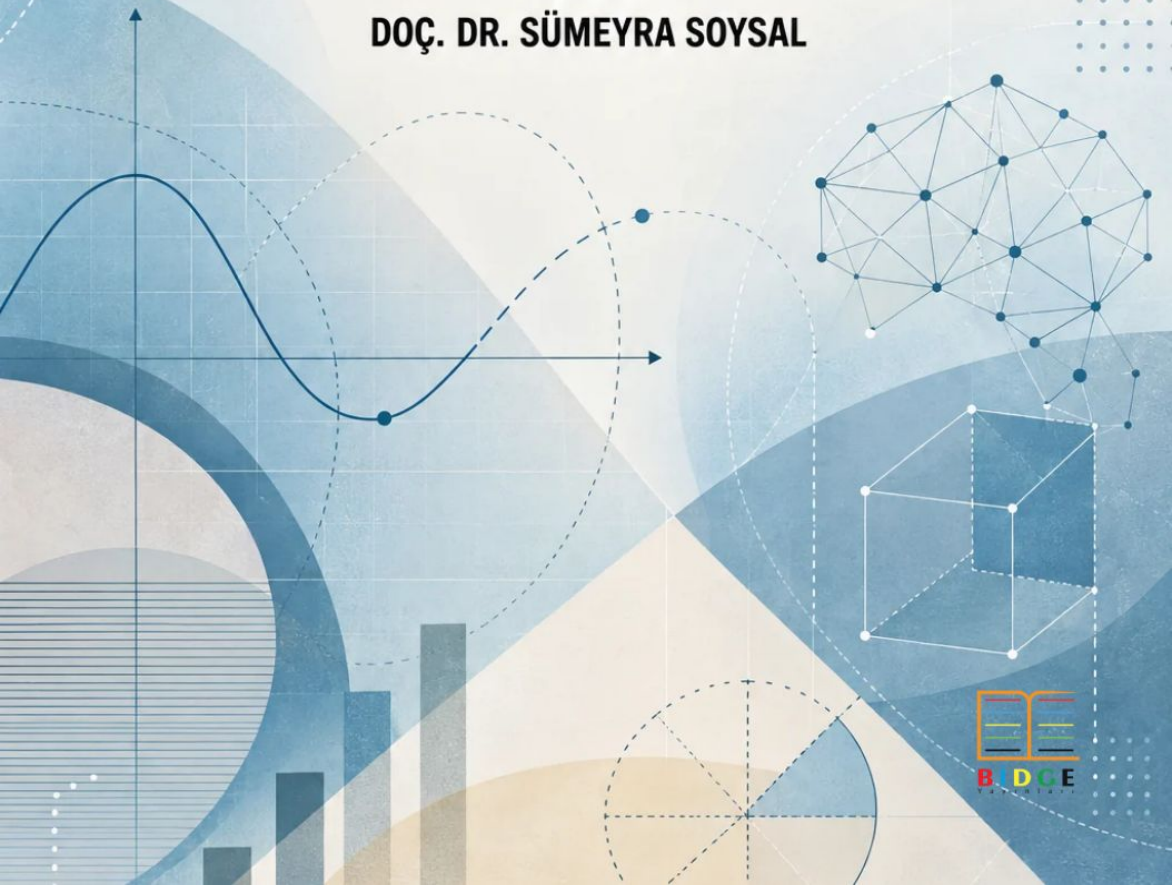
MATEMATİK EĞİTİMİNDE YENİLİKÇİ ÖĞRETİM:

YAPAY ZEKÂ, MODELLEME VE YARATICI UYGULAMALAR

EDİTÖR
DOÇ. DR. SÜMEYRA SOYSAL



BİDGE

BİDGE Yayınları

Matematik Eğitiminde Yenilikçi Öğretim: Yapay Zekâ, Modelleme ve Yaratıcı Uygulamalar

Editör: DOÇ. DR. SÜMEYRA SOYSAL

ISBN: 978-625-5436-05-4

1. Baskı
Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL
Yayınlama Tarihi: 2026-10-25
BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374
Yayın hakları © BİDGE Yayınları
www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com
Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.
Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya / Ankara

İÇİNDEKİLER

MATEMATİK ÖĞRETMEN EĞİTİMCİLERİNİN SOSYAL MEDYA KULLANIMI: TEORİDEN UYGULAMAYA BİR BAKIŞ 1

BEGÜM ÖZMUSUL, BİLGE YILMAZ ASLAN

YAPAY ZEKÂ ÇAĞINDA MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE GERÇEK YAŞAM BAĞLAMLI PROBLEM TASARIMI: KURAMSAL İLKELER VE PEDAGOJİK STRATEJİLER 49

MEHMET ATA OKUYUCU

MATEMATİK VE SANAT ARASINDAKİ İLİŞKİNİN YARATICI DRAMA YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ 63

PINAR İLASLANER TERZİ, MURTAZA AYKAÇ

LEGO TABANLI ÜÇ BÖLGELİ ETKİNLİK TAHTASI: KURAMDAN TÜRETİLMİŞ TASARIM, KARŞIT KANITIN SINANMASI VE ÖN KAYITLI MÜDAHALE PROTOKOLÜ ..87

İHSAN SÖYLEMEZ

GERÇEK YAŞAM BAĞLAMINDA MATEMATİKSEL MODELLEME: BAL ARISI PETEKLERİNİN GEOMETRİSİ VE OLUŞUMU 146

ALATTİN URAL

BÖLÜM 1

MATEMATİK ÖĞRETMEN EĞİTİMCİLERİNİN SOSYAL MEDYA KULLANIMI: TEORİDEN UYGULAMAYA BİR BAKIŞ

BEGÜM ÖZMUSUL[1]
BİLGE YILMAZ ASLAN[2]

Giriş

Matematik eğitimi, disipliner kimliğini yirminci yüzyıl boyunca kademeli olarak inşa etmiş bir alandır. Furinghetti vd.'nin (2013) ayrıntılı biçimde ele aldığı üzere, bu alan başlangıçta matematikçiler tarafından yürütülen, müfredat ve öğretim yöntemlerine ilişkin bir "iş" olmaktan çıkmıştır. Zamanla kendi araştırma dergilerine (JRMT, JRME, ZDM), uluslararası kongrelerine (PME, ICME, CERME) ve kuramsal çerçevelerine sahip bağımsız bir bilimsel disipline dönüşmüştür. Bu dönüşümün son halkalarından biri, matematik öğretmen eğitimcilerinin (mathematics teacher educators) kendilerinin bağımsız bir araştırma nesnesi olarak tanınmasıdır. Özmantar vd. (2026), 579 Scopus

[1] Dr. Arş. Gör., Gaziantep Üniversitesi, Nizip Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid: 0000-0003-0163-5406
[2] Dr. Öğr. Üyesi, Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid: 0000-0001-8632-4775

indeksli yayın üzerinde yürüttükleri geniş ölçekli konu modelleme çalışmasında bu süreci üç dalga olarak tanımlar: araştırma ilgisi önce öğrencilerin öğrenmesine, ardından öğretmenlerin öğrenmesine, en son olarak da matematik öğretmen eğitimcilerinin kendi bilgisine ve gelişimine yönelmiştir. Goos ve Beswick (2021) de benzer bir gözlemde bulunarak, matematik öğretmeni eğitimi araştırmalarının son yirmi yılda hızla genişlediğini, ancak bu genişlemenin uzun süre matematik öğretmen eğitimcilerinin kendi öğrenme süreçlerini gölgede bıraktığını belirtir.

Bu genişleyen ilginin gerçekleştiği dönem, aynı zamanda eğitim ortamlarının köklü bir dijital dönüşüm geçirdiği döneme denk gelmektedir. White vd. (2011), çevrimiçi sosyal medya araçlarının yalnızca bireyler arası iletişimi değil, bilginin üretilme, erişilme ve paylaşılma biçimlerini de dönüştürdüğünü vurgular. Wikiler, bloglar, mikrobloglar, çevrimiçi topluluklar ve sosyal etiketleme sistemleri gibi uygulamalar, öğrenme ortamlarını dinamik bir yapıya taşımıştır. White vd.'ne (2011) göre bu dönüşüm, eğitim alanının teknolojik yeniliklere her zaman açık olan doğasının doğal bir uzantısıdır ve "Eğitim 2.0" olarak adlandırılabilecek bir sürecin habercisidir. Bu süreçte sosyal medya, eğitimcilerin kullandığı dijital teknolojilerden kopuk ayrı bir alan olarak değil, bu teknolojilerin katılımcı ve ağ temelli bir bileşeni olarak ortaya çıkmaktadır. Ancak bu dönüşüm, yalnızca fırsatlarla değil, aynı zamanda yeni gerilimlerle de gelmektedir. Vallone vd.'nin (2023) beş Avrupa ülkesinde 1541 üniversite öğrencisiyle yürüttükleri çalışma, bilgi ve iletişim teknolojilerinin kullanımının hem koruyucu hem de riskli bir doğaya sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Teknolojinin kolay ve güvenilir kullanımı ile sosyalleşme aracı olarak algılanması psikolojik iyi oluşu desteklemektedir. Buna karşılık teknolojik yüklenme ve iş-özel yaşam sınırlarının bulanıklaşması, akademik motivasyonu düşürerek kaygı ve depresyon belirtilerini artırabilmektedir. Bu araştırma doğrudan matematik öğretmen eğitimcilerini konu almasa

da, dijital araçların kullanımının basit bir "fayda" meselesi olmadığını, aksine motivasyon ve mesleki iyi oluşla iç içe geçmiş karmaşık bir süreç olduğunu göstermesi bakımından önemli bir uyarı niteliği taşımaktadır.

Matematik öğretmen eğitimcilerinin bağımsız bir araştırma nesnesi olarak tanınması ile dijital ve sosyal medya araçlarının eğitim ortamlarındaki artan görünürlüğü bir araya geldiğinde, henüz yeterince araştırılmamış bir kesişim noktası ortaya çıkmaktadır. Özmantar vd.'nin (2026) topic modeling bulguları bu boşluğu dolaylı biçimde de olsa doğrulamaktadır. Özmantar vd.'ne (2026) göre "Teknoloji" teması, matematik öğretmen eğitimcisi araştırmalarında 2022 sonrasında bir yükseliş gösterirken ancak alanın kurumsal ve kavramsal çekirdeğine henüz tam olarak yerleşmemiş bir temadır. Bu durum, matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknolojiyle kurdukları ilişkinin üzerinde daha fazla durulması gereken yeni bir araştırma alanı olduğunu göstermektedir. Bu nedenle bu bölümde sosyal medya, matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknoloji kullanımından bağımsız bir olgu olarak değil, bu kullanımın bir parçası ve uzantısı olarak ele alınmaktadır.

Bu bölüm, söz konusu kesişim noktasını konu edinmektedir. Bölümün amacı, matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medya kullanımını hem kavramsal hem de ampirik bir düzlemde ele almaktır. Bunun için öncelikle matematik öğretmen eğitimcisi kavramı, bu mesleğin bilgi temelleri ve kuram-uygulama ilişkisindeki özgün konumu tartışılacaktır. Ardından matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknoloji kullanımı, teknolojik pedagojik alan bilgisi (TPACK) ve Eğitimcilerin Dijital Yeterlik Çerçevesi (DigCompEdu) üzerinden kavramsallaştırılacak ve sosyal medyanın bu kullanım yelpazesi içindeki yeri tartışılacaktır. Bölümün ikinci yarısında ise, farklı deneyim düzeylerine ve kurumsal bağlamlara sahip on matematik öğretmen eğitimcisinden elde edilen ampirik veriler sunulacak ve bu veriler geliştirilen

kuramsal çerçeveyle birlikte yorumlanacaktır. Böylece bölüm, şu temel soruya bir yanıt aramaktadır: Matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknoloji kullanımının bir parçası olarak sosyal medya kullanımını incelemek neden önemlidir ve bu kullanım, onların mesleki kimliği ve pratiğiyle nasıl bir ilişki içindedir?

Bir Meslek Grubu Olarak Matematik Öğretmen Eğitimcileri

Matematik Öğretmen Eğitimcilerinin Rolleri, Bilgisi ve Mesleki Gelişimi

Matematik eğitimcisinin kim olduğu sorusu, ilk bakışta basit görünse de alanyazında dikkatle ele alınması gereken bir tanımlama sorununu barındırır. Novotná vd. (2013), bu soruyu bölümlerinin çıkış noktası yaparak "matematik öğretmen eğitimcisi" ifadesinin farklı kurumsal ve kuramsal bağlamlarda farklı anlamlara gelebileceğini vurgular. Novotná vd.'ne (2013) göre kavram en geniş anlamıyla, matematik öğretiminden sorumlu olan herkesi kapsayabilir. Bu kapsama ebeveynlerden okul öncesi eğitimcilerine, sınıf öğretmenlerinden üniversite öğretim üyelerine kadar geniş bir yelpaze dâhildir. Kavram, matematik öğreniminin gözlemlenmesi eksenine taşındığında ise öğretmenleri, matematikçileri, psikoloji araştırmacılarını ve matematik eğitimi araştırmacılarını içine alacak şekilde genişler. Öğrenme ile öğretme arasındaki etkileşimin gözlemlenmesi düzeyine taşındığında ise bu tanım, öğretmenin kendisini (kendi pratiğinin gözlemcisi olarak), öğretmen eğitimcisini, matematikçiyi, öğretmenin süpervizörünü ve matematik eğitimi araştırmacısını kapsamaktadır (Novotná vd., 2013). Bu bölümde ise söz konusu geniş kavram daraltılarak "matematik öğretmen eğitimcisi" kavramı, üniversitelerde hizmet öncesi ve/veya hizmet içi matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesinden sorumlu akademisyenleri ifade etmek üzere kullanılmaktadır.

Bu çok katmanlı tanım, matematik öğretmen eğitimcilerinin neden tek bir role indirgenemeyeceğini göstermesi bakımından önemlidir. Goos ve Beswick (2021), matematik öğretmen eğitimi araştırmalarının son yirmi yılda belirgin bir biçimde genişlediğini, ancak bu genişlemenin uzun süre öğretmen adaylarının öğrenmesine odaklandığını, matematik öğretmen eğitimcilerinin kendi öğrenme ve gelişim süreçlerinin ise nispeten ihmal edildiğini belirtir. Özmantar vd. (2026) da bu tarihsel örüntüyü, matematik eğitimi araştırmalarının "öğrenciden öğretmene, öğretmenden matematik öğretmen eğitimcisine" doğru üç dalga hâlinde geliştiği şeklinde özetler ve matematik öğretmen eğitimcilerinin bağımsız bir araştırma nesnesi olarak tanınmasının nispeten yeni bir gelişme olduğunu ortaya koyar.

Matematik öğretmen eğitimcilerinin sahip olması gereken bilgi de bu genişleyen ilginin doğal bir uzantısı olarak araştırılmaya başlanmıştır. Escudero-Ávila vd. (2021), matematik öğretmen eğitimcisi bilgisini ele alırken Shulman'ın (1986) alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi ayrımından hareket eder. Ancak Escudero-Ávila vd. (2021) bu modeli doğrudan matematik öğretmen eğitimcilerine uyarlamak yerine, "matematiğin öğretim ve öğrenim nesnesi olarak anlaşılmasını sağlayan unsurlar" düzeyine taşırlar. Escudero-Ávila vd.'ne (2021) göre matematik öğretmen eğitimcisi bilgisi üç ana bileşenden oluşur: mesleki bilgi, matematik öğretiminin yönetimine ilişkin beceriler ve mesleki kimlik. Bu bileşenler birbirinden bağımsız değil, iç içe geçmiş bir bütün oluşturmaktadır. Escudero-Ávila vd.'ne (2021) göre matematik öğretmen eğitimcisi bilgisinin ayırt edici özelliği farklı bilgi unsurları arasında kurulan yoğun bağlantılarda ortaya çıkmaktadır.

Bu bilgi temelinin yanında matematik öğretmen eğitimcilerinin mesleki gelişimi de kendi başına bir araştırma konusu hâline gelmiştir. Özmantar vd.'nin (2026) 579 yayın üzerinde yürüttükleri bibliyometrik çalışmasındaki "Mesleki Gelişim"

(Professional Growth) temasının, matematik öğretmen eğitimcisi araştırmalarının en yerleşik ve süreklilik gösteren temalarından biri olduğunu ortaya koymaktadır. Bu mesleki gelişimin somut olarak nasıl gerçekleştiğine dair güçlü bir örnek, Olanoff vd.'nin (2021) kendi deneyimlerinden hareketle sundukları çalışmadır. Olanoff vd. (2021), mesleki gelişimlerini desteklemek amacıyla bir uygulama topluluğu (community of practice, CoP) oluşturduklarını anlatır. Wenger'in (1998) çerçevesine dayanarak, bu tür toplulukların üç temel boyutla tanımlandığını belirtirler: (1) üyelerin karşılıklı etkileşimi yoluyla norm ve ilişkiler geliştirmesi, (2) ortak bir amaç etrafında birleşmesi ve (3) zaman içinde paylaşılan bir kaynak dağarcığı (dil, rutinler, araçlar, anlatılar) üretmesi. Olanoff vd. (2021), bu topluluk içinde birbirlerinin derslerini gözlemleyerek ve yansıtıcı notlar paylaşarak, Schön'ün (1983) ayrımıyla hem eylem üzerine yansıtma (reflection on action) hem de meslektaşlarının eylemleri üzerine yansıtma pratiği geliştirdiklerini aktarır. Bu süreç, Cochran-Smith ve Lytle'ın (1999) "duruş olarak sorgulama" (inquiry as stance) kavramıyla da örtüşmektedir. Matematik öğretmen eğitimcileri, yalnızca başkalarının ürettiği kuram ve araştırmayı tüketen değil kendi pratiklerini bir soruşturma alanına dönüştürerek yerel bilgi üreten özneler olarak konumlanır. Bu örnek, matematik öğretmen eğitimcisinin mesleki gelişiminin bireysel bir çaba olmaktan çok meslektaşlarla kurulan işbirlikçi ve gözleme dayalı bir süreç olduğunu somutlaştırması bakımından, izleyen bölümlerde ele alınacak sosyal medya temelli mesleki ağlar tartışmasına da doğrudan zemin hazırlamaktadır.

Kuram ile Uygulama Arasında Bir Köprü Olarak Matematik Öğretmen Eğitimcisi

Matematik öğretmen eğitimcisinin rolünü yalnızca bilgi ve mesleki gelişim ekseninde ele almak bu mesleğin kuram ile uygulama arasındaki aracılık işlevi boyutunu gözden kaçırma riski taşır. Novotná vd. (2013), bu aracılık işlevini gözlem kavramı

üzerinden temellendirir. Ayrıca matematik eğitimcisinin farklı türleri (öğretmen, araştırmacı, öğretmen eğitimcisi), aynı öğretme-öğrenme durumunu farklı gözlem noktalarından izleyen aktörler olarak düşünülebilir. Bir öğretmen kendi öğrencisinin öğrenip öğrenmediğini gözlemler. Bir araştırmacı ise aynı durumu daha genel didaktik olguları ortaya çıkarmak amacıyla gözlemler. Bu iki gözlem biçimi arasındaki fark, yalnızca bakış açısından değil, sahip olunan bilgiden ve gözlemin amacından da kaynaklanır (Novotná vd., 2013).

Bu ayrım, kuram ile uygulama arasındaki ilişkinin neden basit bir "aktarım" ilişkisi olarak görülemeyeceğini açıklar. Brousseau (2002) bunu kendi deneyiminden hareketle şöyle tarif eder: Bir didaktikçi olarak çalışırken her öğretim adımının yorumlanması sistematik bir bilgilenme, öncü bir analiz ve olumsallığın çeşitli yönleriyle yüzleşme süreci gerektirir. Buna karşılık matematik öğretmen eğitimcisi bir öğretmen olarak her an gerçek zamanlı bilgiye dayanarak anlık kararlar almak zorundadır. Ayrıca didaktikçi olarak üretilen ince sonuçların ancak çok azı o anda kullanılabilir. Bu tanımlama, özellikle hem araştırmacı hem öğretmen eğitimcisi kimliğini taşıyan matematik öğretmen eğitimcilerinin iki farklı zamansallık ve bilgi rejimi arasında sürekli bir geçiş yapmak zorunda olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Bu aracılık işlevi yalnızca bireysel bir gerilim olarak kalmaz. Kurumsal ve işbirlikçi yapılar aracılığıyla da somutlaşabilir. Novotná vd. (2013), COREM (Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) örneğini bu bağlamda ele almaktadır. Bu merkezde araştırmacılar ve öğretmenler, didaktik durumları birlikte tasarlamış, uygulamış ve sonrasında ortaklaşa analiz etmiştir. Novotná vd.'ne (2013) göre bu işbirliği modelinde öğretmenler yalnızca araştırmanın nesnesi değil, aynı zamanda araştırma sürecinin ortak yürütücüleri olmuştur. Bu durum, hem

öğretmenlerin hem araştırmacıların mesleki bilgisinin karşılıklı olarak zenginleşmesini sağlamıştır. Olanoff vd.'nin (2021) uygulama topluluğu deneyimi de bu aracılık işlevinin bir başka görünümüdür. Zaslavsky'nin (2008) ifade ettiği gibi, matematik öğretmen eğitimcileri de tıpkı öğrenciler gibi görev (task) tasarlama, bu görevleri uygulama ve uygulama sürecini yansıtma döngüsüne katılarak öğrenir. Bu döngü, kuramsal bilginin (örneğin öğretim için matematiksel bilgi kuramı) doğrudan sınıf pratiğine değil sürekli bir tasarlama-uygulama-yansıtma dolayımına tabi olduğunu göstermektedir. Benzer bir dinamik, öğretmen adaylarıyla çalışan matematik öğretmen eğitimcileri için de geçerlidir. Escudero-Ávila vd. (2021) matematik öğretmen eğitimcisi, öğretmen adaylarının kendi zengin ve bütünleşik bilgilerini inşa edebilecekleri uygun bir ortam yaratmakla yükümlü olduğunu ifade etmektedir. Bu yükümlülük, yalnızca içerik aktarımını değil sürekli bir gözlemleme, yorumlama ve yeniden tasarlama pratiğini de gerektirir.

Bu çerçeveden bakıldığında matematik öğretmen eğitimcisi, öğretim süreçlerini gözlemleyen, bu gözlemlerini yorumlayan, kendi pratiğini bu yorumlar ışığında yeniden şekillendiren ve bu süreçte kendi mesleki bilgisini geliştiren bir uzman olarak tanımlanabilir. Bu tanım, ilerleyen bölümlerde tartışılacak olan dijital teknoloji kullanımını ve bu kullanımın bir bileşeni olan sosyal medyayı da anlamlı kılan bir zemin sunmaktadır. Bir matematik öğretmen eğitimcisinin sosyal medyada karşılaştığı bir içeriği doğrudan kullanması ile onu eleştirel bir gözlem ve yorumlama sürecinden geçirerek kullanması arasındaki fark tam da burada tarif edilen kuram-uygulama aracılığı işlevinin dijital ortamlara nasıl taşındığını gösteren bir örnek olacaktır.

Değişen Dijital Ortamlarda Matematik Öğretmen Eğitimcileri

Dijital Teknoloji ve Matematik Öğretmen Eğitimcilerinin Mesleki Pratiği

Matematik öğretmen eğitimcisi araştırmalarında dijital teknolojinin görünürlüğü, nispeten yakın bir tarihe dayanmaktadır. Özmantar vd.'nin (2026) bibliyometrik çalışması, 579 yayın içinde "Teknoloji" temasının 32 dokümanla (veri setinin %5,52'si) temsil edildiğini ve bu temanın en yüksek ağırlıklı anahtar kelimelerinin "çevrimiçi," "öğrenme," "teknoloji" ve "öğretme" olduğunu ortaya koymaktadır. Özmantar vd.'ne (2026) göre bu tema, matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital platformlara artan bağımlılığını yansıtmaktadır. Örneğin Mukuka ve Alex'in (2025) çalışması, matematik öğretmen eğitimcilerinin bu araçlara aşinalıklarının sınırlı olmasına karşın onları benimsemeye yönelik güçlü bir isteklilik taşıdıklarını göstermektedir. Baker ve Hjalmarson'ın (2019) çalışması ise matematik öğretmen liderlerine yönelik eşzamanlı çevrimiçi bir dersi yürüten iki öğretim elemanının yapılandırılmış (scaffolded) söylem aracılığıyla işbirlikli bir öğrenme ortamı oluşturma biçimlerini öz-çalışma (self-study) yöntemiyle incelemesi bakımından dikkat çekicidir. Özmantar vd. (2026) teknoloji temasını, alanın kurumsal çekirdeğini oluşturan yerleşik temalar (Mesleki Gelişim, Bilgi, Uygulama gibi) ile bu çekirdeğin sınıf pratiğine nasıl aktarıldığını gösteren araçsal temalar (Görev Tasarımı, İşbirliği, Kimlik gibi) arasında konumlandırılan "orta düzey" bir tema olarak tanımlamaktadır. Ayrıca bu temanın özellikle 2022 sonrasında bir yükseliş gösterdiğini belirtmektedir.

Bu yükselişin somut bir örneğini, Arzarello ve Taranto'nun (2021) İtalya'daki deneyimlerinden hareketle sundukları çalışma oluşturmaktadır. Arzarello ve Taranto (2021) Torino Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yürütülen Math MOOC UniTo projesini tanıtmaktadırlar. Bu proje, DI.FI.MA adlı bir Moodle platformu aracılığıyla, ülke genelinde 2500'den fazla öğretmene yönelik kitlesel açık çevrimiçi kurslar (MOOC) sunmaktadır. Bunun yanısıra GeoGebra Enstitüsü ile işbirliği içinde matematik derslerine teknoloji entegrasyonu konusunda hizmet öncesi ve hizmet içi

öğretmenlerin eğitimini desteklemektedir. Arzarello ve Taranto (2021) bu tür dijital ortamların matematik öğretmen eğitimcilerinin rolünü de dönüştürdüğünü öne sürmektedir. Hem üniversite araştırmacısı hem de aktif öğretmen kimliğine sahip "araştırmacı-öğretmen" (researcher-teacher) figürü, bu platformlarda bir aracı (broker) işlevi görmektedir. Bu figür, araştırmacıların ürettiği kuramsal bilgi ile sınıf pratiği arasında sürekli bir bağlantı sağlamaktadır. Bu gözlem, önceki bölümde Novotná vd. (2013) üzerinden tartışılan kuram-uygulama aracılığı işlevinin, dijital teknoloji ortamlarında da varlığını sürdürdüğünü hatta yeni bir aracı figür (broker) etrafında yeniden şekillendiğini göstermektedir.

Bu örnekler, dijital teknolojinin matematik öğretmen eğitimcilerinin mesleki pratiğine iki temel biçimde etkilediğini göstermektedir. İlk olarak, teknoloji bir öğretim aracı olarak işlev görmektedir. GeoGebra gibi yazılımlar veya MOOC platformları aracılığıyla öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin öğrenmesi desteklenmektedir. İkinci olarak, teknoloji bir mesleki gelişim ve işbirliği ortamı olarak işlev görmektedir. Matematik öğretmen eğitimcileri bu platformlar aracılığıyla hem kendi bilgilerini geliştirmekte hem de geniş ölçekli öğretmen topluluklarıyla etkileşime girmektedir. Arzarello ve Taranto'na (2021) göre DI.FI.MA platformu yalnızca içerik sunmakla kalmamıştır. Ayrıca katılımcı öğretmenlerin etkileşimlerinin de kaydedilerek mesleki bilgi paylaşımının izlenebilir hâle geldiği bir ortam işlevi görmüştür. Bu iki işlev bir arada düşünüldüğünde, dijital teknolojinin matematik öğretmen eğitimcilerinin mesleki pratiğiyle giderek daha fazla iç içe geçtiği söylenebilir.

Dijital teknolojinin matematik öğretmen eğitimcilerinin pratiğindeki bu iki işlevini bütüncül biçimde kavramsallaştırmak için alanyazında iki çerçeve öne çıkmaktadır. Bunlardan ilki, Shulman'ın (1986) pedagojik alan bilgisi kavramını teknoloji bilgisiyle genişleten Mishra ve Koehler'in (2006) teknolojik

pedagojik alan bilgisi (TPAB) çerçevesidir. Bu çerçeve, teknolojinin etkili kullanımını yalnızca yazılım ya da donanım bilgisi oluşturmaktadır. Ayrıca teknoloji, pedagoji ve alan bilgisinin karşılıklı etkileşiminden doğan bütünleşik bir bilgi türü olduğunu da vurgulamaktadır. İkincisi ise Avrupa Komisyonu bünyesinde geliştirilen Eğitimcilerin Dijital Yeterlik Çerçevesi'dir (DigCompEdu; Redecker, 2017). DigCompEdu, eğitimcilerin dijital yeterliğini altı alan altında tanımlar. Bunlar: mesleki katılım, dijital kaynaklar, öğretme ve öğrenme, değerlendirme, öğrenenlerin güçlendirilmesi ve öğrenenlerin dijital yeterliğinin desteklenmesidir. Bu çerçevenin bu bölüm açısından dikkat çekici yanı, dijital teknolojiyi yalnızca sınıf içi bir öğretim aracı olarak değil ayrıca kurumsal iletişim, mesleki işbirliği, yansıtıcı uygulama ve dijital sürekli mesleki gelişim gibi mesleki katılım boyutlarıyla birlikte ele almasıdır. Benzer biçimde dijital kaynaklar alanı, kaynakların seçilmesini, oluşturulup uyarlanmasını ve kişisel verilerin korunmasını da gözeterek yönetilip paylaşılmasını kapsamaktadır. Böylece DigCompEdu, bir eğitimcinin dijital teknolojiyle kurduğu ilişkiyi ders anlatımının ötesine taşıyarak mesleki yaşamının tamamına yayılan bir yeterlik alanı olarak tanımlamaktadır.

Matematik öğretmen eğitimcileri açısından bu yeterlik iki katmanlı bir anlam taşır. Matematik öğretmen eğitimcisi bir yandan kendi öğretiminde ve mesleki gelişiminde dijital teknolojileri kullanan bir eğitimci, diğer yandan öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin dijital yeterliliğini geliştirmekle sorumlu bir "öğretmenlerin öğretmeni"dir. Escudero-Ávila vd. (2021) matematik öğretmen eğitimcisini öğretmen adaylarının kendi bütünleşik bilgilerini inşa edebilecekleri bir ortam yaratmakla yükümlü olduğunu ifade etmektedir. Dijital teknolojilerin yaygınlaştığı bir dönemde bu ortamın dijital boyutu da eğitimcinin kendi kullanım biçimlerinden bağımsız düşünülemez. Bu nedenle matematik öğretmen eğitimcisinin dijital teknoloji kullanımı, yalnızca kendi

pratiği açısından değil, öğretmen adaylarına örtük biçimde sunduğu bir model olması bakımından da önem taşımaktadır. Bu sebeple alt bölümde, sosyal medyanın bu dijital teknoloji kullanımı içinde nasıl konumlandığı ele alınacaktır.

Dijital Teknoloji Kullanımının Bir Bileşeni Olarak Sosyal Medya

Yukarıdaki bölümlerde yer alan örnekler incelendiğinde, matematik öğretmen eğitimcisi araştırmalarında ele alınan dijital teknolojilerin, matematik öğretmen eğitimcilerinin kullandığı dijital teknoloji yelpazesinin yalnızca bir ucunu temsil ettiği görülmektedir. MOOC platformları, Moodle tabanlı sistemler ve GeoGebra gibi yazılımlar büyük ölçüde kurumsal olarak tasarlanmıştır. Ayrıca denetimli ve belirli bir eğitsel amaca göre yapılandırılmış ortamlardır. Örneğin Arzarello ve Taranto'nun (2021) DI.FI.MA platformu bir üniversite bölümü tarafından oluşturulmuştur. İçeriği araştırmacılar tarafından tasarlanmış ve katılımı belirli bir kursa kayıtlı öğretmenlerle sınırlı olan bir sistemdir. Benzer biçimde, Olanoff vd.'nin (2021) önceki bölümde ele alınan uygulama topluluğu da önceden planlanmış bir mentorluk ilişkisi etrafında, sınırlı sayıda katılımcıyla yürütülen kapalı bir yapıdır.

Aynı yelpazenin diğer bir bileşeni ise sosyal medyadır. Sosyal medya da bir dijital teknolojidir. Bunun yanısıra kurumsal platformlardan belirgin biçimde ayrışan bir niteliğe de sahiptir. White vd. (2011) sosyal medya araçlarını dinamik, gerçek zamanlı, işbirlikçi ve "çoktan çoğa" (many-to-many) bir iletişim modeline dayandığını ifade etmektedir. Sosyal medya araçları arasında wikiler, bloglar, mikrobloglar, sosyal ağlar, video paylaşım platformları ve sosyal etiketleme sistemleri yer almaktadır. Bu özellikler, sosyal medyayı kurumsal öğrenme platformlarından en az üç bakımdan ayırmaktadır. İlk olarak, katılım sınırsızdır. Bir matematik öğretmen eğitimcisinin bir öğretim etkinliğini paylaştığı

bir Instagram hesabını, o eğitimcinin hiç tanımadığı herhangi bir kuruma bağlı olmayan çok sayıda kişi takip edebilir. İkinci olarak, içerik üretimi çok yönlüdür. Kurumsal platformlarda içerik genellikle tek bir otorite (kurum, araştırmacı, eğitmen) tarafından üretilirken sosyal medyada matematik öğretmen eğitimcisi hem içerik tüketen hem içerik üreten bir konuma geçebilir. Üçüncü olarak topluluk oluşumu kurumsal sınırların dışında gerçekleşir. Wenger'in (1998) uygulama topluluğu kavramı sosyal medya bağlamında, önceden tanımlanmış bir kurumsal ilişkiye değil ortak bir ilginin kendiliğinden bir araya getirdiği coğrafi ve kurumsal sınırları aşan ağlara dönüşebilir. Bu durumlar sosyal medyanın dijital teknolojilerin bir parçası olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla matematik öğretmen eğitimcisinin dijital teknoloji kullanımı kurumsal ve denetimli platformlardan açık ve ağ temelli platformlara uzanan bir süreklilik olarak düşünüldüğünde, sosyal medya bu sürekliliğin katılımın geniş, kurumsal denetimin ise zayıf olduğu ucunu oluşturur. Nitekim DigCompEdu'nun (Redecker, 2017) tanımladığı yeterliklerin birçoğu sosyal medya kullanımında doğrudan karşılık bulmaktadır. Matematik öğretmeni eğitimcisinin sosyal medyada karşılaştığı bir içeriği değerlendirip derse uyarlaması, dijital kaynakların seçilmesi ve uyarlanması yeterliliğine karşılık gelir. Meslektaşlarıyla sosyal medya üzerinden bağlantı kurması ise sürekli dijital mesleki gelişim yeterliliğiyle ilişkilidir. Öğretmen adaylarının görüntülerini paylaşmadan önce onamlarını alması da kaynakların ve kişisel verilerin korunarak paylaşılması yeterliliğine sahip olduğunu gösterir. Benzer biçimde, bir sosyal medya içeriğinin matematiksel doğruluğunu ve pedagojik uygunluğunu birlikte değerlendirmek, TPACK çerçevesinin (Mishra ve Koehler, 2006) öngördüğü teknoloji, pedagoji ve alan bilgisi bütünleşmesinin tipik bir örneğidir. Bu bütünleşik bakış ampirik olarak da desteklenmektedir. Manca ve Ranieri (2016), İtalya'daki tüm akademik personele yönelttikleri ve 6139 yanıt aldıkları geniş ölçekli araştırmada sosyal medyayı tek bir platform olarak ele

almamaktadırlar. Twitter ve Facebook gibi genel sosyal ağlardan LinkedIn, ResearchGate ve Academia.edu gibi akademik ağlara, blog ve wikilerden YouTube, Vimeo, podcast ve SlideShare gibi içerik paylaşım hizmetlerine uzanan geniş bir dijital araç yelpazesi olarak ele almıştır. Araştırmanın bu bölüm açısından en dikkat çekici bulgusu, kurumsal e-öğrenme platformlarını kullanan ya da çevrimiçi veya harmanlanmış öğretim yürüten akademisyenlerin sosyal medyayı kişisel, öğretimsel ve mesleki amaçların neredeyse tamamında kullanmasıdır (Manca ve Ranieri, 2016). Dolayısıyla akademisyenlerin sosyal medya kullanımı onların kurumsal dijital teknolojilerle edindikleri deneyimden bağımsız değildir. Veletsianos vd. (2013) sosyal medya platformlarını öğretim elemanları tarafından çoğunlukla öğrenme yönetim sistemleri gibi diğer araçlarla edinilmiş deneyimler üzerinden çerçevelendiğini göstermiştir. Dolayısıyla sosyal medya kullanımı, matematik öğretmen eğitimcisinin dijital yeterliliğine sonradan eklenmiş ayrı bir beceri değil bu yeterliliğin açık ve ağ temelli ortamlarda işletildiği ve sınandığı bir bileşeni olarak görülmektedir. Mevcut alanyazın ise bu yelpazenin ağırlıklı olarak kurumsal ucuna yoğunlaşmış görünmektedir. Özmantar vd.'nin (2026) teknoloji temasına ilişkin bulguları bu durumu doğrulamaktadır. Sosyal medyanın katılımcı, ağ temelli ve kurumsal denetimden bağımsız doğasına odaklanan konular literatürde çok az ele alınmaktadır. Bu durum, matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknoloji kullanımına ilişkin bilgimizin, sosyal medya gibi açık ve ağ temelli ortamları da kapsayacak biçimde genişletilmesi gerektiğini göstermektedir. Disipline özgü bir bakışın gerekliliği de alanyazında vurgulanmaktadır. Manca ve Ranieri (2016), sosyal medya kullanım sıklığıyla en güçlü ilişkili değişkenin bilimsel disiplin olduğunu ifade etmiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre matematik ve bilgisayar bilimleri ile doğa bilimleri alanındaki akademisyenler, uygulamalı bilimlerdeki meslektaşlarıyla birlikte Twitter, Facebook ve YouTube gibi araçları beşeri bilimler, sanat ve sosyal bilimler alanındaki

akademisyenlerden daha az kullanmaktadır. Ayrıca LinkedIn, ResearchGate ve Academia.edu gibi mesleki ağlara ise daha fazla yönelmektedirler. Manca ve Ranieri (2016) bu farkı kısmen, ilgili disipline yönelik içeriğin sosyal medyada bulunup bulunmamasıyla açıklamaktadır. Matematik öğretmen eğitimcileri ise hem matematiğe hem de eğitim bilimlerine uzanan disiplinlerarası konumlarıyla bu iki eğilimin kesişiminde yer almaktadır. Bu durum, onların sosyal medya kullanımının ayrıca incelenmesini anlamlı kılmaktadır. Bu sebeple bir sonraki bölümde matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknoloji kullanımının bir bileşeni olarak sosyal medya ve sosyal medya kullanımın mesleki ve pedagojik pratiğe yansıyan özgün boyutlarıyla birlikte ele alınacaktır.

Matematik Öğretmen Eğitiminde ve Matematik Öğretmen Eğitimcilerinin Mesleki Pratiğinde Sosyal Medya

Önceki bölümde ortaya konan çerçeve, sosyal medyanın matematik öğretmen eğitimcilerinin dijital teknoloji yelpazesinin katılımcı ve ağ temelli ucunu oluşturduğunu göstermektedir. Bu durum sosyal medyanın matematik öğretmen eğitimcisinin mesleki ve pedagojik pratiğinde nasıl bir yer tuttuğu sorusunu gündeme getirmektedir. Bu soruyu yanıtlamak için sosyal medyayı yalnızca tekil bir araç olarak değil, matematik öğretmen eğitimcisinin dijital teknoloji kullanımının gerçekleştiği bir ortam olarak ele almak gerekir. White vd. (2011) sosyal medya araçları eğitim bağlamında dinamik, dağınık, gerçek zamanlı ve "çoktan çoğa" bir yapıya sahip olduğunu vurgulamaktadır. Bu özellik, sosyal medyayı belirli bir dersin veya kursun sınırları içinde kalan geleneksel öğrenme ortamlarından ayırmaktadır. Bir matematik öğretmen eğitimcisi için bu durum, sosyal medyanın dersin başladığı ve bittiği andan bağımsız, sürekli açık kalan bir mesleki alan oluşturduğu anlamına gelir. Bu özelliğiyle sosyal medya, matematik öğretmen eğitimcisinin hem öğretmen adaylarıyla kurduğu ilişkinin hem de

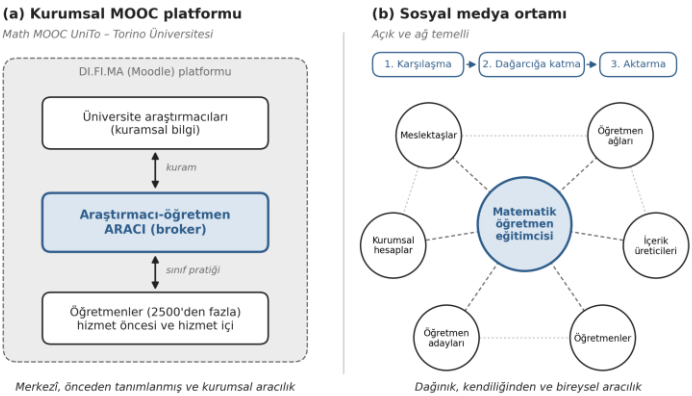
kendi mesleki öğrenmesinin gerçekleştiği bir arka plan hâline gelmektedir.

Bu ortamın ilk ve en görünür kullanım biçimi pedagojiktir. Novotná vd.'nin (2013) tarif ettiği gözlem çerçevesi bu bağlama uygulandığında, bir matematik öğretmen eğitimcisinin sosyal medyada karşılaştığı bir öğretim içeriğini (bir video, bir görsel, bir etkinlik önerisi) doğrudan sınıfa taşıması ile bu içeriği önce gözlemleyip yorumlayarak, öğretmen adaylarıyla birlikte eleştirel bir incelemeye tabi tutması arasında niteliksel bir fark vardır. İlk durumda sosyal medya yalnızca bir içerik deposu işlevi görürken, ikinci durumda matematik öğretmen eğitimcisi, önceki bölümde tartışılan kuram-uygulama aracılığı rolünü sosyal medya içeriğine de uygulamaktadır. İçeriğin matematiksel doğruluğunu, pedagojik uygunluğunu ve öğretmen adaylarının gelişimine katkısını değerlendirerek onu ham hâliyle değil, yorumlanmış ve bağlamlandırılmış bir biçimde derse dâhil etmektedir. Bu kullanım biçimi, DigCompEdu'nun (Redecker, 2017) dijital kaynakların seçilmesi ve uyarlanması olarak tanımladığı yeterliliğin sosyal medya ortamındaki karşılığıdır. Bu ayrım, izleyen bölümde sunulan ampirik bulguların yorumlanmasında da merkezi bir yer tutacaktır.

Sosyal medyanın ikinci işlevi, matematik öğretmen eğitimcisinin kendi mesleki öğrenmesiyle ilgilidir. Arzarello ve Taranto'nun (2021) ifade ettiği aracı (broker) figürü bu bağlamda açıklayıcıdır. Kurumsal bir MOOC platformunda (Şekil 1a) bu aracılık rolü, araştırmacı-öğretmen gibi belirli bir kişi veya kurum tarafından üstlenilmektedir. Sosyal medya ortamında ise bu rol çok daha dağınık ve kendiliğinden bir hâl alabilir (Şekil 1b). Bir matematik öğretmen eğitimcisi, takip ettiği bir hesap aracılığıyla yeni bir öğretim yaklaşımıyla karşılaşabilir, bunu kendi bilgi dağarcığına katabilir ve zamanla kendisi de bu bilgiyi başkalarına aktaran bir aracıya dönüşebilir. Bu süreç, kurumsal platformlardaki gibi önceden tanımlanmış bir yapı içinde değil, çoğunlukla plansız,

rastlantısal ve sürekli karşılaşmalar yoluyla gerçekleşir. Bu durum sosyal medyayı mesleki öğrenme açısından hem zengin hem de öngörülemez bir kaynak hâline getirmektedir. DigCompEdu çerçevesinde bu işlev, eğitimcinin kendi mesleki gelişimi için dijital kaynakları ve ağları kullanmasını ifade eden dijital sürekli mesleki gelişim yeterliğiyle örtüşmektedir.

Şekil 1 Kurumsal MOOC Platformunda ve Sosyal Medya Ortamında Aracılık (Broker) Rolü



Kaynak: Arzarello ve Taranto (2021)

Üçüncü olarak, sosyal medya bilgi paylaşımı ve mesleki etkileşim için bir zemin oluşturmaktadır. Wenger (1998) çerçevesi kurumsal bir uygulama topluluğu için tarif edilmiştir. Bu çerçeve karşılıklı etkileşimi, ortak bir amaç etrafında birleşmeyi ve paylaşılan bir kaynak dağarcığı oluşturmayı içermektedir. Bu üç boyut, sosyal medya bağlamında da gözlemlenebilir bir nitelik taşır. Farklı üniversitelerde, hatta farklı ülkelerde çalışan matematik öğretmen eğitimcileri, ortak bir mesleki ilgi etrafında (örneğin belirli bir öğretim yaklaşımı veya belirli bir öğretmen ağı) sosyal medya üzerinden bir araya gelebilir. Bu etkileşim zamanla bir dil, bir paylaşılan kaynak repertuvarı ve hatta bir ortak kimlik duygusu üretebilir. Ancak bu topluluğun sınırları, kurumsal bir uygulama

topluluğunun aksine, çok daha geçirgendir. Katılım herhangi bir anda başlayabilir veya sona erebilir, üyelik resmi bir statüye bağlı değildir ve topluluğun sürekliliği büyük ölçüde bireysel ilgiye bağlıdır. Bu yönüyle sosyal medya, DigCompEdu'nun mesleki katılım alanında yer alan mesleki işbirliği yeterliğinin kurumsal sınırların dışına taşan bir görünümünü sunmaktadır.

