “GeoGebra nedir ve ne yapabilir?” şeklinde özetlenebilir.

2010-2015 döneminde yaşanan genişleme alanın en çarpıcı özelliğini oluşturmaktadır. GeoGebra'nın eğitim ortamlarında uygulanabilirliğinin değerlendirilmesine yönelik ampirik çalışmaların arttığı bir evredir. Bu altı yıllık süreçte "Öğrenme Başarısına Etki" teması mutlak bir baskınlık kurmuş(%48.1) ve beraberinde "Tutum ve Görüşler" teması da önemli ölçüde gelişim göstermiştir (%25.9). Bu dönemdeki yayınların çoğu başarı odaklı deneysel çalışmalardan oluşmaktadır. Bu durum, matematik eğitimi araştırmalarında kanıta dayalı yaklaşımların güçlenmesi ve eğitim teknolojilerinin etkililiğinin sorgulanmaya başlanması ile paralellik göstermektedir.

Birgin, Çatlıoğlu, Gürbüz ve Aydın'ın 2010'daki ikinci dereceden fonksiyonlar çalışması, bu dönemin başlangıç noktasını oluşturur. Sonrasında öğrencilerin koordinat ve dönüşüm geometrisi, çokgenler, üçgenler, lineer cebir gibi farklı matematiksel konulardaki başarıları GeoGebra destekli öğretim yoluyla değerlendirilmiştir (Akgül, 2014; Kan, 2014). Bu dönemde araştırmacıların temel sorusu "GeoGebra gerçekten işe yarıyor mu?" şeklinde evrilmiştir. Deneysel desenlerin baskınlığı, alanın pozitivist paradigmaya olan eğilimini ve nicel kanıt arayışını yansıtmaktadır. Ayrıca, bu dönemde hem öğretmen hem öğretmen adaylarının yazılıma ilişkin tutum ve görüşlerini irdeleyen çalışmalar da dikkat çekmektedir (Yıldız vd., 2012; Demir & Bozkurt, 2014). Bu dönemde araştırmalar, yazılımın sadece işlevselliğini değil, aynı zamanda öğrenme sürecine olan somut katkılarını da ölçmeye başlamıştır.

2016-2019 döneminde toplam 16 çalışmayla (%27.6) istikrarlı bir üretim süreci yaşanırken, tema çeşitliliğinde de belirgin bir artış gözlenmiştir. Bu dönemin en önemli karakteristiği, "Öğrenme Başarısına Etki" (%31.3) ve "Tutum ve Görüşler" (%31.3) temalarının eşit dağılım göstermesi ve araştırma

yaklaşımlarının çeşitlenmesidir. Aynı zamanda "Yazılım İncelemeleri" teması da %18.8 oranıyla varlığını sürdürmüştür.

Bu dönemde meta-analiz çalışmalarının ortaya çıkması, alanın olgunlaşma sürecindeki en önemli göstergelerden biridir. Günhan ve Açı'nın 2016'daki meta-analiz çalışması, biriken deneysel kanıtları sistematik olarak değerlendirme ihtiyacının bir yansımasıdır. Bu durum, alanın "etki var mı?" sorusundan "hangi koşullarda ve nasıl etki ediyor?" sorusuna geçişini işaret etmektedir. Bu süreçte dikkat çeken bir diğer gelişme ise, belirli matematik konularına (örneğin türev, limit-süreklilik, belirli integral gibi) odaklanan içeriklerin GeoGebra ile öğretiminin incelenmesidir (Öçal, 2017; Kepçeoğlu & Yavuz, 2017; Tatar & Zengin, 2016). Genel olarak bu dönem, hem pedagojik etkilerin hem de kullanıcı tecrübelerinin sistematik biçimde analiz edildiği, daha olgunlaşmış bir araştırma çizgisini temsil etmektedir.

2020–2024 dönemi, özellikle COVID-19 pandemisiyle hız kazanan dijital dönüşüm sürecinin etkisiyle GeoGebra'nın eğitimde kullanımına yönelik ilginin yeniden şekillendiği bir zaman aralığını temsil etmektedir. Bu dönemde yayımlanan 8 çalışmanın (%13.8) dağılımı, "Tutum ve Görüşler" temasının baskın hale geldiğini (%62.5) göstermektedir. "Öğrenme Başarısına Etki" teması ise %37.5 oranla ikinci sırada yer almaktadır.

Trigonometrik fonksiyonlardan dörtgenlere, görsel temsilden alan ve hacim ölçümüne kadar birçok farklı konu başlığında GeoGebra destekli etkinliklerin öğrencilerin akademik başarıları ve kavramsal kalıcılık üzerindeki etkileri sistematik olarak incelenmiştir (Sevgi & Soylu, 2022; Yıldız & Güleş, 2022; Muhtarom vd., 2024). Bu dönem ayrıca öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşlerinin daha fazla ön plana çıktığı bir dönemdir; yazılımın özellikle uzaktan eğitim süreçlerindeki kullanımı, mesleki gelişime katkısı ve sınıf içi etkinlik tasarımlarındaki rolü üzerine yapılan nitel araştırmalar bu eğilimi desteklemektedir (Kılıç &

Yılmaz, 2024; Sarpkaya Aktaş & Erdoğan, 2024). Genel olarak bu dönem, GeoGebra'nın sadece bir öğretim aracı olarak değil, aynı zamanda pedagojik tasarım, öğrenme motivasyonu ve dijital okuryazarlık boyutlarıyla da ele alındığı disiplinler arası bir yönelim sürecine işaret etmektedir.

Tablo 4: Temaların Dönemsel Dağılımı

Tema	2007-2009	2010-2015	2016-2019	2020-2024	Toplam
Öğrenme Başarısı	0 (0%)	13 (48.1%)	5 (31.3%)	3 (37.5%)	21
Tutum ve Görüşler	0 (0%)	7 (25.9%)	5 (31.3%)	5 (62.5%)	17
Yazılım İncelemeleri	5 (71.4%)	3 (11.1%)	3 (18.8%)	0 (0%)	11
Kavramsal Anlama	2 (28.6%)	3 (11.1%)	2 (12.5%)	0 (0%)	7
Öğretmen Çalışmaları	0 (0%)	1 (3.7%)	1 (6.3%)	0 (0%)	2
Toplam	7	27	16	8	58

TARTIŞMA VE ÇIKARIMLAR

Araştırma Odaklarının Pragmatik Karakteri

"Öğrenme Başarısına Etki" temasının %36.2 oranıyla baskın konumda olması, GeoGebra araştırmalarının ağırlıklı olarak sonuç odaklı ve pragmatik bir yaklaşım sergilediğini göstermektedir. Bu durum, eğitim teknolojisi araştırmalarında yaygın olan "etki kanıtlama" paradigmasının bir yansımasıdır. Araştırmacıların öncelikli olarak "GeoGebra işe yarıyor mu?" sorusuna odaklanması, alanın henüz olgunlaşma sürecinde olduğunu ve teorik derinliğe ulaşmak için daha fazla zamana ihtiyaç duyduğunu işaret etmektedir.

"Tutum ve Görüşler" temasının %29.3 oranıyla ikinci sırada yer alması, matematik eğitimi araştırmalarında paydaş merkezli yaklaşımların güçlendiğini göstermektedir. Özellikle 2020-2024 döneminde bu temanın %62.5'e yükselmesi, COVID-19 pandemisi sonrasında teknoloji kabul ve adaptasyon süreçlerine olan ilginin arttığını yansıtmaktadır. Ancak bu alandaki çalışmaların çoğunlukla betimleyici nitelikte olması, derinlemesine analiz eksikliği yaratmaktadır.

Dönemsel Eğilimlerin Analizi

2007-2009 döneminde "Yazılım İncelemeleri"nin %71.4'lük baskınlığından, 2010-2015'te "Öğrenme Başarısı"nın %48.1'lik hakimiyetine geçiş, alanın keşif aşamasından kanıt toplama aşamasına evrimini göstermektedir. 2016-2019 dönemindeki tema çeşitliliği (%31.3 Öğrenme Başarısı, %31.3 Tutum ve Görüşler, %18.8 Yazılım İncelemeleri) alanın olgunlaşma sürecini, 2020-2024'te "Tutum ve Görüşler"in %62.5'e yükselmesi ise pandemi sonrası kullanıcı deneyimlerine odaklanmayı yansıtmaktadır.