Bu üç işlev bir arada düşünüldüğünde matematik öğretmen eğitimcisinin sosyal medya karşısındaki konumunun sabit olmadığı, aksine bir süreklilik ekseni üzerinde hareket ettiği görülür. Bu eksenin bir ucunda yalnızca içerik tüketen bir konum yer alırken, ortasında bu içeriği eleştirel biçimde değerlendiren ve tartışmaya açan bir katılımcı konumu, diğer ucunda ise kendi içeriğini üreten ve paylaşan bir üretici konumu bulunmaktadır. Bu üç konum birbirini dışlamaz. Aynı matematik öğretmen eğitimcisi, farklı platformlarda veya farklı zamanlarda bu konumlar arasında geçiş yapabilir. Bu geçiş süreci mesleki kimlikle de yakından ilişkilidir. Bir matematik öğretmen eğitimcisinin kendi ürettiği bir öğretim etkinliğini geniş bir kitleyle paylaşması yalnızca bir bilgi aktarımı eylemi değil, aynı zamanda kendi mesleki uzmanlığını görünür kılma ve bu uzmanlığın tanınmasını sağlama biçimidir. Bu bakımdan sosyal medya, matematik öğretmen eğitimcisinin mesleki kimliğinin inşa edildiği ve görünür kılındığı bir alan işlevi de görebilir. Manca ve Ranieri (2016) akademisyenlerin sosyal medya etkinliklerinin merkezinde çevrimiçi mesleki kimliğin özenle yönetilmesinin yer aldığını vurgulamaktadır. Ancak Manca ve Ranieri'ye (2016) göre kişisel ve mesleki yaşamların iç içe geçmesi bir tehdit olarak da algılanabilmektedir. Deneyimli akademisyenlerin eğlence amaçlı sosyal ağlar yerine LinkedIn gibi mesleki platformları tercih etmesi bu kaygının bir göstergesi olarak yorumlanmıştır.

Bununla birlikte, bu görünürlüğün bir bedeli de bulunmaktadır. Vallone vd.'nin (2023) bulguları, bilgi ve iletişim teknolojilerinin yoğun kullanımının motivasyonu ve psikolojik iyi

oluşu olumsuz etkileyebileceğini göstermektedir. Bu etki, özellikle iş ile özel yaşam arasındaki sınırların bulanıklaşması yoluyla ortaya çıkmaktadır. Bu araştırma doğrudan sosyal medyayı veya matematik öğretmen eğitimcilerini konu almasa da bulguları bu bağlama taşındığında önemli bir uyarı sunmaktadır. Sosyal medyanın sunduğu sürekli erişilebilirlik ve görünürlük, aynı zamanda bir matematik öğretmen eğitimcisinin ne zaman "mesleki" ne zaman "kişisel" alanda olduğu sorusunu belirsizleştirebilir. İçerik üretme ve paylaşma pratiği zamanla bir yüke dönüşebilir. Bu gerilim, izleyen bölümde sunulan ampirik bulgularda, özellikle katılımcıların sosyal medyayı kullanmama gerekçelerinde, somut bir karşılık bulacaktır.

Bütün bu tartışmalar bir araya getirildiğinde şu temel argümana ulaşılabilir: Matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medya kullanımı ne belirli bir dijital platformun benimsenmesinden ibaret bir mesele ne de dijital teknoloji kullanımından yalıtılmış ayrı bir alan olarak görülmelidir. Bu kullanım ya da kullanmama kararının kendisi, matematik öğretmen eğitimcisinin daha geniş dijital teknoloji kullanımı ve dijital yeterliliği içinde konumlanmaktadır. Bunun yanısıra pedagojik yargısının, mesleki öğrenme biçiminin, meslektaşlarıyla kurduğu ağların ve mesleki kimliğinin bir boyutu olarak anlaşılmalıdır. Bu çerçeve, izleyen bölümde sunulan on matematik öğretmen eğitimcisinin deneyimlerinin yorumlanmasında temel bir zemin sağlayacaktır.

Matematik Öğretmen Eğitimcileri Arasında Sosyal Medya Kullanımına Dair Yorumlayıcı Bakış Açısı

Araştırma Deseni, Katılımcılar ve Veri Analizi

Bu çalışma, keşfedici (exploratory) nitel bir desenle yürütülmüştür. Stebbins'e (2001) göre keşfedici araştırma, betimleme ve anlamaya yol açacak genellemelerin ortaya çıkarılmasını en üst düzeye çıkarmayı amaçlayan, geniş kapsamlı, amaçlı ve sistematik bir girişimdir. Bu desen, konunun alanyazında

henüz yeterince incelenmediği durumlarda, olgunun hangi boyutlarda ortaya çıktığını betimlemeye ve sonraki çalışmalar için sorular üretmeye olanak tanır. Matematik eğitimcilerinin sosyal medya kullanımı önceki bölümlerde belirtildiği üzere matematik eğitimcisi araştırmalarında henüz sistematik biçimde ele alınmamıştır. Bu nedenle çalışma, belirli bir hipotezi sınamayı değil, sosyal medya kullanımın hangi gerekçelerle ve hangi biçimlerde ortaya çıktığını anlamayı amaçlamaktadır. Keşfedici araştırmanın bulguları ön nitelik taşıdığından ve yeni sorular üretmeye yöneliktir. Bu sebeple bölümde sunulan sonuçlar genellenebilir çıkarımlar olarak değil sonraki araştırmalara yön verecek örüntüler olarak değerlendirilmelidir. Keşfedici desen yalnızca tümevarımsal yaklaşımlarla da sınırlı değildir (Casula vd., 2021). Bu çalışmada kodlama, verilerden ortaya çıkan örüntülere açık kalmakla birlikte bölümün kuramsal çerçevesiyle de ilişkilendirilmiştir. Veriler, Türkiye'deki üniversitelerde görev yapan on matematik öğretmen eğitimcisinden Google Form aracılığıyla toplanmıştır. Araştırmaya katılım gönüllülük esasına dayanmış ve tüm katılımcıların onamı alınmıştır. Formda demografik bilgilerin yanı sıra platform tercihleri; ders öncesi, ders içi ve ders sonrası kullanım; pedagojik amaçlar; içerik değerlendirme ölçütleri; içeriklerin doğrudan kullanımı ya da uyarlanması; içerik üretimi; öğretmen adaylarının tepkileri; mesleki öğrenme ve ağlar; karşılaşılan güçlükler; etik sınırlar ve öz-yeterlik boyutlarını yoklayan on dört açık uçlu soru yer almıştır.

Katılımcıların beşi doktor öğretim üyesi, ikisi doçent, ikisi araştırma görevlisi, biri ise doktoralı öğretim görevlisidir. Mesleki deneyim açısından ikisi 0-5 yıl, üçü 6-11 yıl, dördü 12-17 yıl ve biri 18-23 yıl deneyime sahiptir. Akademik çalışmalarının en çok hangi grup üzerinde yoğunlaştığı sorulduğunda beş katılımcı öğretmen adaylarını, bir katılımcı öğretmenleri, bir katılımcı hem öğretmenleri hem öğretmen adaylarını, bir katılımcı hem öğretmenleri hem

öğrencileri, iki katılımcı ise öğrencileri işaret etmiştir. Araştırma odağını öğrenciler olarak belirten katılımcılar (K4, K5, K10) yanıtlarında öğretmen adaylarıyla yürüttükleri derslere ve etkileşimlere ayrıntılı biçimde değinmektedir. Dolayısıyla on katılımcının tamamı, hizmet öncesi ya da hizmet içi düzeyde, matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesi sürecinde fiilen yer almaktadır. Katılımcıların kimliklerini ve bağlı bulundukları kurumları korumak amacıyla alıntılarda K1'den K10'a kadar kod adları kullanılmıştır. Herhangi bir kişi ya da kurum adına yer verilmemiştir.

Verilerin kodlanmasını matematik eğitimi alanında çalışan iki araştırmacı yapmıştır. Yanıtlar, katılımcının bütün sorulara verdiği ifadeler bir arada gözetilerek anlam birimleri düzeyinde incelenmiştir. İlk aşamada teknoloji adı yerine eylem, amaç, gerekçe ve değerlendirme esas alınarak ifadeye yakın betimleyici kodlar geliştirilmiştir (örneğin "öğrenme yönetim sistemiyle iletişim", "video bağlantısını ders haftasına ekleme", "matematiksel geçerliliği denetleme", "öğrenci düzeyine göre uyarlama"). İkinci aşamada aynı olguya ilişkin kodlar karşılaştırılarak daha soyut kategoriler oluşturulmuş; teknolojiye ilişkin anlatılar ayrıca "kurumsal aracı alternatif olarak tercih etme", "araçları birlikte kullanma", "amaca göre iletişim kanalı ayırma" ve "sosyal medyada karşılaşılan içeriği derse taşıma" örüntüleri bakımından yeniden okunmuştur. Üçüncü aşamada kodlar, katılımcılar arasındaki benzerlikleri ve karşıt örnekleri kapsayacak dört üst analitik temada birleştirilmiştir (Tablo 1). TPACK ve DigCompEdu kategorileri başlangıçta zorunlu bir kod şeması olarak kullanılmamış, elde edilen örüntülerin kuramsal yorumunda başvurulan kaynaklar olarak tutulmuştur.

Kodlama, açık uçlu yanıtların anlam birimlerine dayalı betimleyici çözümlenmesi olarak yürütülmüştür. Aynı katılımcının bir kodla ilişkili yinelenen ifadeleri katılımcı sıklığında bir kez sayılmıştır. Ayrıca bir anlam birimine birden çok kod atanabilmiştir.

Gerçekleşmiş uygulamalar, koşullu ya da varsayımsal ifadeler ve genel görüşler birbirinden ayrılmıştır. Sosyal medya dijital teknolojilerin bir alt bileşeni olarak ele alınmıştır. Bununla birlikte katılımcıların YouTube gibi video platformlarını sosyal medya olarak sınıflandırma biçimlerinin farklılaştığı dikkate alınmıştır. Analizde (1) sosyal medya platformunda hesap sahibi olma ya da etkin katılım, (2) bu platformlarda karşılaşılan içeriğin öğretime taşınması, (3) mesleki takip ve iletişim ve (4) öğrenme yönetim sistemi, matematik yazılımı ya da kurumsal iletişim aracı gibi diğer dijital teknolojilerin kullanımı birbirinden ayrılmıştır. Böylece bir katılımcının "sosyal medya kullanmıyorum" demesi, YouTube videolarından yararlanmadığı ya da hiçbir dijital araç kullanmadığı şeklinde yorumlanmamıştır. Formun sosyal medya odaklı olması nedeniyle diğer teknolojilerin kullanılmaması değil, yalnızca açıkça anılması kodlanabilmiştir. Bu alt örüntülere eksiksiz kullanıcı sıklıkları atanmamıştır. Görüş formunda doğrudan sorulan matematiksel doğruluk, pedagojik uygunluk ve etik gibi konuların yanıt sıklıkları da bağımsız bir önem sıralaması olarak ele alınmamıştır.

Kodlama şeffaflığını artırmak amacıyla 29 betimleyici kodun adları, kısa tanımları, her kodu destekleyen farklı katılımcı sayıları (f) ve ilgili katılımcı kodları Ek 1'de; dijital araçlar arasındaki ilişkiye yönelik örnek anlam birimleri ve bu ifadelerden çıkarılan ilk kodlar ise Ek 2'de sunulmuştur. Dört üst tema, araştırmacıların veriyi düzenleme tercihini yansıtan ve veriyi açıklamak için geliştirilen kategorilerdir. Önceden doğrulanmış bir dijital yeterlik modeli ya da genellenebilir bir kullanıcı tipolojisi değildir.

Tablo 1 Tümevarımsal Çözümlemede Geliştirilen Üst Temalar ve Örnek Veri Dayanakları

Üst analitik tema	Analizde karşılaştırılan boyutlar	Örnek Kanıt

Dijital teknolojiler içerisinde sosyal medyanın konumu	Platform kullanımı ve içerik kullanımı ayrımı; kurumsal araçların alternatifliği; video–ÖYS birlikteliği; içerik keşfi ve öğretime aktarım	K1/K9: kurumsal platform; K8: YouTube bağlantılarını ÖYS'ye ekleme; K10: Instagram'da görülen GeoGebra etkinliğini kullanma
Dijital matematik içeriğinin değerlendirilmesi ve pedagojik dönüştürülmesi	Matematiksel doğruluk, kavramsal anlam, kaynak güvenilirliği; uyarlama ve tartışma	K2: hatalı içerikleri tartışma; K5: uygulama sonrası uyarlamayı tartışma; K9: mutlak değer analojisi
Öğretmen adaylarının deneyimleri ve mesleki öğrenme	Algılanan katılım; dijital dikkat; mesleki takip; etkileşim	K8: video sonrası ilgi gözlemi; K3/K9: mesleki takip; K2: meslektaş iletişimi
Etik, mesleki sınırlar ve destek koşulları	Öğrenci iletişimi, onam, telif, zaman, öz-yeterlik ve rehberlik talepleri	K2: onamlı paylaşım; K6: iletişim sınırları; K5: etik kaygı

K = katılımcı; ÖYS = öğrenme yönetim sistemi. Temalara ilişkin kodların tanımları ve katılımcı dağılımları Ek 1'de sunulmuştur.

Bu veri seti, istatistiksel olarak genellenebilir bulgular üretme iddiası taşımamaktadır. Bu bölümün amacı, önceki bölümlerde geliştirilen kavramsal çerçevenin gerçek mesleki deneyimlerde nasıl bir karşılık bulduğunu keşfetmektir. Bu nedenle bulgular, Tablo 1'deki dört tema izlenerek ve ilgili kuramsal tartışmalarla iç içe geçirilerek sunulmaktadır. Metinde verilen f değerleri, ilgili kodu en az bir yanıtta destekleyen farklı katılımcı sayısını göstermektedir (N = 10).

Dijital Teknolojiler İçerisinde Sosyal Medyanın Konumu

Katılımcıların yanıtları, sosyal medyaya ilişkin kararların daha geniş bir dijital teknoloji kullanımı içinde verildiğini göstermektedir. Formun sosyal medyaya odaklanmasına karşın birçok katılımcı, sosyal medya dışındaki dijital teknolojilere kendiliğinden değinmiştir (Ek 2). K1 öğrencileriyle "öğrenme yönetim sistemleri üzerinden iletişim" sağladığını, K9 ise

"üniversitemizin sunduğu e-kampüs platformu üzerinden öğrencilerle paylaşım" yaptığını belirtmektedir. K8 YouTube videolarını, derste izlemeye zaman kalmadığında "öğretim yönetim sistemi üzerinden dersin ilgili haftasına" eklemektedir. K6 sınıf temsilcileriyle WhatsApp grupları üzerinden iletişim kurarken önemli yazışmalar için kurumsal e-postasını kullanmakta, böylece iletişim kanallarını amaca göre ayırmaktadır. K4 ise classdojo gibi sınıf yönetim platformları, yapay zeka araçları, web 2.0 araçlarını amacına uygun olarak kullanmaya dikkat ettiğini ifade etmektedir.

Bu anlatılar, kurumsal dijital araçlar ile sosyal medya arasındaki ilişkinin farklı biçimlerde kurulduğunu göstermektedir. K1 ve K9'da kurumsal platform sosyal medyanın yerine tercih edilen bir alternatif olarak konumlanırken, K8 video platformu ile kurumsal sistemi birlikte kullanmaktadır. Manca ve Ranieri (2016), kurumsal e-öğrenme platformlarını kullanan ya da çevrimiçi veya harmanlanmış öğretim yürüten akademisyenlerin sosyal medyayı da daha sık kullandığını raporlamıştır.

Analizde platform kullanımı ile içerik kullanımının birbirinden ayrılması önemli bir örüntüyü görünür kılmıştır. Altı katılımcı sosyal medya ya da YouTube kaynaklı içerikleri sınıf içi öğretimde kullandığını somut olarak bildirirken (KUL1, f = 6), ders bağlamında sosyal medya kaynaklı içerik kullanmadığını açıkça belirten katılımcılar K1, K3 ve K9'dur (KUL2, f = 3). K7 ise kullanımını içeriğin uygunluğu koşuluna bağlamaktadır (KUL6). İçeriği derse taşıyan katılımcılar arasında, platform tercihlerine ilişkin ilk soruda sosyal medyayı kullanmadığını belirtenler de bulunmaktadır. Örneğin K5 sosyal medyayı kullanmadığını belirtmesine karşın takip ettiği kanallardaki "kısa filmler, ilgi çekici videoları derse girişlerde" tercih ettiğini, K4 de kendi sosyal medya hesabı bulunmadığı hâlde "konuyla ilgili kısa videolar bulunursa derse dikkat çekmek veya konuyu ilişkilendirmek için" bu videoları kullanabildiğini anlatmaktadır. K10 ise "bir geogebra etkinliğini

Instagramda görüp kullanabiliyorum" diyerek içerik keşfinden öğretime aktarımı örneklemektedir. Bu bulgu, "sosyal medya kullanımı"nın katılımcılar tarafından büyük ölçüde hesap sahibi olmak ve içerik paylaşmak olarak anlaşıldığını, başkalarının ürettiği içeriği derse taşımanın ise çoğu zaman bir kullanım biçimi olarak görülmediğini düşündürmektedir. Dolayısıyla öz-bildirime dayalı kullanım soruları, kullanımın hangi anlamda sorgulandığı netleştirilmeden yorumlandığında yanıltıcı olabilir.

Sosyal medyanın öğretmen adaylarıyla iletişim (KUL4, f = 3) ve ders dışında kaynak paylaşımı (KUL3, f = 2) için kullanımı daha sınırlıdır. Kendi içeriğini hazırladığını belirten iki katılımcıdan (KUL5; K2, K6) yalnızca K2, ders etkinliklerini "çoğunlukla oyunları video haline getirip instagramdan" paylaşarak öğretim uygulamasını dijital bir paylaşım içeriğine dönüştürmektedir.

Ders bağlamında sosyal medyayı kullanmayan ya da sınırlı kullanan katılımcıların gerekçeleri, bu tercihin bir ilgisizlikten çok pedagojik bir değerlendirmeye dayandığını göstermektedir. K3 YouTube'daki matematik konu anlatımlarında "bir sürü hatalar, kavram yanılgıları oluşmasına sebep olabilecek içerikler" bulunduğunu düşünmekte ve "ders kapsamından dolayı" sosyal medya hesaplarını kullanmadığını belirtmektedir. K1 sosyal medyayı "kişisel veriler ve zaman yönetimi açısından riskli" bulmakta, K9 ise "sosyal medya kullanımını işimle ilişkilendirmiyorum" demektedir. K7 derslerinin içeriğine uygun olmadığı için sosyal medyayı çok kullanmadığını, K4 ise sosyal medya platformlarının eğitimsel açıdan kesin katkısı olduğu konuların net olmadığını belirtmektedir. Cuban (2001) akademisyenlerin teknolojiyi öğretimde kullanmaktan kaçınması çoğunlukla teknoloji karşıtlığından değil, öğretme ve öğrenmeye ilişkin inançlardan ve çalışılan bağlamın koşullarından kaynaklandığını ifade etmiştir. TPAB açısından bakıldığında bu

gerekçeler, teknoloji bilgisinin alan ve pedagoji bilgisiyle birlikte işletildiği bir değerlendirmenin ürünü olarak okunabilir.

Dijital Matematik İçeriğinin Değerlendirilmesi ve Pedagojiye Dönüşümü

Katılımcıların içerik değerlendirme ölçütleri incelendiğinde, matematiksel doğruluk ve kavramsal anlam (NIT1, f = 8) ile öğretimsel, müfredata ve öğrenci düzeyine uygunluk (NIT2, f = 6) en sık dile getirilen boyutlardır. Ancak bu iki boyut görüş formunda doğrudan sorulduğu için sıklıkları bir önem sıralaması olarak yorumlanmamıştır. Daha ayırt edici olan, katılımcıların bu ölçütleri nasıl somutlaştırdığıdır. K2 "müfredata uygunluk, kavrama yönelik olma, kavram yanılgısı yaratmama, görselleştirme ve yaratıcılık" ölçütlerini sıralarken, K10 bir içeriği kullanmadan önce "matematiksel geçerliliğini mutlaka teyit" ettiğini belirtmektedir. Kaynağın güvenilirliği ve uzmanlığı da (NIT3, f = 3) değerlendirmenin bir parçasıdır. K5 hesabın kime ait olduğuna dikkat ettiğini, kişisel kanallar yerine geniş ağları takip etmeye çalıştığını ve küçük topluluk kanallarındaki içerikler için "double check yapma ihtiyacı" hissettiğini; K3 sunumu yapan kişinin yetkinliğini; K8 ise videoların güvenilir bir kaynaktan gelip gelmediğini ve bilgilerin güncelliğini dikkate aldığını ifade etmektedir.

Temsil ve işlemsel-kavramsal ayrımı da (NIT4, f = 3) bazı katılımcıların değerlendirmesinde belirleyicidir. K9 bu ayrımı somut bir örnekle göstermektedir: Mutlak değeri "çamaşır makinesinde negatif sayıları yıkayıp pozitif sayılar olarak çıkaran" bir benzetmeyi ve nedenini açıklamadan sunulan kısa yolları, matematiksel anlamı yansıtmayıp yalnızca işlemsel adımları gösterdikleri için sorunlu bulmaktadır. Hatalı ya da denetimsiz içerik riski ise katılımcıların büyük bölümünce dile getirilmiştir (NIT5, f = 8). K1 "içeriklerde hatalar, yetersiz açıklamalar" olduğunu, K6 Facebook'ta "yalan

yanlış bilgiler ve çok basit şeyler" paylaşıldığını, K7 ise içeriklerin "belli bir denetimden geçmediği için bazen kafa karıştırıcı" olduğunu belirtmektedir. Bu kaygı, dört katılımcıda içeriği kontrol etme ya da teyit etme gereğine dönüşmektedir (NIT6, f = 4).

Katılımcıların içeriği öğretime taşıma biçimleri de farklılaşmaktadır. K5, K7, K8 ve K10 içeriği matematiksel doğruluk, uygunluk ya da zaman koşullarına bağlı olarak seçerek doğrudan kullanmaktadır (PED4, f = 4); K10'un ifadesiyle "matematiksel olarak doğruysa direkt kullanırım." İçerikler derse dikkat çekmek ve derse giriş yapmak amacıyla da kullanılmaktadır (PED5, f = 3); K4 bunu videolara öğrencilerin düşünmesine yönelik sorular ekleyerek yapmaktadır (PED2). K6 ise içerikleri "asla doğrudan" kullanmayıp öğrenci seviyesini dikkate alarak ve farklı çalışmalarla destekleyerek yeniden düzenlemektedir (PED3). İçeriğin en kapsamlı biçimde dönüştürüldüğü kullanım ise öğretmen adaylarıyla eleştirel tartışmadır (PED1; K2, K5). K2, Instagram'ı Konu Alanı Kaynak İncelemesi dersi kapsamında "Öğretmen Gelişim Grupları/Toplulukları ve Eğitimde İyi Örnekler için kaynak" olarak kullandığını belirtmekte ve şunu eklemektedir: "Bazen de tartışma verisi olarak hatalı içerikleri bilerek sınıfa getiriyorum." K2 bu tartışmaları çoklu temsil içeren bir içeriğin "kavramın doğasına uygunluğu ve öğrenci tarafından nasıl algılanacağı" üzerine kurmaktadır. K5 de uygulamadan sonra öğretmen adaylarıyla "siz olsanız şu sınıf seviyesinde nasıl modifiye ederdiniz" sorusu etrafında tartışmaya çalıştığını anlatmaktadır.

Bu ölçüt ve uygulamalar, Escudero-Ávila vd. (2021) matematik öğretmen eğitimcisi bilgisinin bileşenlerinin aynı anda devreye girdiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla içeriğin matematiksel doğruluğunu değerlendirmek alan bilgisini, pedagojik uygunluğunu değerlendirmek pedagojik bilgiyi, öğretmen adaylarına nasıl sunulacağına karar vermek ise mesleki deneyimi ve kimliği gerektirmektedir. Kuramsal açıdan bu örüntüler, TPAB

çerçevesinin (Mishra ve Koehler, 2006) teknoloji, pedagoji ve alan bilgisi bütünleşmesinin ve DigCompEdu'daki dijital kaynakların seçilmesi ve uyarlanması yeterliliğinin (Redecker, 2017) sosyal medya bağlamında nasıl işletildiğini somutlaştırmaktadır. Hatalı içeriğin dışlanacak bir nesne olmaktan çıkarılıp öğretmen adaylarının eleştirel muhakemesini geliştiren bir pedagojik araca dönüştürülmesi önceki bölümlerde tartışılan kuram-uygulama aracılığı işlevinin sosyal medya bağlamındaki karşılığıdır.

Öğretmen Adaylarının Deneyimleri ve Mesleki Öğrenme

Katılımcılar, sosyal medya içeriklerinin öğretmen adaylarının ilgisi, katılımı ve motivasyonu üzerinde olumlu etkiler gözlemlediklerini belirtmektedir (ETK1, f = 5). K2 öğretmen adaylarının tasarımlarını paylaşmasının onları motive ettiğini, K10 ise adayların içerik hazırladıklarında motive olduklarını ifade etmektedir. K5 derse katılım ve motivasyon açısından fayda gördüğünü, farklı eğitimci ve öğretmenlerle etkileşimin adayların "mesleki heyecanlarını" artırdığını gözlemlemektedir. K8 ise kök hücre bağışına ilişkin bir bilgilendirme videosunun ardından bazı öğrencilerin konuyu kendiliğinden araştırıp sonraki haftalarda derste paylaştığını aktarmaktadır.

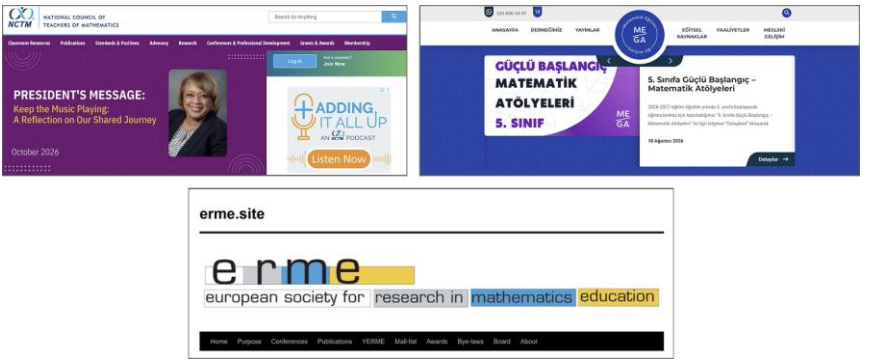
Katılımcıların bir kısmı sosyal medya içeriklerine başvurmayı, öğretmen adaylarının öğretmenlik öğrenmesine katkı sağlama amacıyla da ilişkilendirmektedir (ETK2, f = 4). K8 Matematik Tarihi dersinde videolara, öğrencilerin dikkatini çekmenin yanı sıra adayların "öğretmen olduklarında kendi derslerinde de kullanabilecekleri içeriklere dair fikirleri olması için" yer verdiğini belirtmektedir. K2 ise karşılaşılan içeriklerin büyük bölümünü matematiksel doğruluk ve kavramsal öğrenme açısından zayıf bulduğunu, bu nedenle öğretmen adaylarına "bunu kontrol etmeleri, eleştirel bir gözle bakmaları" gerektiğini hatırlattığını ifade etmektedir. Kuramsal açıdan bu pratikler, matematik öğretmen

eğitimcisinin kendi dijital teknoloji kullanımının geleceğin öğretmenleri için bir model işlevi gördüğünü ve DigCompEdu'nun öğrenenlerin dijital yeterliğinin desteklenmesine ayrılan altıncı alanının (Redecker, 2017) özellikle de bilgi ve medya okuryazarlığı boyutunun, öğretmen yetiştirme bağlamındaki karşılığını yansıtmaktadır.

Bununla birlikte üç katılımcı öğrencilerin kısa dikkat süresine, uzun videoları izlememesine ya da dijital bağımlılığına ilişkin gözlem ve endişelerini dile getirmektedir (ETK3, f = 3). K4 "öğretmen adaylarının çoğunda bağımlılık gözlemliyorum" demekte ve adayların kendilerinin de bundan kurtulmak istediklerini ifade ettiklerini aktarmaktadır. K3 ise "örneğin 15 dakikalık bir eğitsel videoyu öğrenciler 5 saniye izledikten sonra kapatıyor" diyerek sosyal medyanın eğitsel açıdan yeterli olacağını düşünmediğini belirtmektedir. Bu gözlemler, DigCompEdu'nun aynı alanda tanımladığı sorumlu dijital teknoloji kullanımı boyutunun öğretmen yetiştirmede ayrıca ele alınması gerektiğine işaret etmektedir.

Matematik öğretmen eğitimcilerinin kendi mesleki öğrenmeleri açısından en yaygın örüntü, akademik yayınları, konferansları, araştırmaları, eğitimleri ve projeleri sosyal medya üzerinden izlemektir (AG1, f = 6). K3, NCTM ile kongre ve proje sayfalarının hesaplarını izlediğini, "bazı hocaların yazdıkları güncel kitaplarını sosyal medyadan öğrenip sonrasında satın" aldığını ifade etmektedir. K6 kongrelerin "nerede ne zaman olacak" olduğunu çok önceden öğrenebildiklerini, lisansüstü yıllarında hocaları aracılığıyla edinilen bu bilginin artık "anında erişim ve zaman tasarrufu" sağladığını vurgulamaktadır. K5 Türkiye ve dünyadaki yenilikleri, eğitimleri ve projeleri takip etmeyi "çok kıymetli" bulurken, K9 alandaki akademisyenlerin hesaplarını araştırma ve analiz süreçleri hakkında bilgi almak için izlemektedir. Katılımcıların andığı kurumsal kaynaklardan örnekler Şekil 2'de sunulmuştur.

Şekil 2 Matematik Öğretmen Eğitimcilerinin Mesleki Gelişim Amacıyla İzlediği Kurumsal Kaynaklardan Örnekler



Bu takip, iki katılımcıda derslerde sosyal medya içeriği kullanma deneyimi olmaksızın sürmektedir (AG3; K3, K9). Wenger'in (1998) tanımladığı uygulama topluluğu karşılıklı etkileşim ve ortak bir kaynak dağarcığının üretilmesini gerektirirken, bu katılımcıların katılım biçimi içerik üretmeden izlemeye dayanmaktadır. Lave ve Wenger (1991), bir topluluğa yeni katılanların başlangıçta sınırlı ama meşru bir biçimde katılarak öğrendiğini "meşru çevresel katılım" kavramıyla açıklamıştır. Bu çalışmadaki çevresel katılım ise tam katılıma doğru ilerleyen bir geçiş evresinden çok, kendi başına süreklilik gösteren ve belirli bir mesleki fayda üreten bir katılım biçimi olarak görünmektedir. Bu sonuç Manca ve Ranieri'nin (2016) bulgusuyla da örtüşmektedir. Akademisyenler sosyal medyayı öğretim pratiklerine dâhil etmekten çok kişisel paylaşım ve mesleki ağlarda meslektaşlarıyla bağlantı kurmak için kullanmaya yatkındır. Manca ve Ranieri (2016) bu eğilimi çalışmalarının başlığında "paylaşmaya evet, öğretmeye hayır" ifadesiyle özetlemiştir.

Meslektaşlarla doğrudan iletişim ve ortak çalışma ise yalnızca iki katılımcı tarafından açıkça belirtilmiştir (AG2; K2, K10). K10 sosyal medya sayesinde "diğer matematik öğretmen eğitimcileriyle daha kolay iletişime geçip gelişmeleri takip"

edebildiklerini ifade ederken, K2 "birçok eğitim fakültesinde çalışan hocanın içerikleri" aracılığıyla bu içerikleri sunan öğretim üyeleriyle iletişim kurma ve "yeri geldiğinde ortak çalışmalar" yapma imkânı doğduğunu belirtmektedir. Burada sosyal medya, Arzarello ve Taranto'nun (2021) ifade ettiği aracı (broker) rolünün kurumsal bir MOOC yapısı olmadan, bireysel girişimle nasıl ortaya çıkabileceğini göstermektedir (bkz. Şekil 1b). Buna karşılık K8'in "diğer matematik öğretmen eğitimcileriyle iletişim bağlamında sosyal medya kullanmıyorum sanırım" ifadesi, sosyal medyanın mesleki ağ işlevinin katılımcıların tamamı için geçerli olmadığını hatırlatmaktadır.

Etik, Mesleki Sınırlar ve Destek Koşulları

Öğrencilerle iletişimde profesyonel sınırları gözetme, veri setinde en yaygın paylaşılan kodlardan biridir (ETI2, f = 7). Beş katılımcı ise mevcut öğrencileriyle sosyal medya üzerinden düzenli iletişim kurmadığını ya da kurmamaya çalıştığını belirtmektedir (ETI1, f = 5). Katılımcıların bu sınırları kurma biçimleri birbirinden belirgin biçimde ayrışmaktadır. K3 "özel hayatım olduğu için hiçbir öğrencimle takipleşmiyorum" derken, K2 tam tersine "her öğrencimle takipleşmeye çalışıyorum ki bir ilişki gelişsin" demekte ve öğrencileriyle ilişkisini "kolay iletişim, sevgi ama sınırları bilme" yönünde bir "soft power" (yumuşak güç) olarak tanımlamaktadır. K5 "mümkün olduğunda sosyal medya üzerinden etkileşim kurmamaya" çalıştığını, K9 ise mezun öğrencileriyle sosyal medya üzerinden iletişim kurduğunda "normal hayatta kurduğumuz hoca-öğrenci sınır ve dilini" korumaya çalıştığını ifade etmektedir. K6 bu sınırları somut kurallara bağlamaktadır. K6 öğrencilerinden elzem olmadıkça sabah 10'dan önce ve akşam 22'den sonra yazmamalarını rica etmekte ve hafta sonları rahatsız edilmek istemediğini açıkça belirtmektedir. Manca ve Ranieri (2016) de akademisyenlerin sosyal medya etkinliklerinin merkezinde çevrimiçi mesleki kimliğin özenle

yönetilmesinin yer aldığını, kişisel ve mesleki yaşamların iç içe geçmesinin ise bir tehdit olarak algılanabildiğini vurgulamaktadır.

Mahremiyet, telif ve veri güvenliğine ilişkin risk ve önlemler beş katılımcı tarafından dile getirilmiştir (ETI3, f = 5). Bu konu, sosyal medyada ders etkinliklerini paylaşan K2'nin anlatısında en ayrıntılı biçimde işlenmektedir. K2, paylaşımlarına öğretmen adaylarını dâhil etmeden önce onam aldığını, çünkü sürecin adayların fikrî ve kişisel haklarını da içerdiğini belirtmektedir. Mahremiyeti korumak için videolarda kişilere değil masaya odaklandığını, kişileri çektiğinde ise görünmek istemeyenler için görüntüyü kaldırma ya da emoji ile kapatma seçeneği sunduğunu, başkalarına ait içeriklerde ise kaynak gösterdiğini aktarmaktadır. K8 de YouTube içeriklerinden yararlanırken kaynakların belirtilmesine dikkat ettiğini ifade etmektedir. Kuramsal açıdan bu pratikler, DigCompEdu'daki dijital kaynakların korunarak paylaşılması yeterliğinin (Redecker, 2017) kurumsal bir düzenleme olmaksızın bireysel olarak inşa edildiğini göstermektedir.

K5'in sosyal medyadaki paylaşım kültürüne yönelik eleştirisi bu temanın en dikkat çekici verilerinden biridir. K5, kişisel kanallarda pedagojik açıdan uygun olmayan içeriklerin hızla yayılmasını "tedirgin edici" bulduğunu belirttikten sonra şunu eklemektedir: "Etik olarak da hem bazı lisanslı içeriklerin uygun olmayan şekilde kullanılması hem de sınıf, okul ortamlarının çok fazla etik dışı servis edilmesi, çocukların sınıf içi yaşadığı zorlukların öğretmenler veya eğitimciler tarafından örnek olarak açıkça paylaşılmasını da etik dışı buluyorum." Bu görüş, sosyal medyadaki etik sorunların yalnızca eğitimci ile öğretmen adayı arasındaki ilişkiyle sınırlı olmadığını, öğretmen adaylarının ileride çalışacakları sınıflardaki çocukların mahremiyetini de kapsadığını göstermektedir. Dolayısıyla etik duyarlılık, matematik öğretmen eğitimcilerinin kendi paylaşımlarının ötesinde öğretmen adaylarına kazandırılması gereken bir mesleki değer olarak da ele alınmalıdır.

Zaman ve iş yükü, dört katılımcının anlatısında belirleyici bir koşul olarak öne çıkmaktadır (ETI4, f = 4). K1 sosyal medyayı "kişisel veriler ve zaman yönetimi açısından riskli" bulmakta, K8 uzun videoları ders süresi yetmediğinde öğrenme yönetim sistemine aktarmakta, K5 ise zaman kısıtı nedeniyle içerikleri doğrudan kullanabilmenin kendisi için önemli bir ölçüt olduğunu belirtmektedir. Sosyal medyayı etkin biçimde kullanan K2 bile "aslında yeterli hissediyorum ancak yeterli vakit bulamıyorum" demekte ve ihtiyacını "destekten çok vakit" olarak tanımlamaktadır. Rogers-Estable (2014) de öğretim elemanlarının Web 2.0 araçlarını öğretimde kullanmasının inanç ve motivasyon gibi içsel etkenlerden çok zaman, eğitim ve destek gibi dışsal etkenler tarafından engellendiğini göstermiştir.

Dört katılımcı sosyal medyanın eğitimsel ya da mesleki kullanımı konusunda kendisini yetersiz ya da kısmen yeterli gördüğünü bildirmektedir (ETI6, f = 4). K1 "aktif kullanmadığım için yeterliliğim tabii ki oldukça sınırlı" derken, K8 sık kullanılan platformlara ilişkin bilgi ve deneyimi olmadığı için "sosyal medyanın eğitim amaçlı kullanımı ve iyi uygulama örnekleri konusunda eğitim almanın faydalı olacağını" düşünmektedir. Beş katılımcı ise koşullu ya da açık biçimde eğitim, bilgilendirme veya rehberlik ihtiyacı dile getirmektedir (ETI5, f = 5). Dikkat çekici biçimde bu talepler yalnızca sosyal medyaya özgü değildir. K10 "içerik oluşturma, veri analizi gibi konularda destek almayı" isterken, K5 kişisel olarak sosyal medyada yer almak istemediğini, ancak "mesleki olarak yaptığımız işlerin daha profesyonel paylaşılması, proje ürünlerini açık kaynağa hızlıca dönüştürebilmek" gibi konularda rehberlikten yararlanabileceğini belirtmektedir. K4 ise sosyal medyanın eğitsel katkısının bilimsel açıdan net olduğu alanlar varsa bu konuda bilgilendirilmek istemektedir. Bu talepler, ihtiyacın sosyal medyayla sınırlı kalmayıp daha geniş bir dijital yeterlilik gelişimi ihtiyacının parçası olduğunu düşündürmektedir.

Dolayısıyla katılımcıların destek, eğitim ve rehberlik taleplerinin farklı gerekçelerle de olsa ortak bir çağrı biçiminde ortaya çıkması, bu boşluğun sahada da hissedildiğini göstermektedir. Bu gözlem, izleyen bölümde ele alınan öğretmen eğitimine yönelik çıkarımların da zeminini oluşturmaktadır.

Matematik Öğretmen Eğitimine Yönelik Çıkarımlar

Buraya kadar sunulan kavramsal çerçeve ve ampirik bulgular bir araya getirildiğinde, matematik öğretmeni eğitimi programları ve bu programları yürüten kurumlar için bir dizi somut çıkarım ortaya çıkmaktadır. Bu çıkarımların ortak paydası, dijital yeterliğin ve bu yeterliğin bir bileşeni olarak sosyal medya kullanımının matematik öğretmen eğitimcilerinin mesleki gelişiminde bugüne kadar sistematik biçimde ele alınmamış, ancak sahada açıkça hissedilen bir boşluk olduğudur.

İlk çıkarım, bu yeterliliğin neye benzemesi gerektiğiyle ilgilidir. Novotná vd. (2013), bir matematik öğretmen eğitimcisi olmanın gerektirdiği bilgiyi dört bileşen etrafında tanımlar: matematik bilgisi, psikolojik-pedagojik bilgi, matematik öğretimi/öğrenimine ilişkin bilgi ve matematiğe yönelik inanç ve tutumlar. Novotná vd. (2013), bu bileşenlerin yeterlilik tanımlarken yalnızca genel bir çerçeve sunduğunu, öğretmenlerden beklenen bilginin içeriğini ve kapsamını tam olarak belirlemediğini de belirtir. Bu çalışmanın bulguları, tam da bu belirsizliğin sosyal medya bağlamında nasıl yaşandığını göstermektedir: K2 ve K5 gibi katılımcıların sergilediği içerik değerlendirme pratiği (matematiksel doğruluk, kavram yanılgısı potansiyeli, pedagojik uygunluk) aslında var olan bir yeterliliğin sosyal medya bağlamına kendiliğinden uyarlanmış hâlidir. Ancak bu uyarlama, K8 ve diğer katılımcıların ifade ettiği gibi, sistematik bir eğitimin değil, bireysel çabanın ürünüdür. Bu durum, sosyal medya okuryazarlığının matematik öğretmen yetiştirme programlarına ayrı bir modül olarak değil,

matematik öğretmen eğitimcilerinin daha geniş dijital yeterlilik gelişiminin ve teknolojik pedagojik alan bilgisinin doğal bir uzantısı olarak entegre edilmesi gerektiğine işaret etmektedir.

Bu noktada daha önce ele alınan TPAB çerçevesi (Mishra ve Koehler, 2006) yeniden öğretici bir örnek sunar. Novotná vd. (2013), Shulman'ın (1986) pedagojik alan bilgisi kavramını teknolojiyle genişleten bu modelin, teknolojiyi etkin biçimde kullanmanın yalnızca yazılım ve donanımı öğrenmekten çok daha fazlasını gerektirdiğini belirtmektedir. Novotná vd. (2013) bu çerçeveden hareketle şu soruyu sorar: Bir öğretmen adayı teknoloji açısından zengin bir ortamda bir dersi gözlemlediğinde, tam olarak neyi gözlemlemesi beklenmelidir? Bu soru, bu çalışmanın bulguları ışığında sosyal medya bağlamına doğrudan taşınabilir. Bir öğretmen adayı, matematik öğretmen eğitimcisinin sosyal medyada paylaştığı veya kullandığı bir içeriği izlediğinde, yalnızca içeriğin kendisini değil, bu içeriğin nasıl seçildiğini, hangi ölçütlerle değerlendirildiğini ve derse nasıl uyarlandığını da görebilmelidir. Bu, K2'nin tarif ettiği "tartışma verisi olarak hatalı içerik getirme" stratejisinin, örtük bir pratik olmaktan çıkıp açık ve öğretilebilir bir pedagojik teknik hâline gelmesini gerektirir.

DigCompEdu çerçevesi bu entegrasyon için tamamlayıcı bir araç sunmaktadır. Çerçeve, her yeterliliği Yeni Başlayan (A1) düzeyinden Öncü (C2) düzeyine uzanan altı basamaklı bir ilerleme modeliyle tanımlamaktadır (Redecker, 2017). Bu ilerleme mantığı, bu çalışmada önerilen tüketici-katılımcı-üretici sürekliliğiyle benzerlik taşımakta ve matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medya kullanımının, kurumsal platform kullanımlarıyla birlikte tek bir dijital yeterlik profili içinde değerlendirilmesine imkân tanımaktadır. Böylece kurumlar, sosyal medyayı ayrı bir beceri alanı olarak değil, eğitimcinin dijital yeterlik gelişiminin bir boyutu olarak izleyebilir ve destekleyebilir.

İkinci çıkarım, kurumsal rehberliğin ve destek mekanizmalarının niteliğiyle ilgilidir. Bu çalışmanın bulgularında öz-yeterlik eksikliği yalnızca teknik bilgi eksikliği olarak değil, aynı zamanda etik ve mahremiyet konusunda net bir çerçevenin bulunmaması olarak da kendini göstermektedir. K2'nin öğrenci onamı ve K6'nın iletişim saatleri konusunda geliştirdiği kişisel kuralların, kurumsal düzeyde paylaşılan ve tartışılan bir çerçeveye dönüşmemiş olması dikkat çekicidir. Oysa Olanoff vd.'nin (2021) tarif ettiği uygulama topluluğu modeli, bu tür örtük bilginin, yani bireysel deneyimlerin, çekincelerin ve stratejilerin, meslektaşlar arasında paylaşılan bir kaynak dağarcığına dönüştürülmesi için bir mekanizma sunmaktadır. Matematik öğretmeni eğitimi veren kurumların, sosyal medya kullanımına ilişkin bireysel deneyimleri bir araya getirecek, tartışmaya açacak ve ortak ilkeler üretecek yapılar (düzenli seminerler, meslektaş gözlem grupları, paylaşılan örnek havuzları gibi) kurması, bu bulguların işaret ettiği önemli bir ihtiyaçtır.

Üçüncü çıkarım, "kullanmama" kararının da meşru bir mesleki duruş olarak tanınması gerektiğidir. Bu çalışmanın bulguları, sosyal medyayı kullanmayan katılımcıların bunu bilinçli bir pedagojik değerlendirme sonucunda yaptığını göstermektedir. Bu tercih, teknolojik bir eksiklik değil, içerik güvenilirliği ve zaman yönetimi konusunda temellendirilmiş bir tercihtir. Bu katılımcıların bir kısmının sosyal medya yerine kurumsal dijital platformları tercih ettiği hatırlandığında, kullanmama kararının dijital teknolojiden geri çekilme değil, dijital teknoloji yelpazesi içinde bilinçli bir konumlanma olduğu daha açık biçimde görülmektedir. Dolayısıyla teşvik edilmesi gereken şey, tüm matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medyayı aktif olarak kullanması değil, kullanıp kullanmama kararının bilinçli, gerekçeli ve öğretmen adaylarıyla paylaşılabilir bir muhakemeye dayanmasıdır. K3 ve K9'un tarif ettiği "çevresel katılım" biçimi (içerik üretmeden,

yalnızca takip ederek mesleki güncellik sağlama) bu ara konumun meşru bir örneğini oluşturmaktadır. Programlarda "ya tam kullanım ya da tam kaçınma" gibi ikili bir çerçeve yerine, bu ara konumların da tanınması önerilebilir.

Son olarak, Vallone vd.'nin (2023) bulguları, bu tür bir kurumsal desteğin yalnızca beceri kazandırmayla sınırlı kalmaması gerektiğini hatırlatmaktadır. K2'nin "yeterli hissediyorum ancak yeterli vakit bulamıyorum" ifadesi, sorunun büyük ölçüde bir zaman ve iş yükü yönetimi meselesi olduğunu göstermektedir. Bu nedenle kurumsal rehberliğin, sosyal medya kullanımını akademik iş yüküne dâhil eden, bunu görünmez bir gönüllü katkı olmaktan çıkaran bir tanınma biçimini de içermesi gerekmektedir. Manca ve Ranieri (2016) da benzer bir sonuca ulaşarak, yükseköğretim kurumlarının öğretim elemanlarından öğretim pratiklerini yeni teknolojilerle güncellemelerini bekliyorsa, hangi teknolojik çözüm benimsenirse benimsensin öğretime ayrılan zamanın tanınması ve değerli görülmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Manca ve Ranieri'ye (2016) göre öğretimin akademik kariyerde araştırmaya kıyasla daha az değer görmesi, sosyal medyanın öğretime entegrasyonunun önündeki temel engellerden biridir.

Sonuç ve Öneriler

Bu bölümde geliştirilen kavramsal çerçeve ve on matematik öğretmen eğitimcisinden elde edilen ampirik veriler, matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medya kullanımının çok boyutlu bir mesele olduğunu ortaya koymuştur. Çalışmanın sınırlılıkları ise gelecekteki araştırmalar için bir yol haritası sunmaktadır.

İlk sınırlılık, örneklemin büyüklüğü ve niteliğiyle ilgilidir. On katılımcıdan oluşan bu veri seti, zengin ve ayrıntılı bireysel anlatılara erişim sağlamış olsa da, bulguların Türkiye bağlamındaki matematik öğretmen eğitimcileri arasında ne ölçüde yaygın olduğunu belirlemeye imkân vermemektedir. Gelecekteki

çalışmaların, farklı kurum türlerini, deneyim düzeylerini ve coğrafi bölgeleri temsil eden daha geniş örneklemlerle bu bulguların ne ölçüde genellenebilir olduğunu sınaması önerilmektedir.

İkinci sınırlılık, veri toplama yöntemiyle ilgilidir. Bu çalışma, katılımcıların kendi beyanlarına (self-report) dayanmaktadır. Bir matematik öğretmen eğitimcisinin sosyal medyayı nasıl kullandığını anlattığı ile fiilen nasıl kullandığı arasında farklar olabilir. Bu noktada, Novotná vd.'nin (2013) tartıştığı gözlem temelli araştırma modelleri gelecekteki araştırmalara ilham verebilir. Bu modeller arasında COREM'in araştırmacı-öğretmen işbirliğine dayalı gözlem yöntemi ve Learner's Perspective Study'nin çok kameralı, video temelli belgeleme yaklaşımı sayılabilir. Bir matematik öğretmen eğitimcisinin sosyal medyada bulduğu bir içeriği sınıfa nasıl taşıdığının doğrudan gözlemlenmesi ve bu sürecin video kaydıyla belgelenmesi, öz-bildirime dayalı verilerin ötesine geçilmesini sağlayabilir. Bu yaklaşım, bu bölümde kavramsallaştırılan "eleştirel katılımcı" pozisyonunun fiilen nasıl icra edildiğini çok daha ayrıntılı biçimde ortaya koyabilir.

Üçüncü olarak, Özmantar vd.'nin (2026) ifade ettiği gibi Teknoloji teması matematik öğretmen eğitimcisi araştırmalarında hâlâ "orta düzey," yeni gelişmekte olan bir temadır. Bu çalışma, bu temayı matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medya kullanımını da kapsayacak biçimde genişleterek literatüre katkı sunmayı amaçlamıştır. Alanın olgunlaşabilmesi için, farklı sosyal medya platformlarının (video paylaşım, mikroblog, mesajlaşma uygulamaları gibi) matematik öğretmen eğitimcilerinin pratiğinde farklı işlevler görüp görmediğini ayrı ayrı inceleyen platform-özgül çalışmalara da ihtiyaç vardır. Bu çalışmada aktif kullanıcı katılımcıların Instagram, YouTube ve WhatsApp'ı birbirinden farklı amaçlarla (sırasıyla içerik paylaşımı, ders içi video kaynağı ve kurumsal iletişim için) kullandığına dair işaretler bulunması, bu

platform-özgül farklılaşmanın önemli bir araştırma konusu olabileceğine işaret etmektedir. Manca ve Ranieri (2016) da araç türüne bağlı benzer bir farklılaşma raporlamıştır. Podcast, blog-wiki, YouTube-Vimeo ve SlideShare gibi içerik paylaşımı ve üretimine dayalı araçların mevcut öğretim pratiklerine daha kolay uyarlanabildiğini Facebook ve Twitter gibi sosyal ağ niteliği ağır basan araçların ise daha çok mesleki bağlantılar kurmaya ve sürdürmeye uygun görüldüğünü belirtmiştir. Bu çalışmada YouTube'un ağırlıklı olarak ders içinde (K4, K8), Instagram ve X'in ise mesleki takip amacıyla (K3, K9) kullanılması bu farklılaşmayla uyumludur.

Son olarak, bu çalışmanın kesitsel doğası, zaman içindeki değişimin izlenmesine imkân vermemektedir. Bir matematik öğretmen eğitimcisinin kariyeri boyunca sosyal medyayla kurduğu ilişkinin nasıl evrildiği, boylamsal araştırma tasarımlarıyla ele alınmayı beklemektedir. Örneğin doktora sonrası dönemdeki temkinli bir tutumdan, deneyim kazandıkça daha stratejik ve eleştirel bir kullanıma geçiş olup olmadığı, bu tür bir tasarımla incelenebilir. Manca ve Ranieri'nin (2016) bulguları bu sorunun önemine işaret etmektedir. Genç akademisyenlerin sosyal medyayı genel olarak daha sık kullandığı, ancak öğretim deneyimi daha uzun olan akademisyenlerin bazı araçları daha fazla kullandığı görülmüştür. Manca ve Ranieri (2016) yaş ile kıdem arasındaki bu görünür tutarsızlığın ayrıca araştırılması gerektiğini belirtmiştir.

Bu sınırlılıklara rağmen, bu bölümün ortaya koyduğu temel argüman şu şekildedir: Matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medya kullanımı, ya da kullanmama kararının kendisi, yalıtılmış bir teknolojik tercihten ibaret değildir; bu kullanım, matematik öğretmen eğitimcisinin daha geniş dijital teknoloji kullanımının ve dijital yeterliğinin bir parçasıdır. Giriş bölümünde sorulan soruya dönecek olursak: Bu inceleme neden önemlidir ve bu kullanım matematik öğretmen eğitimcilerinin mesleki kimliği ve pratiğiyle

nasıl bir ilişki içindedir? Bu çalışmanın bulguları, bu ilişkinin en az üç düzeyde kurulduğunu göstermektedir. Birinci düzeyde, sosyal medya karşısında alınan tutum, matematik öğretmen eğitimcisinin kuram-uygulama aracılığı işlevinin (Novotná vd., 2013) dijital ortamlara nasıl taşındığını yansıtır. İçeriği doğrudan aktarmak yerine gözlemleyen, yorumlayan ve bağlamlandıran bir tutum, tıpkı sınıf içi pratikte olduğu gibi burada da kendini göstermektedir. İkinci düzeyde, sosyal medya kullanımı, özellikle pasif takip biçiminde dahi olsa, matematik öğretmen eğitimcisinin mesleki bir topluluğa aidiyet duygusunu besleyen bir kaynak işlevi görmektedir (Olanoff vd., 2021). Üçüncü düzeyde ise, bu alandaki yaygın öz-yeterlik eksikliği ve kurumsal rehberlik talebi, matematik öğretmen eğitimcisi yetiştirme programlarının ve araştırma alanının, sosyal medyayı da kapsayan dijital yeterliği bütüncül ve sistematik biçimde ele alması gerektiğine işaret etmektedir.

Sonuç olarak, matematik öğretmen eğitimcilerinin sosyal medyayla kurduğu ilişki, ne basit bir teknoloji benimseme meselesi ne de göz ardı edilebilecek marjinal bir ayrıntıdır. Bu ilişki, matematik öğretmen eğitimcisinin dijital teknoloji kullanımının bir bileşeni olarak, mesleki bilgisinin, pedagojik yargısının ve mesleki kimliğinin çağdaş bir boyutunu oluşturmaktadır. Bu bölümün, hem bu boyutu görünür kılmaya hem de bu alanda gelecekteki araştırma ve uygulamalara bir zemin sunmaya katkıda bulunmuş olması amaçlanmıştır.

Kaynakça

Arzarello, F., & Taranto, E. (2021). Mathematics teacher educators within the new technological environments: Changing the perspective. In M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (pp. 383–401). Springer.

Baker, C. K., & Hjalmarson, M. (2019). Designing purposeful student interactions to advance synchronous learning experiences. *International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies, 14*(1), 1–16. https://doi.org/10.4018/IJWLTT.2019010101

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Springer.

Casula, M., Rangarajan, N., & Shields, P. (2021). The potential of working hypotheses for deductive exploratory research. *Quality & Quantity, 55*(5), 1703–1725. https://doi.org/10.1007/s11135-020-01072-9

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education, 24*, 249–305.

Cuban, L. (2001). *Oversold and underused: Computers in the classroom*. Harvard University Press.

Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. In M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (pp. 23–39). Springer.

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. In M. A. Clements, A. J.

Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 273–302). Springer.

Goos, M., & Beswick, K. (Eds.). (2021). *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges.* Springer.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge University Press.

Manca, S., & Ranieri, M. (2016). "Yes for sharing, no for teaching!": Social Media in academic practices. *The Internet and Higher Education, 29,* 63–74. https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2015.12.004

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054.

Mukuka, A., & Alex, J. K. (2025). Profiling mathematics teacher educators' readiness for digital technology integration: evidence from Zambia. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *28*(2), 315-339. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09657-z

Novotná, J., Margolinas, C., & Sarrazy, B. (2013). Developing mathematics educators. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 431–457). Springer.

Olanoff, D., Masingila, J. O., & Kimani, P. M. (2021). Supporting mathematics teacher educators' growth and development through communities of practice. In M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (pp. 147–165). Springer.

Özmantar, M. F., Agaç, G., & Gökdağ, K. (2026). Thematic and temporal patterns in mathematics teacher educator research: A topic modeling

analysis. *Review of Educational Research.* Advance online publication. https://doi.org/10.3102/00346543261426581

Redecker, C. (2017). *European framework for the digital competence of educators: DigCompEdu* (Y. Punie, Ed.). Publications Office of the European Union. https://doi.org/10.2760/159770

Rogers-Estable, M. (2014). Web 2.0 use in higher education. *European Journal of Open, Distance and E-Learning, 17*(2), 130–142. https://doi.org/10.2478/eurodl-2014-0024

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* Basic Books.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Stebbins, R. A. (2001). *Exploratory research in the social sciences*. Sage.

Vallone, F., Galvin, J., Cattaneo Della Volta, M. F., Akhtar, A., Chua, S., Ghio, E., Giovazolias, T., Kazakou, Z., Kritikou, M., Koutra, K., Kovacevic, S., Lee-Treweek, G., Mašková, I., Mavritsaki, E., Nastic, J., Plassova, M., Stuchlíková, I., & Zurlo, M. C. (2023). Technostress and academic motivation: Direct and indirect effects on university students' psychological health. *Frontiers in Psychology, 14*, 1211134. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1211134

Veletsianos, G., Kimmons, R., & French, K. (2013). Instructor experiences with a social networking site in a higher education setting: Expectations, frustrations, appropriation, and compartmentalization. *Educational Technology Research and Development, 61*(2), 255–278. https://doi.org/10.1007/s11423-012-9284-z

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity.* Cambridge University Press.

White, D. S., King, M., & Tsang, W. (2011). *Social media tools and platforms in learning environments.* Springer.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 93–114). Sense Publishers.

Ekler

Ek 1. Betimleyici Kod Dizini

Bu dizin, betimleyici kodlama düzeyindeki 29 kodu ve ilgili katılımcıları göstermektedir. f, en az bir yanıtta kodu destekleyen farklı katılımcı sayısıdır (N = 10). Kodlar birbirini dışlamamaktadır. Bu nedenle satırlardaki frekanslar toplanarak katılımcı toplamı elde edilemez. Kodlar verilerdeki açık veya koşullu ifadeleri ayırt etmek için kullanılmıştır. Yeterlik düzeyi, neden-sonuç ilişkisi veya genellenebilir yaygınlık göstergesi olarak yorumlanmamıştır.

Kod	Dâhil etme kuralı / anlamı	f	Katılımcılar
KUL1 — Ders uygulamasına içerik dâhil etme	Sosyal medya veya YouTube kaynaklı içeriklerin sınıf içi öğretimde kullanıldığının somut olarak bildirilmesi.	6	K2, K4, K5, K6, K8, K10
KUL2 — Ders bağlamında kullanmama	Katılımcı ders/öğretim sürecinde sosyal medya kaynaklı içerik kullanmadığını açıkça bildirir.	3	K1, K3, K9
KUL3 — Ders dışında kaynak paylaşma	Sosyal medya kaynaklı içerik veya video bağlantısının öğrencilerin ders sonrasında erişimine sunulması.	2	K2, K8
KUL4 — Öğretmen adaylarıyla dijital sosyal iletişim	Instagram, WhatsApp vb. mecralar üzerinden öğretmen adaylarıyla iletişime dair mevcut uygulama.	3	K2, K6, K10
KUL5 — Kendi içeriğini hazırlama beyanı	Katılımcı ilgili soruya kendi içeriklerini hazırladığını bildirir.	2	K2, K6
KUL6 — Sınırlı veya koşullu kullanım	Sosyal medya kullanımı konusunda sınırlı veya koşula bağlanan beyan.	1	K7
PED1 — Eleştirel değerlendirme/tartışma	İçerikler öğretmen adaylarıyla güçlü/zayıf yönleri, temsilleri veya uyarlanması üzerinden tartışılır.	2	K2, K5
PED2 — Videoya yönlendirici soru ekleme	Video izleme öncesi/sırasında/sonrasında öğrencilerin düşünmesine yönelik sorular eklenir.	1	K4
PED3 — Öğrenci seviyesine göre yeniden düzenleme	Öğretim içeriği kullanılmadan önce öğrenen düzeyine uygun biçimde yeniden tasarlanır.	1	K6

PED4 — Seçerek veya koşullu doğrudan kullanma	Matematiksel doğruluk/uygunluk veya zaman koşullarıyla kaynağın kendisini doğrudan kullanma.	4	K5, K7, K8, K10
PED5 — Dikkat çekme ve derse giriş	Video, kısa etkinlik vb. derse girişte ilgiyi artırma veya konuyla ilişki kurma amacıyla kullanılır.	3	K4, K5, K8
NIT1 — Matematiksel doğruluk ve kavramsal anlam	Yanıtlarda matematiksel doğruluk, kavramsal gerekçelendirme, yanlış bilgi veya geçerlilik boyutu vurgulanır.	8	K1, K2, K3, K5, K6, K8, K9, K10
NIT2 — Öğretimsel, müfredata ve düzeye uygunluk	Ders/müfredat, öğretme yaklaşımı veya öğrencinin düzeyi ile uyum ölçütü ifade edilir.	6	K2, K3, K5, K6, K7, K8
NIT3 — Kaynağın güvenilirliği ve uzmanlığı	Üretici yetkinliği, uzmanlık, kurumsal ağ, güvenilir kaynak veya güncellik dikkate alınır.	3	K3, K5, K8
NIT4 — Temsil ve işlemsel-kavramsal ayrımı	Görselleştirme, çoklu temsil, model veya gerekçesiz kısa yol/kavramsal yetersizlik üzerine değerlendirme yapılır.	3	K2, K5, K9
NIT5 — Hatalı/denetimsiz içerik kaygısı	Yanlış, pedagojik bakımdan uygunsuz, denetlenmemiş veya güvenilirliği değişken içerik riski dile getirilir.	8	K1, K2, K3, K5, K6, K7, K8, K9
NIT6 — İçeriği kontrol etme/teyit gereği	Doğrulama, kaynak kontrolü ya da öğretmen adaylarının eleştirel denetimini gerekli görme veya uygulama.	4	K2, K5, K8, K10
ETK1 — Olumlu ilgi, katılım veya motivasyon	Katılımcı öğrencilerin ilgisi, motivasyonu, katılımı veya içerik üretimindeki isteğinde olumlu gözlem bildirir.	5	K2, K5, K6, K8, K10
ETK2 — Öğretmenlik öğrenmesine katkı amacı/algısı	Öğretmen adaylarının mesleki gelişimi, öğretimde kullanabilecekleri repertuvar veya pedagojik farkındalık amaç/katkısı belirtilir.	4	K2, K5, K6, K8
ETK3 — Ekran dikkati ve bağımlılık endişesi	Öğrencilerin kısa dikkat süresi, uzun video izlememesi veya dijital bağımlılığına ilişkin gözlem/endişe.	3	K3, K4, K8
AG1 — Mesleki gelişmeleri/araştırmaları izleme	Akademik yayın, konferans, araştırma, eğitim, proje veya öğretim programı gelişmelerini sosyal medya üzerinden izleme.	6	K2, K3, K5, K6, K9, K10

AG2 — Meslektaş iletişimi ve ortak çalışma	Diğer eğitimcilerle doğrudan iletişim veya iş birliği sağladığını açıkça belirtme.	2	K2, K10
AG3 — Mesleki takip var, ders kullanımı yok	Alanla ilgili hesapların mesleki/akademik takibi açık, ancak derslerde içeriği kullanma deneyimi yok.	2	K3, K9
ETI1 — Mevcut öğrencilerle sosyal iletişimi sınırlama	Mevcut öğrencilerle sosyal medya üzerinden düzenli iletişim kurmadığını/kurmamaya çalıştığını ifade etme.	5	K1, K3, K4, K5, K8
ETI2 — Profesyonel sınırları gözetme	Öğrencilerle iletişimde kişisel sınır, üslup, saat veya profesyonel ilişkiyi gözetmeye ilişkin ifade.	7	K2, K3, K5, K6, K7, K9, K10
ETI3 — Mahremiyet, telif ve veri güvenliği	Kişisel veri, onam, anonimleştirme, kaynak belirtme, telif veya sınıf içeriği paylaşımına dair risk/önlem.	5	K1, K2, K3, K5, K8
ETI4 — Zaman ve iş yükü kısıtı	Kişinin zaman yönetimi, üretime vakit ayırma, ders süresi veya doğrudan kullanım tercihinde zaman gerekçesi.	4	K1, K2, K5, K8
ETI5 — Eğitim, bilgilendirme veya rehberlik ihtiyacı	Sosyal medyanın eğitimsel kullanımı, profesyonel paylaşım, veri analizi vb. konusunda koşullu veya açık destek ihtiyacı.	5	K1, K4, K5, K8, K10
ETI6 — Sınırlı yeterlik algısı	Sosyal medya kullanımı/mesleki kullanım konusunda yetersiz veya kısmen yeterli olunduğunun öz bildirimi.	4	K1, K6, K8, K10

KUL = kullanım; PED = pedagojik kullanım biçimi; NIT = içerik niteliği; ETK = öğretmen adaylarına etki; AG = mesleki ağlar; ETI = etik, sınırlar ve destek.

Ek 2. Dijital Araçlar Arasındaki İlişkiye Yönelik Örnek Anlam Birimleri

Katılımcı ifadesi	İfadeye yakın kod	Analitik Karşılaştırma
K1 — "Öğrenme yönetim sistemleri üzerinden iletişim sağlıyorum."	Öğrenci bilgi sistemi üzerinden iletişim kurma	Kurumsal dijital kanalın tercih edilmesi
K9 — "Üniversitemizin sunduğu e-kampüs platformu üzerinden öğrencilerle paylaşım yapıyorum."	E-kampüs üzerinden ders paylaşımı	Sosyal medya dışında dijital kaynak/iletişim

K8 — “Öğretim yönetim sistemi üzerinden dersin ilgili haftasına linkleri ekliyorum.”	Video bağlantısını öğrenci bilgi sistemine aktarma	Video platformu ile kurumsal sistemin birlikte kullanımı
K6 — “Sınıf temsilcileri ve kurum ile ilgili gruplarımız var. Önemli yazışmalar için ise kurumsal mailimi kullanıyorum.”	İletişim amacına göre kanal ayırma	WhatsApp ve kurumsal e-postanın farklı işlevleri
K10 — “Bir geogebra etkinliğini Instagramda görüp kullanabiliyorum.”	Sosyal medyada bulunan matematik etkinliğini kullanma	İçerik keşfinden öğretime aktarım
K4 — “Kullandığım videolar youtube üzerinden de olabilir, sosyal medya üzerinden de olabilir.”	Video kaynağını farklı platformlardan seçme	Video kaynağı ile pedagojik kullanımın ayrılması
K2 — “Derslerde yapılan etkinlikleri çoğunlukla oyunları video haline getirip instagramdan paylaşıyorum.”	Ders etkinliğini sosyal medyada yayımlanacak içeriğe dönüştürme	Öğretim uygulamasından dijital paylaşım içeriğine geçiş
K4 — “Classdojo gibi sınıf yönetim platformları, yapay zeka araçları, web 2.0 araçlarını amacına uygun olarak kullanmaya dikkat ediyorum.”	Farklı dijital araçları amaca göre tercih etme	Sosyal medya dışı teknolojilerin ifadelerde görünmesi

K = katılımcı; ÖYS = öğrenme yönetim sistemi. Kodlar ifadelerdeki işlevi belirler; bir katılımcının bu teknolojiyi ne sıklıkta veya ne düzeyde yetkinlikle kullandığını göstermez

BÖLÜM 2

YAPAY ZEKÂ ÇAĞINDA MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE GERÇEK YAŞAM BAĞLAMLI PROBLEM TASARIMI: KURAMSAL İLKELER VE PEDAGOJİK STRATEJİLER

MEHMET ATA OKUYUCU[1]

Giriş

Yirmi birinci yüzyıl becerileri, öğrencilerin matematiksel kavramları soyut algoritmaların ötesine taşıyarak gerçek dünya durumlarına uyarlayabilmelerini gerektirmektedir (Wijaya vd., 2014). Uluslararası değerlendirmeler (Ekonomik İş Birliği ve Kalkınma Örgütü [OECD], 2009) ve çağdaş öğretim programları (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018), matematiksel okuryazarlık ile modelleme becerilerini bu gereksinimin merkezine almaktadır. Bu çerçevede problem kurma etkinlikleri; öğrencilerin matematiksel düşünme, akıl yürütme, esnek düşünebilme ve kavramsal anlama becerilerini geliştiren temel bir pedagojik araç olarak öne çıkmaktadır (Brown & Walter, 2005).

Bununla birlikte, matematik sınıflarında bağlam kullanımı incelendiğinde, problemlerin sıklıkla gerçekçi olmayan senaryolar

[1] Dr, Milli Eğitim Bakanlığı, Orcid: 0000-0002-7291-9513

üzerine kurulduğu ve bağlamın yalnızca yüzeysel bir süs görevi gördüğü dikkat çekmektedir (Boaler, 1993). Bu tür yapay problemlerde matematiksel işlem dizisi açıkça ortada durmakta, problem bağlamdan soyutlansa dahi matematiksel yapısında bir değişim yaşanmamaktadır (Wijaya vd., 2015). Gerçek anlamda matematiksel düşünmeyi tetikleyen işlevsel-yapılandırıcı görevlerin tasarımı ise öğretmenler için ileri düzeyde pedagojik alan bilgisi, zaman ve derinlemesine planlama gerektirmektedir (Bonotto & Dal Santo, 2015; Cai & Hwang, 2023; Cai, & Leikin, 2020),

Son dönemde üretken yapay zekâ ve büyük dil modellerinin eğitime entegre olması, problem ve materyal geliştirme süreçlerine yeni bir boyut kazandırmıştır. Büyük dil modelleri çok sayıda farklı bağlam ve senaryoyu saniyeler içinde üretebilme kapasitesine sahiptir. Ancak yapay zekânın rastgele komutlarla yönlendirilmesi; matematiksel ve durumsal tutarsızlıklar barındıran ya da yüzeysel kamuflaj bağlamlar içeren görevlerin ortaya çıkmasına yol açabilmektedir (Bitterlich, 2020; Blum & Borromeo Ferri, 2009). Bu çalışmanın amacı; üretken yapay zekânın matematik öğretiminde gerçek yaşam bağlamlı problem kurma süreçlerinde kuramsal ilkeler doğrultusunda nasıl bir pedagojik ortak olarak kullanılabileceğini ortaya koymak ve bu sürece rehberlik edecek istem mimarisini tanıtmaktır.

Matematik Eğitiminde Bağlamsal Problemler ve Kamuflaj Bağlam Sorunu

Matematik eğitiminde bağlam, problemin gömülü olduğu veya içinden doğduğu yaşamsal durum olarak nitelendirilmektedir (Borasi, 1986). Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) anlayışı, matematiğin insan etkinliği olarak yapılandırılmasında bağlamın bir başlangıç noktası ve kavram inşası aracı olarak rol oynaması gerektiğini vurgular (Freudenthal, 1991; Gravemeijer & Doorman, 1999). Literatürde problemler bağlamsal yapıları açısından

bağlamsız görevler, kamuflaj bağlamlı görevler ve işlevsel-yapılandırıcı bağlamlı görevler şeklinde ele alınmaktadır (Wijaya vd., 2015):

Kamuflaj Bağlam: Problemin çözümü için öğrencinin gerçek yaşam deneyimini kullanmasına ya da bağlam üzerinde akıl yürütmesine gerek bırakmayan, hikâyenin yalnızca sayıları gizlemek amacıyla kullanıldığı görevlerdir. Metindeki anlatı çıkarıldığında matematiksel işlem doğrudan işlem kağıdına dökülebilmektedir.

İşlevsel-Yapılandırıcı Bağlam: Çözüm için öğrencinin bağlamı derinlemesine anlamasını, gerçek yaşam kısıtlarını modellemesini, yaklaşık değerleri ve kısıtlamaları hesaba katmasını zorunlu kılan görevlerdir. Burada bağlam, matematiksel düşünmenin ayrılmaz bir parçasıdır.

Geleneksel kaynaklarda kamuflaj bağlamların baskınlığı, öğrencilerin okuldaki matematik ile gündelik hayat arasında köprü kurmasını zorlaştırmaktadır (Bonotto, 2007; Larina, 2016). Üretken yapay zekâ araçlarının kontrolsüz kullanımı da benzer biçimde kamuflaj bağlamlı içeriklerin çoğalmasına zemin hazırlama riski taşımaktadır.

Yapay Zekâ Destekli Otantik Problem Tasarım Döngüsü

Büyük dil modellerinin nitelikli görevler oluşturabilmesi, rastgele soru istemek yerine aşamalı bir pedagojik döngüyle mümkündür. Bu döngü üç temel adımdan oluşur:

Pedagojik Planlama: Öğretmen kazanımı, öğrenci seviyesini, kavram yanılgılarını ve konunun doğasına uygun gerçek yaşam alanını (örn. su tüketim tarifesi, karbon ayak izi, enerji verimliliği) önceden belirler.

İstem Mimarisi ile Yapılandırma: Belirlenen kısıtlar ve pedagojik hedefler doğrultusunda yapılandırılmış istem modele

aktarılır. Modelin ilk çıktısı nihai kabul edilmeyerek sayısal gerçekçilik ve veri tutarlılığı yönünden geri bildirimlerle geliştirilir.

Kritik Değerlendirme ve Pedagojik İyileştirme: Üretilen metin matematiksel doğruluk, durumsal gerçekçilik ve bilişsel yük dengesi açısından öğretmen denetiminden geçirilir.

Aşağıda standart istem yaklaşımı ile pedagojik istem mimarisi arasındaki farklar karşılaştırılmaktadır.

Tablo 1 Standart ve Pedagojik Odaklı İstem Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

Tasarım Bileşeni	**Standart / Genel İstem Yaklaşımı**	**Pedagojik İstem Mimarisi Yaklaşımı**
Modelin Rolü	Genel amaçlı metin üreticisi	GME ve modelleme odaklı pedagojik ortak (Freudenthal, 1991)
Kazanım Odağı	Genel konu başlığı (örn. Doğrusal Denklemler)	Hedeflenen bilişsel süreç ve kavramsal sınırlar (MEB, 2018; OECD, 2009)
Bağlam Niteliği	Rastgele, yüzeysel senaryo	Gerçekçi parametrelere dayalı durum (Altun, 2015; Borasi, 1986)
Sayısal Yapı	İşlem kolaylığı için yapay sayılar	Gerçek yaşam verileri ve durumsal kısıtlar (Maaß, 2010)
Bilişsel Talep	Tek adımlı doğrudan işlem (Kamuflaj) (Wijaya vd., 2015)	Matematikselleştirme ve modelleme (İşlevsel) (Meyer vd., 2001; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005)

Kaynak: Yazar tarafından geliştirilmiştir.

Karşılaştırmalı Görev Analizi ve Örnek Uygulamalar

Pedagojik istem mimarisinin somut etkisini ortaya koymak amacıyla 8. sınıf düzeyindeki doğrusal ilişkiler kazanımı üzerinden iki farklı yaklaşım incelenmiştir.

Yaklaşım A: Standart İstem ve Kamuflaj Çıktısı

İstem: “8. sınıf doğrusal denklemler konusu için günlük hayattan yeni nesil bir soru yazar mısın?”

Çıktı: “Bir taksi durağında açılış ücreti 25 TL olup gidilen her kilometre için 15 TL alınmaktadır. x kilometre yol giden bir yolcunun ödeyeceği ücret y TL olduğuna göre, 12 kilometre giden bir yolcu toplam kaç TL öder?”

Pedagojik Değerlendirme: Bu problem tipik bir kamuflaj bağlam örneğidir. Görev, doğrudan $y = 15x + 25$ doğrusal eşitliğini çalıştırmaktan ibarettir. Hikâye metinden çıkarıldığında matematiksel yapıda herhangi bir bilişsel kayıp oluşmamaktadır.

Yaklaşım B: Pedagojik İstem Mimarisi ve İşlevsel Bağlam Çıktısı

İstem: “Gerçekçi matematik eğitimi ilkelerini benimseyen bir uzman rolü üstlen. 8. sınıf doğrusal ilişkiler kazanımı için kademeli su tüketim tarifesi bağlamında kamuflaj içermeyen bir problem kurgula. Kısıtlar: İlk 10 m^3 için metreküp fiyatı sabit olsun; 10 m^3 aşıldığında aşan kısım zamlı tarifeden hesaplansın. 5 m^3 üzeri kullanımlarda sabit bir çevre bakım bedeli eklensin. Öğrencinin doğrudan tek formül işletmek yerine parçalı durumu modellemesi, eşik değerleri analiz etmesi ve karar vermesi gereksin.”

Çıktı: “Bir belediyenin mesken su tarifesine göre; aylık tüketimin ilk 10 m^3'lük kısmının birim fiyatı 14 TL'dir. 10 m^3'ü aşan her metreküp su için birim fiyat %50 artırımlı uygulanmaktadır. Ayrıca aylık tüketimi 5 m^3'ün üzerinde olan abonelerin faturalarına 40 TL sabit çevre bakım bedeli yansıtılmaktadır. Bir abonenin aylık faturasının 280 TL geldiği bilinmektedir. Bu abonenin aylık su tüketim miktarını (m^3) hesaplayınız ve tüketim miktarı ile fatura tutarı arasındaki doğrusal ilişkiyi parçalı model olarak açıklayınız.”

Pedagojik Değerlendirme: Öğrenci doğrudan hazır bir formülü işletemez; bağlamdaki eşik değerleri (5 m^3 ve 10 m^3) ve

sabit maliyet koşullarını hesaba katarak modeli kendisi yapılandırmak zorundadır.

Yapay Zekâ Destekli Problemler İçin Görev Değerlendirme Rubriği

Öğretmenlerin yapay zekâ ile ürettikleri görevleri sınıfa taşımadan önce denetleyebilmeleri amacıyla geliştirilen analitik değerlendirme rubriği aşağıda sunulmuştur.

Tablo 2 Yapay Zekâ ile Üretilen Bağlamsal Problemler İçin Görev Değerlendirme Rubriği

Ölçüt	**Başlangıç Düzeyi (1 Puan)**	**Gelişmekte Olan (2 Puan)**	**İleri Düzey / Otantik (3 Puan)**
Bağlamsal İşlevsellik	Hikâye çıkarıldığında matematiksel işlem doğrudan kalır (Kamuflaj).	Bağlam soruya yön verir ancak gerçekçi kısıtlar içermez.	Bağlamın kısıtları matematiksel modelin temelini kurar (İşlevsel) (Wijaya vd., 2015).
Sayısal Gerçekçilik	Değerler gerçek dünyayla çelişir ya da mantıksızdır.	Sayılar mantıklıdır ancak yuvarlama gereksinimleri yok sayılmıştır.	Sayılar ve birimler gerçek yaşam dinamiklerine tam uyumludur (Maaß, 2010).
Bilişsel Talep	Tek adımlı standart formül işletimi gerektirir.	Çok adımlıdır ancak çözüm stratejisi açıkça belirtilmiştir.	Durumu günlük dilden matematik diline çevirme ve modelleme gerektirir (Blum & Borromeo Ferri, 2009).
Dil ve Bilişsel Yük	Aşırı edebi anlatım dikkati dağıtarak bilişsel aşırı yük oluşturur (Bitterlich, 2020).	İfadeler genel olarak anlaşılırdır fakat bazı belirsizlikler taşır.	Net, duru ve matematiksel terimlerin doğru kullanıldığı anlatım.

Kaynak: Yazar tarafından geliştirilmiştir.

Tartışma

Bu bölümde geliştirilen yapay zekâ destekli otantik problem tasarım döngüsü, üretken yapay zekânın matematik öğretiminde yalnızca soru üreten bir araç olarak değil, öğretmenin pedagojik kararlarını destekleyen ve eleştirel biçimde denetlenen bir tasarım ortağı olarak ele alınması gerektiğini ortaya koymaktadır. Önerilen yaklaşımın temel dayanağı, matematiksel bir görevin niteliğinin yalnızca konuya veya kullanılan sayılara değil, öğrenciden beklenen düşünme biçimine ve bağlamın çözüm sürecindeki işlevine bağlı olmasıdır. Gerçekçi Matematik Eğitimi yaklaşımında bağlam, matematiksel düşünmeyi başlatan ve model kurma sürecine yön veren bir kaynak olarak değerlendirilir; bağlamın yalnızca hikâye biçiminde sunulması ise görevi kendiliğinden otantik hâle getirmez (Freudenthal, 1991; Gravemeijer & Doorman, 1999; Wijaya vd., 2015).

Bu ayrım, bölümde verilen taksi ücreti ve kademeli su tarifesi örnekleri üzerinden somutlaştırılmıştır. Taksi örneğinde bağlam kaldırıldığında öğrencinin yapacağı işlem değişmezken su tarifesi örneğinde eşik değerler, sabit bedel ve farklı birim fiyatlar matematiksel modelin kurulmasını etkiler. Bununla birlikte, ikinci örneğin de yalnızca daha fazla işlem içermesi nedeniyle nitelikli sayılmaması gerekir. Görevin eğitsel değeri; öğrencinin hangi varsayımları belirlediği, değişkenler arasındaki ilişkiyi nasıl temsil ettiği, elde ettiği sonucu bağlam içinde yorumlayıp yorumlamadığı ve modelin sınırlarını fark edip etmediği üzerinden değerlendirilmelidir. Matematiksel modelleme literatürü, gerçek durumun matematikleştirilmesi kadar matematiksel sonuçların yeniden gerçek duruma yorumlanmasını ve doğrulanmasını da önemli görmektedir (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Maaß, 2010).

Problem kurma araştırmaları da nitelikli görev tasarımının öğretmen açısından kendiliğinden gelişen, yalnızca teknik istem yazma becerisine indirgenebilecek bir süreç olmadığını

göstermektedir. Zhang vd. (2024) tarafından gerçekleştirilen meta-analiz, problem kurma yeterliğini geliştirmeye yönelik müdahalelerin genel olarak olumlu etkisine işaret etmekle birlikte, etkililiğin uygulamanın ve katılımcıların özelliklerine göre değişebildiğini ortaya koymaktadır. Han vd. (2024) ise öğretmenlerin problem kurma istemlerini açıklık, bilişsel talep, destekleme ve farklılaştırma gibi ölçütler bakımından değerlendirdiklerini göstermektedir. Bu bulgular, yapay zekâ destekli problem tasarımında kazanım, öğrenci düzeyi, hedeflenen düşünme süreci ve bağlamın gerçekçi kısıtlarının isteme açıkça dâhil edilmesini desteklemektedir.

Üretken yapay zekâya ilişkin güncel çalışmalar, bu araçların matematiksel görev üretiminde fırsatlar sunduğunu, ancak çıktının pedagojik niteliğinin kendiliğinden garanti edilmediğini göstermektedir. Schorcht vd. (2024), istem biçiminin yapay zekâ destekli matematiksel görevlerin eğitimsel niteliği açısından önemini vurgularken, Burgos ve Tizón-Escamilla (2026) öğretmen adaylarının etkili istemler oluşturma ve yapay zekâ yanıtlarındaki hataları belirleme konusunda güçlük yaşayabildiklerini bildirmiştir. Bu sonuçlar, yalnızca ayrıntılı bir istem yazmanın yeterli olmadığını; öğretmenin matematiksel doğruluk, bağlamsal tutarlılık ve öğrenme hedefleri bakımından çıktıyı değerlendirebilmesi gerektiğini düşündürmektedir. Dolayısıyla bölümde sunulan rubrik, otomatik bir kalite güvencesi aracı olarak değil, öğretmenin gerekçeli karar vermesini kolaylaştıran bir kontrol çerçevesi olarak görülmelidir.

Bu çerçevede, rubriğin dört boyutu—bağlamsal işlevsellik, sayısal gerçekçilik, bilişsel talep ve dil/bilişsel yük—birbirini tamamlayan ölçütlerdir. Örneğin, gerçek hayattan alınmış sayılar içeren bir problem, bağlam çözüm için gerekli değilse hâlâ kamuflaj bağlamlı olabilir. Benzer biçimde, bağlamın gerçekçi olması öğrencinin seviyesine uygun olduğu veya matematiksel hedefle tutarlı olduğu anlamına gelmez. Görev tasarımında bağlamın

öğrenciler için anlaşılabilir olması, kullanılan verilerin güncelliğinin ve kaynağının kontrol edilmesi, birimlerin tutarlı olması ve gereksiz metinsel yükten kaçınılması birlikte gözetilmelidir. Bu gereklilik, matematiksel görevlerin dilsel özelliklerinin ve öğrenciden beklenen yorumlama süreçlerinin öğrenme fırsatlarını etkileyebileceğine ilişkin araştırmalarla da uyumludur (Bitterlich, 2020; Wijaya vd., 2014).

Bununla birlikte, bu bölümde sunulan tasarım döngüsü ve rubrik kuramsal bir öneri ve örnek görev analizi niteliğindedir; kontrollü bir uygulama veya deneysel değerlendirme sonucunda etkililiği sınanmış bir müdahale olarak yorumlanmamalıdır. Verilen iki örnek, istem yaklaşımındaki farklılıkları açıklamak amacıyla kullanılmıştır. Bu nedenle yaklaşımın öğrenci başarısı, matematiksel modelleme yeterliği, problem kurma becerisi veya öğretmenlerin iş yükü üzerindeki etkileri hakkında nedensel bir sonuca varmak mümkün değildir. Ayrıca gerçek yaşam bağlamlarının kültürel, ekonomik ve yerel özellikleri öğrenci gruplarına göre değişebileceğinden, örnek görevlerin sınıf düzeyine ve yerel koşullara uyarlanması gereklidir.

Sonuç

Bu bölümün temel sonucu, üretken yapay zekânın matematik öğretiminde gerçek yaşam bağlamlı problem tasarımını hızlandırabilecek ve çeşitlendirebilecek bir olanak sunduğu; ancak ortaya çıkan görevin niteliğinin öğretmenin amaçlı tasarımına ve eleştirel incelemesine bağlı olduğudur. Bu nedenle önerilen döngü, pedagojik planlama, yapılandırılmış istemle üretim ve kritik değerlendirme aşamalarını birbirine bağlı biçimde ele almaktadır. Öğretmen önce kazanımı ve öğrencinin özelliklerini belirlemeli; ardından bağlamı, gerçekçi kısıtları ve hedeflenen matematiksel düşünme süreçlerini isteme yansıtmalı; son olarak çıktıyı matematiksel, bağlamsal ve pedagojik açıdan sınamalıdır.

Bölümde tanıtılan rubrik, özellikle bağlamın matematiksel akıl yürütmede gerçekten işlev görüp görmediğini sorgulamak için kullanılabilir. Bununla birlikte rubrik, öğretmen yargısının yerine geçen kesin bir puanlama sistemi değildir; görevlerin güçlü ve geliştirilmesi gereken yönlerini görünür kılan bir öz değerlendirme aracıdır. Üretken yapay zekâ tarafından oluşturulan içeriklerde hata, gerçek dışı varsayım, güncelliğini yitirmiş bilgi veya öğrencinin düzeyine uygun olmayan bir dil bulunabileceği kabul edilmeli; öğretmen sorumluluğu ve öğrenci düşünmesi sürecin merkezinde tutulmalıdır. Bu insan merkezli yaklaşım, üretken yapay zekânın eğitimde kullanımında insan iradesini, güvenliği ve pedagojik uygunluğu önceleyen uluslararası rehberlerle de örtüşmektedir (Miao & Holmes, 2023; OECD, 2026).

Öneriler

Matematik öğretmenleri, üretken yapay zekâdan problem isterken yalnızca sınıf düzeyi ve konu adını belirtmekle yetinmemeli; öğrenme kazanımını, hedeflenen düşünme sürecini, öğrencilerin ön bilgilerini, bağlamın gerçek yaşamla ilişkisini, kullanılabilecek verileri ve görevin içermesi gereken kısıtları da açıkça tanımlamalıdır.

Yapay zekâ çıktısı sınıfta kullanılmadan önce matematiksel çözüm yeniden yapılmalı; sayıların, birimlerin, tarifelerin ve diğer bağlamsal bilgilerin tutarlılığı kontrol edilmeli; gerekli durumlarda güncel ve güvenilir kaynaklardan doğrulama yapılmalıdır. Gerçek yaşam verileri kullanıldığında verinin kaynağı ve tarihi belirtilmeli, örnek amaçlı oluşturulan varsayımsal veriler ise gerçek veriymiş gibi sunulmamalıdır.

Öğretmen mesleki gelişim çalışmalarında istem yazma teknikleri tek başına ele alınmamalı; gerçekçi matematik eğitimi, matematiksel modelleme, problem kurma, görev analizi ve yapay zekâ çıktılarının eleştirel değerlendirilmesi birlikte çalışılmalıdır.

Eğitimlerde aynı kazanım için üretilen farklı görevlerin karşılaştırılması ve rubrikle gerekçeli değerlendirilmesi uygulamaya dönük bir yöntem olabilir.

Öğrenciler yalnızca yapay zekânın ürettiği problemleri çözmeye yönlendirilmemeli; kendi problemlerini kurmaları, bir görevin hangi varsayımlara dayandığını tartışmaları, yapay zekâ çıktısındaki hataları belirlemeleri ve daha işlevsel bir bağlam için öneriler geliştirmeleri desteklenmelidir. Böylece araç kullanımı, hazır yanıtı kabul etme yerine matematiksel muhakeme ve eleştirel değerlendirme etkinliğine dönüştürülebilir.

Gelecek araştırmalarda önerilen tasarım döngüsü ve rubriğin farklı sınıf düzeylerinde öğretmenlerle uygulanması; değerlendiriciler arası tutarlılığının incelenmesi; görevlerin bağlamsal işlevselliği ile öğrencilerin matematiksel modelleme, problem çözme ve problem kurma performansları arasındaki ilişkinin araştırılması önerilmektedir. Ayrıca farklı yapay zekâ modelleriyle üretilen görevler; doğruluk, gerçekçilik, dilsel erişilebilirlik, kültürel uygunluk ve bilişsel talep açısından karşılaştırılabilir. Bu tür çalışmalar, burada kuramsal olarak önerilen yaklaşımın hangi koşullarda daha yararlı olduğunu belirlemeye katkı sağlayacaktır.

Kaynakça

Altun, M. (2015). *Liselerde matematik öğretimi (4. baskı)*. Alfa Aktüel Yayınları.

Bitterlich, E. (2020). About real-world contexts in mathematics education and their impact on language and learning. In J. Ingram, K. Erath, F. Rønning, A. K. Schüler-Meyer, & A. Chesnais (Eds.), *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics* Classroom (pp. 131–138). ERME/HAL

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Boaler, J. (1993). Encouraging transfer of 'school' mathematics to the 'real world' through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics, 25*(4), 341-373. https://doi.org/10.1007/BF01273906

Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study (New ICMI; Studies Series)* (Vol. 10, pp. 185-192). Springer.

Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *In mathematical problem posing* (pp. 103-123). Springer.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 125-141. https://doi.org/10.1007/BF00311517

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Psychology Press.

Burgos, M., & Tizón-Escamilla, N. (2026). ChatGPT as a tool for posing of mathematical problems by prospective teachers. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *14*(1), 3. https://doi.org/10.31129/LUMAT.14.1.2942

Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In *Mathematical*

challenges for all (pp. 115-145). Springer International Publishing.

Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 111-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Han, J., Hwang, S., Muirhead, F., & Cai, J. (2024). Exploring middle school teachers' views about problem-posing tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 73*, 101140. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101140

Larina, G. (2016). Analysis of real-world math problems: Theoretical model and classroom application. *Voprosy Obrazovaniya/Educational Studies Moscow, 3*(3), 151-168. https://doi.org/10.17323/1814-9545-2016-3-151-168.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Meyer, M. R., Dekker, T., & Querelle, N. (2001). Context in mathematics curricula. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(9), 522–527. https://doi.org/10.5951/MTMS.6.9.0522

Miao, F., & Holmes, W. (2023). Guidance for generative AI in education and research. UNESCO.

MEB. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. MEB.

OECD. (2009). *PISA 2009 assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science.* OECD Publishing.

OECD. (2026). *OECD digital education outlook 2026: Exploring effective uses of generative AI in education*. OECD Publishing.

Schorcht, S., Buchholtz, N., & Baumanns, L. (2024). Prompt the problem—investigating the mathematics educational quality of AI-supported problem solving by comparing prompt techniques. *Frontiers in Education, 9*, 1386075. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1386075

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 2–9.

Wijaya, A., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41–65. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1

Wijaya, A., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(3), 555-584. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1317

Zhang, L., Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2024). Enhancing mathematical problem posing competence: A meta-analysis of intervention studies. *International Journal of STEM Education, 11*, 48. https://doi.org/10.1186/s40594-024-00507-1

BÖLÜM 3

MATEMATİK VE SANAT ARASINDAKİ İLİŞKİNİN YARATICI DRAMA YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

PINAR İLASLANER TERZİ[1]
MURTAZA AYKAÇ[2]

Giriş

Sanat, insanlık tarihi kadar eski bir olgudur. İnsanlığın varoluşundan itibaren farklı toplumların kültürel değerleri, yaşam biçimleri, inançları doğrultusunda çeşitli sanat anlayışları ortaya çıkmıştır. İnsan topluluklarının oluşmasıyla birlikte ortaya çıkan sanat, bireyin çevresiyle kurduğu ilişkinin yanı sıra, iç dünyasının ve yaşantılarının dışavurumunda da önemli bir rol üstlenmiştir. Bundan dolayı sanat, toplumların kültürel birikimlerini yansıtan ve insanın kendisini ifade etmesine olanak sağlayan temel etkinliklerden biri olarak değerlendirilebilir (Artut, 2001).