Kritik Araştırma Boşlukları

Analizin en çarpıcı bulgusu, "Öğretmen Çalışmaları" temasının sadece %3.4 oranında kalmasıdır. Bu durum, teknoloji entegrasyonunda en kritik faktör olan öğretmen boyutunun ciddi şekilde ihmal edildiğini göstermektedir. 2016-2019 döneminden sonra bu alanda hiçbir çalışma yapılmaması, özellikle dijital dönüşüm sürecinde bu eksikliği daha da kritik kılmaktadır.

"Kavramsal Anlama" temasının %12.1 oranında kalması ve 2020-2024 döneminde bu alanda hiçbir çalışma yapılmaması, GeoGebra'nın bilişsel süreçler üzerindeki etkilerinin yeterince araştırılmadığını ortaya koymaktadır. Dinamik geometri yazılımlarının görselleştirme ve kavramsal anlama potansiyeli göz önüne alındığında, bu alan önemli bir gelişim fırsatı sunmaktadır.

"Yazılım İncelemeleri" temasının 2020-2024 döneminde tamamen kaybolması (%0), alanın teknolojik gelişmeleri takip etme konusunda geride kaldığını göstermektedir. GeoGebra'nın sürekli güncellenen özelliklerinin pedagojik açıdan değerlendirilmesi ihtiyacı devam etmektedir.

Metodolojik Sınırlılıklar

Mevcut araştırmalarda nicel paradigmanın baskınlığı dikkat çekmektedir. Deneysel desenlerin yaygın kullanımı pozitivist araştırma geleneğinin etkisini yansıtmakla birlikte, öğrenmenin karmaşık doğasını tam olarak yakalayamama riski taşımaktadır. Karma yöntem çalışmalarının ve longitudinal araştırmaların azlığı, alanın metodolojik çeşitliliğini artırma ihtiyacını ortaya koymaktadır.

Teorik Temellerin Yetersizliği

Analiz edilen yayınların çoğunlukla genel teknoloji entegrasyonu kuramlarından yararlandığı, GeoGebra'nın özgün özelliklerine yönelik spesifik teorik çerçevelerin yeterince kullanılmadığı görülmektedir. Bu durum, alanın kavramsal derinliğini artırma ihtiyacını işaret etmektedir.

Gelecek Araştırma Yönelimleri

Bu bulgular ışığında, gelecekteki GeoGebra araştırmalarının öncelikli olarak öğretmen eğitimi ve mesleki gelişim alanına odaklanması gerekmektedir. Mevcut %3.4 oranında kalan bu tema, teknoloji entegrasyonunun en kritik boyutu olarak acil müdahale gerektirmektedir. Benzer şekilde, son dönemde %0'a düşen kavramsal anlama süreçleri araştırmaları yeniden canlandırılmalı ve GeoGebra'nın bilişsel öğrenme üzerindeki derinlemesine etkileri incelenmelidir. Yazılım özelliklerinin pedagojik değerlendirmesi de ihmal edilen bir alan olarak öne çıkmaktadır ve GeoGebra'nın sürekli

güncellenen özelliklerinin eğitimsel potansiyelinin sistematik olarak analiz edilmesi gerekmektedir.

Metodolojik açıdan alanın çeşitliliğini artırmak için karma yöntem yaklaşımlarının teşvik edilmesi kritik önem taşımaktadır. Mevcut araştırmaların ağırlıklı olarak nicel paradigmaya dayalı olması, öğrenme süreçlerinin karmaşık doğasını tam olarak yakalayamamaktadır. Bu nedenle nitel araştırma desenlerinin güçlendirilmesi, longitudinal çalışmaların artırılması ve özellikle eylem araştırması yaklaşımlarının benimsenmesi alanın teorik ve pratik derinliğini artıracaktır. Ayrıca, uzun vadeli etki çalışmaları ile GeoGebra kullanımının kalıcı öğrenme sonuçları üzerindeki etkilerinin izlenmesi gerekmektedir.

Teknolojik güncellik perspektifinden bakıldığında, gelecek araştırmaların GeoGebra'nın yeni sürümlerini sistematik olarak incelemesi ve yapay zeka entegrasyonu olanaklarını araştırması gerekmektedir. Dijital dönüşüm sürecinde mobil ve web tabanlı kullanımın pedagojik etkilerinin değerlendirilmesi de önemli bir araştırma alanı olarak öne çıkmaktadır. Bu kapsamda, hibrit öğrenme ortamlarında GeoGebra'nın rolü, uzaktan eğitim süreçlerindeki etkililiği ve farklı dijital platformlarla entegrasyonu gibi konular gelecek araştırmaların odak noktası olmalıdır.

Genel Değerlendirme

GeoGebra araştırmaları, güçlü deneysel temeller üzerine kurulu dinamik bir alan olarak gelişmektedir. Araştırmaların büyük kısmı, GeoGebra'nın öğrenme başarısına olumlu etkisini rapor etmektedir. Özellikle geometri konularında başarı artışı ve problem çözme becerilerinde gelişme gözlenmiştir. Tutum ve görüşlere odaklanan çalışmalar ise öğrencilerin yazılıma karşı genellikle olumlu tutum sergilediğini, öğretmenlerin ise teknolojiye açık olduğunu ancak destek ve eğitime ihtiyaç duyduğunu göstermektedir. Ancak, alanın sürdürülebilir gelişimi için kritik

boşlukların giderilmesi gerekmektedir. Öğretmen çalışmalarının ihmal edilmesi, kavramsal anlama araştırmalarının azalması ve metodolojik tekdüzelik, alanın potansiyelini tam olarak kullanamamasına neden olmaktadır. Alanın matematik eğitiminde teknoloji entegrasyonunun öncü alanlarından biri olarak konumunu koruyabilmesi için dengeli ve sürdürülebilir bir araştırma gündeminin benimsenmesi gerekmektedir.

Sonuç Ve Öneriler

Sonuçlar

Bu derleme çalışması, 2007–2024 yılları arasında GeoGebra yazılımı odaklı gerçekleştirilen 58 akademik yayını tematik, metodolojik ve kronolojik olarak analiz etmiştir. Bulgular, dinamik matematik yazılımlarının matematik öğretiminde önemli bir dönüşüm yarattığını açıkça ortaya koymaktadır. Özellikle GeoGebra, açık kaynaklı yapısı, çoklu matematiksel temsilleri desteklemesi ve kullanıcı dostu arayüzüyle dünya genelinde hem öğretmenler hem de öğrenciler tarafından tercih edilen güçlü bir öğretim aracı haline gelmiştir.

Araştırma trendleri, yıllar içinde belirgin bir evrim geçirmiştir. 2007-2009 döneminde yazılım incelemelerinin %71.4'lük baskınlığından başlayarak, 2010-2015'te öğrenme başarısının %48.1'lik hakimiyetine geçiş, alanın keşif aşamasından kanıt toplama aşamasına evrimini göstermektedir. 2016-2019 dönemindeki tema çeşitliliği (%31.3 Öğrenme Başarısı, %31.3 Tutum ve Görüşler) alanın olgunlaşma sürecini yansıtırken, 2020-2024'te tutum ve görüşlerin %62.5'e yükselmesi COVID-19 pandemisi sonrasında kullanıcı deneyimlerine odaklanmayı işaret etmektedir.

Genel olarak, "Öğrenme Başarısına Etki" temasının %36.2 oranıyla en yüksek paya sahip olması, araştırmacıların GeoGebra'nın etkililiğini kanıtlamaya odaklandığını göstermektedir. "Tutum ve

Görüşler" temasının %29.3 oranıyla ikinci sırada yer alması, paydaş merkezli yaklaşımların güçlendiğini ortaya koymaktadır. Araştırmaların büyük çoğunluğu, GeoGebra kullanımının öğrencilerin matematik başarısına olumlu katkı sunduğunu göstermektedir. Özellikle geometri alanında yazılımın belirgin bir üstünlük sağladığı görülmüş; kavramların görselleştirilmesi, öğrencilerin matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini anlamlı biçimde geliştirmiştir.