Matematik yalnızca sayılar ve hesaplamalardan ibaret değildir; örüntüleri, düzenleri ve bağlantıları inceleyen bir düşünme biçimidir. Günlük yaşamdan ekonomi ve siyasete, müzikten resime

[1] Doktora Öğrencisi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Eğitim Bilimleri, Orcid: 0009-0009-0245-7681
[2] Doç. Dr., Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Temel Eğitim, Orcid: 0000-0001-7204-0835

ve iletişime kadar birçok alanda önemlidir. Matematikçiler ise örüntüler, sayılar ve formüller üzerinde çalışarak yeni kavramlar geliştirir ve mevcut matematiksel fikirleri farklı yollarla ortaya koyarlar (Pappas, 2013). Matematik sadece akıl ve mantıktan oluşmaz. Matematik yaparken duygular, merak, yaratıcılık ve hayal gücü de önemlidir. Bu yüzden matematik hem mantık ve düşünmeye dayanan bir bilim hem de yaratıcılık gerektiren bir sanat alanıdır (Yıldırım, 2014).

Matematik ve sanat, birbiriyle ilişkisi koparılamayan iki alandır. Her sanat eserinin içinde belirli ölçüde matematiksel düzen, oran, simetri, ritim ve geometrik yapı bulunmaktadır (Hichman ve Huckstep, 2003). Ünlü matematikçilerden Hardy (2005) "*Bir Matematikçinin Savunması"* adlı eserinde "Bir matematikçinin yaptığı şey bir ressamın ya da şairinki kadar güzel olmalıdır. Düşünceler, renkler ve sözcükle gibi uyumlu bir biçimde birbirine uymalıdır." şeklinde ifade ettiği düşüncesinde matematik de sanat gibi yaratıcılık ve estetik değer taşıyan bir insan etkinliğidir diyerek matematik ve sanat ilişkisine vurgu yapmaktadır. Biçim, uyum ve simetri arayışı, yalnızca sanatın değil, matematiğin de temel nitelikleri arasında yer almaktadır. Her iki alandaki yaratıcılık sadece duygusal ya da akılsal bir etkinliğe indirgenemez; aksine, sezgi, estetik duyarlılık, akıl yürütme ve mantıksal düşüncenin karşılıklı etkileşimiyle şekillenir.

Ortak noktaları evrendeki problemleri ortaya koymak ve bu problemlere çözüm üretmek olan matematik ve sanat, kendilerine özgü disiplinleri bulunan iki çalışma alanıdır. Her iki disiplin de kendi sınırları ve yöntemleri içerisinde özgün bir yapıya sahip olmakla birlikte, matematik yalnızca kendi iç disiplininde birtakım güzellik ve estetik unsurlar barındırmakla kalmaz; sanattaki uygulamaları aracılığıyla sanatın farklı türleriyle de iç içe geçer. Bu bağlamda matematik ve sanat arasındaki ilişki, matematiksel düşüncenin estetik ve yaratıcı yönünün sanatın çeşitli alanlarında görünür hâle gelmesini sağlamaktadır. (Duru ve İşleyen, 2005).

Sanata özgü olduğu düşünülen özelliklerin önemli bir bölümü, farklı yoğunluk ve biçimlerde matematik alanında da karşılık bulmaktadır. Benzer biçimde, matematiğe özgü olduğu varsayılan birtakım nitelikler sanat alanında da gözlemlenebilir. Bu bağlamda matematik ve sanat, birbirinden bütünüyle ayrışan etkinlikler olmaktan ziyade, ortak bir düşünsel uzanım üzerinde farklı konumlanan iki etkinlik olarak değerlendirilebilir (Yıldırım, 2014).

Prof. Dr. Cahit Arf'ın, *"Her konuyu ayrı ayrı araştırmana gerek yok, matematiğin içinde hepsi var zaten"* sözü, matematiği yalnızca sayılar ve işlemlerle sınırlı bir disiplin olarak değil, yaşamın farklı alanlarına ilişkin bilgi ve yaklaşımları bünyesinde barındıran bütüncül bir alan olarak ele aldığını düşündürmektedir. (Terzioğlu ve Yılmaz, 2005). Matematik ve sanat, tarih boyunca birbirleriyle etkileşim içinde olan ve birbirlerinden beslenen iki alandır. Özellikle resim, heykel ve seramik gibi plastik sanatların yanı sıra müzik ve mimaride de matematiksel düşüncenin ve geometrik düzenin önemli bir yeri vardır. Literatürde, sanat ve matematik arasındaki ilişkiye yönelik çeşitli çalışmalar bulunmaktadır (Jeong, 2010; Johnson ve Steinerberger, 2019; Arık-Karamık ve Aykaç, 2022).

1739 sayılı Millî Eğitim Temel Kanunu'nda belirlenmiş olan Genel Amaçlar ve Temel İlkeler doğrultusunda Matematik Dersi Öğretim Programı'nın ulaşmaya çalıştığı genel amaçlardan biri de şudur: "Matematiğin sanat ve estetikle ilişkisini fark edebilecektir." Bu amaç matematik programının matematik ve sanat arasındaki ilişkinin önemsediğini göstermektedir. Matematik programına yönelik kitaplarda matematik ve sanat arasındaki ilişkiye yönelik bilgilerden ara ara kısaca bahsedilmektedir. Ancak buna yönelik matematik öğretiminde etkinlikler bulunmamaktadır.

Matematik öğretiminin temel amacı, bireylerin günlük yaşamda karşılaştıkları durumlarda matematiksel bilgi ve becerilerini kullanabilmelerini sağlamak ve karşılaştıkları sorunlara

çözüm üretme becerilerini geliştirmektir. Bunun yanı sıra matematik, bireylere olaylara farklı açılardan bakabilme ve karşılaştıkları durumları sistemli bir şekilde değerlendirebilme becerisi kazandırmayı amaçlar (Altun, 2016).

Farklı öğretim yöntem ve tekniklerinin kullanıldığı ve öğrencilerin öğrenme sürecine aktif olarak katılım gösterdiği matematik derslerinin, öğrencilerin matematiksel kavramları daha kolay anlamlandırmalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Öğrencilerin öğrenme sürecinde aktif rol almaları; matematiksel bilgiyi keşfetmelerine, önceki bilgileriyle ilişkilendirmelerine ve öğrendiklerini günlük yaşamla kullanmalarına olanak sağlayabilir. San (2006) ezberci öğretim sisteminin herkesin yakından tanıdığı bir olgu, yaratıcılığın ise dillerden düşmeyen bir kavram olduğuna dikkate çekmektedir. Özünde yaratıcılık olan matematik ve sanatın birbirleri ile ilişkisine ek olarak iki disiplinin hem disiplin hem de bir yöntem olan yaratıcı drama ile ilişkilendirilmesinin de önem arz edeceği düşünülmektedir.

Yaratıcı drama, öğrencilerin farklı disiplinler arasında bağlantı kurmasını sağlayan, doğaçlama, rol oynama vd. tekniklerden yararlanılarak canlandırma süreçlerinin yer aldığı bir öğrenme yöntemidir. Yaşantılardan hareket eder; spontanite, şimdi ve burada olma ve "-mış gibi yapma" ilkelerine dayanır (Adıgüzel, 2018). Öztürk (2001), yaratıcı dramanın geleneksel öğretim yöntemlerinden ayrılan yönlerinden birinin, her yaştan bireye özgürce kendini ifade etme olanağı sunması ve öğrenme sürecinde coşku yaratması olduğunu belirtmektedir.

Yaratı drama, öğrencilerin kişilik gelişimlerini destekleyen ve çeşitli becerilerinin geliştirilmesine katkıda bulunan önemli bir eğitim aracıdır (Can ve Aydın, 2023). Vural ve Somers' a (2011) göre, eğitimde drama öğretim programları içerisinde farklı amaçlara yönelik olarak kullanılabilen çok yönlü bir yaklaşım olarak değerlendirilmektedir. Drama, bir yandan dil, matematik, tarih,

coğrafya, görsel sanatlar ve müzik gibi farklı disiplinlere ait konu ve kavramların öğretiminde bir öğretim yöntemi olarak kullanılmakta; diğer yandan drama dersi kapsamında, drama sanatı aracılığıyla bireysel gelişimi desteklemeyi ve sanatsal yaratıcılığı ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır.

Yaratıcı drama yöntemi ile ele alınan çalışmalarda katılımcılar yaratıcı bir süreç yaşadıkları gibi aktif olarak süreçte yer alırlar. Sanat ve matematiğin ilişkili olduğu alanların yer aldığı atölyelerde katılımcı farklı disiplinlerin bir araya geldikten sonra ortaya çıkan ürünlerin biricik ve tek olduğunu ve içinde yaratıcılık barındırdığını fark eder. Matematik ve sanat alanlardaki soyut bilgilerin yaparak yaşayarak öğrenmesini sağlayabilecek yaratıcı drama yöntemi ile verilmesi öğrencilerin matematik dersine karşı olan bakış açılarını da değiştirebilir.

Aşağıda, yaratıcı drama yöntemiyle matematik ve sanat arasındaki ilişkinin öğrencilere fark ettirebilmek amacıyla yapılandırılmış dört örnek oturum planı sunulmuştur.

Örnek Ders Planı (1)	
Önerilen Sınıf Düzeyi	5. sınıf
Ders	Matematik
Konu	Sanatta "Matematik"
Önerilen Süre	90 dakika (İki ders saati)
Yöntem/Teknikler	Yaratıcı drama (doğaçlama, rol oynama)
Araç-Gereç	Şekillerin çizili olduğu kartonlar, renkli dramatik durum zarfları
Mekân	Drama sınıfı
Kazanımlar	• Matematik ve sanat arasındaki ilişkiyi fark eder.

Hazırlık-Isınma

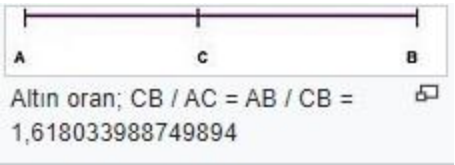
1. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere sınıfın içinde belirli bir ritimde yürümelerini söyler. Bir süre sonra öğrenciler yürürken sanatta matematik var mıdır? Sorusunu düşünmelerini ister. İki dakika sonra öğrencilere şimdi duralım. En yakınımızdaki kişi ile eş olalım ve sorduğum sorunun cevabını konuşalım diyerek yönergesini verir. Paylaşımlar bittikten sonra öğrenciler yürümeye devam eder. Öğretmen duralım ve bize en yakın iki kişi ile bir grup oluşturalım dedikten sonra oluşan üçlü gruplara dönerek şimdi ise sanat türlerinde karşımıza çıkan matematik kavramları nelerdir? Sorusunun cevabını birbirimizle paylaşalım yönergesini verir.

Gruplar paylaşımlarını yaparken öğretmen fikirleri dinler. Bir müddet sonra etkinliğe son verilir.

2. Etkinlik

Yerde kapalı bir karton bulunmaktadır. Kartonun ön yüzünde aşağıdaki şekil çizilidir.



Öğrenciler, kartonun hemen yanı başında bir şerit görürler. Bu düz çizgi üç yerinden kartondaki gibi işaretlenmiştir. Öğrenciler 1'den 5'e kadar sayarlar. Her sayı daha önceden sınıfa yerleştirilmiş olan kendi sayısının köşesine gider. Dört grup oluştuktan sonra öğretmen daha önceden yerleştirdiğim çizgiyi görüyorsunuz. Şimdi söyleyeceğim yerlerin uzunluklarını ölçelim" diyerek yönergesini verir. Sırayla CB, AC ve CB kenarlarını söyler. "şimdi ise CB uzunluğunu AC uzunluğuna bölelim. Bulduğunuz sonucu bir kenara yazalım. Şimdi de AB uzunluğunu CB uzunluğuna bölelim. Ve yine bulduğumuz sonucu yazalım" diyerek yönergesine devam eder. Grupların aynı sonuçları bulduğunu ve iki bölme işleminin de eşit olduğunu ifade ettikten sonra kartonu çevirir. Ve buldukları oranın adının altın oran olduğunu vurgular.

Ara Değerlendirme

Öğrenciler çember biçiminde oturur. Ortaya çıkan cevaplar üzerine konuşulur. Altın oranın niçin bulunmuş olabileceği ve birinci etkinlikle bir bağlantısı olup olmayacağı yönünde sohbet edilir. Sanatta karşılaşılan matematiksel kavramlar üzerine sohbet edilir.

Canlandırma

3. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere elinde kırmızı, sarı ve mavi kartların olduğu keseyi sırayla uzatır. Eşit sayıda olan renklerden herkes birer tane alır. Her renk kendisine ait aynı renkte zarfın yapıştırıldığı duvara doğru gider. Aynı renk kartlarına sahip kişiler bir araya gelecek şekilde gruplar oluşur. Öğretmen öğrencilere "her grup kendi zarfını açabilir. Zarflarınızın içinde bazı durumlar var. Biz bilmiyoruz. Ama birazdan öğreneceğiz neler olacağını. Hazırlanmak için 15 dakikamız var" diyerek yönergesini verir.

Kırmızı zarf: (Resim)

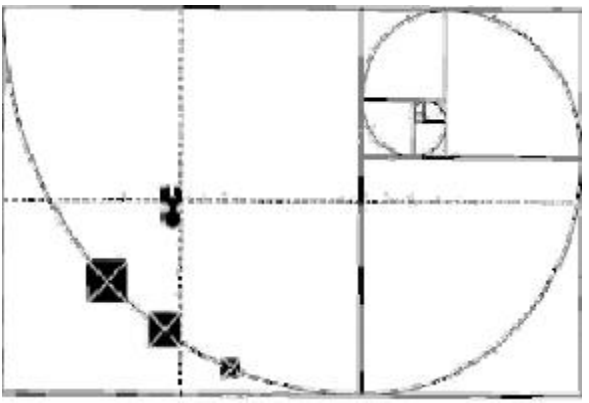
"Ülkenizde ressam olarak sadece siz varsınız. Bu ülkenin ressamları çok meşhur. Sebebi ise tüm tablolarında altın oranı kullanmaları. Ancak bir gün ülkenin kralı hep aynı tarz yaptığınızı düşünerek ülkede altın oranı kullanmayı yasaklar".

Mavi zarf : (Müzik)

"Sizler ünlü bir orkestrada klasik müzik eserleri çalıyorsunuz. Ve bir yarışma için hazırlanıyorsunuz. Beethoven'ın beşinci senfonisi ve Mozart'ın bir eseri var elinizde. İkisinde de altın oran kullanıldığını biliyorsunuz. Ama şefiniz bir türlü ikna olmuyor"

Sarı zarf: (Mimari)

Sizler mısır piramitlerini inşa eden grupsunuz. Piramitler hem kendi içerisinde hem de birbirleri arasında altın oran içermektedir. Ve harita aşağıdaki gibidir.



Size bu şekilde olması gerektiğini söyleyen kral en kısa zamanda piramitlerin inşasını ister. Ama o akşam kâğıt kaybolur.

Ara Değerlendirme

Gruplar canlandırmalarını bitirdikten sonra öğretmen "Matematikte kullanılan altın oran sanatta nerelerde karşımıza çıkmaktadır?" diyerek sorusunu sorar. Ve cevapların ardından daha önce bunları bilip bilmediklerine, biliyorlarsa nasıl öğrendiklerine dair bilgiler alınır.

Değerlendirme

Atölye sonunda sınıftaki öğrencilere beyaz, sarı ve turuncu renkli küçük kâğıtlar dağıtır. Daha sonra atölyenin üç farklı yerine beyaz, sarı ve turuncu kartonlar yerleştirir. 'Şimdi gruplara ayrılacağız. Elinizdeki renge ait kartonun yanına gidelim. Bugün aklınızda kalanı bir tümce halinde belirleyelim.' Diyerek yönergesini verir. Bir müddet sonra 'Belirlediğiniz tümceleri de kullanarak bir tanıtım yazısı hazırlayalım. Okulunuzun bir internet dergisi var. Ve bu ayki sayısındaki matematik köşesini tanıtmak için bir sayfa hazırlamanız gerekiyor. Bugün matematik ve sanat paylaşımlarımızı da göz önünde tutarak sayfamızı hazırlayalım.' diyerek öğretmen yönergesini verir. Gruplar hazırlıklarını tamamladıktan sonra birbirlerinin hazırladıkları sayfaları incelemeye başlar.

Örnek Ders Planı (2)	
Önerilen Sınıf Düzeyi	5. sınıf
Ders	Matematik
Konu	Leonarda da Vinci ve Piet Mondrian tabloları
Önerilen Süre	90 dakika İki ders saati)
Yöntem/Teknikler	Yaratıcı drama (doğaçlama, rol oynama, öğretmenin rolde olması)
Araç-Gereç	A4 kâğıtları, kurşun kalemler,
Mekân	Drama sınıfı
Kazanımlar	• Leonardo Da Vinci' nin Mona Lisa adlı tablosunu tanır. • Mona Lisa tablosunda altın oranın bulunduğunu kavrar. • Matematik ve resim ilişkisine örnek gösterir. • Sanat eserindeki matematiksel kavramları fark eder.

Hazırlık/Isınma

1. Etkinlik

Öğrenciler atölyede serbestçe dolaşmaya başlar. Bir süre sonra öğretmenin yönergesini verir: "Şimdi aklımızdan bir renk tutalım. Bu rengi gözümüzde canlandıralım. Ve atölyenin istediğimiz köşesini bu renk ile boyayalım." Herkes rengini boyadıktan sonra tekrar serbestçe dolaşmaya başlar. Öğretmen

sırayla yönergelerini sıralar. Her yönergenin ardından işlemler tamamlandıktan sonra aralarda öğrenciler atölyede serbestçe dolaşır.

Öğretmenin sırayla verdiği yönergeler: "Elimize fırçamızı alalım ve tuvalimizi seçtiğimiz renk ile boyayalım. Şimdi sağ ayağımızla yeri boyayalım. İşaret parmağımızla en yakınımızdaki arkadaşımızın işaret parmağını boyayalım. Sağ ayağımızla arkadaşımızın sağ ayağını boyayalım. Şimdi bir sergi geziyoruz. Seçtiğimiz renk hangi tablolarda var. Bulmaya çalışalım…"

2. Etkinlik (Gökkuşağı Ağı)

Öğrenciler arasından bir ebe seçilir. Öğretmen 'birazdan oynayacağımız oyun için kendimize bir renk seçelim. Ebemiz renk avına çıkacak. Çünkü bir sürü renkten oluşan bir gökkuşağı oluşturmak istiyor. Oyunu başlattığım anda ebemizden kaçalım. İlk yakalanan kişi ebe ile el ele tutuşacak ve ikisi birden renk avına çıkacak. İki ebeden biri ya da ikisi aynı anda renk yakalayabilir. Bu sefer bu renklerde gökkuşağına eklemlenecek. Oluşan gökkuşağı ağına yakalanmayan son kişi kalıncaya kadar oyunumuz devam edecek' diyerek yönergesini verir.

Ara Değerlendirme

Öğrenciler çember olur. Konuşmak isteyenlere etkinlikler süresince ne hissettikleri ve düşündükleri üzerine söz hakkı verilir.

Canlandırma

3. Etkinlik

Öğretmen, müze görevlisi olarak role girer ve konuşmaya başlar: 'Louvre müzesine ve Paris'e hoş geldiniz. Öncelikle gezeceğimiz yer dekoratif sanatlar (resim, baskı ve çizimler) bölümü, bu bölümde 13. Yüzyıl ile 1848 tarihleri arasına ait 7500 değerli tablo sergilenir. Şimdi bu tabloların birinin önündeyiz.' Leonardo Da Vinci eserlerinden Kayalıkta Oturan Madonna diyerek boş duvarın önünde hayal etmeleri için belirli bir süre bekler.

Daha sonra atölyenin belirli bir köşesine asılmış Mona Lisa görselinin önüne öğrencileri getirerek 'Bir diğer Leonardo Da Vinci eseri Mona Lisa adlı tablosu Mona Lisa 16. Yüzyıl yağlıboya portresidir. Tabloda oturmuş bir kadın resmedilmiştir. Kadının yüzünün kime ait olduğu hala gizemini korumaktadır. Ayrıca üzerinde hiç fırça darbesi olmaması ve altın oranın kullanıldığı bir eser olması yönünden de eski dönemin en ilgi çeken eserleri arasında olmasına neden olmuştur. Tablonun orijinal boyutları yani hem eni hem de boyu bizlere altın oran olduğu bilgisini verir. Mona Lisa'nın yüzünün olduğu yere bir dikdörtgen çizilmesi ile bakıldığında bu çizilen dikdörtgen altın oran ölçülerini vermektedir. Bu yüz kısmını içine alan bu dikdörtgen göz hizasından bir çizgi ile ikiye ayrıldığında yine altın oran sistemine uygun bir dikdörtgen karşımıza çıkar.' diyerek tablo hakkında bilgileri verir. Ve Altın oran kavramını elinde buluna Mona Lisa fotokopisi üzerinde çizimle anlatmaya başlar. Anlatımı bittikten sonra öğrencilere A4 kâğıdı dağıtır ve kâğıdı tablo gibi düşünmelerini ister. Öğrenciler kâğıdı altın oran sistemine uygun çizgilerle ayırmaya çalışır.

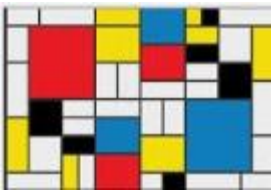
4. Etkinlik

Öğrenciler üç gruba ayrılırlar. Öğretmen, her gruba aynı yönergeyi verir. "Her biriniz bir sanat eserinin gerçek olup olmadığını anlayabilecek uzmanlarsınız. Burada bulunmanızın bir amacı var. Bir ay önce müzemizdeki en önemli eserlerden biri olan Mona Lisa tablosu çalındı. Görevliler beş tane Mona Lisa tablosu buldu. Hangisi müzemize ait karar vermeniz gerekiyor." Öğrencilere hazırlanmaları için süre verilir. Sırayla canlandırmalar izlenir.

5. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere "1'den 5'e kadar sayalım. 1'ler bir grup, 2'ler bir grup olacak şekilde 5 grup olalım. Her gruba elimdeki kâğıtlardan dağıtacağım" der. Elindeki kâğıtlarda aşağıdaki Piet Mondrian'ın tablosundan esinlenerek kesilmiş kırmızı, beyaz, siyah,

beyaz, mavi kare ve üçgenler vardır. “Şimdi size vereceğim kâğıtlarla kareler ve dikdörtgenler oluşturarak bir tablo yapalım. Her grubun bir tablosu olacak böylelikle. Tabloyu oluşturduktan sonra hazırlanmak için on dakikamız var. Acaba bu tablonun hikâyesi nedir? Kimler yapmıştır? Nereye asılacaktır? vs.” diyerek yönergesini verir. Aşağıdaki görsel sınıfın bir köşesinde arkası dönük bir şekilde asılı durmaktadır. Canlandırmalar bittikten sonra açılır.



Ara Değerlendirme

Öğretmen, sizce bu astığım tablo hangi şekillerden oluşmaktadır.” diyerek öğrencilerden dönüt alır. Sonrasında tablonun sahibi Ressam Piet Mondrian’ın (1872-1944 bu tabloda altın oran kökenli, altın dikdörtgenleri kullandığını belirtir ve Kısa kenarı 1 birim ve uzun kenarı altın orana, yani Fi (1,618..) ye eşit olan dikdörtgene altın dikdörtgen denir bilgisini ekler.

Değerlendirme

6. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere A4 kâğıtları dağıtır. Öncelikle “matematik ve resim ilişkisine örnek olarak……verilebilir” cümlesini tamamlayalım. Arkasında matematik ve resim deyince aklımızda kalanları kâğıdın geri kalanına resmedelim” diyerek yönergesini verir.

Örnek Ders Planı (3)	
Önerilen Sınıf Düzeyi	5. sınıf
Ders	Matematik
Konu	Bach Besteleri ve Ted Froberg'in valsi
Önerilen Süre	90 dakika (İki ders saati)
Yöntem/Teknikler	Yaratıcı drama (doğaçlama, rol oynama)
Araç-Gereç	Bilgisayar, müzik çalar, top, kâğıt, pastel boyalar, büyük boy resim kâğıdı
Mekân	Drama sınıfı
Kazanımlar	• Fibobacci dizisini tanımlar. • Fibonacci dizisinin nerelerde yer aldığını söyler. • TedFrobergin müzik çalışmalarında Fibonacci dizisinin yer aldığını kavrar. • Müzikte matematiksel hesaplamaların olduğunu fark eder.

Hazırlık/Isınma

1. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere 'Arkadaşlar bir oyun oynayarak başlayalım. Mekân içinde yürümeye başladıktan sonra bazı sayılar söylenir. Ağzımdan çıkan sayı kadar kişi el ele tutuşarak bir grup oluşturacak. Oluşan grupların dışında kalan kişiler oyunumuza ara verecek.' Müzik açıldıktan sonra mekân içinde yürümeye başlayalım' der. Sırasıyla 1, 1, 2, 3 2+3, 3+5… sayılarını söyler.

Oyun iki kişi kalıncaya kadar devam eder (Dr. Tülay Üstündağ' ın yürüttüğü atölyeden alınmıştır.)

2. Etkinlik (Sayı çemberi)*

Öğretmen eline topu alır ve çemberdeki öğrencilere 'oynayacağımız oyunun adı sayı çemberi. Her birimiz bir sayı olacağız' der. 'Oyunda başlangıç sayılarımız 0 ve 1. Topu eline ilk alan kişi 0 dedikten sonra topu attığı kişi 1 olan başlangıç sayılarını alıyor. Topu alan bir sonraki kişi de kendinden önceki iki sayının toplamını söyleyerek oyunu devam ettiren kişi oluyor' diyerek yönergesini verir. Topu eline alır 0 der, topu attığı kişi 1 olur.1 söyleyen kişinin sayısı kendinden önceki iki sayının toplamı olan 0+1=1. Üçüncü kişinin attığı kişi 1+1=2' diyerek oyunu devam ettirir. 'Sınır sayımı 25 olarak belirleyelim, sınırımıza gelince tekrar başlangıç sayılarımıza 0 ve 1' e dönelim diyerek yönergesini ekler.

Öğretmen, oyunun sonunda '0 ve 1 ile başlayıp sonrasında ardışık olarak önceki iki elemanın değerinin toplamı olarak ilerleyen bu sayı dizisi Fibonacci diye isimlendiriliyor. Neden mi? diyerek katılımcılara sorusunu sorar ve duvarda asılı olan, arkasında soru işareti bulunan kâğıdı gösterir. Cevapları aldıktan sonra kâğıdı ters çevirir ve katılımcılara Fibonacci'nin fotoğrafını gösterir. Öğretmen, 'Diziye ismini veren kişinin diziyi bulan kişi; Fibonacci' dir' der. Peki Fibonacci dizisi matematik dışında nerelerde olabilir?' diyerek öğrencilere sorusunu yöneltir. 'Bu sorunun cevabını şimdi birlikte bulacağız' diyerek bir sonraki etkinliğe geçiş yapar.

Ara Değerlendirme

Öğretmen, öğrencilere 'çember olalım' der. Çemberdeki öğrencilere 'Sağımdaki kişiden başlayarak 1'den 4'e kadar sırayla sayalım, sonrasında 1'ler 2'ler 3'ler ve 4'ler bir araya gelelim. Sizlere dağıtacağım zarflarda sayılar var. Elinizdeki sayıları Fibonacci dizisine göre sıralayalım. Sayıların arkasındaki harfler bizi bazı kelimelere götürecek. Gruplar sıralamalarını yaptıktan

sonra her bir sayının arkasındaki harfler bizi Fibonacci dizisinin nerelerde kullanıldığına dair bilgi verecek' diyerek yönergesini verir.

Gruplar sayıları dizinin kuralına göre yerleştirir. Ve sonrasında öğretmen kontrol eder. Eğer yanlışsa grupla bulmaya çalışır. Eğer doğruysa her gruptan bir temsilci sırayla dizilmiş kâğıtları çevirir ve oluşan kelimeleri söyler. Grupların bulduğu anahtar kelimeler. Doğa ve sanat, müzik ve mimaridir. İkişer grup aynı kelimeleri bulur.

Canlandırma

3. Etkinlik

Aradan sonra öğretmen çemberdeki öğrencilere 'Fibonacci dizisinin kullanıldığı yerleri hatırlayalım' diyerek öğrencilerden isteyene söz hakkı verir. Sonrasında yönergesini ekler 'Fibonacci dizisinin kullanıldığı yerlerden birisi de müzik. Ve bu diziyi müzikte kullananlardan biriside Ted Froberg. Şimdi ikili grup olalım. Her gruba Ted Froberg'le ilgili dramatik durumları söyleyeceğim, sonrasında canlandırmalarımızı hazırlamaya başlayalım'.

'Ted Froberg teoride sonsuza dek sürebilecek ve kulağa hoş gelen bir vals oluşturmak ister. Oluşturduğu bu valsle yarışmaya katılacaktır. Bunun için melodi ve ritmi belirlemeye çalışır. Fibonacci dizisini kullanmaya karar verir. Bu arada odaya aynı yarışmaya katılacak olan arkadaşı girer.

Gruplar eş zamanlı olarak canlandırmalarını yaparlar. Öğretmen, seçtiği gruplardan kaldığı yerden devam etmelerini isteyerek doğaçlamayı tüm grubun dinlemesini sağlar. Bir müddet sonra eşler rolleri değiştirir.

Ara Değerlendirme

Öğrencilerin canlandırmaları bittikten sonra öğretmen "Şimdi olduğumuz yerde düşünelim. Fibonacci dizisi deyince

aklımıza neler geliyor?" sorusunu yöneltir. Ve sırayla öğrencilerin cevaplarını alır.

4. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere "şimdi bir video izleyeceğiz. Videoda Johann Sebastian Bach'ın Yengeç Kanonu'nu dinleyeceksiniz. Kanon müzikte bir ezginin belirli zaman aralıklarıyla iki veya daha fazla partiyle çalınması ya da söylenmesidir. Yengeç Kanonu'nda ise iki ses birbirinin aynısıdır; yalnızca biri diğerinin tersten çalınmış halidir. Bach'ın Yengeç Kanonu için grafik sanatçısı Jos Leys tarafından yapılan bu animasyonda dizenin önce ileri, sonra geri çalındığını, sonra aynı dizenin ileri ve geri versiyonlarının birlikte çalındığını görüyoruz. Şaşırtıcı olan ise bu dizelerin bize aynı zamanda Möbius Şeridi'nin müzikal izdüşümü olması. Möbius şeridi nedir diye soracak olursanız:

Möbius şeridi geometrik olarak uzunca bir şeridin bir ucunu 180 derece bükerek diğer ucu ile birleştirilmesiyle elde edilen şerittir. Normal bir şeridin iki yüzü varken Möbius şeridinin sadece bir yüzü vardır. Başka bir ifadeyle Möbius şeridinin üzerindeki bir noktadan hareket etmeye başlandığında bütün alan taranarak aynı noktaya geri dönülür." der ve yönergesini verir: "Şimdi alanda serbestçe yürüyeceğiz yengeç kanonunu dinleyerek müzik durduğunda en yakınızdaki 5 kişiyle bir grup oluşturalım." Müzik bir müddet çaldıktan sonra durur. Ve gruplar oluşur.

Öğretmen "Her gruba kâğıtlar vereceğim. Bach'ın müziğinde olan bir geometrik şekil olan möbiüs şeridini oluşturalım ve düşünelim bu geometrik şekil nerde karşımıza çıkabilir. Her grup belirlediği şeklin formunu alacak ve diğer gruplar tahmin etmeye çalışacak" diyerek yönergeye ekleme yapar. Öğrencilere hazırlanmaları için zaman verildikten sonra sırayla gruplar izlenir.

Değerlendirme

5. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere ‘Arkadaşlar çember olalım’ der ve ekler ‘Bugünkü atölyede aklımızda kalanları bir cümle ya da bir kelimeyle belirleyelim. Cümlemi söyleyerek sağ elim havada istediğim bir kişiye doğru gideceğim. Gittiğim kişinin sağ eline vurduğumda sıra olan gelecek. Cümlelerimizi ya da kelimelerimizi söylemeye bu işlemi tekrarlayarak devam edelim’ diyerek yönergesini verir.

6. Etkinlik

Öğrenciler üç grup oluşturur. Her gruba kâğıt, boya ve büyük boy resim kâğıdı dağıtılır. Öğretmen, öğrencilere ‘Bugün bu atölyede yaptıklarımıza dair bir afiş hazırlayalım.’ diyerek yönergesini verir. Gruplar afişlerini tamamladıktan sonra sırayla her afiş gruplar tarafından incelenir.

7. Etkinlik

Öğrencilere, kâğıt ve kalem dağıtılır. ‘Şimdi dağıttığım kâğıtlara bugün içinde ne hissettiğimizi ve ne öğrendiğimizi yazalım’ der ve ekler ‘Kâğıtların üstüne isimlerimizi yazmayalım’. Öğrenciler, yazma işlemini bitirdikten sonra öğretmen ‘Bir sonraki atölyede görüşmek üzere’ diyerek oturumu sonlandırır.

Örnek Ders Planı (4)	
Önerilen Sınıf Düzeyi	5. sınıf
Ders	Matematik
Konu	Mimar Sinan ve Matematik
Önerilen Süre	90 dakika (İki ders saati)
Yöntem/Teknikler	Yaratıcı drama (doğaçlama, rol oynama)
Araç-Gereç	20 adet A4 kâğıdı, 20 adet kalem, müzik çalar
Mekân	Drama sınıfı
Kazanımlar	• Mimari ve matematik ilişkisini kavrar.

Hazırlık/Isınma

1. Etkinlik

Öğrenciler çember olur. Öğretmen 'şimdi sınıfımızda yerde dağınık halde yerleştirilen kâğıtların üzerinde duralım' der. Kâğıtların üzerinde Mimar Sinan hakkında bilgiler, Mimar Sinan'ın eserlerinde kullandığı matematiksel kavramlar hakkında bilgiler, farklı zamanlarda inşa edilmiş matematiksel kavramların yer aldığı mimari eserlerin bilgileri yer almaktadır. Örneğin; "Mimar Sinan Selimiye Cami'sinde Helis eğrilerini kullanmıştır", "Mimar Sinan inşa ettiği merdivenlerde Helisten (sarmal) ilham alıyor. Helis eğrisi en sade anlatımla bir kâğıdın sol alt köşesinden sağ üst köşesine bir doğru çizip sonrasında kâğıdın sol kenarını sağ kenarına uç uca gelecek şekilde bir rulo oluşturduğumuzda çizdiğimiz doğrudur. Bu aşamalarla oluşturulmuş en kısa eğridir.", "Mimar Sinan Osmanlı

İmparatorluğu'nun yükseliş döneminin baş mimarıdır.", "Mısır piramitlerinin tabanının yüksekliğine oranı altın orana eşittir.",

Öğretmen öğrencilere kâğıtları alalım ve üzerindeki bilgileri içimizden okuyalım. Şimdi sınıfımızda yürümeye başlayalım elimizdeki kağıtlarla elimdeki zilin sesini duyduğunuzda duralım ve en yakınımızdaki arkadaşımıza 'Biliyor musun?.....' diyerek elimizdeki kağıttaki bilgileri okuyarak ya da aklımızda kaldıysa doğrudan anlatalım." diyerek yönergesini verir. Etkinlik, kâğıtta yer alan bilgilerin sınıftaki tüm öğrenciler tarafından duyulması ve anlaşılması sağlanacak biçimde devam ettirilir.

2. Etkinlik

Öğrenciler az önce ellerinde bulunan kâğıtlarla sınıfın farklı yerlerinde dururlar. Öğretmen, öğrencilere "elinizdeki kâğıtlardaki bilgilerden sınıfta bir arkadaşınızda daha var. Birazdan müzikle dans etmeye başlayacağız. Müzik durduğunda elimizdeki bilginin aynısını bulmaya çalışacağız. İlk eşini bulanlar kâğıtlarını duvarda hazırladığım kartona yapıştırma hamurlarıyla yapıştıracak. Daha sonra müzik tekrar başlayacak. Özellikle oyun sırasında eşimizi artık biliyorsak uzak durmaya çalışalım. Haydi, başlayalım.' diyerek yönergesini verir. Son grup kâğıtlarını duvardaki kartona yapıştırana kadar etkinlik devam eder.

Ara Değerlendirme

Öğrencilere şu ana kadar yaptıklarından aklında neler kaldığı ve yapılan çalışmalar hakkında neler hissettiği sorulur.

Canlandırma

3. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilerden en yakınındaki kişi ile eş olmalarını ister. Eşlerden biri A diğeri B olur. Kimin A kimin B olacağına kendi aralarında karar verirler. Öğretmen "Mimar Sinan'ın yanına çırak almak istemektedir. Ve ülkeye geleceğin ustaları olmak isteyen

çırakların arandığı haberi duyurulmuştur. Matematik bilgisini önemseyen Mimar Sinan çırağında belirli özellikler aramaktadır ve herkes bir fikirle gelmelidir mülakata. A ve B öğrencilerine verilen yönergeler ise şöyledir: "A'lar sizin çok önemli bir bilginiz vardır. Mimar Sinan'ın matematik bilgisini kullandığını bildiğinizden fikrinizi ona göre hazırlamışsınızdır. Son gün akşam ulaşmışsınızdır görüşmenin yapılacağı yere.", "B'ler siz Mimar Sinan'ın baş kalfasısınız. Fikirler ilk önce size geliyor. Ancak görüşmelerin son gün öğlen bittiğini duyurmuşsunuzdur akşam gelen kişiye". Doğaçlamalar eş zamanlı yapılır. İki gruplar sırayla dinlenir. Bir müddet sonra eşler rollerini değiştirerek doğaçlamalarını gerçekleştirirler.

4. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere "1'den 4'e kadar sayalım. Daha sonra aynı sayıyı söyleyen kişiler bir araya gelelim" diyerek yönergesini verir. Gruplar bir araya geldikten sonra "Mimar Sinan içinde altın oranı ve helis eğrini kullandığı ustalık eseri olarak tanımladığı Selimiye Cami planlarını bitirmiştir. Planını sunmak için saraya davet edilir. Toplantı için çağrıldığı odada planlarını masaya açtığında gözlerine inanamaz. 'Ama….' der ve doğaçlama başlar" diyerek öğretmen öğrencilere grup doğaçlamalarını verir. Gruplara hazırlanmaları için bir süre verilir. Sırayla canlandırmalar izlenir.

Değerlendirme

5. Etkinlik

Öğretmen, tahtaya üzerinde Selimiye Cami, Mısır Piramitleri ve geometrik tasarlanan bazı mimari eserlerinin görsellerinin yer aldığı bir karton asar. Öğrencilere" bu görsellere baktığınızda bugünkü etkinliklerden sonra aklınızda kalanları kelime ya da cümle olarak size dağıttığım kâğıtlara yazalım ve herkes bitirdikten sonra tahtaya yapıştıralım" der. Ve öğrencilerin yazılanları incelemelerini ister.

6. Etkinlik

Öğretmen, öğrencilere elindeki kâğıtları dağıtır. “Son olarak tarihte ya da şimdi yaşayan, mimari ve matematik ile ilgilenen birisine bir mektup yazalım. Bu mektuba sanat ve matematik ilişkisi ile aklımızda kalanları da aktaralım” diyerek yönergesini verir. Gruptaki herkes sırayla mektuplarını okur.

Kaynakça

Adıgüzel, Ö. (2018). *Eğitimde yaratıcı drama.* İstanbul: Yapı Kredi Kültür Sanat Yayıncılık.

Altun, M. (2016). *Ortaokullarda (5, 6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi (12. baskı).* Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Arık-Karamık, G., & Aykaç, M. (2022). Affective learning with creative drama? Transformation geometry and teachers' candidates' learning. *European Journal of Education Studies,* 9(8), 177-199.

Artut, K. (2001). *Sanat eğitimleri kurumaları ve yöntemleri.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Can, Ş., & Aydın, Ş. (2023). Yedinci sınıf çokgenler konusunda eğitsel oyunlarla zenginleştirilen matematik öğretiminin öğrencilerin matematik başarı ve kalıcılıklarına etkisi. *Journal of Computer and Education Research,* 11(22), 966-985.

Duru, A., ve İşleyen, T. (2005). Matematik ve Sanat. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi,* 11: 479-491.

Hardy, G. H. (2005). *Bir matematikçinin savunması (22. Basım). (N. Arık, Trans.).* Tübitak Yayınları, Ankara. (1940).

Hickman, R. ve Huckstep, P. (2003). Art and mathematics in education. *Journal of Aesthetic Education,* 37(1), 1-12. Erişim adresi: https://www.jstor.org/stable/3527417

Jeong, K. C. (2010). Art education through artwork: focusing on the mathematical principle. *The Journal of the Korea Contents Association,* 10(4), 447-457. https://doi.org/10.5392/JKCA.2010.10.4.447

Johnson, S. G., & Steinerberger, S. (2019). Intuitions about mathematical beauty: A case study in the aesthetic experience of ideas. *Cognition,* 189, 242-259. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2019.04.008

Öztürk, A. (2001). Eğitim-öğretimde yeni bir yaklaşım: Yaratıcı drama. *Anadolu Üniversitesi Kurgu Dergisi,* 18, 251-259.

Pappas, T. (2013). *Matematik Hayattır.* İstanbul:Doruk Yayımcılık.

San, İ. (2006). "*Yaratıcı Dramanın- Eğitsel Boyutları". Yaratıcı Drama 1985–1998 Yazılar.* (İkinci Baskı). (Ed: Adıgüzel, H. Ö.) Ankara: Naturel Kitap Yayıncılık.

Terzioğlu, T. Ve Yılmaz, A.(2005). *'Anlamak' tutkunu bir matematikçi.* Ankara: Türkiye Bilimler Akademisi

Vural, R. A., & Somers, J.W. (2011). *İlköğretimde drama kuram ve uygulama*. Ankara: Pegem Yayınları.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi

BÖLÜM 4

LEGO TABANLI ÜÇ BÖLGELİ ETKİNLİK TAHTASI: KURAMDAN TÜRETİLMİŞ TASARIM, KARŞIT KANITIN SINANMASI VE ÖN KAYITLI MÜDAHALE PROTOKOLÜ

İHSAN SÖYLEMEZ[1]

Giriş

Matematik, ilkokulun ilk yıllarından itibaren hiyerarşik biçimde gelişir; bu hiyerarşinin tabanında yer alan sayma ve işlemsel düşünme becerileri sonraki tüm öğrenmenin yapı taşlarını oluşturur. Bu temel becerilerde erken dönemde yaşanan güçlükler, sistematik biçimde desteklenmediğinde kalıcı bir açığa dönüşebilmektedir.

Sorunun büyüklüğü kullanılan ölçüte göre değişmektedir ve bu değişkenlik başlı başına dikkate alınmalıdır. Fuchs et al. (2005), matematik güçlüğünün önlenmesi, belirlenmesi ve bilişsel belirleyicilerini incelediği çalışmasında tanı ölçütünün seçilen grubu doğrudan belirlediğini göstermiştir. Morsanyi et al. (2018), 2.421 ilkokul öğrencisinin standart matematik, İngilizce ve zekâ testi performansını izleyerek DSM-5 ölçütlerini uygulamış; örneklemin %6'sının kalıcı ve ciddi matematik güçlüğü yaşadığını, dışlama

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Muş Alparslan Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, ORCID: 0000-0002-1705-1395

ölçütleri uygulandıktan sonra %5,7'sinin matematikte özgül öğrenme bozukluğu profili sergilediğini bildirmiştir. Bu oran, alan yazında sıkça aktarılan daha geniş bantlardan belirgin biçimde düşüktür; aradaki fark, matematik güçlüğü ile matematikte özgül öğrenme bozukluğu kategorilerinin farklı ölçütlerle tanımlanmasından kaynaklanır. Bu bölüm, hedef kitlesini tanısal bir kategoriyle değil, performans temelli bir ölçütle (düşük başarı) tanımlamakta ve bu tercihi açıkça belirtmektedir.

Erken güçlüğün kendiliğinden kapanmaması ise daha az tartışmalıdır. Geary (2011), birinci sınıftan beşinci sınıfa uzanan beş yıllık boylamsal verisinde (n = 177) birinci sınıf başındaki sayı, sayma ve aritmetik yetkinliklerinin sonraki matematik başarısının hem başlangıç düzeyini hem büyüme hızını yordadığını göstermiştir. Bulgu, erken dönemdeki farkların izleyen yıllarda kendiliğinden kapanmadığı yönünde okunmaktadır. Jordan et al. (2009), anaokulu düzeyindeki sayı yetkinliğinin ileri sınıflardaki matematik başarısının en güçlü yordayıcılarından biri olduğunu göstermiştir. Nelson ve Powell (2018), matematik güçlüğüne ilişkin boylamsal çalışmaları sistematik olarak derleyerek aynı örüntüyü daha geniş bir kanıt tabanında doğrulamıştır. Bu açığın hangi becerilerde ve ne zaman ortaya çıktığı da haritalanmıştır: Litkowski et al. (2020), okul öncesi dönemde sayı bilgisinin hangi sırayla kazanıldığını belirleyerek erken müdahalenin hedefleyeceği beceri sırasını ampirik olarak göstermiştir. Erken müdahalenin bu açığı kapatabildiğine ilişkin doğrudan kanıt da vardır: Jordan et al. (2012), anaokulu öğrencileriyle yürüttükleri randomize kontrollü çalışmada hedefli bir sayı duyusu müdahalesinin ölçülebilir kazanım ürettiğini göstermiştir. Bu bulgular birlikte okunduğunda erken müdahale, geç telafiden hem daha etkili hem daha ucuz görünmektedir.

Somut manipülatiflerin bu müdahalelerdeki yeri yaygın biçimde araştırılmıştır; ancak sonuç, yaygın anlatının önerdiğinden belirgin biçimde daha nüanslıdır. Carbonneau et al. (2013),

manipülatifle öğretimi yalnızca soyut sembollerle öğretimle karşılaştıran 55 çalışmayı (N = 7.237) sentezlediği meta-analizinde manipülatif lehine küçük-orta düzeyde etkiler bulmuştur. Daha önemlisi, etkiler çıktı türüne göre belirgin biçimde farklılaşmıştır: hatırlamada orta-büyük, problem çözme, aktarım ve gerekçelendirmede küçük etkiler elde edilmiştir. Aynı meta-analiz, manipülatifle öğretimin 3-6 yaş aralığında en düşük etkileri ürettiğini de bildirmiştir. Laski et al. (2015), alan yazındaki bu tutarsızlığı bilişsel bilim kaynaklı dört ilkeyle açıklamayı denemiş ve manipülatiflerin ancak belirli koşullar sağlandığında öğrenmeyi desteklediğini savunmuştur.

McNeil ve Jarvin (2007), manipülatif tartışmasının kuramsal ve ampirik olarak neden çözülmediğini çözümlemiş; manipülatiflerin etkililiğini sorgulamak için iki gerekçe bulunduğunu belirtmiştir. Birincisi, manipülatifler öğrenciyi derin öğrenme yerine eğlenmeye yöneltebilir. İkincisi, manipülatifler ikili temsil gerektirdiği için öğrenmeyi güçleştirebilir. Yazarların ulaştığı sonuç doğrudan bu bölümün tasarımını ilgilendirir: öğretmenler, oldukça tanıdık ve algısal olarak ilgi çekici manipülatiflerin kullanımını azaltmalıdır. Manipülatif kullanmak, tek başına bir güvence değildir.

Mevcut matematik manipülatifleri kendi amaçları doğrultusunda değerlidir; ancak düşük başarılı öğrencilere yönelik bütünleşik bir tasarım açısından dört noktada geliştirilmeye açıktır. Birincisi materyal kopukluğudur: somut–yarı somut–soyut (concrete–representational–abstract, CRA) modeli uygulanırken öğrenci somut küp, çizim ve sembol arasında geçiş yapar ve her geçiş bir dikkat yeniden yapılanması gerektirir; bilişsel yük kuramı açısından bu geçişler dışsal yük üretir (Sweller et al., 2011). İkincisi yapısal şeffaflık eksikliğidir: birim küplerde ve boncuklarda "on birim bir onluk yapar" ilişkisi çoğunlukla sözel bir kurala dayanır ve görsel-dokunsal olarak doğrudan doğrulanamaz. Üçüncüsü sınırlı

beceri kapsamıdır: mevcut materyallerin çoğu tek bir beceriye odaklanır, beceri değiştikçe materyal de değişir. Dördüncüsü özerk kullanımın sınırlılığıdır: materyaller genellikle öğretmen yönetimindedir; oysa Bandura'nın (1997) öz yeterlik kuramında ustalık deneyimleri en güçlü kaynaktır ve bunun için öğrencinin özerk çalışabileceği yapılandırılmış bir alan gerekir.

Bu dört saptama alan yazın gözlemlerine ve uygulama deneyimine dayanmaktadır; sistematik bir manipülatif taramasının çıktısı değildir. Daha önemlisi, ikinci maddenin kendisi tartışmalıdır: yapısal şeffaflığın gerçekten bir avantaj olup olmadığı deneysel olarak sınanmış ve sonuç kısmen olumsuz çıkmıştır. Bu tartışma, karşıt kanıtın ele alındığı başlıklarda ayrıntılandırılmaktadır.

Bu bölümün amacı, üç bölgeli LEGO etkinlik tahtasının kuramsal türetimini, yapısal denetimini, içerik geçerliğini ve ön kayıtlanabilir müdahale protokolünü sunmaktır. Epistemik konum açıkça belirtilmelidir: bölüm bir etkililik çalışması değildir ve materyalin işe yarayacağına dair bir olasılık iddiası taşımaz. Alan yazın sentezi, benzer kuramsal zemine sahip müdahalelerin genel eğilimini gösterebilir; ancak belirli bir materyalin belirli bir örneklemde üreteceği etkiyi öngöremez. Bu sınır bölüm boyunca korunmuştur.

Bu bölümde raporlanan çalışmalar saha uygulaması içermemektedir; materyalin yapısal denetimi ve uzman değerlendirmesi tamamlanmış, saha aşaması ise henüz başlamamıştır. Bölümün karşıladığı işlev şudur: bir müdahale materyalinin saha çalışmasına girmeden önce hangi kuramsal gerekliliklere göre tasarlandığını, bu gerekliliklere karşı hangi kanıtların bulunduğunu, uygulayıcı uzmanların tasarımı nasıl değerlendirdiğini ve hangi sonuçların hipotezi yanlışlayacağını önceden belgelemek. Bu, sonuç sonrası gerekçelendirme riskini azaltan metodolojik bir tercihtir. Bölümün katkısı kullandığı bulguların kendisinde değil, aralarındaki tasarım sonuçlarındadır:

burada ele alınan deneysel çalışmalar tek tek okunduğunda birer bulgu, tek bir materyal tasarımı üzerinde çarpıştırıldığında ise bir gereklilikler kümesi oluşturur. Bir materyalin hangi fiziksel özelliğinin hangi koşulda yarar, hangi koşulda zarar ürettiği ancak bu çarpıştırma yapıldığında görünür hâle gelir. Bölümün araştırma soruları beştir:

1. Tasarlanan materyal, dayandığı kuramsal gerekliliklerin her birini fiziksel özellikleriyle karşılamakta mıdır?
2. Alan uzmanları materyali erken matematik müdahalesi için içerik açısından uygun bulmakta mıdır?
3. Yapısal şeffaflığın hangi bileşeni erken dönem sayma ve işlem becerilerinde fark yaratmaktadır?
4. LEGO'nun tanıdık bir oyuncak olması, ikili temsil sorunu yoluyla öğrenmeyi engellemekte midir, yoksa motivasyon yoluyla desteklemekte midir?
5. Topuzların sayılabilirliği öz doğrulamayı mı desteklemekte, yoksa uygunsuz sayma stratejilerini mi tetiklemektedir?

İlk iki soru tamamlanmış doğrulama adımlarıyla, son üç soru ise saha çalışmasında sınanacak hipotezlerle yanıtlanmaktadır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci sorular bölümün özgün katkısıdır; karşıt kanıtın ele alındığı başlıklarda ortaya konan kuramsal gerilimlerden doğmaktadır. İzleyen başlıklar sırasıyla kavramsal çerçeveyi ve kuramsal dayanakları kurar, kanıt manzarasını birleştirilemeyen metrikleriyle birlikte sunar, tasarımın karşısındaki en güçlü kanıtları toplar, materyali ve yapısal denetimini tanıtır, yöntemi ve hipotezleri ortaya koyar, Türkiye bağlamını ve sınırlılıkları tartışır.

Kavramsal Çerçeve ve Terminoloji

Manipülatif alan yazınında birbirine yakın ancak farklı olguları adlandıran kavramlar sıklıkla birbirinin yerine kullanılmaktadır. Bu bölümde aşağıdaki ayrımlar korunmuştur.

Manipülatif, matematiksel bir kavramı temsil etmek üzere kullanılan, elle işlenebilir fiziksel nesnedir. Yapısal (kavramsal) şeffaflık (structural transparency), bir manipülatifin fiziksel özellikleriyle temsil ettiği matematiksel yapı arasındaki örtüşmedir. Lafay et al. (2023) bu kavramı iki bileşene ayırmıştır: basamak şeffaflığı, onluk ile birliğin materyalde ayrı ve görünür biçimde temsil edilmesidir; basamak içi birim şeffaflığı ise bir onluğu oluşturan on birimin fiziksel olarak sayılabilir olmasıdır. Bu ayrım bölümün merkezindedir, çünkü iki bileşen için kanıt aynı yönde değildir.

Algısal zenginlik (perceptual richness), bir manipülatifin taşıdığı renk, biçim ve gerçek dünya çağrışımlarının yoğunluğudur. İkili temsil (dual representation), bir manipülatifin aynı anda hem bir nesne hem bir sembol olması ve çocuğun bu ikili konumu yönetmek zorunda kalmasıdır (Uttal et al., 1997). İki kavram farklı mekanizmalarla işler ve birbirinin yerine kullanılmamalıdır: ikili temsil bir sembolik eşleme yüküdür ve nesne ne kadar yalın olursa olsun ortaya çıkar; algısal zenginlik ise bir dikkat yönlendirme sorunudur ve nesnenin görsel özellikleriyle orantılı biçimde artar. Somutluğun soldurulması (concreteness fading), somut desteğin öğretim boyunca planlı biçimde geri çekilmesidir (Fyfe et al., 2014). Son olarak, materyal bütünleşikliği ile öğretimsel bütünleşiklik ayrımı ilerleyen başlıklarda ayrıntılandırılmakta ve bu iki terim birbirinin yerine kullanılmamaktadır.

Kuramsal Dayanaklar ve Sınırları

Dehaene et al. (2003), sayı bilgisinin beyinde eş zamanlı olarak üç farklı kodda işlendiğini öne süren çok kodlu (triple-code)

modeli geliştirmiştir: sayının büyüklüğünü temsil eden analog kod, dilsel formunu işleyen sözel kod ve yazılı sembolünü tanıyan görsel-Arap kod. Bu kodlar arası bağlantıların zayıflığı matematik öğrenme güçlüğüyle ilişkilendirilmektedir. CRA modeli üç kodu birlikte etkinleştirerek bellek izlerini güçlendirme potansiyeli taşır. İkinci dayanak Sweller et al. (2011) tarafından geliştirilen bilişsel yük kuramıdır: çalışma belleğinin sınırlı kapasitesi içsel, germesel ve dışsal yük arasında paylaşılır; iyi düzenlenmiş materyaller dışsal yükü azaltarak kapasitenin daha büyük bölümünün matematiksel kavramaya ayrılmasına olanak tanır.

Bu iki çerçevenin buradaki konumu dikkatle belirtilmelidir: ikisi de tasarım için gereklilik üretir, etkililik kanıtı üretmez. Bir materyalin çok kodlu işlemlemeyi desteklediğini ya da dışsal yükü azalttığını ileri sürmek, o materyalin öğrenme çıktısını iyileştireceğini kanıtlamaz. Nörobilimsel argümanların eğitsel tasarıma erken aktarılması alan yazında sıkça eleştirilen bir eğilimdir. Burada nörobilişsel çerçeve tasarım kararlarının gerekçesi olarak kullanılmakta, kanıtı olarak değil.

Çalışmanın kuramsal omurgasını Bruner'in (1966) temsil teorisi oluşturur: çocuklar bilgiyi enaktif, ikonik ve sembolik biçimde içselleştirir ve öğretim bu sırayı izlemelidir. Bu kuramın öğretime uygulanmış biçimi, Mercer ve Miller (1992) tarafından sistematikleştirilen CRA modelidir. Bouck et al. (2018), 20 çalışmayı kalite göstergeleri ve kanıt temelli uygulama ölçütleriyle değerlendirerek CRA'yı öğrenme güçlüğü olan öğrenciler için kanıt temelli bir öğretim çerçevesi olarak sınıflandırmıştır.

Önemli bir ayrım vardır: Bruner'in teorisi zihnin bilgiyi nasıl temsil ettiğini açıklayan bir bilişsel gelişim kuramıdır; CRA ise bu sırayı sınıfta işlevselleştiren uygulamalı bir protokoldür. Dehaene et al. (2003) üçüncü bir bakış sunar: Bruner ile Mercer ve Miller bir öğretim *sırası* önerirken, çok kodlu model üç kodun *eş zamanlı* işlendiğini belirtir. Bu gerilim yalnızca kuramsal değildir. Fyfe ve

Nathan (2019), somutluğun soldurulması kuramını yeniden çerçeveleyerek üç aşamalı ilerlemenin hangi koşullarda işe yaradığına ilişkin sınanabilir hipotezler önermiştir. Yazarların bir hipotezi doğrudan bu tasarımı ilgilendirir: ilk aşamada fiziksel bir manipülatif içeren bir soldurma ilerlemesinin, içermeyenden daha etkili olması beklenir. Diğer bir hipotezi ise ters yönde çalışır: giderek daha idealize hâle gelen bir ilerleme, daha az idealize olandan daha etkilidir. İkinci hipotez, materyalin fiziksel olarak masada kalmaya devam ettiği bir tasarım için uyarı niteliğindedir.

Tasarımın motivasyonel-pedagojik zemini üç tamamlayıcı çerçeveye dayanır ve bu kavramlar farklı düzeylerde işler. Vygotsky'nin (1978) yakınsak gelişim alanı (zone of proximal development) kavramı, çocuğun tek başına yapabildiği ile destekle yapabileceği arasındaki bölgeyi tanımlar; işlevsel karşılığı, ön testte belirlenen giriş eşiğidir. Bandura'nın (1997) öz yeterlik (self-efficacy) kuramı motivasyonel zemini sağlar; bölmelenmiş depo, özerk seçim ve kümülatif ustalık deneyimi olanağı sunar. Açık öğretim üçüncü ve en somut çerçevedir; omurgasını oluşturan "Ben yap → Birlikte yap → Sen yap" akışı, desteğin kademeli geri çekilmesi ilkesinin uygulamasıdır. Bryant et al. (2003), bu akışın strateji öğretimiyle birleştirildiğinde öğrenme güçlüğü olan öğrencilerde işlem becerilerini geliştirdiğini göstermiştir. Hughes et al. (2017), açık öğretimin tekil bir müdahale olmadığını, on ikiden fazla öğretim davranışının bileşimi olduğunu vurgulamış ve terimin alan yazındaki tanımsal dağınıklığına dikkat çekmiştir. Bu uyarı protokol açısından önemlidir: "açık öğretim uygulandı" ifadesi, hangi bileşenlerin hangi yoğunlukta uygulandığı belirtilmedikçe bilgi taşımaz. Bu nedenle oturum yapısı bileşen düzeyinde tanımlanmıştır.

Açık ve doğrudan öğretimin kanıt tabanı güçlüdür. Gersten et al. (2009), öğrenme güçlüğü olan öğrencilerde 42 müdahaleyi sentezlemiş; öğrenciye hedef belirlemeyle verilen geri bildirim ve

sınıf içi akran destekli öğrenme dışındaki bütün öğretim bileşenlerinin 0,21 ile 1,56 arasında değişen anlamlı ortalama etkiler ürettiğini bildirmiştir. Açık öğretim ve strateji öğretimi bu bileşenler arasındadır. Stockard et al. (2018), 1966-2016 arasında yayımlanmış 328 çalışmayı, 413 desen ve yaklaşık 4.000 etki büyüklüğüyle meta-analiz ederek Doğrudan Öğretim müfredatlarının kestirilen tüm etkilerinin olumlu olduğunu bildirmiştir. Jitendra et al. (2021) tarafından yürütülen İkinci Kademe müdahalelerine ilişkin meta-analiz de aynı yöne işaret etmektedir. Bu kanıt, tasarımın öğretim yöntemini destekler. Ancak dikkat edilmesi gereken nokta şudur: destek öğretim yöntemine yöneliktir, materyale değil. Açık öğretimin etkili olması, açık öğretimin LEGO ile yapılması gerektiği anlamına gelmez.

Kanıt Manzarası: Ne Biliyoruz, Ne Bilmiyoruz

Somut materyal ve CRA temelli müdahalelerin etkililiğine ilişkin birikim geniştir ancak homojen değildir. Tablo 1, bu birikimin ana kaynaklarını kendi metrikleri, kendi kapsamları ve kendi çözümleme birimleriyle sunmaktadır. Tablo bilinçli olarak bir birleşik etki büyüklüğü üretmemektedir; gerekçesi izleyen paragraflarda açıklanmıştır.

Tablo 1. Somut materyal, CRA ve erken matematik müdahalelerine ilişkin kanıt manzarası

Kaynak	**Çözümleme birimi ve kapsam**	**Bildirilen sonuç**	**Kapsam sınırı**
Carbonneau et al. (2013)	55 çalışma, N = 7.237; anaokulu–üniversite	Küçük-orta d; hatırlamada orta-büyük, problem çözme ve aktarımda küçük	Genel manipülatif kullanımı; CRA'ya özgü değil
Gersten et al. (2009)	42 müdahale çalışması; öğrenme güçlüğü	İki bileşen dışında tümü anlamlı; ortalama etkiler 0,21–1,56	Öğrenme güçlüğü geneli; diskalkuliye özgü değil

Kaynak	Çözümleme birimi ve kapsam	Bildirilen sonuç	Kapsam sınırı
Lafay et al. (2019)	Sistematik derleme; 38 çalışma	Nitel sentez; etki büyüklüğü birleştirilmemiş; belirgin heterojenlik	Matematik öğrenme güçlüğü örneklemleri
Nelson ve McMaster (2019)	34 çalışma, 52 işlem grubu; okul öncesi–1. sınıf	g = 0,64; %95 GA [0,52; 0,76]; bire bir sayma içeren ve ≤ 8 hafta süren müdahalelerde daha büyük	Erken sayı becerileri; materyal türü düzenleyici değil
Bouck et al. (2018)	20 çalışma; kanıt temelli uygulama sentezi	CRA, öğrenme güçlüğü için kanıt temelli uygulama olarak sınıflandırıldı	Sınıflandırma kararı; etki büyüklüğü birleştirilmemiş
Stockard et al. (2018)	328 çalışma, 413 desen, ~4.000 etki	Kestirilen tüm etkiler olumlu ve (duyuşsal çıktılar dışında) anlamlı	Doğrudan Öğretim müfredatları; manipülatife özgü değil
Jitendra et al. (2021)	39 çalışma, 40 bağımsız örneklem, 61 işlem grubu	Sağlam varyans kestirimiyle birleşik etki 0,41	İkinci Kademe müdahaleleri; materyale özgü değil
Nelson et al. (2022)	Sentezlerin sentezi	Etki büyüklüklerinde, içerik alanlarında ve güçlük tanımlarında geniş değişkenlik	Sentez düzeyi; birincil veri değil
Byrne et al. (2023)	Kapsam belirleme derlemesi	Fiziksel manipülatif içeren müdahalelerin alanı matematik dışına genişlemiş	Kapsam belirleme; etki kestirimi yok
Ebner et al. (2025)	30 tek denek çalışması	Tau-BC = 0,9965; %95 GA [0,9947; 0,9983]; bütünleşik olmayan CRA lehine düzenleyici (+0,011)	Yalnızca tek denek desenleri; tavan etkisi
Miller et al. (2025)	24 çalışma, 164 etki büyüklüğü; anaokulu–3. sınıf	β = 0,61; %95 GA [0,29; 0,92]; her ek saat için +0,03	Doz ana etkisi düzenleyiciler kontrol edilince anlamsızlaşmıştır

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur. Not. GA = güven aralığı; d = Cohen'in d'si; g = Hedges'in g'si; Tau-BC = taban düzeyi düzeltmeli Tau. "Bildirilen sonuç" sütunu kaynağın kendi raporlama biçimini yansıtır; Bouck et al. (2018) satırındaki bilgi bir etki büyüklüğü değil, kanıt temelli uygulama sınıflandırma kararıdır. Bu kaynaklar birleştirilmemiştir ve birleştirilmemelidir. Ebner et al. (2025) tarafından bildirilen 0,9965 değeri, çakışmama temelli göstergelerin bilinen tavan eğilimini yansıtmakta olup "CRA'nın vakaların %99,65'inde işe yaradığı" biçiminde okunamaz.

Tablo 1'deki kaynaklardan örneklem büyüklüğüne göre ağırlıklandırılmış tek bir birleşik etki büyüklüğü hesaplanması yöntemsel olarak savunulabilir değildir. Üç gerekçe vardır. Birincisi, çözümleme birimleri farklıdır: bazı kaynaklar çalışma sayısını, bazıları katılımcı sayısını, bazıları etki büyüklüğü sayısını raporlar; bunların toplanması bir kategori hatasıdır ve elde edilen toplam hiçbir gerçek örneklemi karşılamaz. İkincisi, metrikler ölçek olarak uyumsuzdur: Cohen'in *d*'si standartlaştırılmış ortalama farkı, Tau-BC ise sıra korelasyonuna dayalı bir çakışmama ölçüsüdür ve ikisinin ortalaması tanımsızdır; ayrıca Tau-BC için türetilmiş standart hatalar bulunmadığından (Tarlow, 2017) ağırlıklandırma için gereken varyans bilgisi yoktur. Üçüncüsü, kaynakların hiçbiri bu bölümün materyalini değerlendirmemiştir; meta-analizler genel manipülatif ya da genel CRA müdahalelerini sentezler, belirli bir materyalin belirli bir bağlamda üreteceği etkiye ilişkin kestirim üretmezler. Genel ilke şudur: bir sentez, yöntemsel olarak birleştirilemeyen sayıları birleştirerek kanıt gücü üretemez.

Manzaradan üç sonuç çıkmaktadır. Birincisi, yön tutarlıdır: farklı desenler ve farklı metrikler, tutarlı biçimde olumlu yönde etki bildirmektedir. İkincisi, büyüklük belirsizdir ve bağlama duyarlıdır; Jitendra et al. (2021) tarafından bildirilen 0,41 ile Gersten et al. (2009) tarafından bildirilen üst bant arasındaki fark, "manipülatif etkilidir" gibi tek cümlelik bir özetin ne kadar yanıltıcı olduğunu gösterir ve Nelson et al. (2022) tarafından saptanan geniş değişkenlik aynı uyarıyı pekiştirir. Üçüncüsü, etkinin kaynağı çoğunlukla

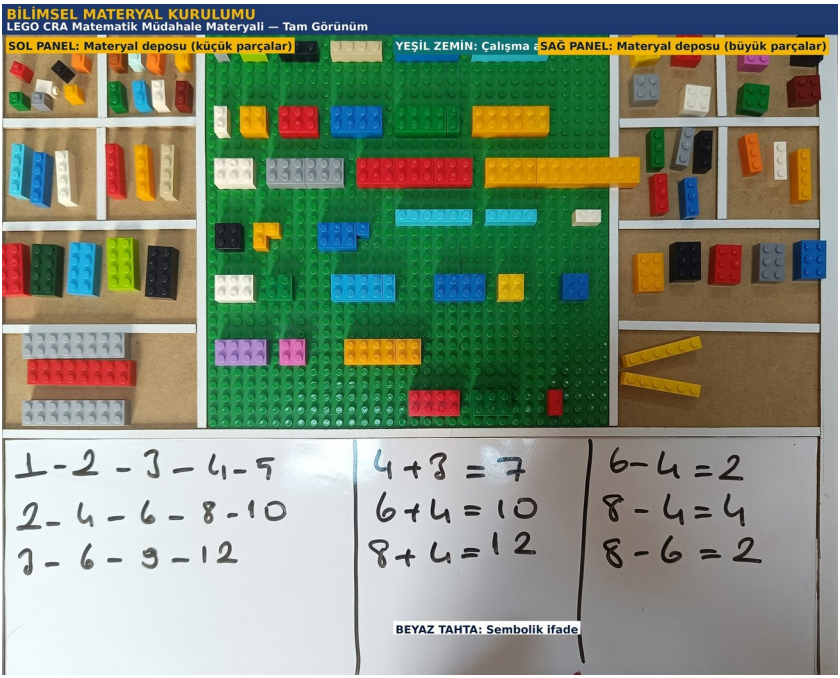
materyal değildir: Gersten et al. (2009) tarafından yapılan çözümlemede anlamlı etki üreten bileşenlerin tümü öğretim düzenine ilişkindir; Nelson ve McMaster (2019) tarafından yürütülen meta-regresyonda ise içerik değişkeni olan bire bir sayma düzenleyici çıkmıştır. Manipülatif türü, bu sentezlerin hiçbirinde başat düzenleyici olarak belirmemiştir.

Elde edilecek etki büyüklüklerinin nasıl yorumlanacağı da baştan belirlenmelidir. Kraft (2020), eğitim müdahalelerinde yarım yüzyıl önce önerilen ölçütlerin bu alan için fazla yüksek olduğunu savunmuş ve standart başarı testleriyle ölçülen nedensel eğitim araştırmaları için yeni bir yorum çerçevesi önermiştir: 0,05 standart sapmanın altındaki etkiler küçük, 0,05 ile 0,20 arasındakiler orta, 0,20 ve üzerindekiler büyük sayılmalıdır. Yazarın önerdiği çerçeve, etki büyüklüğünün maliyet, ölçeklenebilirlik ve ölçüm yakınlığı ile birlikte yorumlanmasını gerektirir. Bunun iki sonucu vardır. Birincisi, saha çalışmasında elde edilecek herhangi bir etki, geleneksel eşiklerle değil, benzer tasarım ve ölçüm özelliklerine sahip müdahalelerin dağılımıyla karşılaştırılmalıdır. İkincisi, araştırmacı tarafından geliştirilen ölçme araçları sistematik olarak daha büyük etki üretir; bu nedenle bulgular standartlaştırılmış bir ölçütle karşılaştırılmadan genellenmemelidir. Lortie-Forgues ve Inglis (2019), titizlikle yürütülmüş büyük ölçekli eğitim deneylerinin bile sıklıkla bilgi vermeyen sonuçlar ürettiğini göstermiştir; bu, küçük ölçekli bir tek denek çalışmasından beklenecek çıkarımın da baştan sınırlandırılması gerektiği anlamına gelir.

Materyal: Üç Bölgeli Etkinlik Tahtası

Geliştirilen materyal, CRA modelinin üç aşamasını tek bir fiziksel düzlemde bütünleştiren üç bölgeli bir etkinlik tahtasıdır (Şekil 1). Bu mimari, giriş başlığında belirtilen materyal kopukluğu sınırlılığına doğrudan yanıttır.

Şekil 1. Materyalin etiketli tam görünümü



Kaynak: Yazarın kendi arşivi. Not. Sol ve sağ paneller materyal deposunu (küçük ve büyük parçalar ayrı bölmelerde), merkezdeki yeşil plaka somut çalışma zeminini, alttaki beyaz yüzey ise sembolik ifade alanını oluşturmaktadır. Yeşil plaka 32×32 topuzluk standart bir taban plakasıdır; topuz aralığı yaklaşık 8 mm'dir ve bu aralık tüm parça boyutlarının aynı ızgaraya oturmasını sağlar. Beyaz tahtada üç sütun hâlinde ritmik sayma, toplama ve çıkarma örnekleri görülmektedir.

Materyal deposu ön hazırlık bölgesidir. Sol ve sağ panellerde boyut ve renge göre bölmelenmiş LEGO depoları bulunur. Bu düzen, özerk seçime olanak tanıyarak Bandura'nın (1997) öz yeterlik ilkesini işlevselleştirir ve arama maliyetini düşürerek dışsal yükü azaltır (Sweller et al., 2011). Küçük parçaların sol, büyük parçaların sağ panelde toplanması, öğrencinin bir onluk aradığında bakacağı yeri baştan bilmesini sağlar.

Yeşil zemin somut ve enaktif bölgedir; merkezdeki çalışma plakasıdır ve Bruner'in (1966) birinci aşamasına karşılık gelir.

Plakanın topuz ızgarası parçaların hizalanmasını zorunlu kıldığı için yan yana dizilen iki parçanın uzunluk karşılaştırması güvenilir biçimde yapılabilir. Beyaz tahta ise soyut ve sembolik bölgedir; alttaki yazılabilir yüzeydir ve rakam ile işlem sembolizasyonu burada yapılır.

Öz doğrulama, bu bölümde gözlenebilir üç davranışın birlikte görülmesi olarak tanımlanmıştır: öğrenci bir sonuç ürettikten sonra öğretmene bakmadan parçaya ya da topuzlara geri döner, sayma veya karşılaştırma işlemini kendiliğinden yineler, sonucu değiştirir ya da onaylar. Bu üç adımı içermeyen davranışlar öğretmen onayı arayışı olarak kodlanır. Tanım, kavramın bir tutum değil, sayılabilir bir davranış dizisi olarak ölçülmesini sağlar.

Yarı somut aşama bağımsız bir bölge değildir; yeşil zemin ile beyaz tahta arasındaki geçişte, öğrencinin parçanın çizimini aktarıp yanına rakamı yazmasıyla yürütülen bir köprü işlemidir. Bu köprü, ikili temsil tartışmasında ele alınan açık bağlantı kurma gerekliliğinin fiziksel karşılığıdır: öğrenci somut ile sembolik arasındaki ilişkiyi kendi eliyle üretir.

Yapısal Şeffaflık Denetimi

Materyalin yapısal şeffaflığı, kullanılan her LEGO parça boyutunun matematiksel değeriyle örtüşüp örtüşmediğinin sistematik denetimiyle belgelenmiştir (Tablo 3). Denetlenen on parça boyutunun tamamında topuz sayısı ile temsil edilen matematiksel değer örtüşmektedir.

Tablo 3. LEGO parça boyutu ile matematiksel değer örtüşme denetimi

Parça boyutu	**Topuz sayısı**	**Matematiksel değer**	**Kullanıldığı beceri**
1×1	1	1 birim	Bire bir sayma; birlik
1×2	2	2 birim	İkişer ritmik sayma
1×3	3	3 birim	Üçer ritmik sayma
1×4	4	4 birim	Toplama; karşılaştırma

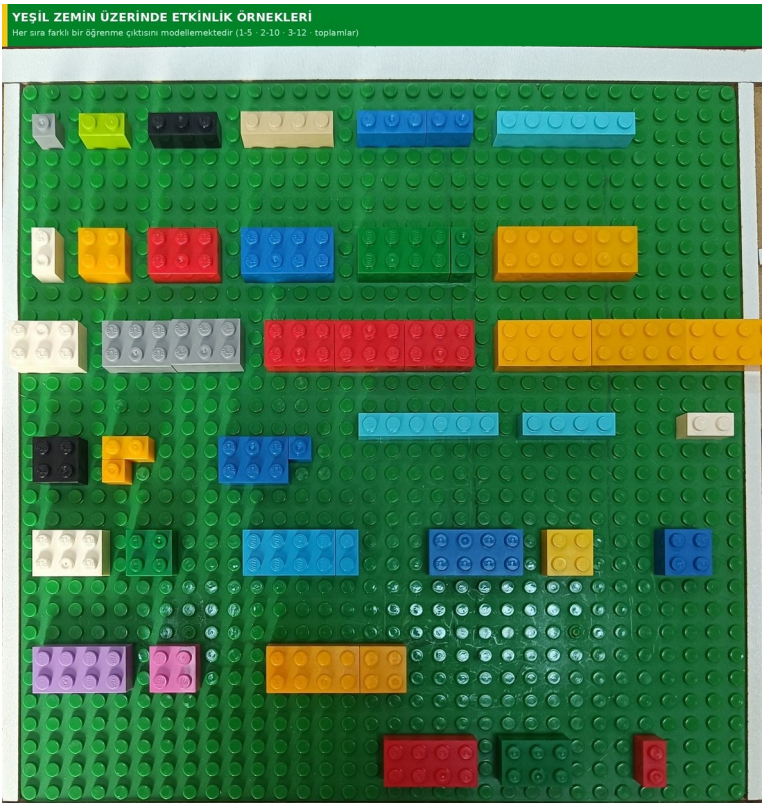
Parça boyutu	Topuz sayısı	Matematiksel değer	Kullanıldığı beceri
1×5	5	5 birim	Beşer sayma; beşli gruplama
1×6	6	6 birim	Toplama; çıkarma
2×3	6	6 birim	Aynı değerin farklı biçimi
2×4	8	8 birim	Çıkarma; karşılaştırma
2×5	10	10 birim (onluk)	Basamak değeri
1×10	10	10 birim (ince onluk)	Basamak değeri; onar sayma

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur. Not. Onluğun fiziksel temsili için tam on topuz gereklidir; bu yalnızca 2×5 veya 1×10 parçalarla sağlanır. Sekiz topuzlu bir 2×4 parça onluk değildir. 2×3 ile 1×6 parçalarının aynı değeri farklı biçimlerde temsil etmesi, sayı korunumunun modellenmesine olanak tanır. Denetim materyalin iç tutarlılığını belgeler; bu tutarlılığın öğrenme çıktısına dönüşüp dönüşmediği ayrı bir sorudur.

Çoklu Beceri Kapsamı

Tek bir materyalle modellenebilen beceriler altı alana yayılır: bire bir sayma, ritmik sayma, onluk-birlik ilişkisi, toplama, çıkarma ve karşılaştırma (Şekil 2). Bu kapsam, mevcut materyallerin sınırlı beceri kapsamı sorununa yanıt oluşturur. Her oturumda yalnızca bir beceri odağında çalışılması, materyalin sabit kalmasıyla birlikte bilişsel yük açısından avantaj sağlar.

Şekil 2. Yeşil zemin üzerinde etkinlik örnekleri



Kaynak: Yazarın kendi arşivi. Not. Her sıra farklı bir matematiksel çıktıyı modellemektedir: üst sıralarda birer ve ikişer ilerleyen diziler, orta sıralarda aynı toplamı veren farklı parça bileşimleri, alt sıralarda karşılaştırma ve fark modellemesi. Ölçek Şekil 1 ile aynıdır (32×32 topuz, yaklaşık 8 mm aralık); sıraların yatay uzunlukları doğrudan karşılaştırılabilir.

Tasarımın Sınandığı Beş Cephe

Materyal buraya kadar kendi mantığı içinde tanıtıldı. Bir tasarım bölümünün en kolay düşeceği hata ise yalnızca kendisini destekleyen alan yazını sunmaktır. Bu nedenle izleyen beş başlık, yukarıda tarif edilen tasarımın karşısındaki en güçlü argümanları toplamakta ve her birini sınanabilir bir gerilime dönüştürmektedir.

Sıralama rastgele değildir: ilk üç cephe materyalin ayırt edici fiziksel özelliklerini, son iki cephe ise öğretim düzenini hedef alır.

Birinci Cephe: Yapısal Şeffaflığın Hangi Bileşeni İşe Yarıyor?

Tasarımın en somut dayanağı, manipülatiflerde yapısal şeffaflık ilkesidir: bir manipülatifin pedagojik değeri, fiziksel özellikleriyle temsil ettiği matematiksel yapı arasındaki örtüşmeyle ilişkilidir. LEGO seçiminin gerekçesi budur; bir onluğu temsil eden on topuz tek bir parça üzerinde fiziksel olarak bulunur ve çocuk topuzları sayarak sonucu kendisi doğrulayabilir.

Bu ilkenin en doğrudan deneysel sınaması Lafay et al. (2023) tarafından yapılmıştır ve bulguları tasarımın gerekçesiyle tam örtüşmemektedir. Araştırmacılar ikinci sınıf öğrencilerini — tipik gelişen ve matematik öğrenme güçlüğü riski taşıyan — üç manipülatif koşuluna atamıştır: ne basamakları ne basamak içindeki birimleri şeffaf kılan takılabilir boncuklar, yalnızca basamakları şeffaf kılan pipet temizleyiciler ve hem basamakları hem basamak içindeki birimleri şeffaf kılan ipe dizili boncuklar. Sonuç şudur: basamakların şeffaflığı çocukların sayı temsili ve basamak değeri anlayışından sorumludur; basamak içindeki birimlerin şeffaflığı ise değildir.

Bu bulgunun anlamı saklanmamalıdır. LEGO tahtasının ayırt edici özelliği olarak sunulan şey, yani çocuğun 2×5 parçadaki on topuzu tek tek sayarak onluğu doğrulaması, tam olarak Lafay et al. (2023) tarafından anlamlı bulunmayan şeffaflık türüdür. Bu çalışmanın ilkesine dayanarak LEGO seçildiğini söylemek, söz konusu bulguyu yanlış aktarmak olur.

Bulgunun geçersiz olduğu değil, kapsamının sınırlı olduğu savunulabilir. Dört kapsam sınırı vardır. Yaş grubu ikinci sınıftır, yani basamak değeri kavramının kurulmaya başladığı dönemdir; birinci sınıfta, sayma ve birleştirme henüz oluşurken sonucun aynı olacağı gösterilmemiştir. Çıktı kümesi yalnızca sayı temsili ve

basamak değeriyle sınırlıdır; sayma akıcılığı, toplama-çıkarma stratejileri ve öz doğrulama davranışı ölçülmemiştir. Süre kısadır ve tasarım oturum temellidir; on iki haftalık bir müdahalede birim şeffaflığının etkisi birikimli olabilir. Son olarak işlev farklıdır: söz konusu çalışmada birim şeffaflığı algısal bir özellikti, bu tasarımda ise öz doğrulama işlevi taşımaktadır.

Bu dört sınır, bulgunun reddedilmesi için değil, sınanabilir bir soru için gerekçedir. Alternatif senaryo açıkça kabul edilmelidir: boş sonuç bu koşullarda da geçerliyse, LEGO tahtasının basamak içi şeffaflıktan kaynaklanan bir üstünlüğü olmayacaktır.

İkinci Cephe: İkili Temsil ve Algısal Zenginlik

Uttal et al. (1997), manipülatiflerin çocuklar için aynı anda iki şey olduğunu belirtmiştir: hem kendi başına bir nesne hem de başka bir şeyin sembolü. Çocuğun manipülatiften öğrenebilmesi için bu ikili konumu yönetebilmesi gerekir. Uttal et al. (2009), somut ile sembolik temsiller arasındaki bağın çocuklarda kendiliğinden kurulmadığını; açık yönlendirme olmadan manipülatif ile matematiksel kavram arasındaki ilişkinin görünmez kalabileceğini savunmuştur.

Somut nesneler hem yardım eder hem zarar verir. McNeil et al. (2009), algısal olarak zengin manipülatiflerin matematik problemlerinde performansı hem artırabildiğini hem düşürebildiğini deneysel olarak göstermiştir. Etkinin yönü, materyalin taşıdığı gerçek dünya bilgisinin göreve yardımcı mı yoksa dikkat dağıtıcı mı olduğuna bağlıdır. Marley ve Carbonneau (2014), manipülatif araştırmalarına ayrılan özel sayıya ilişkin değerlendirmelerinde bu tutarsızlığın kuramın ampirik destekle karıştırılmasından kaynaklandığını belirtmiş; mesleki tavsiyelerin manipülatiflerin etkililiğini çözülmüş bir mesele gibi sunduğunu vurgulamıştır.

Tanıdıklık bir dezavantaj olabilir. Petersen ve McNeil (2013), okul öncesi çocuklarda, hakkında yerleşik bilgi taşınan algısal olarak

zengin manipülatiflerin sayma performansını düşürdüğünü bulmuştur. Bulgu bir etkileşimdir ve iki yönü vardır: algısal zenginlik, çocuğun nesne hakkındaki bilgisi düşük olduğunda performansı desteklemekte, yüksek olduğunda ise engellemektedir. Dolayısıyla riski üreten şey zenginliğin kendisi değil, zenginlik ile yerleşik bilginin birleşimidir.

LEGO tam olarak bu tanımın içindedir. Çocukların çoğu LEGO'yu bir oyuncak olarak tanır, onunla oynamış ve onun hakkında zengin bir şema geliştirmiştir. Tasarımın motivasyonel gerekçesi olarak sunulan tanıdıklık, aynı zamanda bir bilişsel risktir. Etkileşimin iki yönlü olması protokol için doğrudan bir sonuç doğurur: risk tüm katılımcılarda eşit dağılmaz, LEGO'ya aşina olanlarda yoğunlaşır. Bu nedenle katılımcıların LEGO ile önceki deneyimi ön testte ölçülmeli ve tanıdıklık hipotezinin çözümlenmesinde düzenleyici değişken olarak kullanılmalıdır; aşinalık ölçülmediğinde, gözlenen bir performans farkının tanıdıklıktan mı başka bir kaynaktan mı geldiği ayrıştırılamaz. Carbonneau et al. (2013) tarafından bildirilen ilgili bulgu bu tabloyu pekiştirir: algısal olarak yalın manipülatifler, kalıcılık, problem çözme ve aktarım görevlerinde algısal olarak zengin manipülatiflerden daha büyük etkiler üretmiştir.

Üçüncü Cephe: LEGO Topuzlarına Özgü Sayma Yanlılığı

Önceki cepheler genel manipülatif alan yazınından türetilmiştir. Üçüncü cephe ise bölüm için en spesifik karşıt kanıtı taşır ve iki katmanlıdır: sayılabilir ayrık öğelerin sayma davranışını tetiklediğini gösteren deneysel çalışma ile bu örüntüyü doğrudan LEGO tuğlalarında belgeleyen çalışmalar.

Birinci katman, olgunun kurucu deneysel gösterimidir. Kaminski ve Sloutsky (2013), 6-8 yaş arasındaki çocuklara basit sütun grafiği okumayı öğrettikleri dört deneyde, sütunların tek renkli olduğu koşulla sütunların sayılabilir ayrık nesne dizilerinden

oluştuğu koşulu karşılaştırmıştır. Ayrık nesne içeren koşulda öğrenme belirgin biçimde zayıflamış; çocuklar nesneleri saymaya yönelmiş ve göreve uygun stratejiyi edinememiştir. Girişim etkisi yaşla birlikte azalmıştır. Bu bulgu bölüm açısından iki nedenle kritiktir: mekanizma doğrudan sayılabilirliğin kendisidir ve örneklem, bu bölümün hedef yaş aralığıyla örtüşmektedir.

Tellos ve Osana (2025), beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerine (N = 38) LEGO tuğlası görselleriyle kesir bölme problemlerinin nasıl çözüleceğini öğretmiş; tuğlalar üzerindeki ayrık ayrıntıların bir bölüm öğrenciyi tuğlaların kendisini değil üzerlerindeki topuzları saymaya yönelttiğini saptamıştır. Kesir ön bilgisi düşük olan çocuklar, doğru tuğlayı seçmede daha çok hata yapmış ve buna bağlı olarak daha çok yanlış çözüme ulaşmıştır. Tellos et al. (2025) bu bulguyu daha kontrollü bir tasarımla izlemiş; dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerini (N = 39) açıklamalı ve açıklamasız iki öğretim koşuluna rastgele atayarak topuzların uygunsuz saymayı tetikleyip tetiklemediğini ölçmüştür. Örneklemin yaklaşık üçte biri bir dereceye kadar topuzları saymış; kesir kavramlarına ilişkin ön bilgisi daha yüksek olan çocuklarda uygunsuz sayma daha seyrek görülmüştür. Bu çalışmanın protokol açısından en önemli bulgusu ise beklenenin tersi yöndedir: açıklamalı ve açıklamasız koşullar, çocukların sayma stratejileri bakımından farklılaşmamıştır. Yani ölçüm birimini sözelleştiren bir öğretim, tek başına yanlılığı ortadan kaldırmamıştır.

Bu bulgunun önemi doğrudandır. Tasarımın en görünür pedagojik özelliği, yani çocuğun topuzları sayarak sonucu kendi doğrulaması, aynı zamanda kesir bağlamında bir hata kaynağı olarak belgelenmiştir. Aynı fiziksel özellik, bir bağlamda öz doğrulama aracı, başka bir bağlamda dikkat tuzağıdır.

LEGO'nun matematikle ilişkisine dair kanıtın tümü olumsuz değildir. McDougal et al. (2023), LEGO yapılandırma becerisi ile matematik performansı arasında ilişki ve dolaylı etkiler saptamış;

Gilligan-Lee et al. (2023), okul öncesi dönemde blok yapılandırma ile erken sayı becerileri arasında güçlü bir ilişki bulmuştur. Ancak bu çalışmalar LEGO'yu bir sayı temsili aracı olarak değil, bir uzamsal etkinlik olarak incelemektedir; dolayısıyla topuz sayma yanlılığına ilişkin bulguyu dengelemezler.

İki kapsam sınırı belirtilmelidir. Birincisi, LEGO çalışmaları kesir bölme bağlamındadır; birinci sınıf düzeyindeki bire bir sayma ve onluk oluşturma görevlerinde topuz saymak zaten hedeflenen davranıştır, dolayısıyla uygunsuz değildir. İkincisi, bu çalışmalar fiziksel tuğlalarla değil tuğla görselleriyle ve küçük örneklemlerle yürütülmüştür. Buna karşılık, bu bölümün önceki taslaklarında öne sürülebilecek bir üçüncü sınır — örneklemlerin ileri sınıflardan olması — savunulamaz durumdadır: Kaminski ve Sloutsky (2013) aynı örüntüyü 6-8 yaş aralığında göstermiştir. Yaş temelli bir kaçış yolu bulunmamaktadır.

Ancak bu sınırlar riskin ortadan kalktığı anlamına gelmez; yalnızca riskin nerede ortaya çıkacağını belirler. Birinci sınıfta topuz saymak sayma görevinde uygundur, ancak çıkarma ve karşılaştırma görevlerinde aynı davranış birim karışıklığına yol açabilir: öğrenci parçayı mı, topuzu mu saydığını ayırt edemeyebilir. Wege et al. (2023), küçük çocukların kümeleri birim olarak anlayabildiklerini, ancak sayarken bu anlayışı koruyamadıklarını göstermiştir. Yapısal olarak şeffaf bir materyalin sunduğu kısayolun kendiliğinden kullanılmadığı bu örüntü, tasarımın bir başka varsayımını daha sınamaya açmaktadır. Obersteiner et al. (2013), birinci sınıf öğrencilerinde sayı temsillerine yönelik hedefli eğitimin temel sayı işleme ve aritmetik becerilerini geliştirdiğini göstermiştir; bu, temsilin verimli kullanımının kendiliğinden değil öğretimle kazanıldığı anlamına gelir. Birim karışıklığı bu çerçevede gelişimsel olarak beklenen bir olgudur. Protokole bu nedenle bir birim tutarlılığı ölçümü ve buna karşılık gelen bir hipotez eklenmiştir.

Dördüncü Cephe: Somutluğun Soldurulması

Fyfe et al. (2014), somuttan soyuta kademeli geçişi savunan çalışmaları sistematik olarak derlemiş; somut temsilin kalıcı biçimde korunmasının değil, planlı biçimde geri çekilmesinin aktarımı desteklediğini bildirmiştir. McNeil ve Fyfe (2012), soldurma koşulunun hem yalnızca somut hem yalnızca soyut koşullardan daha iyi aktarım ürettiğini deneysel olarak göstermiştir. Fyfe et al. (2015), aynı yararın çocukların matematiksel anlamalarında da gözlendiğini bildirmiştir.

Bu, CRA ile uyumlu ancak ondan bir noktada ayrılan bir öneridir: CRA aşamaları sıralar, soldurma yaklaşımı ise somut desteğin sistematik olarak azaltılmasını vurgular. Üç bölgeli tahtanın mimarisi somut bölgeyi kalıcı olarak masada tutar; bu, soldurma alan yazınıyla kısmi bir gerilim oluşturur.

Beşinci Cephe: Doz ve Süre

Protokolün on iki haftalık olması, daha uzun sürenin daha iyi olduğu varsayımına dayanır. Bu varsayım da tartışmalıdır. Miller et al. (2025), anaokulundan üçüncü sınıfa kadar yoğun matematik müdahalelerinde doz–yanıt ilişkisini inceleyerek toplam müdahale saatindeki her bir saatlik artışın etki büyüklüğünü 0,03 birim artırdığını bildirmiştir. Ancak yazarların uyarısı da aktarılmalıdır: doz ana etkisi, düzenleyiciler kontrol edildikten sonra anlamlılığını yitirmiştir.