Bununla birlikte, alan yazınında kritik boşluklar da dikkat çekmektedir. "Öğretmen Çalışmaları" temasının sadece %3.4 oranında kalması ve 2016-2019 döneminden sonra bu alanda hiçbir çalışma yapılmaması, teknoloji entegrasyonunun en kritik faktörü olan öğretmen boyutunun ciddi şekilde ihmal edildiğini göstermektedir. "Kavramsal Anlama" araştırmalarının %12.1 oranında kalması ve 2020-2024 döneminde bu alanda hiçbir çalışma yapılmaması, GeoGebra'nın bilişsel süreçler üzerindeki derinlemesine etkilerinin yeterince araştırılmadığını ortaya koymaktadır. Ayrıca, metodolojik çeşitliliğin artması, uluslararası iş birlikleri ve uzun vadeli etki çalışmalarının teşvik edilmesi, alanın olgunluk düzeyini daha da ileriye taşıyacaktır.

Öneriler

Gelecek Araştırmalar İçin Öneriler

Gelecekte yapılacak çalışmalarda öncelikli olarak öğretmen eğitimi ve mesleki gelişim alanına odaklanılması kritik önem taşımaktadır. Mevcut %3.4 oranında kalan bu tema, teknoloji entegrasyonunun en önemli boyutu olarak acil müdahale gerektirmektedir. Öğretmenlerin GeoGebra'yı pedagojik açıdan nasıl kullandıkları, hangi zorluklarla karşılaştıkları ve nasıl desteklenebilecekleri konularında derinlemesine araştırmalar yapılmalıdır.

Son dönemde tamamen ihmal edilen kavramsal anlama süreçleri araştırmaları yeniden canlandırılmalı ve GeoGebra'nın bilişsel öğrenme üzerindeki uzun vadeli etkileri sistematik olarak incelenmelidir. Bu kapsamda, öğrenilen bilgilerin 6 ay ila 1 yıl sonrasındaki kalıcılığını değerlendiren boylamsal araştırmalar yapılmalı ve farklı konulardaki transfer etkileri detaylı biçimde araştırılmalıdır.

Yazılım özelliklerinin pedagojik değerlendirmesi de ihmal edilen bir alan olarak öne çıkmaktadır. GeoGebra'nın sürekli güncellenen özelliklerinin eğitimsel potansiyelinin sistematik olarak analiz edilmesi, özellikle yapay zeka entegrasyonu olanaklarının araştırılması gerekmektedir. Bu bağlamda, kişiselleştirilmiş öğrenme algoritmaları, akıllı geri bildirim sistemleri ve yapay zeka destekli modüllerin öğrenciler üzerindeki etkisi incelenmelidir.

Ayrıca, özel gereksinimli bireyler için geliştirilecek uygulamalar literatürde önemli bir boşluğu dolduracaktır. Özellikle öğrenme güçlüğü yaşayan öğrenciler, görme engelli bireyler ve üstün yetenekli öğrenciler için özel olarak uyarlanmış GeoGebra materyallerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Metodolojik Öneriler

Araştırma desenlerinde metodolojik çeşitliliğin artırılması büyük önem taşımaktadır. Mevcut araştırmaların ağırlıklı olarak nicel paradigmaya dayalı olması, öğrenme süreçlerinin karmaşık doğasını tam olarak yakalayamamaktadır. Bu doğrultuda, nicel ve nitel verilerin bütüncül biçimde analiz edildiği karma yöntemli çalışmalar teşvik edilmeli; çoklu veri kaynakları kullanılarak triangölasyon yöntemlerinden yararlanılmalıdır.

Nitel araştırma desenlerinin güçlendirilmesi, özellikle etnografik çalışmalar, fenomenolojik yaklaşımlar ve eylem araştırması metodlarının benimsenmesi alanın teorik derinliğini artıracaktır. Farklı ölkelerde yürütölecek çok uluslu karşılaştırılmalı

araştırmalar sayesinde GeoGebra'nın kültürler arası etkileri ortaya konulabilir.

Bunun yanı sıra, GeoGebra'nın kullanımına dair büyük veri setlerinin analiz edilmesi ve öğrenme analitikleri yaklaşımının araştırmalara entegre edilmesi önerilmektedir. Özellikle makine öğrenmesi gibi yeni nesil veri analiz tekniklerinin kullanımı, öğrencilerin etkileşim örüntülerini çözümleyerek yazılımın öğrenme sürecine katkısını daha detaylı biçimde ortaya koyabilir.

Eğitim Politikası ve Uygulama nerileri

Eğitim politikaları açısından, GeoGebra'nın matematik ğretim programlarına sistematik biçimde uyarlanması önerilmektedir. Bu süreçte, kademeli bir uygulama planı geliştirilmeli ve ders içerikleriyle uyumlu etkinlikler oluşturulmalıdır. Özellikle tutum ve görüşler temasının son dönemde %62.5'e yükselmesi, kullanıcı kabul ve adaptasyon süreçlerinin kritik önemini ortaya koymaktadır.

Öğretmen eğitimi açısından, mevcut %3.4'lk düşük oranın artırılması için acil önlemler alınmalıdır. GeoGebra'nın hem hizmet öncesi ğretmen yetiştirme programlarında hem de hizmet içi mesleki gelişim etkinliklerinde sistematik olarak yer alması sağlanmalıdır. Bu süreçte öğretmenlere yönelik sertifikasyon sistemleri oluşturulmalı ve dijital pedagojik yetkinliklerin artırılması hedeflenmelidir.

Hibrit ğrenme ortamlarında GeoGebra'nın rolü, uzaktan eğitim süreçlerindeki etkililiği ve mobil uygulamaların pedagojik potansiyeli gibi güncel konular da politika gündeminde yer almalıdır. COVID-19 sonrası dijital dönüşüm sürecinin getirdiği yeni gereksinimler doğrultusunda, teknoloji entegrasyonu stratejileri güncellenmelidir.

Altyapı boyutunda, okullardaki teknolojik donanımın güçlendirilmesi, internet erişiminin yaygınlaştırılması ve teknik

destek sistemlerinin kurulması, GeoGebra'nın etkili biçimde kullanılabilmesi için temel gereklilikler arasındadır.

Genel Değerlendirme

GeoGebra, soyut matematiksel kavramların somutlaştırılmasına, öğrencilerin derinlemesine anlam geliştirmesine ve öğretmenlerin etkileşimli öğretim süreçleri tasarlamasına önemli katkılar sunmaktadır. Özellikle geometri öğretiminde sağladığı görsellik ve etkileşim, öğrenci başarısını artırmakta ve öğrenme sürecine motivasyon katmaktadır. Ancak bu potansiyelin tüm eğitim sistemi genelinde etkili bir şekilde kullanılabilmesi için sistematik politikalar, araştırma destekleri ve öğretmen odaklı uygulama modelleri geliştirilmelidir.

Araştırma trendlerinin dönemsel analizi, alanın başlangıçta teknik odaklı yaklaşımdan pedagojik etki araştırmalarına, oradan da kullanıcı deneyimi odaklı çalışmalara evrildiğini göstermektedir. Bu evrim süreci doğal olmakla birlikte, kritik alanların ihmal edilmesi (öğretmen çalışmaları, kavramsal anlama) alanın sürdürülebilir gelişimi için risk oluşturmaktadır.

Bu bağlamda, GeoGebra yalnızca teknolojik bir araç değil; aynı zamanda matematik eğitiminin dijital dönüşümünü destekleyen bir pedagojik ortam olarak değerlendirilmelidir. Araştırmacılar, eğitimciler ve politika yapıcılarının iş birliğiyle yürütülecek çok yönlü çalışmalar, bu dönüşümün kalıcı ve sürdürülebilir olmasını sağlayacaktır.

Kaynakça

Acar, H. (2015). GeoGebra yazılımının ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarısına etkisi. Yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi.

Akgül, M. B. (2014). The effect of using dynamic geometry software on eighth grade students' achievement and attitude towards triangles Doctoral dissertation, Middle East Technical University.

Aktümen, M., Yıldız, A., Horzum, T., & Ceylan, T. (2011). İlköğretim matematik öğretmenlerinin GeoGebra yazılımının derslerde uygulanabilirliği hakkındaki görüşleri. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2(2), 103-120.

Altun, M., & Yücel, E. (2015). 8. sınıf öğrencilerinin GeoGebra yazılımı hakkındaki görüşleri. Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi, 8(39), 542-550.

Ateş, S., & Bağcı, N. (2015). Matematik öğretiminde GeoGebra yazılımının öğrenci görüşlerine göre değerlendirilmesi. Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi, 8(37), 470-478.