Daha doğrudan bir karşı bulgu Nelson ve McMaster (2019) tarafından bildirilmiştir: erken sayı becerileri müdahalelerinde meta-regresyon, sekiz hafta veya daha kısa süren müdahalelerin daha büyük etki ürettiğini göstermiştir. Bu bulgu, on iki haftalık bir protokolün otomatik olarak daha üstün olmadığını, hatta kısa ve yoğun bir tasarımın aynı sonucu daha düşük maliyetle üretebileceğini düşündürmektedir. Aynı meta-analiz, müdahalelerin ortalama olarak daha düşük risk düzeyindeki öğrencilerde daha etkili

olduğunu da bildirmiştir; bu, giriş eşiğinin çok düşük tutulmasının bir dezavantaj yaratabileceği anlamına gelir. Bu bulgular protokolü geçersiz kılmaz; doz gerekçesinin tek yönlü olmadığını gösterir ve temel etki hipotezinin yorumlanmasında dikkate alınmalıdır.

Tasarımın Yanıtları: İddia Değil, Varsayım

Tasarımın bu eleştirilere yanıtı beş noktadadır ve her biri iddia değil, sınanacak varsayımdır. Tablo 2 bu karşılıklığı özetlemektedir.

Tablo 2. Karşıt kanıt, tasarımın yanıtı ve sınama eşleşmesi

Karşıt kanıt	**Ana bulgu**	**Tasarımın yanıtı**	**Sınama (aşama)**
Lafay et al. (2023)	Basamak içi birim şeffaflığı basamak değerinde fark yaratmıyor	İşlev farkı: burada birim şeffaflığı algısal değil, öz doğrulama aracıdır	H2 (3)
Uttal et al. (1997, 2009); Jitendra et al. (2016)	Somut–sembolik bağ kendiliğinden kurulmuyor; temsil öğretimi ancak açık biçimde yapıldığında kanıt temelli sayılıyor	Her oturumda zorunlu açık bağlantı kurma yönergesi; uygulama bütünlüğü rubriğinde ayrı madde	H1 (2)
Petersen ve McNeil (2013); Carbonneau et al. (2013)	Tanıdık ve algısal olarak zengin materyal sayma performansını düşürebiliyor	Oyun bağlamından ayrıştırma: figür ve tema yok, yalnızca düz renkli tuğla	H4 (2)
Kaminski & Sloutsky (2013); Tellos ve Osana (2025); Tellos et al. (2025)	Sayılabilir ayrık öğeler, 6-8 yaş dâhil, uygunsuz sayma stratejilerini tetikliyor	Birim sözleşmesi: sayım biriminin her oturumda yazılı hâle getirilmesi (tek seferlik açıklamanın yetmediği bilinerek)	H5 (2)

Karşıt kanıt	Ana bulgu	Tasarımın yanıtı	Sınama (aşama)
Fyfe et al. (2014); Fyfe ve Nathan (2019)	Somut desteğin planlı geri çekilmesi aktarımı destekliyor	Kısmi soldurma: soyut aşamada parçalar depoya kaldırılır, tahta erişilebilir kalır	H1 (2)
Nelson ve McMaster (2019)	Kısa (≤ 8 hafta) müdahaleler daha büyük etki üretmiş	Ara yoklama: sekizinci hafta sonunda kazanım düzeyi ayrıca raporlanır	H1 (2)

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur. Not. Sağ sütundaki hipotezler "Sınanacak Hipotezler" başlığında tanımlanmıştır; parantez içindeki rakam, hipotezin hangi araştırma aşamasında sınanacağını gösterir (2 = tek denek saha çalışması, 3 = karşılaştırmalı çalışma). Hiçbir satır, karşıt kanıtın çürütüldüğü iddiasını taşımaz; her satır, o kanıtın hangi ölçümle sınanacağını belirtir.

İkinci satırdaki önlem Uttal et al. (2009) tarafından önerilen açık yönlendirmedir. Üçüncü satırdaki ayrım derece farkıdır, tür farkı değil: düz tuğlaların da bir oyun şeması taşıdığı kabul edilmelidir. Dördüncü satırdaki birim sözleşmesi, topuz sayma yanlılığına ilişkin kanıt nedeniyle protokole yerleştirilmiş bir öğedir: her görevin başında bugün parçaların mı yoksa topuzların mı sayılacağı açıkça yanıtlanır ve tahtaya yazılır. Bu önlemin zayıf noktası açıkça kabul edilmelidir: Tellos et al. (2025) çalışmasında açıklama eklemek uygunsuz saymayı azaltmamıştır. Birim sözleşmesi, o çalışmadaki açıklama koşulundan iki noktada ayrılır — birim her oturumda yazılı hâle getirilir ve otuz altı oturum boyunca yinelenir — ancak bu farkların yeterli olacağı gösterilmemiştir; H5b tam olarak bunu sınar. Beşinci satırdaki kısmi soldurma ise somut desteğin soyut aşamada geri çekilmesini güvence altına alır.

Materyal Bütünleşikliği ile Öğretimsel Bütünleşiklik Ayrımı

Bu ayrım, Ebner et al. (2025) tarafından yürütülen meta-analizdeki tek anlamlı düzenleyici bulgusu nedeniyle kritiktir. Otuz tek denek çalışmasını sentezleyen bu meta-analizde, bütünleşik

olmayan CRA uygulamaları, yani her aşamanın ayrı oturumlarda sunulduğu klasik CRA, bütünleşik uygulamalardan daha büyük etki üretmiştir.

Bu bulgu ilk bakışta tasarımla çelişiyor görünebilir: üç bölgeli tahta, üç aşamayı tek bir fiziksel düzlemde birleştirmektedir. Ancak iki farklı bütünleşiklik türü söz konusudur. Materyal bütünleşikliği, üç temsil biçiminin aynı fiziksel düzlemde erişilebilir olmasıdır; amaç geçiş maliyetini ve arama yükünü azaltmaktır. Öğretimsel bütünleşiklik ise üç aşamanın aynı oturumda sunulup somut ve yarı somut desteklerin ustalık gösterildikçe sistematik olarak çekilmesidir; bu modelin uygulamalı bir örneği Flores ve Hinton (2019) tarafından çarpma becerisinde sunulmuştur. Ebner et al. (2025) tarafından daha az etkili bulunan yaklaşım budur.

Önerilen protokol öğretimsel olarak bütünleşik değildir: uygulama protokolündeki döngü yapısında her beceri için somut, yarı somut ve soyut aşamalar ayrı haftalara dağıtılmıştır. Materyal sabit kalır; öğretim aşamalı ilerler. Tasarım bu yönüyle Ebner et al. (2025) bulgusuyla uyumludur. Bir sınırlılık not edilmelidir: söz konusu düzenleyici etkinin büyüklüğü 0,011'dir (%95 GA [0,007; 0,015]). Tavan yakınındaki bir ölçekte istatistiksel olarak anlamlı ancak pratik büyüklüğü tartışmalı bir farktır. Tasarımın bu bulguyla uyumlu olması, tasarımın doğrulandığı anlamına gelmez.

Teori ve Tasarım Eşleşme Matrisi

Tasarım kuramdan türetilmiştir: önce kuramların gereklilikleri belirlenmiş, ardından bu gereklilikleri karşılayan materyal tasarlanmıştır. Tablo 4 bu eşleşmeyi, her satırın kanıt düzeyini de belirterek özetlemektedir.

Tablo 4. Teori ve tasarım eşleşme matrisi ile kanıt düzeyleri

Kuramsal dayanak	**Temel ilke**	**Materyaldeki karşılık**	**Kanıt düzeyi**
Bruner (1966)	Enaktif → ikonik → sembolik	Depo → yeşil zemin → beyaz tahta akışı	Kuramsal
Mercer ve Miller (1992); Flores (2010)	CRA öğretim sırası	Her beceri için ayrı CRA döngüsü	Kanıt temelli uygulama sınıflandırması ve meta-analitik destek
Lafay et al. (2023)	Basamak şeffaflığı	2×5 ve 1×10 parçalarda onluğun ayrık temsili	Deneysel: destekleniyor
Lafay et al. (2023)	Basamak içi birim şeffaflığı	Her topuz bir birimdir; sayarak öz doğrulama	Deneysel: desteklenmiyor, sınanacak (H2)
Dehaene et al. (2003)	Çok kodlu sayı işleme	Dokunsal, görsel ve sembolik kanalların eş zamanlı etkinleşmesi	Kuramsal
Sweller et al. (2011)	Bilişsel yük azaltma	Bölmelenmiş depo; tek düzlemde geçiş	Kuramsal
Vygotsky (1978)	Yakınsak gelişim alanı	Giriş eşiği; bireysel zorluk ayarı	Kuramsal
Bandura (1997)	Öz yeterlik ve ustalık	Özerk parça seçimi; öz doğrulama	Kuramsal
Hughes et al. (2017); Bryant et al. (2003)	Açık öğretim	"Ben yap → Birlikte yap → Sen yap"; bileşen düzeyinde tanımlı oturum	Meta-analitik
Uttal et al. (2009)	İkili temsil sorunu	Zorunlu açık bağlantı yönergesi	Deneysel: risk oluşturuyor, sınanacak (H4)
Kaminski & Sloutsky (2013); Tellos et al. (2025)	Ayrık algısal öğe yanlılığı	Oturum başında birim sözleşmesi	Deneysel: risk oluşturuyor, sınanacak (H5)
Fyfe et al. (2014)	Somutluğun soldurulması	Soyut aşamada parçaların depoya kaldırılması	Sistematik derleme: kısmen uygulanıyor

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur. Not. Satırlar bilinçli olarak ayrılmıştır. Alan yazın tasarımın bazı bileşenlerini desteklerken bazılarına karşı kanıt

sunmaktadır; matris bu ayrımı gizlemek yerine görünür kılmaktadır. "Kuramsal" etiketi, o satır için doğrudan ampirik sınama bulunmadığını belirtir.

Matrisin okunmasında gözden kaçırılmaması gereken bir sonuç vardır. On iki satırın yedisi doğrudan ampirik desteğe sahip değildir; ikisi tasarım aleyhine kanıt taşımaktadır. Yalnızca üç satır, tasarımın ilgili bileşenini destekleyen ampirik ya da meta-analitik kanıta dayanmaktadır. Bu, tasarımın büyük ölçüde sınanmamış varsayımlar üzerine kurulduğu anlamına gelir. Matrisin işlevi bu dengesizliği kapatmak değil, görünür kılmak ve hangi satırların önce sınanması gerektiğini belirlemektir.

Yöntem: Taksonomik Karşılaştırma

Bu ve izleyen başlıklar, tamamlanmış doğrulama adımlarını (yapısal denetim, taksonomik karşılaştırma, uzman görüşleri) ve planlanan saha uygulamasının metodolojik çerçevesini birlikte kapsar.

Tasarlanan materyalin standart manipülatiflerle karşılaştırmalı konumunu belirlemek için, Bouck ve Park (2018) tarafından engelli öğrencilere yönelik matematik manipülatifleri üzerine yürütülen sistematik derlemeden uyarlanan beş boyutlu bir taksonomi kullanılmıştır: yapısal şeffaflık, çoklu beceri kapsamı, motivasyon, lojistik ve CRA entegrasyonu. Puanlama üç aşamalı yürütülmüştür: araştırmacı ön değerlendirmesinin ardından iki bağımsız değerlendirici (bir matematik eğitimi doktora öğrencisi ve 22 yıl deneyimli bir sınıf öğretmeni) matrisi kör olarak doldurmuştur. Değerlendiriciler arası tutarlılık Cohen'in (1960) Kappa katsayısıyla $\kappa = 0{,}82$ bulunmuştur; bu değer Landis ve Koch (1977) sınıflamasına göre neredeyse mükemmel uyum aralığındadır. Puanlama sonuçları burada bir bulgu olarak sunulmamaktadır. Gerekçe aşağıda ayrıntılandırılmıştır: taksonomiyi materyalin tasarımcısı geliştirdiği ve boyut kümesi eksik olduğu için elde edilen sıralama, tasarımın üstünlüğüne ilişkin bir kanıt değil, tasarım

gerekliliklerinin bir listesidir. Taksonomi bu bölümde yalnızca bu işleviyle, yani hangi boyutların bir manipülatif değerlendirmesinde hesaba katılması gerektiğini göstermek için kullanılmaktadır.

Bu bulgunun yorumunda dört sınırlılık gözetilmelidir. Birincisi, taksonomiyi materyalin tasarımcısı geliştirmiştir; boyutların seçimi tasarımın güçlü yanlarını öne çıkaracak biçimde şekillenmiş olabilir. İkincisi, yüksek κ değeri değerlendiricilerin birbiriyle tutarlı olduğunu gösterir, taksonominin geçerli olduğunu göstermez. Üçüncüsü, taksonomi algısal zenginlik boyutunu içermemektedir; ikili temsil tartışmasındaki kanıt, bu boyutun dâhil edilmesi hâlinde tasarımın dezavantajlı görüneceğini düşündürmektedir. Dördüncüsü, taksonomi maliyet ve ölçeklenebilirlik boyutunu da içermemektedir; Kraft (2020) tarafından önerilen çerçeve bu iki boyutu etki büyüklüğü kadar önemli saymaktadır. Bu dört sınırlılığın birlikte anlamı şudur: taksonomi mevcut hâliyle karşılaştırmalı bir üstünlük iddiasını taşıyamaz. İkinci aşama öncesinde taksonomi, algısal zenginlik ve maliyet-ölçeklenebilirlik boyutları eklenerek yediye çıkarılacak ve puanlama, materyalle ilgisi bulunmayan bağımsız bir ekip tarafından yinelenecektir. Beklenti, materyalin eklenen iki boyutta düşük puan almasıdır; bu beklentinin önceden yazılması, sonucun tasarım lehine yorumlanmasını engellemek içindir.

İçerik Geçerliği: Uzman Görüşleri

Materyalin içerik geçerliği sınıf öğretmenlerinden alınan uzman görüşleriyle değerlendirilmiştir. Panel büyüklüğü alan yazındaki ölçütler gözetilerek belirlenmiştir. Lawshe (1975) içerik geçerlik oranı için panel büyüklüğüne göre değişen kritik değerler tablosu sunmuş; Ayre ve Scally (2014) bu kritik değerleri özgün hesaplama yöntemine dönerek yeniden türetmiş; Polit et al. (2007) ise içerik geçerlik indeksinin uzman sayısına duyarlılığını tartışarak indeksin tek başına yeterli sayılmaması gerektiğini savunmuştur. Bu

çalışmada, deneyimleri 3 ile 28 yıl arasında değişen yedi sınıf öğretmeniyle çalışılmıştır; panel, bu kaynaklarda önerilen alt sınırların üzerindedir ancak geniş sayılamaz.

Görüşler ayrı oturumlarda, yönlendirilmemiş biçimde, materyalin fotoğrafları ve protokol özeti üzerinden alınıp içerik analizine tabi tutulmuştur. Görüşlerin farklı odaklara yönelmesi — onluk kavramı, CRA akışı, oyun-öğretim dengesi, düşük kaynaklı ortamlara uyarlanabilirlik, küçük grup uyarlaması ve öğretmen rehberi gereksinimi — materyalin yalnızca olumlu değil yapıcı eleştiri de aldığını göstermektedir. Üç somut öneri tasarıma dâhil edilmiştir: dikkat süresi ölçümü, sayı duyusu değerlendirmesi ve oturum sonu değerlendirme rubriği.

Öğretmenlerin gündeme getirdiği oyun-öğretim dengesi teması, ikili temsil sorununun uygulayıcı sezgisindeki karşılığıdır ve bağımsız bir doğrulama işlevi görür. Bu örtüşme dikkat çekicidir: uygulayıcılar, alan yazının deneysel olarak belgelediği riski, o alan yazına atıfta bulunmaksızın adlandırmıştır.

Yöntemsel bir sınırlılık belirtilmelidir. Lawshe (1975) tarafından önerilen içerik geçerlik oranı ve Polit et al. (2007) tarafından önerilen içerik geçerlik indeksi, uzmanların her madde için yaptığı derecelendirmelerden hesaplanan nicel göstergelerdir. Bu çalışmada görüşler nitel olarak toplanmış, bu katsayılar hesaplanmamıştır. Panel büyüklüğü ölçütlerine atıf yapmak yerinde olmakla birlikte, elde edilen çıktı nicel bir içerik geçerlik katsayısı değil, nitel bir uzman değerlendirmesidir. Saha çalışması öncesinde maddeleştirilmiş bir derecelendirme formuyla içerik geçerlik oranının hesaplanması önerilmektedir.

Önerilen Araştırma Deseni

Saha uygulaması için önerilen desen, katılımcılar arası çoklu temel düzey (multiple baseline across participants) tek denek deneysel desenidir. Öğrencinin kendi ön ölçümleri kontrol işlevi

görür ve her katılımcının taban düzeyi süresi farklılaştırılarak müdahale etkisi zamana bağlı değişkenlerden ayrıştırılır. Tercih gerekçeleri üçtür: randomize kontrollü deney mantığı olmadan da işlevsel nedensellik gösterilebilmesi (Horner et al., 2005); her öğrencinin kendi taban düzeyinin kontrol işlevi görmesi; ve etkinin birden fazla öğrencide tutarlı gözlenmesinin işlevsel replikasyon kanıtı sunması.

Desen, Kratochwill et al. (2013) tarafından ortaya konan tek denek müdahale araştırması tasarım standartlarına, bu standartların uygulanmasına ilişkin tartışmaya (Hitchcock et al., 2014) ve standartların güncellenmiş biçimine (Kratochwill et al., 2023) uyacak biçimde kurgulanmıştır. Güncel standartlar, taban düzeyi kararlılığının görsel olarak belgelenmesini ve faz değişim kararlarının önceden tanımlanmış ölçütlere bağlanmasını vurgulamaktadır; bu protokolde faz değişimi, üç ardışık oturumda ölçüt karşılanana kadar geciktirilecektir. Kratochwill ve Levin (2010), tek denek desenlerine rastgeleleme öğeleri eklemenin bilimsel güvenilirliği artırdığını savunmuştur; bu protokolde taban düzeyi uzunluklarının katılımcılara rastgele atanması bu öneriyle uyumludur.

Katılımcı seçimi, Mutlu ve Akgün (2017) tarafından savunulan çoklu süzgeç mantığına uygun olarak iki bağımsız göstergeye dayandırılacaktır. Birinci süzgeç, sınıf düzeyine uygun bir müfredat temelli matematik ölçümünde sınıf dağılımının alt %25'inde yer almaktır. İkinci süzgeç, Olkun ve Akkurt Denizli (2015) tarafından betimlenen türden temel sayı işleme görevlerinde risk aralığında bulunmaktır. Bir öğrencinin çalışmaya alınabilmesi için her iki ölçütü birlikte karşılaması gerekir; tek ölçütle seçim yapılmayacaktır. Alt sınır da tanımlıdır: on nesneyi güvenilir biçimde sayamayan, yani bire bir sayma becerisi henüz kurulmamış öğrenciler dışlanacaktır, çünkü protokolün ilk döngüsü bu beceriyi önkoşul saymaktadır. Kullanılacak araçların adları ve kesme

puanları ön kayıt belgesinde veri toplama başlamadan önce sabitlenecek; sonradan değiştirilmesi hâlinde değişiklik ve gerekçesi saha raporunda ayrıca bildirilecektir. Nelson ve McMaster (2019) tarafından bildirilen, müdahalelerin daha düşük risk düzeyindeki öğrencilerde daha etkili olduğu bulgusu bu tercihin bilinen bir maliyetidir: iki süzgeci birlikte karşılayan grup, tek süzgeçle seçilecek gruptan daha ağır profilli olacak ve beklenen etki büyüklüğü bu nedenle daha düşük kalabilecektir.

Ölçüm sıklığı, tek denek standartlarının veri noktası gereksinimine göre belirlenmiştir. Haftalık ölçüm, on iki haftalık bir uygulamada toplam on iki veri noktası üretir; çoklu temel düzey deseninde bu, taban düzeyi fazına yalnızca üç-beş nokta bırakır. Tek denek tasarım standartları her fazda en az beş veri noktası aramaktadır (Kratochwill et al., 2013; Hitchcock et al., 2014). Bu nedenle protokol oturum temelli ölçüme, yani haftada üç kısa yoklamaya dayandırılmıştır; böylece katılımcı başına yaklaşık 36 veri noktası elde edilir ve hem taban düzeyi hem müdahale fazı standartları karşılanır.

Uygulama Protokolü ve Doz Gerekçesi

Protokol, çok kademeli destek sisteminin İkinci Kademe standartlarına hizalı olarak on iki hafta boyunca haftada üç oturum (toplam 36 oturum, oturum başına 40 dakika, yaklaşık 24 saat) biçiminde tasarlanmıştır. Miller et al. (2025) tarafından yapılan doz–yanıt çözümlemesinde yaklaşık 24 saatlik bir doz, incelenen bandın içindedir.

İkinci Kademe müdahalelerinin farklı dil ve eğitim sistemlerinde de uygulanabilirliği gösterilmiştir; de León et al. (2021), İspanya'da ilkokul öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada bu yaklaşımın etkililiğini incelemiştir. Protokolün metodolojik temeli, beceriler arası çoklu yoklama desenidir (Mancl et al., 2012; Mercer ve Miller, 1992). CRA'nın bozma gerektiren çıkarma öğretiminde

kullanımı doğrudan sınanmıştır: Flores (2010), matematikte başarısızlık riski taşıyan ilkokul öğrencileriyle yürüttüğü çoklu yoklama deseninde CRA öğretimi ile bozmalı çıkarma performansı arasında tüm katılımcılarda işlevsel bir ilişki göstermiştir. Buradaki döngü yapısı aynı mantığın bir uyarlamasıdır. Bu desende CRA bir takvim değil, her beceri için yeniden uygulanan bir öğretim döngüsüdür.

Beceri sıralamasının kendisi — sayma, ardından toplama, ardından çıkarma — erken matematikte öğrenme rotaları alan yazınıyla uyumludur. Clements ve Sarama (2021), bu alanlardaki gelişimsel ilerlemeyi düzey düzey betimlemiş ve öğretimin bu ilerlemeyi izlemesi gerektiğini savunmuştur; protokolün döngü sırası bu ilkeye dayanmaktadır. Becerilere ayrılan sürelerin dağılımı ise iki gerekçeye dayanır. Sayma, sonraki becerilerin önkoşulu olduğu ve giriş ölçütü gereği katılımcılarda kısmen mevcut olduğu için daha kısa tutulmuştur; Bryant et al. (2008), birinci ve ikinci sınıfta İkinci Kademe müdahalesi olarak yürüttüğü destek derslerinde benzer bir önceliklendirme izlemiştir. Çıkarma ise bozma ve yeniden gruplama gerektirdiği için toplamayla eşit süre almıştır (Mancl et al., 2012).

Tablo 5. On iki haftalık beceri bazlı CRA döngü yapısı ve ara ölçüm noktaları

Beceri	**Süre**	**Haftalara göre CRA aşamaları**	**Ölçüm**
Sayma	3 hafta	H1 somut → H2 yarı somut → H3 soyut	Haftada üç yoklama
Toplama	4 hafta	H4-H5 somut → H6 yarı somut → H7 soyut	Haftada üç yoklama
Ara değerlendirme	H8 başı	—	Sekiz haftalık kazanım raporu
Çıkarma	4 hafta	H8-H9 somut → H10 yarı somut → H11 soyut	Haftada üç yoklama
Pekiştirme	1 hafta	H12; tüm beceriler; genelleme	Kalıcılık ve aktarım yoklaması

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur. Not. H = hafta. Toplam 3 + 4 + 4 + 1 = 12 hafta, 36 oturum. Aşamaların ayrı haftalara dağıtılması Ebner et al. (2025) bulgusuyla uyumludur. Sekizinci hafta başındaki ara değerlendirme, Nelson ve McMaster (2019) tarafından bildirilen kısa süreli müdahaleler lehine bulguyu sınamak üzere eklenmiştir; sekiz haftalık kazanım, on iki haftalık kazanımla ayrıca karşılaştırılacaktır.

Her oturum 40 dakika sürecek ve açık öğretim ilkelerine (Hughes et al., 2017) göre beş aşamadan oluşacaktır:

1. Açılış ve birim sözleşmesi (5 dakika). Önceki oturumun kısa tekrarı; ardından o oturumun sayım biriminin açıkça belirlenmesi ve beyaz tahtaya yazılması. Bu adım, topuz sayma yanlılığına ilişkin kanıt nedeniyle protokole eklenmiştir.
2. Öğretmen modellemesi, "Ben yap" (10 dakika). Öğretmen görevi sesli düşünerek modeller.
3. Rehberli pratik, "Birlikte yap" (15 dakika). Sürenin en büyük bölümünün rehberli pratiğe ayrılması, açık ve doğrudan öğretimin etkili bulunduğu sentezlerdeki örüntüyle uyumludur (Gersten et al., 2009; Stockard et al., 2018).
4. Bağımsız pratik, "Sen yap" (8 dakika). Öğrenci depodan parçaları kendisi seçer, zeminde modeller, beyaz tahtaya aktarır.
5. Kapanış ve bağlantı sözelleştirmesi (2 dakika). Öğrenci, yeşil zemindeki modeli ile beyaz tahtadaki sembolü arasındaki ilişkiyi kendi cümleleriyle ifade eder.

Rehberli pratik aşamasında öğretmenin görevi yalnızca destek vermek değil, somut ile sembolik arasındaki bağı açıkça sözelleştirmektir (Uttal et al., 2009). Bu, ikili temsil riskine karşı protokole yerleştirilmiş temel önlemdir ve uygulama bütünlüğü

rubriğinde ayrı bir madde olarak izlenecektir. Hughes et al. (2017) tarafından yapılan uyarı gereği, açık öğretimin uygulandığını belirtmek yerine hangi bileşenlerin uygulandığı oturum bazında kodlanacaktır.

Karşılaştırma Materyalinin Tasarımı

Yapısal şeffaflık hipotezinin sınanabilmesi, karşılaştırma materyalinin dikkatle tasarlanmasına bağlıdır. Lafay et al. (2023) tarafından izlenen mantık doğrultusunda, karşılaştırma koşulu basamak şeffaflığı sunan ancak basamak içi birim şeffaflığı sunmayan bir materyal olmalıdır: onluk, tek parça hâlinde ve ayrık biçimde temsil edilmeli, ancak üzerinde sayılabilir on birim bulunmamalıdır. Düz yüzeyli onluk çubuklar bu ölçütü karşılar.

İki koşul arasında yalnızca bu özellik farklılaşmalıdır. Renk, malzeme, boyut, depo düzeni, oturum yapısı ve öğretmen davranışı sabit tutulmalıdır. Aksi hâlde gözlenen fark birim şeffaflığına değil, kontrol edilmemiş bir değişkene atfedilebilir. Algısal zenginlik değişkeni bu karşılaştırmada kasıtlı olarak sabit tutulmaz; ayrı bir hipotez kapsamında ele alınır. İki hipotezin aynı çalışmada karıştırılması, bulguların yorumunu imkânsız kılar.

Veri Toplama, Üçgenleme ve Analiz

Tek bir veri kaynağına bağlılık riskini azaltmak için beş kaynaklı üçgenleme benimsenmiştir: ön-son test (rubrik tabanlı), oturum bazlı gözlem rubriği (iki bağımsız gözlemci), oturum video kaydı, öğretmen yansıtma notu ve fotoğraf belgeleme. Ön test bataryasına ayrıca kısa bir LEGO aşinalık ölçümü eklenmiştir: çocuğun daha önce LEGO ile oynayıp oynamadığı, evde bulunup bulunmadığı ve kullanım sıklığı veliden alınan yapılandırılmış bir formla belirlenecek ve katılımcılar yüksek ile düşük aşinalık olarak sınıflandırılacaktır. Bu değişken tanıdıklık hipotezinin düzenleyicisidir.

Video kodlaması kör yürütülecektir: kodlayıcılar hipotezleri bilmeyecek, kod kitabı hipotez adı içermeyecek ve oturumların koşul bilgisi kodlama dosyasından çıkarılacaktır. Bu önlem, tanıdıklık ve birim karışıklığı hipotezlerinin aynı video kaynağından kodlanması nedeniyle zorunludur. Gözlemciler arası tutarlılık Cohen'in (1960) Kappa katsayısıyla izlenecek (eşik $\kappa \geq 0{,}80$); öz doğrulama üç adımlı bir davranış dizisi olarak tanımlandığından ve kodlayıcı yorumuna en açık kategori olduğundan, bu kod için uyum katsayısı toplam uyumun içinde eritilmeyip ayrıca hesaplanıp raporlanacaktır; uygulama bütünlüğü (fidelity of implementation) gözlemciler arası uyum ile denetlenecek ve eşik, tek denek standartlarının asgari %80 ölçütünün (Kratochwill et al., 2013) üzerinde %90 olarak belirlenmiştir.

Tek denek verileri öncelikle görsel analizle (düzey, eğim, değişkenlik, çakışma, faz değişimindeki hız) çözümlenecek; Tau-BC etki büyüklüğü yalnızca betimleyici olarak raporlanacaktır (Tarlow, 2017). Tau-BC için sayısal bir başarı eşiği bilinçli olarak tanımlanmamıştır. Gerekçe, bölümün Ebner et al. (2025) tartışmasında ortaya konan sorunun kendisidir: çakışmama temelli göstergeler bu alanda tavana yakın değerler üretmekte ve türetilmiş standart hataları bulunmamaktadır. Böyle bir dağılımda seçilecek herhangi bir eşik ya hiçbir gerçekçi sonucu eleyemeyecek kadar gevşek ya da dağılımın tümünü eleyecek kadar keyfî olur; her iki durumda da yanlışlama işlevi görmez. Bu nedenle karar tümüyle görsel analize bırakılmış, Tau-BC değerleri yalnızca başka çalışmalarla karşılaştırılabilirlik için bildirilmiştir. Ölçütlerin tamamı tek bir çerçeveye, tek denek çerçevesine taşınmıştır; sınıf düzeyinde ön-son test kazanımı için geliştirilmiş göstergeler tek denek zaman serisi verisiyle kavramsal olarak uyumsuz olduğundan kullanılmamaktadır. Aynı çalışmada iki farklı çerçeveye ait iki gösterge kullanmak metrik tutarsızlığı üretir.

Sınanacak Hipotezler

Karşıt kanıt başlıklarında ortaya konan kuramsal gerilimler burada sınanabilir önermelere dönüştürülmektedir. Ölçütler saha çalışması başlamadan önce tanımlanmıştır; amaç sonuç sonrası yorum esnekliğini ortadan kaldırmaktır.

H1 (temel etki). Üç bölgeli LEGO etkinlik tahtasıyla yürütülen on iki haftalık beceri bazlı CRA müdahalesi, düşük başarılı birinci sınıf öğrencilerinin sayma ve işlem becerilerinde taban düzeyine göre işlevsel bir ilişki üretecektir.

H2 (yapısal şeffaflık sınırı). Lafay et al. (2023) basamak içi birim şeffaflığının ikinci sınıfta basamak değeri anlayışında fark yaratmadığını bulmuştur. H2, bu boş sonucun birinci sınıfta, sayma ve işlem çıktılarında ve uzun süreli bir protokolde genişleyip genişlemediğini sorar. Karşılaştırma koşulu, yalnızca basamak şeffaflığı sunan bir materyaldir. Birim şeffaflığı ek katkı sağlıyorsa, LEGO koşulundaki öğrenciler öz doğrulama davranışında ve onluk-birlik çıktısında karşılaştırma koşulundan üstün olacaktır (H2a). Lafay et al. (2023) bulgusu genelleniyorsa iki koşul arasında fark gözlenmeyecektir (H2b). H2b'nin desteklenmesi bir başarısızlık değil, alan yazına katkıdır; bu durumda tasarımın gerekçesi birim şeffaflığından üç bölgeli mimariye kayar. H2, iki koşullu bir karşılaştırma gerektirdiği için burada önerilen tek gruplu tek denek deseniyle sınanamaz; üçüncü aşamada ayrı bir çalışmanın konusudur ve o çalışmanın ön kaydı ayrıca yapılacaktır.

H3 (göreve bağlılık). Özerk depo kullanımı ve öz doğrulama olanağı, öğrencilerin göreve yönelik kalıcılığında artış üretecektir. Ölçüm sınırı açıkça belirtilmelidir: dikkat süresi, göreve bağlılığın bir göstergesidir; öz yeterliğin geçerli bir göstergesi değildir. Öz yeterlik iddiasının sınanabilmesi için yaşa uygun kısa bir öz yeterlik ölçeği gerekir ve bu ölçek mevcut protokolde bulunmamaktadır. Dolayısıyla H3, bu fazda yalnızca göreve bağlılık düzeyinde sınanacak; öz yeterlik bileşeni ölçek eklenene kadar bir çıkarım konusu yapılmayacaktır.

H4 (tanıdıklık ve algısal zenginlik). Petersen ve McNeil (2013), yerleşik bilgi taşınan algısal olarak zengin materyallerin sayma performansını düşürdüğünü bulmuştur; Carbonneau et al. (2013) yalın manipülatiflerin aktarımda üstün olduğunu bildirmiştir. H4, LEGO'nun oyuncak kimliğinin bir engel mi yoksa bir motivasyon kaynağı mı olduğunu sorar. İki alt hipotez tek bir değişken üzerinden, aynı eşikle ve karşıt yönde tanımlanmıştır: yönerge bitiminden itibaren çocuğun göreve yönelik ilk eylemi başlatana kadar geçen süre. Tanıdıklık engelse bu süre yüksek aşinalık grubunda düşük aşinalık grubuna göre daha uzun olacak ve erken oturumlarda oyun amaçlı kullanım gözlenecektir (H4a). Tanıdıklık avantajsa aynı süre yüksek aşinalık grubunda daha kısa olacaktır (H4b). Aşinalık ölçülmeden bu karşılaştırma yapılamayacağı için ön test bataryasına bir aşinalık ölçümü eklenmiştir.

H5 (birim karışıklığı). Kaminski ve Sloutsky (2013), sayılabilir ayrık öğelerin 6-8 yaş aralığındaki çocukları göreve uygun olmayan sayma davranışına yönelttiğini; Tellos ve Osana (2025) ile Tellos et al. (2025) ise aynı örüntüyü doğrudan LEGO topuzlarında belgelemiştir. H5, aynı yanlılığın birinci sınıf düzeyindeki çıkarma ve karşılaştırma görevlerinde ortaya çıkıp çıkmadığını sorar. Yanlılık mevcutsa, birim sözleşmesinin parça olduğu oturumlarda topuz sayma hataları gözlenecek ve bu hatalar sayma oturumlarına göre anlamlı biçimde daha sık olacaktır (H5a). Birim sözleşmesi önlemi etkiliyse, topuz sayma hataları oturumlar boyunca azalan bir eğilim gösterecektir (H5b). Belirli bir oturum sayısı eşik olarak tanımlanmamıştır; alan yazında bu tür bir önlemin ne kadar sürede etki edeceğine ilişkin bir dayanak bulunmadığından karar, eşik karşılaştırmasıyla değil eğilim yönüyle verilecektir. H5, oturum videolarından hata türü kodlamasıyla ölçülecektir.

Başarı ve Yanlışlama Ölçütleri

Aşağıdaki ölçütler veri toplama başlamadan önce sabitlenmiştir (Tablo 6). Her ölçüt, karşılık geldiği hipotezin hangi koşulda desteklenmeyeceğini de tanımlar. Ölçütler iki farklı çalışmaya aittir ve bu ayrım korunmalıdır: burada önerilen tek denek deseni H1, H3, H4 ve H5'i sınayabilir; H2 karşılaştırma koşulu gerektirdiği için bu desenle sınanamaz ve ayrı bir çalışmaya bırakılmıştır. Bu bölümde sunulan ön kayıt belgesi yalnızca ikinci aşamayı kapsamaktadır.

Tablo 6. Önceden tanımlanmış başarı ve yanlışlama ölçütleri

Ölçüt	**Eşik**	**Yanlışlama koşulu**	**Aşama**
İşlevsel ilişki (görsel analiz)	En az üç katılımcıda, üç farklı zamanda faz değişimiyle örtüşen düzey ve eğim değişimi	Üçten az katılımcıda gözlenirse H1 desteklenmez	2
Tau-BC	Sayısal başarı eşiği tanımlanmamıştır; katılımcı başına betimleyici olarak raporlanır	Karar ölçütü değildir; tek başına H1'i ne destekler ne çürütür	2
Kalıcılık yoklaması	Müdahale sonu düzeyinin %80'i veya üzeri	Altında kalırsa kazanım kalıcı sayılmaz	2
Aktarım yoklaması	Öğretilmemiş biçimde en az %60 doğruluk	Altında kalırsa kazanım göreve özgü sayılır	2
Uygulama bütünlüğü	Gözlemciler arası uyum ≥ %90	Altında kalan oturumlar analizden çıkarılır	2
Koşullar arası karşılaştırma	Çakışmayan veri örüntüsü	Çakışma yüksekse H2b desteklenir	3
Oyun amaçlı kullanım süresi	Oturum süresinin %10'unun altı	Üstünde kalıcı seyrederse H4a desteklenir	2
Topuz sayma hatası (parça oturumları)	Oturum başına ≤ 1 hata	Üstünde kalıcı seyrederse H5a desteklenir	2
Sekizinci ve on ikinci hafta kazanım oranı	Sekiz haftalık kazanım, toplam kazanımın ≥ %70'i	Altında kalırsa uzun protokolün ek değeri desteklenir	2

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur. Not. Aşama sütunu, ölçütün hangi çalışmada uygulanacağını gösterir: 2 = burada önerilen tek denek saha çalışması, 3 = karşılaştırma koşulu gerektiren ve ayrı yürütülecek çalışma. Koşullar arası karşılaştırma satırı bu protokolün değil, üçüncü aşamanın ölçütüdür ve buradaki ön kayıt belgesine dâhil edilmeyecektir. Ölçütlerin tümü tek denek çerçevesinde tanımlanmıştır; grup düzeyi anlamlılık testleri kullanılmayacaktır. Son satır hem doz gerekçesini hem de Nelson ve McMaster (2019) tarafından bildirilen kısa müdahale bulgusunu sınar.

İkinci aşamaya ilişkin hipotezler, ölçütler, faz değişim kuralları, dışlama kararları ve analiz planı, veri toplama başlamadan önce erişime açık bir ön kayıt (preregistration) platformunda belgelenecektir; üçüncü aşama için ayrı bir ön kayıt hazırlanacaktır. Ön kaydın işlevi, sonuç görüldükten sonra hipotez veya ölçüt değiştirme olanağını ortadan kaldırmaktır. Ön kayıt sonrası yapılan her sapma, saha raporunda gerekçesiyle birlikte ayrıca listelenecektir.

Türkiye Bağlamı

Türkiye'de erken dönem matematik güçlüğüne yönelik yapılandırılmış materyal geliştirme çalışmaları görece yenidir. Alanın kurumsallaşması son on yılda hızlanmış; tanılama, ölçme aracı geliştirme ve müdahale tasarımı başlıklarında yerli bir birikim oluşmuştur (Mutlu et al., 2020). Dört bağlamsal etken bu bölümün tasarımını doğrudan ilgilendirmektedir.

Birincisi tanılama altyapısıdır. Mutlu ve Akgün (2017), matematik öğrenme güçlüğünün tanılanmasında çok aşamalı bir süzgeç modeli önermiş; tek bir ölçüte dayalı tanılamanın hem yanlış pozitif hem yanlış negatif ürettiğini vurgulamıştır. Olkun ve Akkurt Denizli (2015), temel sayı işleme görevleriyle risk grubunun belirlenebileceğini göstermiştir. Bu iki çalışma, buradaki giriş ölçütünün tek bir ön testle değil, en az iki bağımsız göstergeyle belirlenmesi gerektiğini düşündürmektedir; protokol bu doğrultuda kurgulanmıştır.

İkincisi öğretmen farkındalığıdır. Mutlu et al. (2022), öğretmenlere doğrudan diskalkulinin ne olduğunu bilip bilmediklerini sordukları çalışmalarında farkındalığın sınırlı olduğunu bildirmiştir. Bu, materyalin yalnızca bir araç olarak dağıtılmasının yeterli olmayacağı; öğretmen rehberi ve kısa bir eğitim bileşeni olmaksızın uygulama bütünlüğünün korunamayacağı anlamına gelir. Uzman panelindeki öğretmen rehberi gereksinimi teması bu saptamayla örtüşmektedir.

Üçüncüsü kaynak erişilebilirliğidir ve bu başlıkta bölümün bir açığı bulunmaktadır. Kraft (2020) tarafından önerilen çerçevede maliyet, etki büyüklüğü kadar belirleyicidir: aynı etkiyi daha ucuz üreten bir müdahale politika açısından üstündür. Bölüm bu çerçeveyi benimsemesine karşın materyalin maliyetini ölçmemiştir; dolayısıyla ticari setlerin pahalı olduğu yönündeki yaygın kanı burada bir bulgu olarak değil, sınanmamış bir varsayım olarak kaydedilmelidir. Ölçülmesi gereken kalemler bellidir: bir tahtanın kurulumu için gereken parça sayısı ve boyut dağılımı, ticari ve muadil malzemeyle birim maliyet, öğrenci başına düşen maliyet, dayanıklılık ve kayıp oranı ile sınıf içi kurulum süresi. Bu kalemler ikinci aşama raporunda sayısal olarak verilecektir; maliyet argümanı bu veriler olmadan kurulamaz. Muadil tuğlalarda topuz boyutu ve tutuş kuvveti farklılık gösterebileceğinden, yapısal şeffaflık denetiminin muadil malzeme için yinelenmesi gerekir.

Maliyet sorununa verilebilecek bir başka yanıt sanal ve uygulama tabanlı manipülatiflerdir; bu araçlar birim maliyeti neredeyse sıfıra indirir ve ölçeklenmeyi kolaylaştırır. Ancak bu seçenek, buradaki tasarım mantığıyla doğrudan çelişen bir bedel taşır: dokunsal kanal ortadan kalkar ve öz doğrulama, parçayı elle çevirip sayma davranışından ekranda tıklama davranışına dönüşür. Bouck et al. (2020), sanal manipülatiflerin engelli öğrencilere yönelik bir yardımcı teknoloji olarak nasıl konumlanabileceğini tartışmış; erişilebilirlik kazancının temsil kalitesinden bağımsız

değerlendirilemeyeceğini vurgulamıştır. Sanal manipülatiflerin karşılaştırmalı etkililiği bu bölümde sistematik olarak incelenmemiştir ve kapsam dışıdır; ancak ölçeklenebilirlik tartışmasının bu seçenek değerlendirilmeden tamamlanamayacağı belirtilmelidir.

Dördüncüsü müdahaleye tepki altyapısıdır. Protokolün dayandığı İkinci Kademe mantığı, belgelenmiş bir öğretim denemesini gerektirir. Türkiye'de destek eğitim odası — kaynaştırma yoluyla eğitimine devam eden öğrencilere, kendi sınıflarının dışında ve okul içinde bireysel ya da küçük grup hâlinde ek destek verilen ortam — bu işlevi kısmen karşılayan yapıdır. Bu ortamlarda sistematik ilerleme izleme verisinin ne ölçüde toplandığına ilişkin yayımlanmış bir döküm bulunamamıştır; dolayısıyla protokolün gerektirdiği ilerleme izleme altyapısının mevcut olup olmadığı açık bir sorudur ve okul düzeyinde ayrıca değerlendirilmelidir. Protokolün okul düzeyinde uygulanabilmesi için haftada üç oturumluk bir zaman diliminin güvence altına alınması gerekir.

Bu saptamalar, mevzuat metinlerinin sistematik bir incelemesine değil, alan yazındaki betimlemelere ve uzman görüşlerinde dile getirilen temalara dayanmaktadır; ampirik bir sistem değerlendirmesi olarak okunmamalıdır. Ayrıca içerik geçerliği yalnızca sınıf öğretmenlerinden alınmıştır; özel eğitim öğretmenleri, rehberlik ve araştırma merkezi personeli ve matematik eğitimcileri farklı ölçütler getirecektir. Genişletilmiş bir panel önerilmektedir.

Araştırma Yol Haritası

Bu bölüm, üç aşamalı bir araştırma programının ilk halkasıdır. Birinci aşama, bu bölümün kapsamıdır: kuramdan türetilmiş tasarım, karşıt kanıtın belirlenmesi, yapısal denetim, nitel içerik geçerliği ve ön kayıtlanabilir protokol. Bu aşama tamamlanmıştır.

İkinci aşama saha çalışmasıdır: üç-dört öğrenciyle, katılımcılar arası çoklu temel düzey deseniyle, on iki hafta süreyle yürütülecek tek denek çalışması. Bu aşamanın başlatılabilmesi, gerekli kurumsal izinlerin ve veli onamlarının önceden alınmasına bağlıdır; bu bölümde raporlanan çalışmalar ise saha uygulaması içermemektedir. H1, H3, H4 ve H5 bu aşamada sınanır. Kratochwill et al. (2023) tarafından güncellenen standartlara tam uyum hedeflenmektedir.

Üçüncü aşama karşılaştırmalı sınamadır: H2'nin sınanması için LEGO koşulu ile yalnızca basamak şeffaf materyal koşulunun karşılaştırıldığı ayrı bir çalışma. Bu, Lafay et al. (2023) bulgusunun kapsam sınırlarını doğrudan test eder ve bölümün alan yazına asıl katkısını üretir.

Randomize kontrollü deney gibi büyük örneklemli desenler ancak ikinci ve üçüncü aşama bulgularına dayanarak planlanabilir. Farran et al. (2025) tarafından yürütülen çalışma bu ölçekte bir tasarımın mümkün olduğunu göstermektedir: altı haftalık, öğretmen uygulamalı LEGO yapılandırma eğitimine 6-7 yaşındaki 409 çocuk katılmış, 103 çocuk olağan öğretimi sürdüren kontrol grubunu oluşturmuştur. Yarı deneysel desende uzamsal yetenek ve matematikte kontrol grubuna göre iyileşme gözlenmiş, ancak uzamsal dilde fark bulunmamıştır. Bu son ayrıntı, üçüncü aşama için gerçekçi bir beklenti çıpası sunar: geniş ölçekli bir LEGO müdahalesi bile her çıktıda etki üretmemektedir.

Sınırlılıklar

Saha verisi yoktur; bölüm hiçbir etkililik iddiası taşımaz. Tasarımcı ile değerlendirici rolleri kısmen çakışmaktadır: taksonomi materyalin tasarımcısı tarafından geliştirilmiş, uzman görüşleri de tasarımcı tarafından toplanmıştır; kör değerlendirici kullanımı bu riski azaltır ancak ortadan kaldırmaz. İçerik geçerliği niceliksel değildir; içerik geçerlik oranı ve indeksi hesaplanmamıştır. Uzman

paneli küçüktür ve tek meslek grubundandır; yedi sınıf öğretmeni, önerilen aralığın alt sınırındadır.