Baki, A., Kosa, T., & Güven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. British Journal of Educational Technology, 42(2), 291-310.

Baltacı, S., Yıldız, A., & Kösa, T. (2015). Analitik geometri öğretiminde GeoGebra yazılımının potansiyeli: Öğretmen adaylarının görüşleri. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6(3), 483-505.

Barçın, N., & Yenmez, A. A. (2023). GeoGebra software on the mathematical language developments and self-efficacy perceptions of students. *International e-Journal of Educational Studies*, 7(15), 682-704.

Baydaş, Ö., Göktaş, Y., & Tatar, E. (2014). Research trends on the use of GeoGebra in mathematics education: A content analysis study. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(4), 1277-1283.

Birgin, O., Çatlıoğlu, H., Gürbüz, R., & Aydın, S. (2010). Investigation of the effectiveness of using GeoGebra software in teaching of quadratic functions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 565-572.

Carter, J., & Ferrucci, B. (2009). Using GeoGebra to enhance prospective elementary school teachers' understanding of geometry. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 3(2), 149-164.

Celen, Y. (2020). Student opinions on the use of GeoGebra software in mathematics teaching. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 19(4), 84-88.

Çetin, İ., Erdoğan, A., & Yazlık, D. Ö. (2015). GeoGebra ile öğretimin sekizinci sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi konusundaki başarılarına etkisi. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2015(4), 84-92.

Demir, S., & Bozkurt, A. (2014). GeoGebra kullanımının matematik öğretmeni adaylarının teknoloji entegrasyonu öz-yeterlik algılarına etkisi. *İlköğretim Online*, 13(2), 722-729.

Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.

Dogan, M., & İçel, R. (2011). The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles. *International Journal of Human Sciences*, 8(1), 1441-1458.

Erdoğan, A., Çetin, İ., & Yazlık, D. Ö. (2015). The effect of using GeoGebra software on students' achievement of transformation geometry. *International Journal of Turkish Education Sciences*, 2015(4), 84-92.

Ersoy, Y. (2014). Öğretmen adaylarının GeoGebra destekli geometri öğretimi deneyimleri. *Eğitim ve Bilim*, 39(174), 69-84.

Genç, G., & Öksüz, C. (2016). Pre-service mathematics teachers' attitudes towards the use of GeoGebra in mathematics teaching. *European Journal of Contemporary Education*, 17(3), 339-350.

Gökçe, S., Yenmez, A. A., & Özpınar, İ. (2016). Mathematics teachers' opinions on worksheets prepared with GeoGebra. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(1), 164-187.

Günhan, B. C., & Açı, H. (2016). Dinamik geometri yazılımı kullanımının geometri başarısına etkisi: Bir meta-analiz çalışması. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(1), 1-23. <https://doi.org/10.16949/turcomat.67541>

Güven, B. (2012). GeoGebra destekli öğretimin öğretmen adaylarının geometriye yönelik tutumlarına etkisi. *Eğitim Teknolojisi Kuram ve Uygulama*, 2(2), 34-45.

Güven, B., & Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 7(4), 100-107.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: Towards an international GeoGebra institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 49-54.

Horzum, T., & Ünlü, M. (2017). Pre-service mathematics teachers' views about GeoGebra and its use. *Acta Didactica Napocensia*, 10(3), 77-90.

İçel, R. (2011). Bilgisayar destekli öğretimin matematik başarısı ve kaygısına etkisi: GeoGebra örneği. Yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi.

Kan, O. (2014). GeoGebra destekli öğretimin lineer cebir dersine ait bazı konularda akademik başarı üzerine etkisi. Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi.

Kaya, A., & Öçal, M. F. (2018). GeoGebra'nın öğrencilerin matematikteki akademik başarılarına etkisi üzerine bir meta-analiz. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 12(2), 31-59.

Kepçeoğlu, İ., & Yavuz, İ. (2017). GeoGebra yazılımıyla limit ve süreklilik öğretiminin öğretmen adaylarının başarısına etkisi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 11(1), 21-47.

Kılıç, B., & Yılmaz, G. K. (2024). 7. sınıf matematik dersi geometri öğrenme alanına yönelik hazırlanan GeoGebra etkinliklerinin etkililiğinin öğretmen görüşleri kapsamında incelenmesi. *Turkish Journal of Mathematics Education*, 5(2), 42-69.

Köse, A., & Yılmaz, H. (2019). GeoGebra eğitim programının öğretmenlerin mesleki gelişimine etkisi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 19(1), 89-108.

Kutluca, T. (2013). The effect of geometry instruction with dynamic geometry software; GeoGebra on Van Hiele geometry understanding levels of students. *Educational Research and Reviews*, 8(17), 1509-1518.

Kuzu, C. I. (2021). Views of mathematics teacher candidates on the use of GeoGebra in probability teaching. *Asian Journal of Contemporary Education*, 5(1), 45-56.

Muhtarom, M., Murtianto, Y. H., Nizaruddin, N., & Khoirot, M. (2024, November). Development of geometry module assisted GeoGebra to improve the students' ability of visual representation. In *4th International Conference on Education and Technology (ICETECH 2023)* (pp. 709-718). Atlantis Press.

Öçal, M. F. (2017). The effect of GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies*, 7(2), 67-78.

Özen, D. (2015). GeoGebra kullanımının öğrencilerin matematik başarısına ve matematiğe karşı tutumuna etkisi. Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi.

Özçakır, B. (2017). GeoGebra yazılımı ile desteklenen matematik öğretiminin 8. sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi. Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi.

Özçakır Sümen, Ö. (2022). Üç boyutlu tasarım programlarıyla gerçekleştirilen etkinliklerin sınıf öğretmeni adaylarının uzamsal becerilerinin gelişimine etkileri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 42(2), 1681-1708.

Preiner, J. (2008). Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of GeoGebra. Doctoral dissertation, University of Salzburg.

Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: Enlightening coordinate geometry learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 686-693.

Sarpkaya Aktaş, G., & Erdoğan, F. (2024). GeoGebra'nın ortaokul öğrencilerinin uzamsal görselleştirme becerilerine katkıları ve öğretmen görüşleri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 299-324.

Selçik, B., & Bilgici, G. (2011). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin çokgenler konusunu öğrenmelerinde GeoGebra destekli öğretimin etkisi. *Uluslararası İnsan Bilimleri Dergisi*, 8(1), 259-276.

Selçik, N., & Bilgici, G. (2011). GeoGebra yazılımının öğrenci başarısına etkisi. *Kastamonu Education Journal*, 19(3), 913-924.

Sevgi, S., & Soylu, Y. (2022). Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini yorumlama konusunun GeoGebra ile tasarlanmış etkinliklerle öğretiminin öğrencilerin akademik başarısına ve kalıcılığa etkisi. *Journal of Academic Social Science Studies*, 15(91), 17-38. <http://dx.doi.org/10.29228/JASSS.63862>

Şataf, H. A. (2009). Bilgisayar destekli matematik öğretiminin ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi ve üçgenler alt öğrenme alanındaki başarısına etkisi Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi.

Şimşek, N., & Yaşar, A. (2019). GeoGebra ile ilgili lisansüstü tezlerin tematik ve yöntemsel eğilimleri: Bir içerik analizi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 10(2), 290-313.

Tatar, E., Kağızmanlı, T. B., & Akkaya, A. (2014). Matematik öğretmenlerinin bilgisayar destekli matematik öğretimine yönelik tutumları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(1), 244-271.

Tatar, E., & Zengin, Y. (2016). Conceptual understanding of definite integral with GeoGebra. *Computers in the Schools*, 33(2), 120-132.

Turgut, M. (2019). GeoGebra destekli matematik öğretiminin ortaokul öğrencilerinin uzamsal yeteneklerine etkisi. Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2019). Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(8), em1734.

Yıldız, A., Baltacı, S., & Kurak, Y. (2012). İlköğretim matematik öğretmenlerinin dinamik matematik yazılımı GeoGebra hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(3), 843-856.

Yıldız, E., & Güleş, E. (2022). Dörtgenlerin ailesel ilişkilerinin öğretiminde GeoGebra programı kullanımının 8. sınıf öğrencilerinin erişim düzeylerine etkisi. *Trakya Eğitim Dergisi*, 12(1), 451-474.

Yıldız, G. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin GeoGebra destekli geometri öğretimine yönelik görüşleri. *Uluslararası Eğitim Teknolojisi ve Araştırmaları Dergisi*, 3(1), 23-35.

Yıldız, Z., Baltacı, S., & Kurak, Y. (2012). Öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı ile ilgili görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 160-165.

Zengin, A., & Akçakın, V. (2021). GeoGebra destekli matematik öğretiminin altıncı sınıf öğrencilerinin başarılarına etkisi: Alan ve hacim ölçme. *SDU International Journal of Educational Studies*, 8(1), 51-67.

Zengin, Y., & Tatar, E. (2017). The effect of GeoGebra software supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention. *Journal of Educational Research*, 110(6), 645-655.

Zulnaidi, H., & Zamri, S. N. A. S. (2017). The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievement in mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 2155-2180.

BÖLÜM 9

(λ, μ) –BERNSTEIN-DURRMEYER-STANCU OPERATÖR DİZİSİNİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ülkü DİNLEMEZ KANTAR¹

Gülten TORUN²

Giriş

Bernstein, Weierstrass teoremini ispatlayabilmek için ünlü Bernstein polinomunu 1912 yılında ortaya koymuştur (Bernstein, 1912). Bir asırdan fazla bir zaman içerisinde, genellikle yaklaşım teorisi ile ilgilenen matematikçiler bu polinomu kullanarak Bernstein tip operatörler inşa etmişlerdir. Bu tür operatörleri içinde bulunduran çalışmaların bazıları (Sofyalıoğlu & ark., 2022; Cai & ark., 2022; Xu & Zeng, 2016; Su & ark., 2024) olarak verilebilir. Bernstein operatörü; m doğal sayı olmak üzere, $[0,1]$ üzerinde tanımlı ve sürekli g fonksiyon için

$$B_m(g; x) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} x^l (1-x)^{(m-l)} g\left(\frac{l}{m}\right), \quad x \in [0,1] \quad (1)$$

ile tanımlanır. Yine birçok matematikçi bu operatörleri geliştirerek sadece sürekli fonksiyonlar değil, sürekli olmak zorunda olmayan

¹ Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500 Yenimahalle, Ankara ORCID: 0000-0002-5656-3924

² Dr. Öğr. Üyesi, Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Kuzeykent, Kastamonu ORCID:0000-0002-1897-0174

fonksiyonlar için de yaklaşım sonucu veren operatörler inşa etmişlerdir. Bunlardan birisi de Durrmeyer, Bernstein Durrmeyer operatör olarak bilinen (Durrmeyer, 1967), $g(x) \in C[0, 1]$ için

$$D_m(g; x)$$

$$= (m+1) \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} x^l (1-x)^{(m-l)} \int_0^1 \binom{m}{l} t^l (1-t)^{(m-l)} g(t) dt \quad (2)$$

operatörünü tanımlamıştır. Bu tip operatör dizileri kullanılarak literatüre katkı sağlayan (Acar & ark. 2014; Xu & Zeng, 2016; Gupta V. , 2013) çalışmalara bakılabilir.

λ – parametrelili Bernstein tip operatörler (Cai & ark. 2018) makalesinde verilmiştir. Yazarlar, tanımladıkları bu operatör dizisinin yaklaşım özelliklerini vermişlerdir. Bu operatörlerin çeşitli versiyonlarını, makalelerinde kullanan yazarların birkaçı için (Cai, & ark., 2021; Cai & ark., 2025; Lin & ark., 2024; Su & ark. 2024) çalışmalarına bakılabilir.

(λ, μ) -Bernstein operatörlerini (Zhou & Cai, in review) makalesinde kurmuşlardır. Ardından (Cai & Zhou, 2024) makalelerinde (λ, μ) -Bernstein-Durrmeyer tip operatörlerini vermişler ve bu operatörler dizisinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Biz de bu operatör dizisinin Stancu tipini kurduk ve gerekli olan momentlerini, merkezi momentlerini hesapladık. Korovkin teoremini ispatladık. En son olarak eldeki operatör dizisi için bir yakınsaklık oranı bulduk. Şimdi (λ, μ) -Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatör dizisini verelim.

(λ, μ) -Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatör dizisi

$g \in C[0,1]$ ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olmak üzere, (λ, μ) -Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatör dizisi;

$$U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g; x) = (m+1) \sum_{l=0}^m v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) \int_0^1 v_{m,l}(z) g\left(\frac{zm+\alpha}{m+\beta}\right) dz \quad (3)$$

ile tanımlayalım. Burada $v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x)$, (λ, μ) –Bezier baz fonksiyonlarıdır ve

$$v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) = v_{m,l}(x) + Y_l v_{m+1,l}(x) - Y_{l+1} v_{m+1,l+1}(x),$$

$$l = 0, 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$\begin{cases} Y_0 = Y_{m+1} = 0, \\ Y_l = (1 - \mu) \frac{m-2k+1}{2(m^2-1)} + \frac{1+\mu}{2(m+1)} \lambda, \quad l = 0, 1, \dots, m, \end{cases} \quad (5)$$

$-1 \leq \lambda \leq 1$ ve $\mu, 1$ ile m arasında yer alan bir sabittir (Cai & Zhou, 2024)

Şimdi önemli sonuçlarımızı verelim: Lemma 1 in ispatı, (Cai & Zhou, 2024) da yer alan Lemma 3 kullanılarak rahat bir biçimde yapılabileceğinden okuyucuya bırakılmıştır.

Lemma 1: $e_j(z) = z^j, j = 0, 1, 2, 3, 4$ ve $m > 1$ doğal sayı olmak üzere $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_j(z); x)$ için aşağıdaki eşitlikleri elde ettik:

- i) $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_0(z); x) = 1,$
- ii) $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) = \frac{m}{m+\beta} Z_m^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) + \frac{\alpha}{m+\beta},$
- iii) $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_2(z); x) = \frac{m^2}{(m+\beta)^2} Z_m^{\lambda,\mu}(e_2(z); x) + \frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2} Z_m^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) + \frac{\alpha^2}{(m+\beta)^2},$
- iv) $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_3(z); x) = \frac{m^3}{(m+\beta)^3} Z_m^{\lambda,\mu}(e_3(z); x) + \frac{3m^2\alpha}{(m+\beta)^3} Z_m^{\lambda,\mu}(e_2(z); x)$
 $+ \frac{3m\alpha^2}{(m+\beta)^3} Z_m^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) + \frac{\alpha^3}{(m+\beta)^3},$
- v) $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_4(z); x) = \frac{m^4}{(m+\beta)^4} Z_m^{\lambda,\mu}(e_4(z); x) + \frac{4m^3\alpha}{(m+\beta)^4} Z_m^{\lambda,\mu}(e_3(z); x)$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6m^2\alpha^2}{(m+\beta)^4} Z_m^{\lambda,\mu}(e_2(z); x) + \frac{4m\alpha^2}{(m+\beta)^4} Z_m^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) \\
& + \frac{\alpha^4}{(m+\beta)^4}.
\end{aligned}$$

Burada (Cai & Zhou, 2024) makalesinde yer alan

$$Z_m^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) = (m+1) \sum_{l=0}^m v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) \int_0^1 v_{m,l}(z) e_1(z) dz$$