Karşıt kanıt tartışılmış ancak çözülmemiştir. Beş cephenin hiçbiri bu bölümde çözülmemiş; her biri sınanacak hipoteze dönüştürülmüştür (bkz. Tablo 2). Tasarımın bu eleştirilere karşı üstünlüğü gösterilmemiştir; gösterilebilmesi saha ve karşılaştırma aşamalarının bulgularına bağlıdır. Bağlam sınırlıdır: kapsam birinci sınıf ve Türkiye bağlamıdır, genelleme ileri çalışmaların konusudur. Lojistik maliyet değerlendirilmemiştir; materyalin birim maliyeti, dayanıklılığı, hijyen gereksinimleri ve sınıf içi kurulum süresi ölçülmemiştir.

Son olarak bir kaynak-çıkar ilişkisi belirtilmelidir. LEGO temelli eğitsel materyallere ilişkin alan yazının bir bölümü, ürünün üreticisiyle bağlantılı vakıflar tarafından desteklenen araştırmalardan gelmektedir. Bu bölümde kullanılan LEGO odaklı çalışmaların fon beyanları tek tek incelenmemiştir; okuyucunun ilgili makalelerin destekleyen kuruluş bilgilerini kendisi denetlemesi önerilir. Bu bölüm ticari bir bağ taşımamakla birlikte, kullanılan kanıtın bir kısmının bu çevrede üretildiği ve bağımsız yinelemenin gerekli olduğu kaydedilmelidir.

Sonuç

Bu bölüm, düşük başarılı birinci sınıf öğrencilerinin sayma ve işlemsel düşünme becerilerini desteklemek üzere geliştirilen LEGO tabanlı üç bölgeli bir etkinlik tahtasının kuramdan türetilmiş tasarımını, karşıt kanıtla yüzleşmesini, içerik geçerliğini ve ön kayıtlanabilir müdahale protokolünü sunmuştur.

Somut çıktılar üçtür. Materyalin iç tutarlılığı belgelenmiştir: kullanılan on parça boyutunun tamamı matematiksel değeriyle örtüşmektedir. Tasarım yedi uygulayıcı uzmanın değerlendirmesinden geçmiş ve üç eleştiri tasarıma dâhil edilmiştir.

Protokolün başarı ve yanlışlama ölçütleri saha çalışması başlamadan önce tanımlanmıştır.

Bölümün asıl katkısı ise dördüncü noktadadır ve üç gerilimden doğmaktadır. Tasarımın en görünür özelliği, yani çocuğun bir onluğu oluşturan on topuzu sayarak kendi doğrulaması, yapısal şeffaflık alan yazınındaki en doğrudan deneysel sınamada anlamlı bulunmamıştır (Lafay et al., 2023). Tasarımın motivasyonel gerekçesi olarak sunulan tanıdıklık, algısal zenginlik alan yazınında bir risk olarak belgelenmiştir (Petersen & McNeil, 2013; Carbonneau et al., 2013). Aynı sayılabilirlik, hem hedef yaş grubundaki çocuklarda genel olarak (Kaminski & Sloutsky, 2013) hem de doğrudan LEGO ile yapılan çalışmalarda (Tellos & Osana, 2025; Tellos et al., 2025) uygunsuz sayma stratejilerini tetikleyen bir özellik olarak saptanmıştır. Bu bölüm üç bulguyu da gizlemek ya da yeniden yorumlamak yerine kapsam sınırlarını belirleyip sınanabilir hipotezlere dönüştürmüştür.

Bu tercih, tek bir materyalin değerlendirilmesinden daha geniş bir öneme sahiptir. Manipülatif tasarımı alanında daha şeffaf olanın daha iyi olduğu, tanıdık olanın daha motive edici olduğu ve sayılabilir olanın doğrulanabilir olduğu varsayımları yaygın biçimde kabul görmekte, ancak nadiren bileşenlerine ayrılarak sınanmaktadır. Mevcut kanıt her üç varsayımın da en az bir koşulda geçerli olmadığını göstermiştir; sınırlarının nerede olduğu açık bir sorudur.

Aynı çıkarım bir yöntem dersi de içerir. Farklı çözümleme birimlerine ve birbiriyle ölçek olarak uyumsuz metriklere dayanan bir birleşik etki büyüklüğü, kanıt gücü üretmez. Bir tasarımı savunmanın en zayıf yolu, savunulabilir olmayan bir sayı üretmektir; en güçlü yolu ise savunmanın hangi koşulda çökeceğini önceden söylemektir. Materyalin sahada işe yarayıp yaramayacağı bilinmemektedir ve bu bölüm bunu bildiğini iddia etmemektedir. Bildiği şey, hangi sorunun sorulması gerektiğidir.

Anahtar Kavramlar

Somut–yarı somut–soyut öğretim (CRA): Bruner'in temsil sırasını sınıfta işlevselleştiren üç aşamalı öğretim protokolü.

Yapısal (kavramsal) şeffaflık: Bir manipülatifin fiziksel özellikleriyle temsil ettiği matematiksel yapı arasındaki örtüşme.

Basamak şeffaflığı: Onluk ile birliğin materyalde ayrı ve görünür biçimde temsil edilmesi.

Basamak içi birim şeffaflığı: Bir onluğu oluşturan on birimin fiziksel olarak sayılabilir olması.

İkili temsil: Bir manipülatifin aynı anda hem bir nesne hem bir sembol olması ve çocuğun bu ikili konumu yönetmek zorunda kalması.

Algısal zenginlik: Bir manipülatifin taşıdığı renk, biçim ve gerçek dünya çağrışımlarının yoğunluğu.

Somutluğun soldurulması: Somut desteğin öğretim boyunca planlı biçimde geri çekilmesi.

Öz doğrulama: Öğrencinin ürettiği sonucu, öğretmen onayı aramadan materyale dönerek kendi kontrol etmesi; bu bölümde üç adımlı gözlenebilir bir davranış dizisi olarak tanımlanmıştır.

Birim sözleşmesi: Bir görevde neyin sayılacağının (parça mı, topuz mu) oturum başında açıkça belirlenip yazılı hâle getirilmesi.

Bütünleşik olmayan CRA: Üç aşamanın ayrı oturumlara dağıtıldığı klasik uygulama.

Materyal bütünleşikliği: Üç temsil biçiminin aynı fiziksel düzlemde erişilebilir olması.

Çoklu temel düzey deseni: Katılımcıların taban düzeyi sürelerinin farklılaştırıldığı tek denek deseni.

Tau-BC: Taban düzeyi eğilimi düzeltilmiş, sıra korelasyonuna dayalı tek denek etki büyüklüğü göstergesi.

Uygulama bütünlüğü: Müdahalenin planlandığı gibi uygulanma derecesi.

Yanlışlama ölçütü: Bir hipotezin hangi sonuç karşısında desteklenmemiş sayılacağını veri toplanmadan önce tanımlayan kural.

Ön kayıt: Hipotez, yöntem ve analiz kararlarının veri toplanmadan önce belgelenmesi.

Tartışma Soruları

1. Lafay et al. (2023) basamak içi birim şeffaflığının fark yaratmadığını bulmuştur. Bu bulgu LEGO temelli bir tasarımı geçersiz kılar mı? Hangi koşullarda kılar, hangi koşullarda kılmaz?
2. Tellos ve Osana (2025), LEGO topuzlarının çocukları uygunsuz saymaya yönlendirdiğini göstermiştir. Aynı fiziksel özellik nasıl olur da bir görevde öz doğrulama aracı, başka bir görevde hata kaynağı olur? Bu durum, iyi materyal kavramı hakkında ne söyler?
3. Farklı çözümleme birimlerine ve farklı metriklere dayanan bulguları tek bir etki büyüklüğüne indirgemenin hangi riskleri vardır? Bir okuyucu, birleştirilmiş bir etki büyüklüğü gördüğünde hangi soruları sormalıdır?
4. Ebner et al. (2025) bütünleşik olmayan CRA'nın daha etkili olduğunu bulmuştur. Üç bölgeli tahta materyal düzeyinde bütünleşiktir. Materyal bütünleşikliği ile öğretimsel bütünleşiklik ayrımı bu gerilimi çözer mi, yoksa yalnızca yeniden mi adlandırır?

5. Nelson ve McMaster (2019) sekiz hafta veya daha kısa müdahalelerin daha büyük etki ürettiğini bildirmiştir. On iki haftalık bir protokolü savunmak için hangi ek kanıt gerekir?

6. Bir manipülatif taksonomisi, materyalin tasarımcısı tarafından geliştirildiğinde ve algısal zenginlik ile maliyet boyutlarını içermediğinde hangi sistematik yanlılıklar ortaya çıkar?

7. Ebner et al. (2025) tarafından bildirilen Tau-BC = 0,9965 değeri neredeyse tavandadır. Böyle bir değer neyi gösterir, neyi göstermez?

8. Yapısal şeffaflık, tanıdıklık ve öz doğrulama varsayımlarının ikisi birden desteklenmezse, bu tür bir materyalin hangi bileşenleri savunulabilir kalır? Materyal terk edilmeli mi, yoksa yeniden mi tanımlanmalıdır?

Kaynakça/References

Ayre, C., & Scally, A. J. (2014). Critical values for Lawshe's content validity ratio: Revisiting the original methods of calculation. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development, 47*(1), 79–86. https://doi.org/10.1177/0748175613513808

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. W. H. Freeman.

Bouck, E. C., & Park, J. (2018). A systematic review of the literature on mathematics manipulatives to support students with disabilities. *Education and Treatment of Children, 41*(1), 65–106. https://doi.org/10.1353/etc.2018.0003

Bouck, E. C., Park, J., & Stenzel, K. (2020). Virtual manipulatives as assistive technology to support students with disabilities with mathematics. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 64*(4), 281–289. https://doi.org/10.1080/1045988X.2020.1762157

Bouck, E. C., Satsangi, R., & Park, J. (2018). The concrete–representational–abstract approach for students with learning disabilities: An evidence-based practice synthesis. *Remedial and Special Education, 39*(4), 211–228. https://doi.org/10.1177/0741932517721712

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Belknap Press of Harvard University Press.

Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N., & Chavez, M. M. (2008). Mathematics intervention for first- and second-grade students with mathematics difficulties: The effects of Tier 2 intervention delivered as booster lessons. *Remedial and Special Education, 29*(1), 20–32. https://doi.org/10.1177/0741932507309712

Bryant, D. P., Hartman, P., & Kim, S. A. (2003). Using explicit and strategic instruction to teach division skills to students with learning disabilities. *Exceptionality, 11*(3), 151–164. https://doi.org/10.1207/S15328035EX1103_3

Byrne, E. M., Jensen, H., Thomsen, B. S., & Ramchandani, P. G. (2023). Educational interventions involving physical manipulatives for improving children's learning and development: A scoping review. *Review of Education, 11*(2), Article e3400. https://doi.org/10.1002/rev3.3400

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380–400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Clements, D. H., & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (3. baskı). Routledge.

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement, 20*(1), 37–46. https://doi.org/10.1177/001316446002000104

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology, 20*(3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239

de León, S. C., Jiménez, J. E., Gutiérrez, N., & Hernández-Cabrera, J. A. (2021). Assessing the efficacy of Tier 2 mathematics intervention for Spanish primary school students. *Early Childhood Research Quarterly, 56*, 281–293. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2021.04.003

Ebner, S., MacDonald, M. K., Grekov, P., & Aspiranti, K. B. (2025). A meta-analytic review of the concrete-

representational-abstract math approach. *Learning Disabilities Research & Practice, 40*(1), 31–42. https://doi.org/10.1177/09388982241292299

Farran, E. K., Gilligan-Lee, K., Mareschal, D., Živković, M., Bartuševiča, S., Bell, D., Jay, T., & Gilmore, C. (2025). Teacher delivered block construction training improves children's mathematics performance. *Mind, Brain, and Education, 19*(3), 118–129. https://doi.org/10.1111/mbe.70006

Flores, M. M. (2010). Using the concrete-representational-abstract sequence to teach subtraction with regrouping to students at risk for failure. *Remedial and Special Education, 31*(3), 195–207. https://doi.org/10.1177/0741932508327467

Flores, M. M., & Hinton, V. M. (2019). Improvement in elementary students' multiplication skills and understanding though the combination of the concrete-representational-abstract sequence and strategic instruction. *Education and Treatment of Children, 42*(1), 73–100. https://doi.org/10.1353/etc.2019.0004

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology, 97*(3), 493–513. https://doi.org/10.1037/0022-0663.97.3.493

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., & Borjas, S. (2015). Benefits of "concreteness fading" for children's mathematics understanding. *Learning and Instruction, 35*, 104–120. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.10.004

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction:

A systematic review. *Educational Psychology Review, 26*(1), 9–25. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9249-3

Fyfe, E. R., & Nathan, M. J. (2019). Making "concreteness fading" more concrete as a theory of instruction for promoting transfer. *Educational Review, 71*(4), 403–422. https://doi.org/10.1080/00131911.2018.1424116

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology, 47*(6), 1539–1552. https://doi.org/10.1037/a0025510

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202–1242. https://doi.org/10.3102/0034654309334431

Gilligan-Lee, K. A., Fink, E., Jerrom, L., Davies, M. P., Dempsey, C., Hughes, C., & Farran, E. K. (2023). Building numeracy skills: Associations between DUPLO® block construction and numeracy in early childhood. *Journal of Intelligence, 11*(8), Article 161. https://doi.org/10.3390/jintelligence11080161

Hitchcock, J. H., Horner, R. H., Kratochwill, T. R., Levin, J. R., Odom, S. L., Rindskopf, D. M., & Shadish, W. R. (2014). The What Works Clearinghouse single-case design pilot standards: Who will guard the guards? *Remedial and Special Education, 35*(3), 145–152. https://doi.org/10.1177/0741932513518979

Horner, R. H., Carr, E. G., Halle, J., McGee, G., Odom, S., & Wolery, M. (2005). The use of single-subject research to identify evidence-based practice in special education.

Exceptional Children, 71(2), 165–179. https://doi.org/10.1177/001440290507100203

Hughes, C. A., Morris, J. R., Therrien, W. J., & Benson, S. K. (2017). Explicit instruction: Historical and contemporary contexts. *Learning Disabilities Research & Practice, 32*(3), 140–148. https://doi.org/10.1111/ldrp.12142

Jitendra, A. K., Alghamdi, A., Edmunds, R., McKevett, N. M., Mouanoutoua, J., & Roesslein, R. (2021). The effects of Tier 2 mathematics interventions for students with mathematics difficulties: A meta-analysis. *Exceptional Children, 87*(3), 307–325. https://doi.org/10.1177/0014402920969187

Jitendra, A. K., Nelson, G., Pulles, S. M., Kiss, A. J., & Houseworth, J. (2016). Is mathematical representation of problems an evidence-based strategy for students with mathematics difficulties? *Exceptional Children, 83*, 8–25. https://doi.org/10.1177/0014402915625062

Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B., & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: A randomized controlled study. *Journal of Educational Psychology, 104*, 647–660. https://doi.org/10.1037/a0029018

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology, 45*(3), 850–867. https://doi.org/10.1037/a0014939

Kaminski, J. A., & Sloutsky, V. M. (2013). Extraneous perceptual information interferes with children's acquisition of mathematical knowledge. *Journal of Educational*

Psychology, 105(2), 351–363. https://doi.org/10.1037/a0031040

Kraft, M. A. (2020). Interpreting effect sizes of education interventions. *Educational Researcher, 49*(4), 241–253. https://doi.org/10.3102/0013189X20912798

Kratochwill, T. R., Hitchcock, J. H., Horner, R. H., Levin, J. R., Odom, S. L., Rindskopf, D. M., & Shadish, W. R. (2013). Single-case intervention research design standards. *Remedial and Special Education, 34*(1), 26–38. https://doi.org/10.1177/0741932512452794

Kratochwill, T. R., Horner, R. H., Levin, J. R., Machalicek, W., Ferron, J., & Johnson, A. (2023). Single-case intervention research design standards: Additional proposed upgrades and future directions. *Journal of School Psychology, 97*, 192–216. https://doi.org/10.1016/j.jsp.2022.12.002

Kratochwill, T. R., & Levin, J. R. (2010). Enhancing the scientific credibility of single-case intervention research: Randomization to the rescue. *Psychological Methods, 15*(2), 122–144. https://doi.org/10.1037/a0017736

Lafay, A., Osana, H. P., & Levin, J. R. (2023). Does conceptual transparency in manipulatives afford place-value understanding in children at risk for mathematics learning disabilities? *Learning Disability Quarterly, 46*(2), 92–105. https://doi.org/10.1177/07319487221124088

Lafay, A., Osana, H. P., & Valat, M. (2019). Effects of interventions with manipulatives on immediate learning, maintenance, and transfer in children with mathematics learning disabilities: A systematic review. *Education Research International, 2019*, Article 2142948. https://doi.org/10.1155/2019/2142948

Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics, 33*(1), 159–174. https://doi.org/10.2307/2529310

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open, 5*(2), Article 2158244015589588. https://doi.org/10.1177/2158244015589588

Lawshe, C. H. (1975). A quantitative approach to content validity. *Personnel Psychology, 28*(4), 563–575. https://doi.org/10.1111/j.1744-6570.1975.tb01393.x

Litkowski, E. C., Duncan, R. J., Logan, J. A. R., & Purpura, D. J. (2020). When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 195*, Article 104846. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104846

Lortie-Forgues, H., & Inglis, M. (2019). Rigorous large-scale educational RCTs are often uninformative: Should we be concerned? *Educational Researcher, 48*(3), 158–166. https://doi.org/10.3102/0013189X19832850

Mancl, D. B., Miller, S. P., & Kennedy, M. (2012). Using the concrete-representational-abstract sequence with integrated strategy instruction to teach subtraction with regrouping to students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 27*(4), 152–166. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2012.00363.x

Marley, S. C., & Carbonneau, K. J. (2014). Future directions for theory and research with instructional manipulatives: Commentary on the special issue papers. *Educational*

Psychology Review, 26(1), 91–100. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9259-1

McDougal, E., Silverstein, P., Treleaven, O., Jerrom, L., Gilligan-Lee, K. A., Gilmore, C., & Farran, E. K. (2023). Associations and indirect effects between LEGO® construction and mathematics performance. *Child Development, 94*(5), 1381–1397. https://doi.org/10.1111/cdev.13933

McNeil, N. M., & Fyfe, E. R. (2012). "Concreteness fading" promotes transfer of mathematical knowledge. *Learning and Instruction, 22*(6), 440–448. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.05.001

McNeil, N. M., & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory Into Practice, 46*(4), 309–316. https://doi.org/10.1080/00405840701593899

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L., & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction, 19*(2), 171–184. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.03.005

Mercer, C. D., & Miller, S. P. (1992). Teaching students with learning problems in math to acquire, understand, and apply basic math facts. *Remedial and Special Education, 13*(3), 19–35. https://doi.org/10.1177/074193259201300303

Miller, A. H., Espinas, D. R., McNeish, D., & Barnes, M. A. (2025). Dosage response in intensive mathematics interventions for early elementary students with or at-risk for mathematics learning disability. *Educational*

Psychology Review, 37, Article 91. https://doi.org/10.1007/s10648-025-10070-y

Morsanyi, K., van Bers, B. M. C. W., McCormack, T., & McGourty, J. (2018). The prevalence of specific learning disorder in mathematics and comorbidity with other developmental disorders in primary school-age children. *British Journal of Psychology, 109*(4), 917–940. https://doi.org/10.1111/bjop.12322

Mutlu, Y., & Akgün, L. (2017). Matematik öğrenme güçlüğünü tanılamada yeni bir model önerisi: Çoklu süzgeç modeli. *İlköğretim Online, 16*(3), 1153–1173. https://doi.org/10.17051/ilkonline.2017.330247

Mutlu, Y., Çalışkan, E. F., & Yasul, A. F. (2022). We asked teachers: Do you know what dyscalculia is? *International Online Journal of Primary Education, 11*(2), 361–378. https://doi.org/10.55020/iojpe.1067560

Mutlu, Y., Olkun, S., Akgün, L., & Sarı, M. H. (Ed.). (2020). *Diskalkuli: Matematik öğrenme güçlüğü — Tanımı, özellikleri, yaygınlığı, nedenleri ve tanılanması*. Pegem Akademi. https://doi.org/10.14527/9786257228664

Nelson, G., Crawford, A., Hunt, J., Park, S., Leckie, E., Duarte, A., Brafford, T., Ramos-Duke, M., & Zarate, K. (2022). A systematic review of research syntheses on students with mathematics learning disabilities and difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice, 37*(4), 236–252. https://doi.org/10.1111/ldrp.12272

Nelson, G., & McMaster, K. L. (2019). The effects of early numeracy interventions for students in preschool and early elementary: A meta-analysis. *Journal of Educational*

Psychology, 111(6), 1001–1022. https://doi.org/10.1037/edu0000334

Nelson, G., & Powell, S. R. (2018). A systematic review of longitudinal studies of mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities, 51*(6), 523–539. https://doi.org/10.1177/0022219417714773

Obersteiner, A., Reiss, K., & Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction, 23*, 125–135. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.08.004

Olkun, S., & Akkurt Denizli, Z. (2015). Temel sayı işleme görevleri kullanılarak matematik bozukluğu riskli öğrencilerin belirlenmesi. *Düşünen Adam: The Journal of Psychiatry and Neurological Sciences, 28*(1), 47–57. https://doi.org/10.5350/DAJPN2015280105

Petersen, L. A., & McNeil, N. M. (2013). Effects of perceptually rich manipulatives on preschoolers' counting performance: Established knowledge counts. *Child Development, 84*(3), 1020–1033. https://doi.org/10.1111/cdev.12028

Polit, D. F., Beck, C. T., & Owen, S. V. (2007). Is the CVI an acceptable indicator of content validity? Appraisal and recommendations. *Research in Nursing & Health, 30*(4), 459–467. https://doi.org/10.1002/nur.20199

Stockard, J., Wood, T. W., Coughlin, C., & Rasplica Khoury, C. (2018). The effectiveness of Direct Instruction curricula: A meta-analysis of a half century of research. *Review of Educational Research, 88*(4), 479–507. https://doi.org/10.3102/0034654317751919

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4

Tarlow, K. R. (2017). An improved rank correlation effect size statistic for single-case designs: Baseline Corrected Tau. *Behavior Modification, 41*(4), 427–467. https://doi.org/10.1177/0145445516676750

Tellos, A., & Osana, H. P. (2025). Watch those studs! How prior domain knowledge and extraneous details on LEGO bricks influence children's fraction division. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education, 8*(SI), 241–262. https://doi.org/10.31756/jrsmte.4110SI

Tellos, A., Osana, H. P., & Levin, J. R. (2025). Extraneous details on LEGO bricks can prompt children's inappropriate counting strategies in fraction division problem solving. *Education Sciences, 15*(8), Article 947. https://doi.org/10.3390/educsci15080947

Uttal, D. H., O'Doherty, K., Newland, R., Hand, L. L., & DeLoache, J. S. (2009). Dual representation and the linking of concrete and symbolic representations. *Child Development Perspectives, 3*(3), 156–159. https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00097.x

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology, 18*(1), 37–54. https://doi.org/10.1016/S0193-3973(97)90013-7

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Ed.). Harvard University Press.

Wege, T. E., De Smedt, B., Gilmore, C., & Inglis, M. (2023). Counting many as one: Young children can understand sets as units except when counting. *Journal of Experimental Child Psychology, 225*, Article 105533. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2022.105533

BÖLÜM 5

GERÇEK YAŞAM BAĞLAMINDA MATEMATİKSEL MODELLEME: BAL ARISI PETEKLERİNİN GEOMETRİSİ VE OLUŞUMU

ALATTİN URAL[1]

Giriş

Arının hücrelerinin geometrik şekli, eski zamanlardan beri dikkat çekmiş ve hayranlık uyandırmıştır. Aristoteles (MÖ 384–322), arıların davranışlarını ayrıntılı biçimde inceleyen ilk doğa bilimcilerden biridir. *Historia Animalium* (Hayvanların Tarihi) adlı kitabının 9. bölümünde, peteklerin düzenli geometrik yapısından söz etmiş, ancak nedenini açıklayamamıştır (Thompson, 1917). Varro **(**M.Ö. 36), *De Re Rustica* (Tarım Üzerine) adlı eserinde peteklerin altıgen yapısına dair "boşluk bırakmadan bir alanı kaplayabilen geometrik şekiller (üçgen, kare, altıgen) arasında en az çevre uzunluğuna sahip olması" şeklinde bir açıklama yapmıştır (Hales, 2001). Bu sezgi, yüzyıllar sonra matematiksel olarak kanıtlanacak olan "Petek Varsayımı"nın (*Honeycomb Conjecture*) temelini oluşturmuştur. Antik çağın son büyük Yunan matematikçilerinden biri olan Pappus (MS 290-350) "*Synagoge"* (Koleksiyon) setinin 5.

[1] Prof. Dr., Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi,Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Orcid: 0000-0003-1884-9339

Kitabında, arıların üçgen, kare ya da altıgen seçenekler arasından altıgeni seçmelerinin, minimum balmumuyla maksimum hacim oluşturma açısından belli bir öngörüye sahip olduklarını belirtmiştir.

Erasmus Bartholin 1660 yılında basınç teorisini ileri sürerek; arıların aslında altıgen inşa etmek üzere yola çıkmadıklarını, aslında yan yana dairesel hücreler kazdıklarını ve bu hücrelerin birbirine baskı yaptıkça, aralarındaki zayıf duvarların düzleşerek altıgen şeklini aldığını belirtmiştir (Akt. Thompson, 1917). Darwin (1859), bal peteği yapısını doğal seçilim mekanizması ve "balmumu tasarrufu" üzerinden açıklayarak konuya evrimsel bir perspektif kazandırmıştır (Akt. Hales, 2001). Thompson (1917), bal arılarının balmumunun ya da yaban arılarının kâğıt hamurunun yarı akışkan haldeyken yüzey gerilimiyle altıgen formu alabileceği şeklindeki düşünceyi, şeklin mükemmel derecede pürüzsüz düz yüzeyleri ve sabit açıları nedeniyle daha makul görmüştür. Arıların rolünü ise malzemenin doğasının izin verdiği ölçüde ince tüp şeklinde bir hücre oluşturmak ve bu küçük hücreleri mümkün olduğunca birbirine yakın inşa etmek olarak düşünmüştür. Bununla birlikte, sabun köpüğü deneylerindeki fiziksel süreçlerin burada da geçerli olacağı fikrini benimsemiştir.

18. Yüzyılda birçok matematikçi, hücrelerin tabanının izoperimetrik özelliklerini incelemiştir. MacLaurin (1743) şöyle demiştir: “arıların hücrelerini altıgen şeklinde yapmadaki zekâsı eskiden beri hayranlık uyandırmıştır. Hücreler, altıgen oldukları için, aralarında boşluk bırakmayan herhangi bir düzenli şeklin yüzeylerine oranla en geniş hacimli olanıdır ve aynı zamanda en mükemmel tabanlara sahiptir". Tóth (1964) tarafından yapılan matematiksel çalışmayla, MacLaurin’in (1743) bu bulgusunun doğru olmadığı ispatlanmıştır. Tóth, hücre tabanının iki eşkenar dörtgen ve iki altıgenden oluşan piramidal bir yapıyla da olabileceğini ve bu yapının %0,35 daha verimli olacağını hesaplamıştır. Tóth (1964) bu çalışmasını “eş dışbükey çokyüzlüler”

varsayımı altında sunmuştur. Ancak dışbükeylik varsayımı kısıtlayıcı olduğundan, genel durum için problem uzun süre çözümsüz kalmıştır. Hales (2001), dışbükeylik varsayımını tamamen kaldırarak probleme genel bir çözüm ortaya koymuştur.

Son yıllarda teknolojik araçlarla yapılan gözlemler petek geometrisinin oluşumunun ne içgüdüsel ne de fiziksel süreçlerin otomatik bir sonucu olmadığını göstermiştir. Ayrıca matematikçilerin ortaya koyduğu ispatlar teolojik perspektiften sunulan bal peteğinin "en mükemmel" formda olduğu düşüncesinin de doğru olmadığını göstermektedir (Örn. Tóth, 1964).

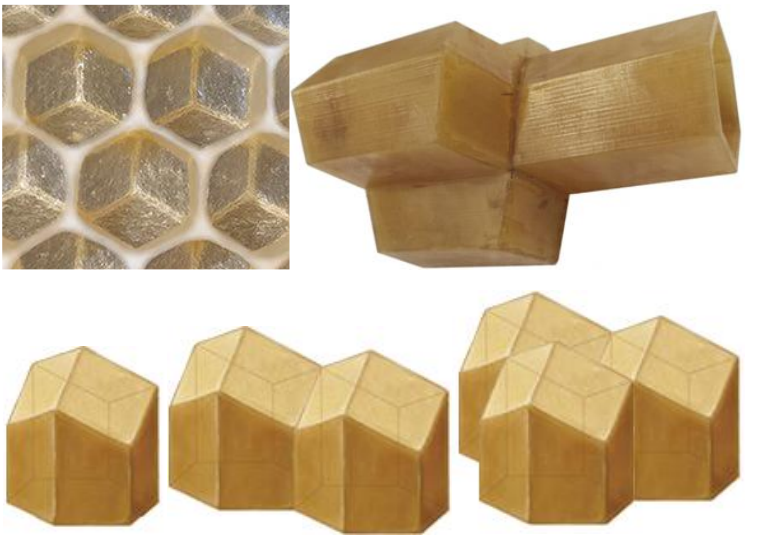
Bal Arılarının Petek Geometrisi ve Optimizasyon Problemi

İşçi arılar, tükettikleri balın şekerini vücutlarında yağa dönüştürerek karınlarındaki mum bezinden sıvı halde dışarı salgılarlar. Bu sıvı salgı hava ile temas ettiği anda katılaşarak küçük, şeffaf bal mumu pulcuklarına dönüşür. Arka bacaklarındaki dikenler yardımıyla bu pulları çekip ağızlarındaki tükürük ve enzim salgılarıyla yumuşatırlar. Peteklerin yapımında bu yumuşak kıvamdaki balmumu kullanılır.



Bal arılarının petekleri, istisnalar dışında, düzgün altıgensel prizmalardan oluşur ve tabanlarında üç eşkenar dörtgenden oluşan piramidal bir yapı bulunur. Diğer taraftan, bal arısı petekleri iki taraflıdır ve iki taraftaki peteklerin tabanları zikzaklı (offset) şekilde iç içe geçmiştir. Böylece petekler oldukça sağlam bir şekilde birleşir ve yerçekimine karşı dayanıklı hâle gelir.

Şekil 1 Petek hücrelerinin geometrik yapısı



- 1712 yılında astronom Giacomo Filippo Maraldi, petek tabanındaki eşkenar dörtgenlerin açılarını ölçmüş ve her birinin geniş açısının yaklaşık 109,5° olduğunu bulmuştur. Yıllar sonra matematikçiler (örn. Samuel König), "En az malzeme ile en fazla hacmi sağlayacak ideal taban açısı nedir?" diye bir hesaplama yaptıklarında, bu açıyı 109°28' olarak bulmuşlardır.
- Eşkenar dörtgenlerin yüzeyleri ile hücre duvarları arasındaki açı yaklaşık 120°'dir.
- Eşkenar dörtgenlerin zeminle arasındaki açı yaklaşık 19,5°'dir. **(**90°-arccos1/3)
- Eşkenar dörtgenlerin birbirleriyle yaptığı açı 120°'dir.

Bal arısı peteklerinin geometrisinin, teknolojik gözlem araçları sayesinde araştırmacıların artık uzlaşı göstereceği bir noktaya, son 20 yılda geldiği söylenebilir. Örneğin Pirk et al. (2004) tarafından yapılan çalışmada; petek tabanlarındaki üç adet eşkenar dörtgenden oluşan piramidal tabanın gerçekte var olmadığını, bunun

bir optik yanılsama olduğu belirtilmiştir. Hepburn et al. (2007), Bauer & Bienefeld (2013) ve Pakutsa & Zaborovskyi (2022) tarafından yapılan çalışmalarla, tabanda gerçekten 3 adet eşkenar dörtgenli piramidal yapının var olduğu ispatlanmıştır.

Bu geometrik formun hangi optimizasyon probleminin çözümü olduğu şu şekilde ele alınabilir:

Temel Problem:

Bir arı 1 kilo balmumu üretmek için ortalama 8 kilo bal tüketir. Bu, balmumunun ne kadar değerli ve enerji yoğun bir malzeme olduğunu gösterir. Bu yüzden en az balmumuyla (yüzey alanı) en çok balı depolamaları (hacim) oldukça önemlidir. Arılar, en az balmumu kullanarak, en fazla balı depolayabilecekleri, dayanıklı (balın ve yerçekiminin baskısına karşı), peteklerin inşa edileceği hacmi en verimli şekilde kullandıkları bir depolamayı hangi geometrik cisimleri kullanarak oluşturabilir?

Kısıtlar:

- Balmumunun enerji yoğun bir hammadde olması nedeniyle minimum düzeyde kullanılması gerekir. Dolayısıyla peteklerin yüzey alanları toplamı minimum olmalı
- Petek bölgesi (kovuk, oyuk) verimli kullanılmalı (örn. petekler arası boşluk kalmamalı, çift yönlü petek kullanılmalı)
- İki taraflı petekler yerçekimine karşı sağlam durmalı

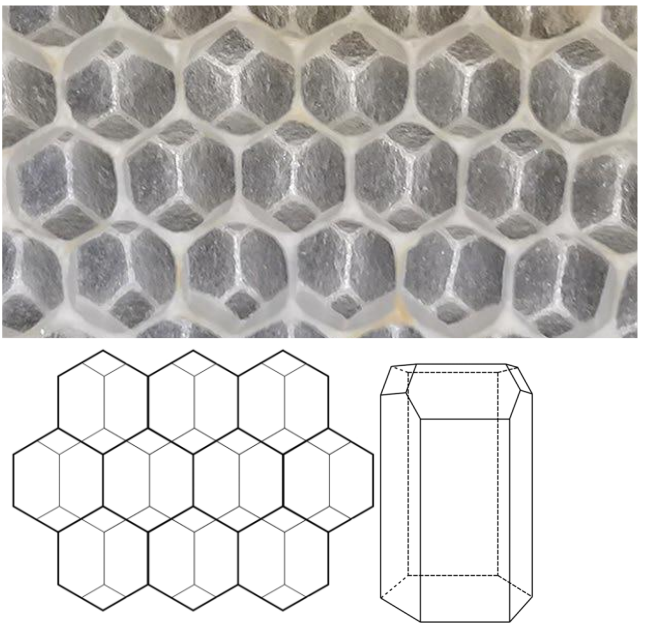
Tóth (1964), iki eşkenar dörtgen ve iki altıgenden oluşan piramidal tabanlı altıgen prizmanın, klasik petek yapısına göre %0,35 daha verimli (aynı hacim için daha az yüzey alanı) olacağını hesaplanmıştır. Ancak arıların yaptığı 3 eşkenar dörtgenli yapının pratik ve inşa edilebilirlik sınırlılığında uygun olduğunu belirtmiştir.

Dauter & Jaskolski (2025) tarafından bal peteklerinin çeşitliliği, topolojisi ve simetrisi üzerine yapılan simülasyon matematiksel modelleme çalışmasında, düzenli altıgen hücrelerden oluşan simetrik ve periyodik çift katmanlı arı petekleri için sadece dört olası taban topolojisi olduğu ortaya konmuştur:

- 444 (Klasik): Arıların evrensel olarak kullandığı, üç eşkenar dörtgenden oluşan piramidal taban.
- 6464 (Fejes Tóth): İki altıgen ve iki dörtgenden oluşan bir taban.
- 644: Bir altıgen ve iki dörtgenden oluşan, yeni tanımlanan topoloji.
- 6 (Düz): Çok düşük balmumu ekonomisine sahip düz altıgen tabanlı.

En Verimli Yapının Keşfi: Fejes Tóth'un 1964'te önerdiği 6464 modelinin, parametreleri optimize edilerek daha da geliştirilebileceği ispatlanmıştır. Fejes Tóth modelinin tabanındaki altıgen ve dörtgenlerin kenar uzunluk oranları ile birleşme açıları yüzey alanını mutlak minimuma indirecek şekilde esnetilmiştir. "En iyi" olarak adlandırılan bu yeni optimize edilmiş 6464 yapısı, klasik 444 yapısından **%**0,50 ve Fejes Tóth varyantından da %0,15 daha verimlidir. Düz altıgen taban ise en verimsiz taban olup, %18,85 daha fazla malzeme gerektirir. Bu sonuçlar, arıların kullandığı yapının oldukça verimli olduğunu, ancak matematiksel olarak "mutlak en iyisi" olmadığını; daha karmaşık olan 6464 yapısının ise teorik olarak daha verimli olduğunu göstermektedir (Dauter & Jaskolski, 2025).

Şekil 2 Tóth 6464 Petek Yapısı



Yang et al. (2022)

Tóth (1964) tarafından teorize edilen 6464 yapısının, arıların biyolojik ve zihinsel yeterlilikleriyle uyumlu olmadığı yönünde argümanlar üretilmiştir. Bu yaklaşımı benimseyen yorumcular, yapının karmaşıklığı nedeniyle doğal süreçlerde doğrudan gözlemlenmesinin zor olduğunu savunmuşlardır. Ancak, Yang et al. (2022) tarafından yapılan çalışmada; arıların (hem İtalyan hem Çin arıları) peteklerini yaklaşık %18 oranında 6464 formunda inşa ettikleri tespit edilmiştir. Arıların sadece tek bir şablonu (444 formu) takip etmedikleri, inşaat sırasındaki yer kısıtlılığına veya komşu hücrelerin durumuna göre geometriyi esnetebildikleri belirtilmiştir. Arıların %18 oranında Tóth yapısını kullanması, onların bu yapıyı "yeterince iyi ve inşa etmesi en kolay" olanı olarak tercih etmediklerini, ancak bazı problematik durumları çözmek için kullandıklarını göstermektedir. Yani, Tóth yapısının yerel bir çözüm, klasik yapının ise genel bir çözüm olduğu düşünülebilir.

6464 yapısında matematiksel olarak parametre sayısı artar, yerel kural uzayı büyür, hata olasılığı artar, yapımı daha karmaşıktır. Dolayısıyla ortaya konacak olan optimizasyon probleminin parametreleri; "Fonksiyonel Verimlilik", "Minimum Yüzey Alanı", "Kolay İnşa Edilebilirlik", "Hata Olasılığı", "Maksimum Hacim" olarak belirlenebilir. Bu parametreleri en iyi hale getiren topolojinin üç eşkenar dörtgen tabanlı düzgün altıgen prizma olduğu söylenebilir.

Arı peteklerinin taban yapısı geometrik olarak düz olmasa da, minimum yüzey alanı ile maksimum hacim optimizasyonunu doğrulamak adına düz tabanlı prizmalar üzerinden bir analiz yapılması metodolojik açıdan kolaylık sağlamaktadır. Bu doğrultuda, aşağıda yer alan matematiksel modelleme, geometrik formların malzeme tasarrufu ve depolama kapasitesi açısından sergilediği teorik sınırları ortaya koymaktadır.

Matematiksel modelleme problemi:

Hangi düzgün çokgensel prizmalar kullanılarak; minimum yüzey alanına ve maksimum hacme sahip bir depolama bölgesi oluşturulabilir?

Kısıtlar: Minimum yüzey alanı, peteklerin düz tabanlı prizma olması

Değişken: "n" (düzgün çokgensel prizmanın tabanındaki çokgenin kenar sayısı)

Amaç Fonksiyonu: $MaxV_n$ (Depolama bölgesinin maksimum hacmi)

Matematiksel Çalışma:

Bir prizma, tabanındaki çokgenin üst üste konulması olarak göz önüne alındığında, yukarıdaki problem aşağıdaki probleme indirgenebilir ve ortaya çıkan sonuç problemin çözümünü oluşturur.

"Hangi geometrik şekil kullanılarak; minimum uzunluğa ve maksimum alana sahip hücrelerden oluşan bir depolama bölgesi oluşturulabilir?"

Kısıt: Minimum uzunluk

Değişken: "n" (düzgün çokgenin kenar sayısı)

Amaç Fonksiyonu: $MaxA_n$ (Depolama bölgesinin maksimum alanı)

Bir düzgün n-genin bir iç açısı 180-(360/n) derecedir. Bu düzgün çokgenler arasında boşluk kalmaması için birbirine yaslanan komşu çokgenlerin köşelerine ait iç açıları toplamı 360 derece olmalıdır. Başka bir ifadeyle, bir iç açının bir doğal sayı katı 360 derece olmalıdır.

$$k.\left(180 - \frac{360}{n}\right) = 360$$

$$k.\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 2$$

$$k = \frac{2n}{n-2}$$

$$k = \frac{2n}{n-2}$$

$$k = 2 + \frac{4}{n-2}$$

k'nin doğal sayı olması için n=3, 4 ya da 6 olabilir. Dolayısıyla düzgün 3-gen (eşkenar üçgen), düzgün 4-gen (kare) ya da düzgün 6-gen kullanılarak oluşturulan peteklerin arasında boşluk kalmaz. Bu noktada çözülmesi gereken problem şudur:

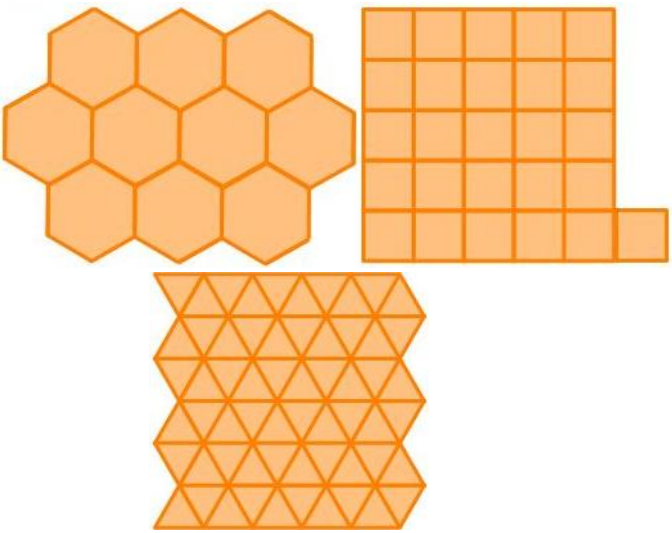
Eşkenar üçgen, kare ya da düzgün 6-genden hangisiyle petek alanı (ızgara) oluşturulduğunda en az uzunluk kullanılarak en fazla alan oluşur?

Düzgün altıgen ızgaranın (petek yapısının) en küçük uzunluğa ve en fazla alana sahip olduğu şeklinde bilinen “Petek Varsayımı”, Hales (2001) tarafından matematiksel olarak kanıtlanmıştır. Hales, bu çalışmasında antik çağlardan (M.Ö. 36, Marcus Terentius Varro) beri öne sürülen ancak ispatlanamayan şu teoremi matematiksel olarak ispatlamıştır:

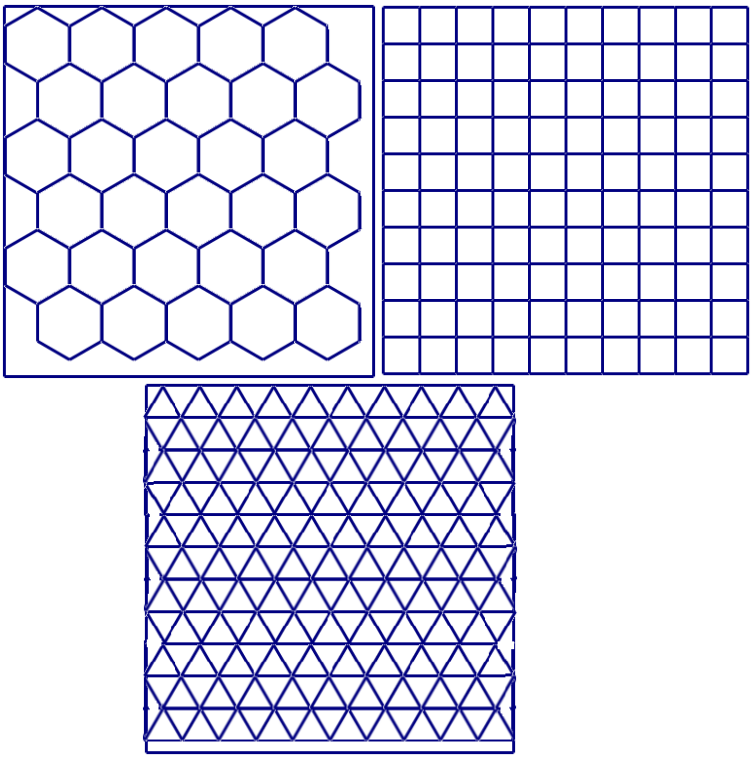
"Düzlemi eşit alanlı bölgelere ayırmanın, toplam çevre uzunluğunu (duvar miktarını) minimize eden en verimli yolu düzgün altıgen ızgaradır."

Bunun doğruluğu, 3 farklı informal yaklaşımla sayısal olarak değerlendirilebilir.

Örneğin, kenar uzunluğu 1 br olan düzgün 6-gen, kare veya eşkenar üçgenlerle aynı alanı (26 br^2) oluşturup uzunlukları ölçtüğümüzde sırasıyla 41, 63 ve 101 br çıkar. Aynı alan için en az uzunluk 6-gende olmuştur.



Bir kenarı 1 br olan eşkenar üçgen, kare veya düzgün altıgenlerle 10x10 br’lik bir kareyi dolduralım.



	Sayısı	Alanı	Toplam uzunluk	Alan/Uzunluk Oranı
Dzg. 6-gen	30	$45\sqrt{3}\approx 78$	111	0,702
Kare	100	100	220	0,45
Eşk. 3-gen	209	90,5	325	0,278

Görüldüğü gibi, düzgün altıgen petek yapısında alanın %78'i doluyor; ancak kareye göre %50, eşkenar üçgene göre ise yaklaşık %65 daha az uzunluk (bal mumu) gereklidir. Diğer taraftan; minimum uzunluk kısıtlaması temelinde maksimum alan şeklindeki

optimizasyon sorusunun cevabını bulmak için "Alan/Uzunluk" oranı (verimlilik) açık ara en fazla düzgün altıgende ortaya çıkmıştır.

Alanları eşit (A) kare, eşkenar üçgen ve düzgün 6-genin uzunlukları sırasıyla; $4\sqrt{A}$, $4{,}56\sqrt{A}$ ve $3{,}72\sqrt{A}$ olur. Böylece, en kısa uzunluk düzgün 6-gende oluşur.

Sonuç olarak; düzgün altıgensel prizma, yapı birimlerinin eş prizmalar olması şartıyla, "minimum yüzey alanı-maksimum hacim" oluşturan petek yapı birimidir.