operatör dizisinin $e_j(z) = z^j, j = 0, 1, 2, 3, 4$ için aşağıdaki eşitlikleri sağladıkları gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
Z_m^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) &= x + \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \\
&+ (1+\mu)\lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)}, \\
Z_m^{\lambda,\mu}(e_2(z); x) &= x^2 + \frac{2x(2-3x)}{m+3} + \frac{6x^2-8x+2}{(m+2)(m+3)} \\
&+ (1-\mu) \left[\frac{x-2x^2+x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} - \frac{1-2x-2x^2+3x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)} \right] \\
&+ (1+\mu)\lambda \left[\frac{x-x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} - \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right], \\
Z_m^{\lambda,\mu}(e_3(z); x) &= x^3 + \frac{3x^2(3-4x)}{m+4} + \frac{9x(2-6x+4x^2)}{(m+2)(m+3)} + \frac{6-36x+54x^2-24x^3}{(m+2)(m+3)(m+4)} \\
&+ (1-\mu) \left[\frac{3x^2-6x^3+3x^{m+1}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{6x^3-18x^2+6x+6x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right. \\
&+ \left. \frac{3-6x-15x^2+18x^{m+1}-3(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] \\
&+ (1+\mu)\lambda \left[\frac{3x^2-3x^{m+1}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{6x-3x^2+3x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right. \\
&+ \left. \frac{11(1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1})}{2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right], \\
Z_m^{\lambda,\mu}(e_4(z); x) &= x^4 + \frac{4x^3(4-5x)}{m+5} + \frac{72x^2-192x^3+120x^4}{(m+4)(m+5)} + \frac{96x-432x^2+576x^3-240x^4}{(m+3)(m+4)(m+5)} \\
&+ \frac{24-192x+432x^2-384x^3+120x^4}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + (1-\mu) \left[\frac{3x^2-4x^4+2x^{m+1}}{(m+4)(m+5)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{18x^2 - 56x^3 + 28x^4 + 10x^{m+1}}{(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{36x - 114x^2 + 100x^3 - 32x^4 + 40x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \\
& + \frac{23 - 46x - 232x^2 + 255x^{m+1} - 23(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \Big] + (1 + \mu)\lambda \Big[\frac{2x^3 - 2x^{m+1}}{(m+4)(m+5)} \\
& + \frac{18x^2 - 12x^3 - 6x^{m+1}}{(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{36x - 36x^2 + 12x^3 - 12x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \\
& + \frac{12(1-x^{m+1} - (1-x)^{m+1})}{(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \Big].
\end{aligned}$$

Lemma 2: $m > 1$ doğal sayı olmak üzere $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$ operatör dizisi için Lemma 1 kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz;

$$\begin{aligned}
\text{i) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x); x) &= \frac{-\beta x}{m+\beta} + \frac{m}{m+\beta} \left\{ \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right. \\
&\quad \left. + (1+\mu)\lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} \right\} + \frac{\alpha}{m+\beta}, \\
\text{ii) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x) &= \frac{\beta^2 x^2}{(m+\beta)^2} + \frac{m^2}{(m+\beta)^2(m+3)} \left\{ 2x(2-3x) + \frac{6x^2-8x+2}{(m+2)} \right. \\
&\quad + (1-\mu) \left[\frac{1-2x^2+x^{m+1}}{(m+2)} - \frac{1-2x-2x^2+3x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)} \right] \\
&\quad + (1+\mu)\lambda \left[\frac{x-x^{m+1}}{(m+2)} - \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \right] \Big\} + \frac{2m\alpha x}{(m+\beta)^2} \\
&\quad + \frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2} \left\{ \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right. \\
&\quad + (1+\mu)\lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} \Big\} - \frac{2mx(1-2x)}{(m+\beta)(m+2)} + \frac{\alpha^2}{(m+\beta)^2} \\
&\quad - \frac{2mx}{(m+2)(m+\beta)} \left\{ (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)} \right. \\
&\quad \left. + (1+\mu)\lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)} \right\} - \frac{2m\alpha}{m+\beta} := \rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \\
\text{iii) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^4; x) &= \frac{\beta^4 x^4}{(m+\beta)^4} + \frac{m^4 x^4 (16x^3 - 20x^4)}{(m+\beta)^4(m+5)} - \frac{4m^3 x (9x^2 - 12x^3)}{(m+\beta)^3(m+4)} \\
&\quad + \frac{6m^2 x^2 (4x - 6x^2)}{(m+\beta)^2(m+3)} - \frac{4x^3 m (1-2x)}{(m+\beta)(m+2)} + \frac{m^4 (72x^2 - 192x^3 + 120x^4)}{(m+\beta)^4(m+5)(m+4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4m^3(18x^2-54x^3+36x^4)}{(m+\beta)^3(m+4)(m+3)} + \frac{6m^2(2x^2-8x^3+6x^4)}{(m+\beta)^2(m+3)(m+2)} \\
& + (1-\mu) \left[\frac{m^4(2x^3-4x^4+2x^{m+1})}{(m+\beta)^4(m+5)(m+4)} - \frac{2m^3(3x^3-6x^4+3x^{m+2})}{(m+\beta)^3(m+4)(m+3)} \right. \\
& \left. + \frac{6m^2(x^3-2x^4+x^{m+3})}{(m+\beta)^2(m+3)(m+2)} - \frac{2m^3(x^3-2x^4+x^{m+4}-x^3(1-x)^{m+1})}{(m+\beta)(m+2)(m-1)} \right] \\
& + (1+\mu)\lambda \left[\frac{m^4(2x^3-2x^{m+1})}{(m+\beta)^4(m+5)(m+4)} - \frac{6m^3(x^3-x^{m+2})}{(m+\beta)^3(m+4)(m+3)} \right. \\
& \left. + \frac{6m^2(x^3-x^{m+3})}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)} - \frac{2m(x^3-x^{m+4}-x^3(1-x)^{m+1})}{(m+\beta)(m+2)(m-1)} \right] \\
& + o\left(\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Lemma 3: $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$ operatör dizisi için Lemma 2 yi kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz;

- i) $\lim_{m \rightarrow \infty} m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x); x) = 1 - (2+\beta)x + \alpha,$
- ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x) = 6x - 10x^2,$
- iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} m^2 U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^4; x) = 12x^2(x-1)^2.$

Teorem 2: $g \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda $m > 1$ doğal sayı olmak üzere $[0,1]$ üzerinde $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$ operatör dizisi düzgün olarak $g(x)$ e yaklaşır. Yani; $\lim_{m \rightarrow \infty} U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) = g(x).$

İspat: Lemma 1 in (i)-(iii) eşitliklerinin $m \rightarrow \infty$ aldığımızda $e_j(z) = z^j, j = 0,1,2$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_j(z); x) = x^j$ elde ederiz. Bu durumda Korovkin teoreminden, Teorem 2 nin ispatını tamamlamış oluruz.

Süreklilik modülünü

$$\omega(g; \delta) = \sup_{0 \leq k \leq \delta} \sup_{0 \leq x, x+k \leq 1} |g(x+k) - g(x)| \quad (6)$$

olarak verelim. Süreklilik modülünün

$$|g(z) - g(x)| \leq \omega(g; \delta) \left(1 + \frac{|z-x|}{\delta}\right) \quad (7)$$

özellliği vardır.

Teorem 3: $g \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda $m > 1$ doğal sayısı için

$$\left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| \leq 2\omega \left(g; \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)} \right),$$

eşitsizliği vardır. Burada $\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)$, Lemma 2 nin (ii) bendinde ve $\omega(g; \delta)$, (6) da yer almaktadır.

İspat: İlk önce $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$ operatör dizisinin lineerliğini ve Lemma 1 (i) bendini kullanırsak sonra, süreklilik modülünü, (7) eşitliği ve ardından Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| &\leq U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(|g(z) - g(x)|; x) \\ &\leq \omega(g; \delta) U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu} \left(\left(1 + \frac{|z-x|}{\delta}\right); x \right) \\ &\leq \omega(g; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(|z-x|; x) \right) \\ &\leq \omega(g; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x)} \right) \\ &= \omega(g; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)} \right) \end{aligned}$$

$\delta = \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)}$ olarak seçersek teoremin ispatını tamamlamış oluruz.

Kaynakça

- Acar, T. A. (2014). Modified Bernstein-Durrmeyer operators. *General Mathematics*, 22(1), s. 27-41.
- Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Charkow Ser. 2 t., 13*, 1-2.
- Cai, Q.-B., & Zhou, G. (2024). Approximation properties of (λ, μ) - Bernstein-Durrmeyer operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, s. 5946-5953.
- Cai, Q.-B., Kangal, E., Dinlemez Kantar, Ü., Zhou, G., & Aslan, R. (2025). On a new kind of λ -Bernstein-Kantorovich operators for univariate and bivariate functions. *Filomat*, 39(5), 1437-1456.
- Cai, Q.-B., Lian, B.-Y., & Zhou, G. (2018). Approximation properties of λ -Bernstein operators. *Journal of Inequalities and Applications*, 90.
- Cai, Q.-B., Sofyalıoğlu, M., Kanat, K., & Cekim, B. (2022). Some approximation results for the new modification of Bernstein-Beta operators. *AIMS Math.*, 7(2), s. 1831-1844.
- Cai, Q.-B., Torun, G., & Kantar Dinlemez, Ü. (2021). Approximation Properties of Generalized λ -Bernstein-Stancu-Type Operators. *Journal of Mathematics*, 2021(1), s. 1-17.
- Durrmeyer, J. L. (1967). Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: applications à la théorie des moments. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 265, 1447-1450.

- Gupta, V. (2013). Approximation Properties by Bernstein-Durrmeyer type operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7(2), s. 363-374.
- Lin , Z.-P., Torun, G., Kangal, E., Dinlemez Kantar, Ü., & Cai, Q.-B. (2024). On the Properties of the Modified λ -Bernstein-Stancu Operators. *Symmetry*, 16(10), 1276. doi:<https://doi.org/10.3390/sym16101276>
- Sofyalioğlu, M., Kanat, K., & Cekim, B. (2022). Parametric generalization of the modified Bernstein operators. *Filomat*, 36(5).
- Su, L. T., Kanat, K., Aksoy Sofyalioğlu, M., & Kisakol, M. (2024). Approximation by bivariate Bernstein-Kantorovich-Stancu operators that reproduce exponential functions. *Journal of Inequalities and Applications*, 1(6).
- Su, L.-T., Kangal, E., Dinlemez Kantar, Ü., & Cai, Q.-B. (2024). Some Statistical and Direct Approximation Properties for a New Form of the Generalization of q-Bernstein Operators with the Parameter λ . *Axioms*, 13(7), 485. doi:<https://doi.org/10.3390/axioms13070485>
- Xu, X.-W., & Zeng, X.-M. (2016). Asymptotic Properties of Bernstein-Durrmeyer Operators. *Results in Mathematics*, 69(3-4), s. 345-357.
- Zhou, G., & Cai, Q.-B. (in review). Approximation properties of generalized λ - Bernstein operators. *Open Mathematics*.

BÖLÜM 10

DEMI b-AM-KOMPAKT OPERATÖRLER

GÜL SİNEM KELEŞ¹
BİROL ALTIN²

Giriş

E bir Riesz uzayı olsun, E üzerindeki tüm sıra sınırlı lineer fonksiyonların uzayına E' nin sıra dualı denir ve $E^\sim$ ile gösterilir. $E^\sim$ 'nin sıra dualine E' nin ikinci sıra dualı denir ve $E^{\sim\sim}$ ile gösterilir (Aliprantis & Burkinshaw, 2006). E bir Riesz uzayı olsun, $Q: E \rightarrow E^{\sim\sim}$ olmak üzere her $x \in E$ için $Q(x) = \hat{x}: E^\sim \rightarrow \hat{x}(f) = f(x)$ olacak şekilde tanımlanan Q dönüşümüne E 'den $E^{\sim\sim}$ 'ya kanonik gömme denir (Aliprantis & Burkinshaw, 2006). E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun, $Q(A)$, $E^{\sim\sim}$ içinde sıra sınırlı ise A' ya E içinde b-sıra sınırlı küme denir (Alpay & Altın & Tonyalı, 2003). E bir Riesz uzayı olsun, E' nin b-sıra sınırlı her alt kümesi, E içinde sıra sınırlıysa E' ye b-özelliğine sahip Riesz uzayı denir (Alpay & Altın & Tonyalı, 2006).

Demi notasyonu ilk kez Petryshyn tarafından "Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space" isimli

¹ Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara 0000-0001-5712-239X

² Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Teknikokullar, Ankara 0000-0002-1085-809X

makalesinde 1966 yılında tanımlanmıştır (Petryshyn, 1966). Son yıllarda da çeşitli operatörlerin demi sınıfı tanımlanmıştır ve çalışılmıştır.

Bu çalışmada [Na Cheng](#) ve [Zili Chen](#) tarafından 2010 yılında tanımlanan b-AM-kompakt operatörler sınıfının genelleştirmesi olan demi b-AM-kompakt operatörler sınıfı tanımlanmıştır ve bu operatör sınıfının bazı özellikleri ve sonuçları elde edilmiştir.

E bir Banach örgüsü, F bir Banach uzayı ve $T:E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer T, E' nin b-sıra sınırlı alt kümelerini F' nin göreceli kompakt alt kümesine dönüştürüyorsa T operatörüne bir b-AM-kompakt operatör denir ve E' den F' ye bütün b-AM-kompakt operatörler sınıfı $L_{bM}(E, F)$ ile gösterilir (Cheng & Chen, 2010). Kolaylıkla görülebilir ki $T:E \rightarrow F$ operatörünün b-AM-kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $x'' \in (E'')^+$ ve her $(x_n) \subseteq ([0, x''] \cap E)$ için en az bir $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ vardır ve $T(x_{n_k})$ F'de yakınsak olur (Aliprantis & Burkinshaw, 2006).

Tanımlanmayan tanım ve notasyonlar için (Aliprantis & Burkinshaw, 2006) ve (Aliprantis & Burkinshaw, 1978) bağlı kalınacaktır.

Temel Sonuçlar

Tanım 1. E bir Banach örgüsü ve $T:E \rightarrow E$ bir operatör olsun. Eğer her $x'' \in (E'')^+$ ve her $(x_n) \subseteq ([0, x''] \cap E)$ dizisi için (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi ve $(x_{n_k} - T(x_{n_k}))$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğunda (x_{n_k}) dizisinin de yakınsak bir $(x_{n_{k_m}})$ alt dizisi varsa T' ye demi b-AM-kompakt operatör denir. E üzerinde tanımlı bütün demi b-AM-kompakt operatörlerin sınıfı $\mathcal{DL}_{bM}(E)$ ile gösterilir.

Örnek 1 E bir Banach örgüsü olsun. O zaman her $\beta \neq 1$ reel sayısı için $\beta I \in \mathfrak{DL}_{bM}(E)$ olur. Gerçekten; her $x'' \in (E'')^+$ ve her $(x_n) \subseteq ([0, x''] \cap E)$ için $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ var ve $(x_n - T(x_n))$ dizisinin bir $(x_{n_k} - \beta I(x_{n_k}))$ yakınsak alt dizisi olsun. Dolayısıyla $(x_{n_k} - \beta I(x_{n_k})) = (1 - \beta)(x_{n_k})$ da yakınsak olur. Böylece (x_{n_k}) E' de yakınsak olur. Sonuç olarak, βI , demi b-AM-kompakt operatör olur.

Örnek 2 $I: l_\infty \rightarrow l_\infty$ özdeşlik dönüşümü demi b-AM-kompakt değildir. Gerçekten; $(x_n) = e_n$ olmak üzere e_n ; n . terimi 1, diğerleri sıfır olan bir dizi olsun. $(x_n - I(x_n)) = 0$ olduğundan yakınsak alt dizisi vardır ancak kolaylıkla görülür ki $(x_n) = e_n$ dizisinin hiç bir Cauchy alt dizisi yoktur. Dolayısıyla l_∞ üzerinde tanımlı I özdeşlik dönüşümü demi b-AM kompakt olmaz.

Teorem 1 Her b-AM-kompakt operatör, bir demi b-AM-kompakt operatördür.

İspat E bir Banach örgüsü, $T: E \rightarrow E$ bir b-AM-kompakt operatör, her $x'' \in (E'')^+$ ve her $(x_n) \subseteq ([0, x''] \cap E)$ için $(x_n - T(x_n))$ dizisinin $(x_{n_k} - T(x_{n_k}))$ olacak şekilde bir yakınsak alt dizisi olsun. Ayrıca T bir b-AM-kompakt operatör olduğundan $T(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olacak şekilde bir alt dizisi vardır.

$$x_{n_{k_m}} = x_{n_{k_m}} - T(x_{n_{k_m}}) + T(x_{n_{k_m}})$$

olur. Yukarıdaki eşitlikten ve $(x_{n_{k_m}} - T(x_{n_{k_m}}))$ yakınsak olmasından $(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olur. Bu da T operatörünün bir demi b-AM-kompakt operatör olduğu sonucunu verir.

Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin genelde doğru olmadığını verir.

Örnek 3 $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ olmak üzere her $f \in C[0,1]$ için $T = \frac{1}{2} f$ olarak tanımlansın. $C[0,1]$ sonlu boyutlu olmadığından kapalı birim yuvarı kompakt değildir. Dolayısıyla T bir b-AM-kompakt operatör değildir ancak Örnek 1'den T bir demi b-AM-kompakt operatör olur.

Örnek 4 $n \in \mathbb{N}$ olsun. $T_n: l_\infty \rightarrow l_\infty$ operatörü her $x = (x_i) \in l_\infty$ için $T_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ olacak şekilde tanımlansın. $T_n: l_\infty \rightarrow l_\infty$ operatörü demi b-AM-kompakt operatördür. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $P_n = I + T_n$ operatörünü tanımlayalım. Kolaylıkla görülebilir ki her $n \in \mathbb{N}$ için P_n operatörü demi b-AM-kompakt operatör değildir.

Teorem 2 E bir Banach örgüsü, $T: E \rightarrow E$ bir b-AM-kompakt operatör ve $P: E \rightarrow E$ bir demi b-AM kompakt operatör olsun. Bu durumda $T + P$ bir demi b-AM kompakt operatör olur.

İspat Her $x'' \in (E'')^+$ ve her $(x_n) \subseteq ([0, x''] \cap E)$ için $(x_n - (T + P)(x_n))$ dizisinin $(x_{n_k} - (T + P)(x_{n_k}))$ olacak şekilde bir yakınsak alt dizisi olsun. T bir b-AM-kompakt operatör olduğundan $T(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olacak şekilde bir alt dizisi vardır.

$$(x_{n_{k_m}} - P(x_{n_{k_m}})) = (x_{n_{k_m}} - (T + P)(x_{n_{k_m}})) + T(x_{n_{k_m}})$$

olur. $(x_{n_{k_m}} - (T + P)(x_{n_{k_m}}))$ ve $T(x_{n_{k_m}})$ alt dizileri yakınsak olduğundan yukarı eşitlik gözönüne alındığında $(x_{n_{k_m}} - P(x_{n_{k_m}}))$ alt dizisinin de yakınsak olur. P bir demi b-AM-kompakt operatör olduğundan $(x_{n_{k_m}})$ dizisinin bir yakınsak alt dizisi olur. Sonuç olarak $T + P$ bir demi b-AM-kompakt operatör olur.

İki demi-b-AM-kompakt operatörün toplamı genelde bir demi b-AM-kompakt operatör olmayabilir.

Örnek 5 $T, S: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, operatörleri her $f \in C[0,1]$ için $T(f) = S(f) = \frac{1}{2}f$ olarak tanımlansın. Örnek 2’den $T + S = I$ bir demi b-AM- kompakt operatör değildir.

Teorem 3 bir Banach örgüsünün discrete ve KB-uzayı olmasını karakterize edecektir ve bunun için bazı notasyonlar aşağıda verilmiştir.

$$L_{cbM}(E) := \{T \mid T: E \rightarrow E \text{ sürekli ve b - AM kompakt operatör}\}$$

$$DL_{cbM}(E) := \{T \mid T: E \rightarrow E \text{ sürekli ve demi b - AM kompakt operatör}\}$$

Teorem 3 E Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) E discrete ve KB- uzayıdır.

(ii) $L_{cbM}(E) = \mathfrak{D}L_{cbM}(E)$.

Proof (i) $\Rightarrow$ (ii) Teorem 1’den $L_{bM}(E, F) \subset \mathfrak{D}L_{bM}(E)$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla $L_{cbM}(E, F) \subset \mathfrak{D}L_{cbM}(E)$ olur. Diğer yandan $T \in \mathfrak{D}L_{cbM}(E)$, her $x'' \in (E'')^+$ ve her $(x_n) \subseteq ([0, x''] \cap E)$ olsun. E b-özelliğine sahip olduğundan $([0, x''] \cap E)$ sıra sınırlıdır. Dolayısıyla $([0, x''] \cap E) \subseteq [0, x]$ olacak şekilde bir $x \in E^+$ vardır. Teorem 12.9 (Aliprantis & Burkinshaw, 2006) ve Sonuç 21.13 (Aliprantis & Burkinshaw, 1978)’den $[0, x] \subset E$ kompakttır. T sürekli olduğundan $T[0, x] \subseteq F$ de kompakttır ve $T([0, x''] \cap E) \subset T[0, x]$ olduğundan $T([0, x''] \cap E)$ göreceli kompakt olur. Sonuç olarak $T \in L_{cbM}(E)$ elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $L_{cbM}(E, F) = \mathfrak{D}L_{cbM}(E)$ olsun. Örnek 1’den dolayı $\frac{1}{2}I$ demi-b-AM-kompakt operatör olduğundan ve hipotezden, $\frac{1}{2}I$ b-AM-kompakt operatör olur. Dolayısıyla I bir b-AM-kompakt operatör olur. Teorem 12.9 (Aliprantis & Burkinshaw, 2006) ve Sonuç 21.13

(Aliprantis & Burkinshaw, 1978)'den E discrete ve sıra sürekli norma sahip olur. Teorem 3.46 (Aliprantis & Burkinshaw, 2006)'dan kolaylıkla görülebilir ki E b-özelliğine sahiptir. Dolayısıyla E bir KB-uzayıdır.

Teorem 4 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

i) E' de tanımlı bütün sürekli operatörler demi-b-AM-kompakt operatördür.

ii) $I: E \rightarrow E$ bir demi-b-AM-kompakt operatördür.

iii) E discrete ve KB-uzayıdır.

Örnek 6, demi b-AM-kompakt operatörler sınıfının domination özelliğini genelde sağlamadığını verir.

Örnek 6 $T, P: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ olmak üzere $P = I$ ve $T = 2I$ olarak tanımlansın ve $0 \leq P \leq T$ sağlansın. T demi b-AM kompakt operatördür ancak P demi b-AM kompakt değildir.

KAYNAKÇA

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (2006). Positive Operators. Berlin: Springer

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (1978). Locally Solid Riesz Spaces. New York: Academic Press

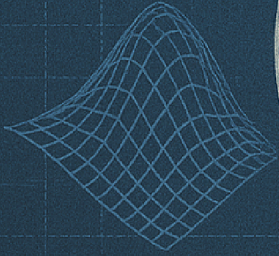
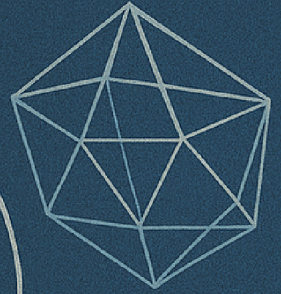
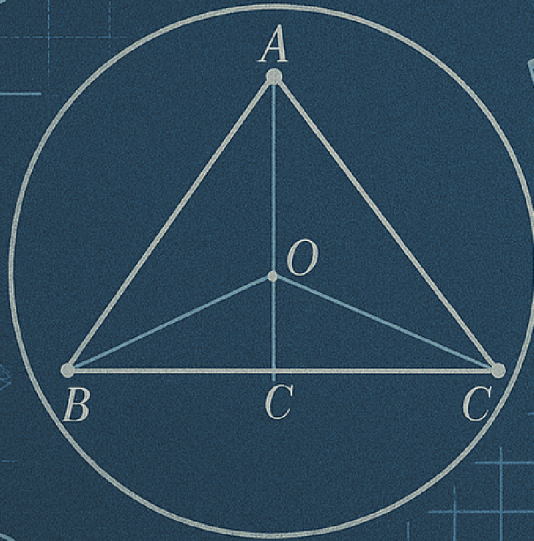
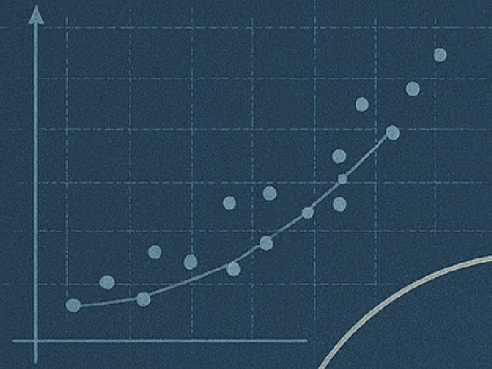
Alpay, S., Altın, B., Tonyalı, C. (2003). On property (b) of vector lattices. Positivity, 7, 135-139.

Alpay, S., Altın, B., Tonyalı, C. (2006). A note on Riesz space with property-b, Czechoslovak Mathematical Journal, 56(2), 765-772.

Cheng, N., Chen, Z. (2010). b-AM-compact operators on Banach lattices, Chinese Journal of Engineering Mathematics, 27(4).

Petryshyn, W.V. (1966). Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 14(2), 276-284.

MATEMATİKSEL YAPILAR: ANALİZ GEOMETRİ PERSPEKTİFİYLE



$f(x)$