Peteklerin Oluşumu

Bal arılarının petek yapısı konusundaki diğer bir önemli soru ise üç eşkenar dörtgenli piramidal tabanlı düzgün altıgensel prizma geometrisine sahip peteklerin nasıl oluştuğudur. 17. Yüzyıla kadar genel görüş, "bu kadar karmaşık ve mükemmel (hatasız) bir yapıyı arılar yapamayacağından, bu durum ancak Tanrı'nın sayesindedir" türünden açıklamaların yapıldığı "Doğa Teolojisi"dir. Daha sonraki yıllarda bu görüş devam etse de, konuya ilk açıklama bunun fiziksel ve matematiksel yasaların bir sonucu olduğudur. Arıların rolü ise yalnızca yuvarlak çukurları eşzamanlı olarak açıp genişletmektir. Daha sonra, yüzey gerilimiyle birlikte bu silindirlerin mevcut petek formuna birden geçeceği düşünülmüştür. Bu düşünceye daha sonra arıların da bir ölçüde katkısının olduğu eklenmiştir. Bu katkı, balmumunun arılar tarafından ısıtılarak akışkan hâle getirildiği ve silindirler arasındaki boşluklara aşamalı olarak konularak silindirik yüzeylerin yüzey gerilimi vb. fiziksel etkilerle düzleştiğidir. Bal peteklerinin bu geometrisinin arılar tarafından mı yoksa fiziksel süreçler sayesinde kendiliğinden mi oluştuğu sorusunun yanıtında tam bir uzlaşı olmamakla beraber, son araştırmalar büyük ölçüde arıların aktif rolünü vurgulamakla birlikte, fiziksel yasaların da etkisinin önemli olduğu temelinde hibrit bir modeli benimsemektedir. Diğer taraftan, Darwin de bu konuyla oldukça ilgilenmiş ve evrimsel teori temelinde bir yanıt sunmuştur. Kısaca, bu yapıyı tesadüfen yapabilen koloniler "en az balmumuyla en fazla

balı depolayabildikleri" için hayatta kalıp günümüze kadar gelmiş; diğer geometrileri yapanlar ise yok olmuştur. Petek geometrisinin karmaşık yapısı ile arıların bilişsel sınırları pek uyumlu görünmediğinden, bir arı kolonisinin başlangıçta tesadüfen böyle bir yapıyı ortaya koyabileceği şeklindeki açıklamalar, sorunun yanıtı olarak tatmin edici görünmemektedir, zira o tarihten bu yana araştırmacılar bu sorunun yanıtını oluşturabilmek için onlarca araştırma yapmış ve yapmaya da devam etmektedir. Dolayısıyla, doğa teolojisi ve Darwin bu peteklerin nasıl oluştuğuna dair bir bilgi vermemektedir.

Termomekanik Model, sıvı denge süreci: Fizik ve matematik yasalarının otomatik sonucu olarak petek oluşumu

Pirk et al. (2004) tarafından yapılan "Bal arısı petekleri: sıvı denge süreciyle mi oluşuyor?" adlı çalışmanın temel önerisi, peteklerin düzenli geometrik yapısının arıların bilinçli geometrik tasarımından ziyade, balmumu ile fiziksel kuvvetlerin etkileşiminden doğan kendiliğinden bir düzenlenme süreciyle açıklanabileceğidir. Yaptıkları deneysel çalışmada, silindirik kauçuk tıkaçlar arasına çeşitli erimiş balmumlarını (45–83 °C) dökerek, balmumunun soğuma sürecinde aldığı şekli incelemiş ve altıgene dönüştüğünü gözlemlemişlerdir.

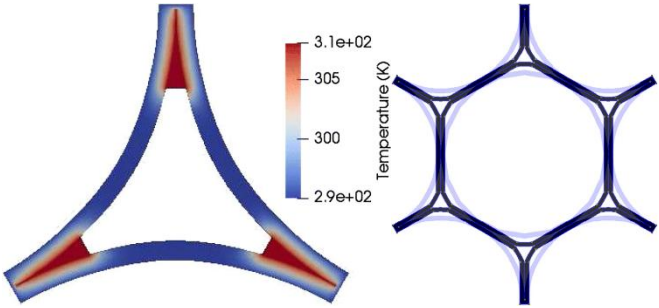
Ayrıca sıcaklık sensörleri kullanarak, gerçek bir gözlem kovanında yapım faaliyetinin gerçekleştiği "alanlarda" sıcaklığın 35-37°C'ye ulaştığını tespit etmişler, ancak yapım faaliyetinin gerçekleştiği "noktada" tam olarak ölçüm yapamadıklarını, bu yüzden bu bölgedeki sıcaklığın muhtemelen daha yüksek olacağını belirtmişlerdir. Bu görüşlerini desteklemek için; Bujok et al. (2002) tarafından yapılan çalışmada, arıların peteklerin içinde 40 °C'nin üzerine kadar ısındıkları ve bunun da balmumunun termoplastik davranışını optimize edeceği (Hepburn, 1986) belirtilmiştir.

Arıların bal mumu hücrelerini önce silindirik (tabanı daire gibi) şekilde oluşturdukları, ardından 37-40 °C dereceye kadar ısıttıkları balmumunu üç komşu silindirin temas noktalarına bıraktıkları böylece balmumu damlasının üçlü bağlantının merkezine doğru aktığı ve dairesel kenarların temas noktasının üçlü bağlantının merkezine doğru kademeli olarak ilerlediği ileri sürülmüştür. Yani bu sürecin termodinamik bir dengenin sonucu olduğunu ve bunun teorik olarak mümkün olduğunu belirtmişlerdir.

Diğer taraftan Pirk et al. (2004), hücre tabanındaki "üç eşkenar dörtgenli yapının" aslında fiziksel olarak mevcut olmadığını; bu durumun yarı saydam peteklerdeki iki taraflı altıgen diziliminin üst üste binmesinden kaynaklanan bir optik yanılsama olduğunu belirtmişlerdir.

Talukdar & Dutta (2019), bu dönüşümün balmumunun tamamen erime noktasına ulaşmasını gerektirmeyebileceğini öne sürerek, üç komşu dairesel hücre duvarının oluşturduğu üçlü birleşme bölgelerinde meydana gelen sıcaklık gradyanını bilgisayar simülasyonlarıyla incelemişlerdir. Araştırmacılar, balmumunun termal ve mekanik özelliklerini modele dahil ederek, sıcak bölgelerdeki sıcaklık artışının hücre duvarlarında gerilme oluşturacağını ve bu gerilmelerin başlangıçtaki dairesel hücre duvarlarında kalıcı deformasyona yol açabileceğini, bu deformasyonların sonucunda da başlangıçta dairesel olan hücrelerin yuvarlatılmış altıgen biçime dönüşebileceğini ileri sürmüşlerdir.

Şekil 3 Talukdar & Dutta (2019)'a göre peteklerin oluşumu



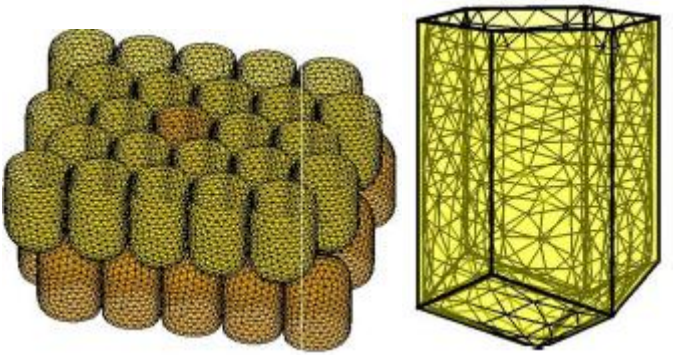
Talukdar & Dutta (2019)

Karihaloo et al. (2013) tarafından yapılan çalışmada, çembersel peteklerin altıgenlere dönüşümünü açıklamak için geliştirilen matematiksel modelle sürecin şu şekilde olabileceği ileri sürülmüştür: Bitişik ve zıt dairesel tüplerde yan yana çalışan bireysel işçi arılar, dairesel hücreleri inşa eder. Sıcak işçi arılar, üçlü birleşim yerlerinin yakınındaki balmumu pullarını yaklaşık 45 °C'de viskoelastik olarak akana kadar yoğurur ve ısıtır. Bu şekilde, komşu dairesel hücreler arasındaki üçlü birleşim yerlerinde içbükey bir menisküse sahip viskoz bir sıvı (veya yarı katı) köprü oluşur. Bu köprünün yüzey gerilimi nedeniyle birleşim yerinde negatif bir basınç oluşur; bu da hücre duvarlarında gerilme oluşmasına neden olur. Böylece duvarlar bu işlem sırasında sürekli olarak gerilir. Bitişik duvarlar kademeli olarak birbirine kaynaşarak aralarındaki temas alanını artırır ve yüzeyleri düzleşir. Çalışmada, kızılötesi kameralarla, işçi arıların yapım faaliyetleri duman verilerek kesintiye uğratıldığında, petek yapısının fotoğrafları çekilmiş ve petek hücrelerinin "doğum anında" (inşanın en başında) daire şeklinde olduğu, ancak inşa süreci devam ederken hızla yuvarlatılmış altıgen forma dönüştüğü gözlemlenmiştir.

Jeong et al. (2019) tarafından yapılan matematiksel modelleme ve simülasyon, silindir hücrelerin, hücrenin tüm tarafına etki eden bir kuvvet olması şartıyla, altıgene ve yarım küre tabanın

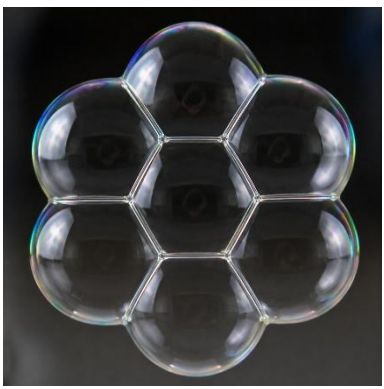
rombohedral (eşkenar dörtgenli 6 yüzlü) yüzeye dönüştüğünü ortaya koymuştur.

Şekil 4 Çift taraflı silindirlerin yüzey gerilimiyle petek yapısına dönüşümüne ilişkin simülasyon görüntüsü



Jeong et al. (2019)

Sabun Köpüğü Deneyleri: Sabun köpüğü deneylerinden elde edilen sonuçlar her ne kadar yukarıdaki araştırmaların fikirlerinden bir ölçüde farklı olsa da fiziksel güçlerin (yüzey gerilimi) petek yapısını oluşturmadaki etkisini göstermesi açısından fikir verici kabul edilmektedir.



Plateau Kanunları, 19. yüzyılda Belçikalı fizikçi Joseph Plateau tarafından formüle edilen, sabun köpükleri ve sabun zarlarının oluşturduğu minimal yüzeylerin geometrik yapılarını

açıklayan temel kurallardır. Plateau Kanunları'nın temel özellikleri şunlardır:

- Yapısal Bütünlük: Sabun zarları, pürüzsüz ve düzgün yüzey parçalarından oluşur.
- Minimal Yüzey: Sabun zarları, çevreledikleri hacim için mümkün olan en az yüzey alanını kaplar (enerji minimizasyonu).
- Eğrilik: Her bir düzgün zar parçasının ortalama eğriliği her noktada sıfırdır.
- Buluşma Açıları: Sabun zarlarının (filmlerinin) yalnızca üç tanesi bir kenarda 120 derecelik açılarla buluşabilir.
- Düğüm Noktaları: Dört sabun zarı kenarı, bir düğüm noktasında (tepe) yaklaşık 109,5 derece (tetrahedron açısı) ile birleşir.

Arılar petek tabanını inşa ederken, her bir hücrenin tabanı karşı taraftaki 3 hücrenin birleşme noktasına denk gelir. Bu noktada oluşan üç eşkenar dörtgen, sabun köpüklerinin doğal olarak aldığı "minimum alan" formunu taklit eder.

Arıların aktif olarak tüm yapıyı kendilerinin inşa etmesi

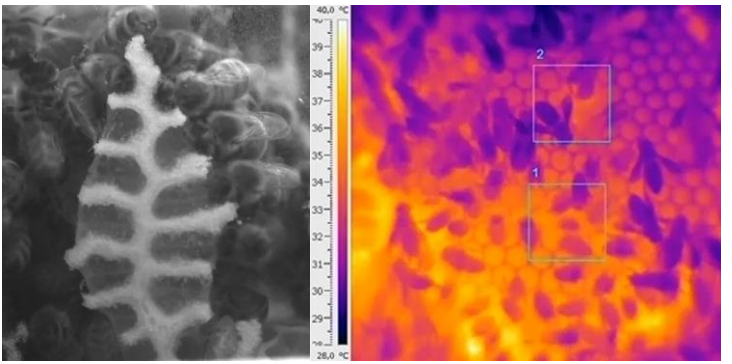
Bauer & Bienefeld (2013) tarafından yapılan “bal arılarının altıgen petek hücreleri sıvı denge süreciyle oluşmaz” adlı makalede arıların tüm yapıyı aktif olarak inşa ettikleri tespit edilmiştir. Çalışmada arıların inşaat davranışları, 24 saat boyunca yüksek çözünürlüklü kızılötesi ve termografik kameralarla kesintisiz olarak izlenmiştir.



Elde edilen bulgular şunlardır:

- Arılar, petekleri şekillendirmek için çenelerini, gerekli kuvveti iletmek için bacaklarını ve petekleri tanımlamak (ölçüm) için antenlerini kullanmaktadır. Başlarını sola-sağa ve yukarı hareket ettirerek, çenelerini balmumu üzerinde kaydırarak hücre tabanını ve duvarlarını mekanik olarak inşa etmektedirler.
- Hücre temellerinin inşasının çok erken aşaması dışında, yuvarlak öncü hücrelere rastlanmamıştır.
- Duvarların yukarı doğru inşasına başlandıktan sonra, üç alt plaka eşkenar dörtgen şeklini almış ve hücre altıgen bir form kazanmıştır.
- Arılar genellikle (%88) bitişik hücreye de geçmiştir
- Tek tek işçi arılar tarafından, öncü bir yapıya ihtiyaç duyulmadan 120° açıyla bitişik alt plakalar oluşturulmuştur.
- Arılar göğüs kafeslerinde aktif olarak ısı üretmekte ve bu ısı şekillendirme çalışmaları sırasında temas yoluyla balmumuna iletilmektedir.

- Yapımcıların göğüs sıcaklıkları 32,3 ile 39,6 °C arasında değişmiştir ve bu da 33,6 ile 37,8 °C arasında balmumu sıcaklıkları oluşturmuştur.
- Mum yoğundu ve gözlemlenen yapılandırma sıcaklıklarının hiçbirinde sıvı denge durumuna (akışkan) girmemiştir.
- Arılar, kesilmiş petek hücrelerinin onarımı sırasında izlenmiş, üç denemede ortalama maksimum 36,4 ± 1,3 °C sıcaklıkta altıgen hücreler üretilmiştir.

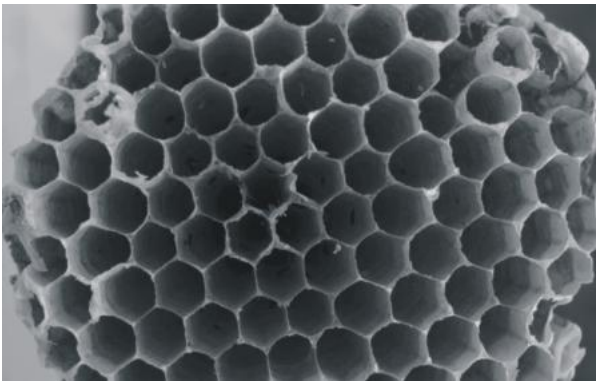


Çalışmada sıvı denge teorisine dayalı şu eleştiriler yapılmıştır:

- Mevcut çalışmanın sonuçları, gelişmekte olan hücrelerin geometrisinin, sıvı denge hipotezi tarafından öne sürülen kendiliğinden organize olma süreciyle değil, mekanik şekillendirme ile oluşturulduğunu göstermektedir. Altıgen hücre formunun mekanik şekillendirme ile oluşturulduğuna dair daha fazla kanıt, selülozdan yapılmış ve bu nedenle termoplastik özellikten yoksun olan ve tükürük kullanılarak yumuşatılması gereken sosyal yaban arılarının yuvalarında bulunabilir. Sosyal yaban arıları ve birçok arı, genellikle tükürükle macun hâline getirilmiş bitkisel maddelerden çok güzel "petek" yuvaları inşa eder ve bu petekleri oluşturan sık yerleştirilmiş kâğıtsı hücreler, kovan arısının balmumu

hücreleri kadar düzenli altıgen şeklindedir (Thompson, 1917).

Şekil 5 Yaban arısı peteği



Thompson (1917)

- Tautz (2008), akışkan balmumu fikrine dayalı sıvı denge durumunu başlatmak için 40 °C'lik bir balmumu sıcaklığının gerekli olduğunu belirtmiştir. Ancak hücre yapım süreci sırasında bu balmumu sıcaklığına asla ulaşılamamıştır. Bununla birlikte, balmumu, işçi arılar tarafından ısıtılıp esnekliği artırılarak şekillenmesi kolaylaşmıştır. Benzer bir bulgu Kurstjens et al. (1985) tarafından da ortaya konmuştur.
- Yeni hücre temellerinin eklendiği tarak kenarında, inşaatçıların sıcaklıkları, altıgen hücre duvarlarının inşa edildiği tarağın merkezine doğru olan sıcaklıklardan önemli ölçüde daha yüksekti (36,1 ± 1,2 °C'ye karşılık 34,9 ± 1,0 °C). Bu nedenle, hücre yapımı sırasında sıcaklıktaki artışın, temellerin oluşturulması için önemli olduğu, ancak altıgen hücre şekli için önemli olmadığı görülmüştür.
- Buchwald et al. (2008) petek balmumunun 40,4 ± 0,72 °C'de erimeye başladığını gösterirken, Kurstjens et al. (1985), balmumunun mukavemeti ve sertliği üzerinde 40 °C'de sıçrama etkisi olduğuna dair hiçbir kanıt bulamamıştır. Bal

mumunun mukavemetinin, 25 ila 45 °C arasında artan sıcaklıklarla nispeten doğrusal olarak azaldığı ve 40 °C'de aniden bir sıçrama yaparak azalmadığı, 40 °C'deki sertliğin (yaklaşık 5 MPa), 35 °C'deki sertlikten daha az olmadığı belirtilmiştir.

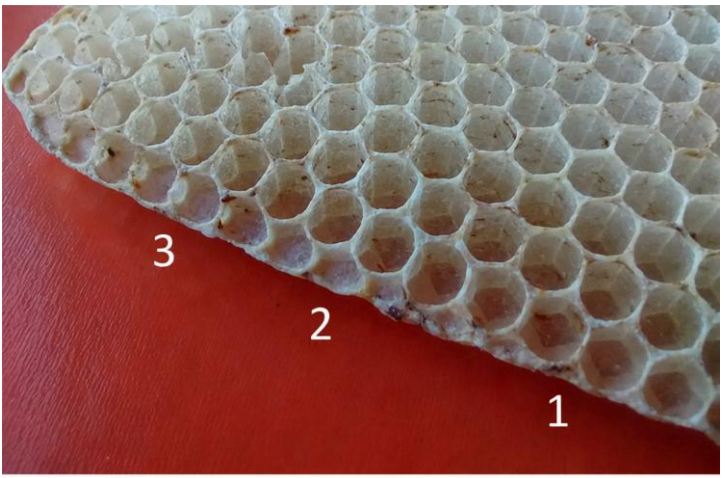
Çalışmada ortaya konulan bu karşı argümanlara ilaveten Pirk et al. (2004)'ün belirttiği sıvı denge teorisine ilişkin şu hususlar da eklenebilir:

- Yang et al. (2022) tarafından yapılan çalışmada, arıların sadece eşkenar dörtgen değil, Fejes Tóth hücreleri gibi farklı geometrik şekilleri de inşa edebildikleri gösterilmiş ve arıların duruma göre karar veren "aktif mimarlar" olduğu belirtilmiştir.
- Eğer balmumu Pirk et al. (2004) tarafından yapılan çalışmada belirtildiği gibi, akışkan olsaydı, yerçekimi nedeniyle peteğin hassas yapısı aşağı doğru sarkar veya deforme olurdu.
- Gallo & Chittka (2018) arıların çiğneme ve nemlendirme işlemiyle yumuşatılmış balmumu toplarından yapılmış bir bloktan önce tabanı şekillendirerek eşkenar dörtgen tabanlar yaptıklarını belirtmişlerdir.
- Pakutsa & Zaborovskyi (2022) tarafından yapılan çalışmada, arıların petek hücrelerinin tabanlarını geleneksel tetrahedral yapıdan farklı olarak "eğik üçgen prizma" şeklinde de yaptıkları gözlemlenmiştir.
- Dutta (2021) tarafından yapılan çalışmada, çok bileşenli bir yapıya sahip olan balmumunun bileşenlerinin 39-64 °C aralığında farklı değerlerde eridiği; petek yapımına ilişkin deneysel gözlemler ve termogram kayıtlarının, petek yapıcı arıların göğüs sıcaklıklarını 32,3-39,6 °C aralığına getirerek

balmumunu aktif olarak ısıttığını ve balmumu sıcaklığının asla 37,8 °C'yi aşmadığı belirtilmiştir.

- Peteklerde, gereksinim (işçi ve erkek arıların farklı büyüklükte olması nedeniyle "geçiş hücreleri" gibi düzensizlikler, doğal ya da yapay engeller), bireysel hatalar (dikkatsizlik, yeterince özenli ve hassas davranılmaması) nedeniyle farklı ölçülerde, şekillerde (beşgen, yedigen) ve formlarda (bükümlü, aşağıdan yukarıya ya da yanlardan petek örme) farklılıklar olabilmektedir. Arılar düzensizlikleri, hataları gidermek için onarım yapabilmekte veya söküp yeniden inşa edebilmektedir. Diğer taraftan, Darchen (1956), peteklerin ilk bakışta göründükleri kadar tekdüze (uniform) olmadıklarını, hatta tıpatıp aynısı olan iki hücrenin bile bulunmadığını, arıların çevre koşullarına göre hücre boyutlarında anlık "mikro ayarlamalar" yaptığını kanıtlamıştır. Araştırmalar, peteklerin kusursuz matematiksel kalıplar değil, arıların esnek davranışlarıyla oluşan kendine has yapılar olduğunu doğrulamaktadır. Bu durum, petek formunun oluşumunda arıların aktif, bilinçli bir rolünün olduğunu ve bunun fiziksel ve matematiksel yasaların otomatik bir sonucu olmadığını göstermektedir.
- Şekil 6'da hücre oluşumunun aşamaları görülmektedir: hücre tabanının inşaatı, önceden var olan iki hücre arasındaki oyukta başlatılır (b1), hücre tabanı hücre çapı kadar büyük olduğunda duvarlar başlatılır (b2), duvarlar ilk oluşumu (b3) (Nazzi, 2016).

Şekil 6 Hücre oluşumunun aşamaları



Nazzi (2016)

Buradan arıların aktif olarak peteği kendilerinin yaptıkları söylenebilir.

Petek Geometrisinin Evrimsel Gelişimi

Dünyanın en önde gelen arı paleontologlarından biri olan Engel, 1999 yılında yayımlanan "Günümüz ve Fosil Bal Arılarının Taksonomisi" adlı makalesinde; bal arılarının (*Apis*) en dikkat çekici davranışsal ortak türemiş özelliğinin, ayrı hücreler inşa eden iğnesiz arıların (Meliponini) aksine, çift taraflı, ortak duvarların kullanıldığı ve dikey olarak oluşturulan petekler inşa etmeleri olduğunu belirtmiştir. Engel, modern bal arılarında görülen bu karmaşık mimarinin muhtemelen Miyosen dönemine kadar (5-23 milyon yıl önce) standartlaştığını belirtir.

Zhang (1989), Çin'deki Shanwang fosil yataklarında bulunan çok iyi korunmuş bal arısı petek fosillerinden hareketle, yaklaşık 17 milyon yıl önce arıların altıgen yapıyı çözdüğünü; ancak hücre tabanlarındaki "kayık yerleşim" (offset) ve piramidal derinliğin bugünkü kadar homojen olmadığını belirtir.

Cope (2022:11) tarafından yapılan “Bal peteğinin evrimi” adlı çalışmada mühendislik bilimi perspektifinden bal peteği incelenmiştir. Elde edilen bulgulardan birisi şu şekilde belirtilmiştir:

> Sertlik, arıların ve yaban arılarının yuvalarının gücünü artırmaya çalışırken önemli olabilecek yapısal değişkenlerden yalnızca biridir. Sertliğe ek olarak, köşe yuvarlamanın köşe gerilimini azalttığı ve böylece peteklerin yapıda çatlaklar oluşmadan önce dayanabileceği kuvveti artırdığı bulunmuştur. Çatlaklar, keskin köşeleri olan hücrelerde köşelerde oluşma eğilimindedir ve köşe yuvarlama, her köşenin çatlak oluşmadan önce daha fazla basıncı emebilmesi için gerilimi yeniden dağıtır. İlginç bir şekilde, köşe yuvarlamanın gerilim üzerindeki etkisi, duvarların uzunluklarına göre nispi kalınlıklarına bağlıdır. Nispeten kalın duvarlı hücrelere köşe yuvarlama eklemek, köşe gerilimini önemli ölçüde azaltırken, nispeten ince duvarlı hücrelere köşe yuvarlama eklemek aslında gerilimi artırır ve genel yapıyı zayıflatır. Bu nedenle, daha kalın duvarlı hücreler inşa eden türlerin, daha ince duvarlı hücreler inşa edenlere göre köşe yuvarlamaya daha fazla yatırım yapacağını öngördük ve bu hem mellifera içinde hem de arı ve yaban arısı türleri arasında karşılaştırma yaptığımızda desteklendi. Bu ve diğer bulgular, arıların yuvalarını inşa etmek için en az malzeme kullanımıyla petek mukavemetini en üst düzeye çıkarmak amacıyla, her yuva hücresinin yapısını ince ayar yapacak şekilde evrimleştiklerini göstermektedir.

Arıların, güvenlik nedeniyle açık alandan kapalı kovuğa geçişi ve çiçeklerin olmadığı dönemlerde (kışın veya kuraklıkta) hayatta kalabilmek için kovuk gibi kısıtlı bir hacimde en fazla balı depolama zorunlulukları, mevcut petek geometrisinin oluşumuna zemin hazırlamıştır. Fosil kayıtları ve bugün yaşayan "ilkel" arı türleri (örneğin *Meliponini*) karşılaştırıldığında, evrimsel ağacın alt dallarında mimarinin dairesel ve birbirinden bağımsız olduğu görülür. Bulunan fosillerdeki hücreler arası boşlukların ölçülmesiyle, bal arılarının (*Apis*) zamanla hücreleri birbirine yaklaştırdıkları ve ortak duvar kullanımına yöneldikleri izlenmiştir. Miyosen dönemine ait kayaç fosillerinde, modern bal arılarının atalarının (*Apis* cinsi) bugünküne çok benzer altıgen hücreler inşa

ettiği fiziksel olarak görülmüştür. Bal arısı, çift taraflı piramidal tabanlı altıgen petek yapısı sayesinde; daha az enerji, daha fazla bal, daha fazla yavru avantajı sayesinde dünyanın çok farklı coğrafyalarına yayılabilirken, bugün hâlâ "verimsiz" denilen ayrık dairesel hücre yapan arıların neredeyse tamamının yiyeceğin yıl boyu bulunduğu tropikal bölgelere yayıldığı görülür ve bunların soyu tükenmekle karşı karşıyadır (Raffiudin, 2002; Michener, 2007; Roubik, 1989). Örneğin, Meksika arısı olarak bilinen Melipona Domestica (iğnesiz arı türü), diğer arılardan farklı olarak oldukça yuvarlak ve daha pürüzlü petek hücreleri inşa eder.

Şekil 7 Meksika arısının yuvarlak petekleri



https://flamingoestate.com/pages/melipona-bee-project?srsltid=AfmBOorxfai0t0lhVhCAPQovEh3xbPjUmVGfwP2g5Xpdhg_fi_fi9PyH

Arıların Bilişsel Kabiliyetleri

Sosyal böceklerin karmaşık yaşam düzenleri artık sadece "içgüdüsel rutinler" olarak görülmemektedir. Birçok karmaşık davranışta olduğu gibi petek inşasında da doğuştan gelen yetenekler yalnızca "kaba bir şablon" sunmaktadır. Genetik yatkınlık temel bir çerçeve çizse de davranışın işlevsel ve hatasız hale gelmesi için bireysel deneyim ve çevresel etkileşim (öğrenme) şarttır (Gallo & Chittka, 2018). Arıların motor becerilerini geliştirmek için geçmiş

deneyimlerinden faydalandıkları (Abramson et al., 2016; Mirwan et al., 2015) ve birden fazla deneyimi birleştirerek kavramlar oluşturabildikleri (Avargues-Weber et al., 2012; Giurfa et al., 2001) tespit edilmiştir. Ayrıca, bazı türlerin sayma benzeri işlemler yapabildiği (Howard et al., 2018) ve basit aletler kullanabildiği görülmüştür (Loukola et al., 2017; Maák et al., 2017) (Akt. Gallo & Chittka, 2018). Böceklerin zamanlama yetenekleri sayesinde gelecekteki olayları öngörebildikleri (Boisvert & Sherry, 2006) ve eylemlerinin sonuçlarını tahmin edebildikleri bilinmektedir (Webb, 2004; Akt. Gallo & Chittka, 2018). Chittka (2017) ve Menzel (2017), böceklerin arzuladıkları bir amaca ulaşmak için farklı olasılıkları araştırabildiklerine dair kanıtlar sunmuşlardır (Akt. Gallo & Chittka, 2018). Gharooni Fard et al. (2022) tarafından yapılan çalışma da biyolojik bir inşa sürecinin, kristalografi ve malzeme bilimi prensipleriyle nasıl açıklanabileceğini kanıtlamakta ve sosyal böceklerin çevresel kısıtlamalara karşı sergilediği kolektif mühendislik becerisini ortaya koymaktadır.

Huber (1814/1926) arıların bilişsel becerilerini test etmek için çeşitli deneyler yapmıştır. Örneğin, camdan tavan ve tabanın olduğu bölgede, arılar petekleri yanlamasına yapmıştır. Önlerine başka bir engel geldiğinde peteklerinin yapısını 90° döndürmüştür. Uygun yüzey yalnızca tabanda olduğunda, peteklerini aşağıdan yukarıya doğru inşa etmişlerdir. Tüm bunlar arıların alışageldikleri yukarıdan aşağıya doğru petek yapısı oluşturma davranışlarını bir zorlukla karşılaştıklarında problemi çözmek için yeni bir rutin oluşturabilme becerisine sahip olduklarını göstermektedir. Huber, bu çalışmaları sürecinde birkaç petekten birinin kovanın tavanından koptuğunu gözlemlemiştir. Arılar, kopan peteği balmumundan yapılmış bir dizi sütun ve çapraz kirişle güçlendirmekle kalmamış, aynı zamanda benzer bir felaketin tekrar yaşanmaması için cam tavandaki diğer tüm peteklerin bağlantı bölgelerini de güçlendirmiştir. Huber ayrıca arıların, ihtiyaca bağlı olarak beşgen

veya yedigen hücreler; tabana göre ağız kısmına yakın, daha geniş veya daha dar hücreler inşa edebildiklerini ya da kovan girişinde davetsiz misafirleri dışarıda tutmak için balmumu kullanarak bariyerler oluşturabildiklerini de gözlemlemiştir. Huber bir başka gözleminde; balmumunu yanlış hizalayan bir arının hatasını başka bir arının fark ederek düzelttiğini belirtmiştir. Huber'in çalışmaları, bal arılarının petek inşasında yalnızca içgüdüyle değil, bilişsel esneklik, öngörü ve kolektif planlama ile hareket ettiklerini ortaya koymaktadır.

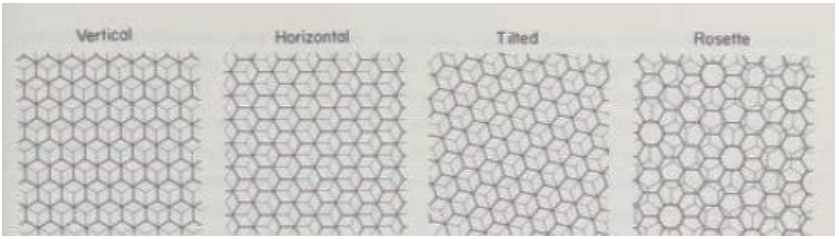
Gallo & Chittka (2018) tarafından yapılan çalışmada, genişleyen bir petek yapısı ile hedef duvar arasına cam ekranlar yerleştirilmiştir. Arılar, cam engele ulaşmadan önce düzeltici önlemler almış ve en yakın ahşap duvara ulaşmak için devam eden yapıyı değiştirmişlerdir. Bu sonuçların arıların bir tür mekânsal planlama becerisine işaret ettiği belirtilmiştir.

Yetişkinlerden petek yapımını gözlemlememiş yetim arılar üzerinde çeşitli deneyler yapılarak petek yapımında öğrenmenin rolü belirlenmeye çalışılmıştır (örn. Turner, 1912; Rau, 1929; Oelsen & Rademacher, 1979; Gallo & Chittka, 2018). Gözlemlerin sonucunda; tarak geometrisinin olağan radyal simetriden sapma, hücre boyutlarında farklılaşmalar, düzensiz tabanlar, alışılmadık hücre düzenlemeleri (döndürülmüş veya çiçeksi konfigürasyon), petekleri onarma, standart yapma, sağlamlaştırma, eksik hücreleri tamamlama konusunda eksiklikler ve zorlanmalar gözlemlenmiştir. Sonuçlar, arıların mevcut petek yapısını oluşturabilmeleri için deneyimli arılardan süreci gözlemlemelerinin önemli olduğunu göstermektedir.

Downing & Jeanne (1990), *Polistes* yaban arılarıyla yaptıkları çalışmada, mevcut petek yapısında delikler açıldığında, onarım süresinin tekrarlanan maruz kalmayla azaldığını ve bireysel yaban arılarının deneyimle onarım tekniklerini geliştirdiğini gözlemlemiştir (Akt. Gallo & Chittka, 2018).

Doğal yuvalarda arılar genellikle, dikey veya yatay nadiren de eğik veya çiçek deseninde petek örerler (Hepburn, 1986).

Şekil 8 Doğal petek desenleri



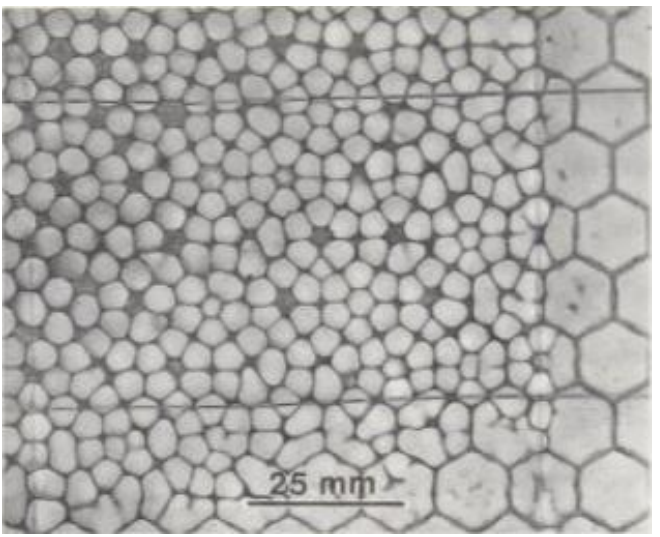
Hepburn (1986)

Bu farklı desenlerin genetik bir bileşeni var mıdır? İşçi arılar, içinden çıktıkları hücre tipini öğrenirler mi? İşçiler, ipuçlarının yokluğunda, geçmiş deneyimi olan arılardan belirli bir desende çalışmayı mı öğrenirler? Oelsen & Rademacher (1979) bu soruları deneysel bir yolla ele almış ve şu sonuçlara ulaşmıştır:

- Dikey, yatay veya çiçek desenli hücrelere sahip peteklerde yetiştirilen arılar toplanarak üç farklı koloni oluşturulmuş ve her koloniye düz bir balmumu levhası verilmiştir. Dikey hücrelerden yetişen arıların dikey ve eğik hücrelerin bir karışımını içeren petekler inşa ettiği; yatay hücrelerden yetişen arıların tamamen düzensiz, dikey, eğik ve yatay hücrelerin bir karışımını içeren petekler inşa ettiği; çiçek desenli hücrelerde doğan arıların ise dört desenin tamamını içeren bir karışım inşa ettiği görülmüştür.
- Yuvalarından ilk kez çıkan arıları tam çıkarken yakalamış ve küçük koloniler oluşturmuştur. Arıların kendilerine sağlanan desen formuna (baskılı balmumu şeritleri) sadık kalarak petek ördükleri, ancak baskısız balmumunu petek haline getirirken dikey ve yatay hücrelerin bir karışımını inşa ettiklerini gözlemlenmiştir.

Hepburn (1983), farklı hücre boyutları için arıların inşaat toleranslarını ve kabul edilebilirlik eşiklerini analiz etmiştir. Arılara doğal boyutlarının dışında (çok büyük veya düz tabanlı) petekler verildiğinde, arılar duruma göre farklı pratik inşa çözümleri üretmiştir. Örneğin; hücre boyutu aşırı büyüdüğünde, arılar düzenli bir altıgen yapı kurmayı zor bulup bunun yerine "çiçek" desenine benzer düzensiz çokgenler inşa etmiştir. Belirli bir eşiğe gelindiğinde ise, kendilerine verilen büyük altıgenlerin köşelerini kullanarak yeni bir düzen kurmuşlardır. Bu süreçte oluşturdukları "sahte hücreler", arıların mevcut yapıyı bozmak yerine ona nasıl eklemlendiğini göstermektedir.

Şekil 9 Düzensiz petek şekilleri



Hepburn (1983)

Paralellik ve boşluk yönetimi: Hepburn (1986), arıların inşaat sırasında hücrenin uzunluğundan veya şeklinden çok peteklerin birbirine paralel olmasına önem verdiklerini, bir petek eğri yerleştirilmişse veya bir engel (karton gibi) varsa, inşaatın yönünü değiştirerek paralelliği yeniden sağlamaya çalıştıklarını gözlemlemiştir. Diğer taraftan; arıların, iki petek arasındaki ve

duvarlar arasındaki mesafeyi hassasiyetle ölçerek koruduklarını da tespit etmiştir.

Darchen (1954, 1959) tarafından yürütülen çalışmalar, arıların petekler arasındaki paralelliği sağlamak için "burulma" (torsion) ve "çekme" (tension) kuvvetlerini bilinçli bir şekilde kullandıklarını ortaya koymuştur. Deneylerde, birbirine dik yerleştirilen balmumu levhalarının arılar tarafından dikey eksen etrafında döndürülerek komşu peteklerle paralel hale getirildiği gözlemlenmiştir. Bu bükülme işlemi sırasında oluşan yapısal hasarlar ve yırtıklar, arılar tarafından "rötuşlama" (retouching) tekniğiyle hızla onarılarak nihai üründe gizlenmektedir. Darchen'in bulguları, arıların yuva inşasında katı bir stereotipe (kalıplaşmış davranışa) sahip olmak yerine, çevresel kısıtlamalara karşı yüksek düzeyde davranışsal uyum sergilediklerini ve paralelliği sağlamak için geometrik formu feda edebildiklerini doğrulamaktadır (Akt. Hepburn, 1986).

Arıların, paralelliği sağlamasının yerçekimi algılamasından kaynaklanabileceği Gontarski (1949) tarafından gösterilmiştir. Gontarski (1949) tarafından yapılan rotasyon deneyleri, arıların hareket halindeki (dönen) bir platformda bile yerçekimi vektörünü takip ederek dikey orta duvarlar inşa edebildiğini göstermiştir. Bu konu, Martin & Lindauer (1966) tarafından da çok sayıda çeşitli deneylerle araştırılmıştır. Martin & Lindauer (1966), arıların yerçekimini algılamak için baş ve göğüs kafesi arasındaki boyun organında (sensory plates) bulunan duyusal kılları (setae) kullandıklarını kanıtlamıştır. Deneysel olarak başları sabitlenen veya boyun organları işlevsiz hale getirilen arıların petek inşa edemedikleri gözlemlenmiştir. İlginç bir şekilde, karın bölgesindeki duyu kıllarının kapatılması inşaat yeteneğini bozmamıştır. Bu durum, arıların dikey düzlemi belirlemede temel olarak boyun bölgesindeki "çekül" benzeri ağırlık merkezi algısını kullandıklarını doğrulamıştır (Akt. Hepburn, 1986).

Peteklerin pusula yönüne göre hizalanması konusu, manyetik alan duyusu ile açıklanmaktadır. Arıların petek yapımını yerçekimine değil, yapı malzemesinin yönüne bağlı olarak gerçekleştirdiği gösterilmiştir (Pratt, 2000). Vandenberg et al. (1985) bu hususta şunları belirtmiştir:

> Lindauer, Martin ve daha sonra De Jong (1982) tarafından yapılan çalışmalar, arıların dünyanın manyetik alanını bir referans olarak kullandığını göstermiştir. Helmholtz bobinleri kullanılarak manyetik alanın saptırıldığı deneylerde, arıların petek yönünü de eşzamanlı olarak saptırdıkları tespit edilmiştir. Ayrıca; sürülerin yeni bir yuvaya taşındıklarında eski yuvalarındaki petek yönelimini hatırlama ve sürdürme eğiliminde oldukları (manyetik hafıza) saptanmıştır. Arıların petek örme sürecinde yerçekimini referans aldığı yönündeki düşünceleri netleştirmek için, bir arı kovanı 1984'te Uzay Mekiği Challenger'a konulmuştur. Bal arıları bir hafta boyunca sıfır yerçekiminde hem uçmayı öğrenmiş hem de normal hücrelere sahip (ölçü, geometri, paralellik) petekler inşa etmişlerdir. Dünya'da inşa edilen peteklerle karşılaştırıldığında tek fark, petek hücrelerinin sürekli olarak aşağı doğru açılı olmamasıydı (yerçekimsiz ortamda "aşağı" için belirgin bir yön yoktur).

Peteklerde birçok düzensiz hücre bulunabilir ve bazıları rötüşlanıp gördüğümüz nihai üründe gözden gizlenir (Darchen, 1952; 1953; 1954; Hubbe, 1957). Arıların dislokasyondan (peteklerin yerinden oynamaları) görünüşe göre nefret ettiği, Darwin (1859) tarafından da not edilmiştir. Darwin, arıların iki petek parçasının bir açıda buluşması gibi zorluk durumlarında, sık sık geri çekilip incelediklerini ve birçok hücreyi söküp farklı şekillerde yeniden inşa ettiklerini, hatta bazen başlangıçta reddettikleri bir şekle geri döndüklerini not etmiştir. Darwin bir deneyinde, arıların ortamına ince bir balmumu şeridi yerleştirerek, arıların bu balmumuna içgüdüsel olarak oyuklar açıp açmayacaklarını gözlemlemek istemiştir. Eğer arılar, yarım küre şeklinde oyuklar açsaydı balmumu şeridi delinirdi. Deneyde arıların oyuk açmadıklarını, bunun yerine sadece bazı düz tabanlı hücreler

ürettiklerini gözlemlemiştir. Buradan çıkan sonuç, arıların balmumu kalınlığını ölçebildikleri ve buna göre farklı bir inşa planı oluşturabildikleridir (Akt. Hepburn, 1986).

Sonuç

Üç eşkenar dörtgen tabanlı düzgün altıgen hücre yapısı; petek kenarları, geçiş hücreleri, engeller ve bireysel hatalar gibi bazı istisnai durumlar dışında bal arılarının inşa ettiği temel formdur. Bu yapı, en az miktarda balmumu harcayarak en fazla depolama hacmini ve en yüksek yapısal dayanıklılığı sağlayan optimum geometridir. Güncel teknolojik ve gözlemsel çalışmalar; bal arılarının bu mükemmel petek inşa faaliyetinin genetik veya içgüdüsel, otomatik bir davranış olmadığını göstermektedir. Aksine, bu süreç çevresel koşullara uyum sağlayabilen ve yüksek hassasiyetli duyusal ölçümlere dayanan aktif ve dinamik bir yapım faaliyetidir. Bununla birlikte, yüzey gerilimi gibi fiziksel yasaların da süreci kolaylaştırıcı ve petek yüzeylerinin daha düzgün şekillenmesini sağlayan tamamlayıcı bir rolü bulunmaktadır. Eğer arılar başlangıçta balmumu şeridinin iki yüzeyinde hücre tabanlarını oluştururken hücre yarıçapı kadar kaydırılmış oyuklar açmasalardı, fiziksel ve matematiksel dinamikler mevcut mimarinin ortaya çıkmasını sağlayamazdı. Arılar, petek yapım sürecinde bu yapım bilgisini deneyimli arıları ve erginleşilen yuva mimarisini gözlemleyerek öğrenmektedir. Diğer taraftan, milyonlarca yıllık genetik bilgi de arılarda bir davranış yatkınlığı, bir şablon olarak etkili olmaktadır.

Petek inşasında balmumu kullanmayan ancak altıgen formda yapılar üreten farklı arı türleri de bulunmaktadır. Örneğin, Vespidae familyasına ait kâğıt yaban arıları (Polistinae) ve eşek arıları (Vespinae), odun ve bitki liflerini tükürük salgılarıyla çiğneyerek elde ettikleri selüloz esaslı kâğıt hamurundan (karton benzeri malzeme) açık, ters şemsiye formunda petekler inşa ederler. Bazı

iğnesiz arı türleri (Meliponini) ise kuluçka hücrelerinde balmumunu bitki reçineleriyle karıştırarak cerumen adı verilen daha sert bir malzeme kullanır. Tamamen farklı kimyasal ve mekanik özelliklere sahip bu malzemelerle (selüloz veya cerumen) de altıgen hücrelerin inşa edilebiliyor olması; bal arılarındaki altıgen geometrinin oluşumunu yalnızca balmumunun viskoelastik yapısına ve sıvı fazdaki yüzey gerilimi faktörüne bağlayan hipotezlere karşı güçlü bir argüman teşkil etmektedir.

Peteklerin Oluşumu

Bazı insanlar peteklerin karmaşık geometrisinin çok zor bir optimizasyon probleminin yanıtı olması ve bu hesaplamaları arıların yapmasının da mümkün olamayacağı düşüncesiyle, bu oluşumun açıklamasını yapmak için akla ve teknolojiye dayalı gözlem ve araştırma bulgularının zamanla ortaya çıkmasını beklemek ve düşünmek yerine başka bir şekilde hızlı yanıtlar oluşturmuştur. Bu tür yaklaşımlar sadece yanlış değil, birçok açıdan da zararlıdır. Bu çalışmada verilen doğru ve tutarlı bilgiler sentezlendiğinde arıların mevcut petek geometrisinin oluşumunu sağlayan süreç şu şekilde özetlenebilir:

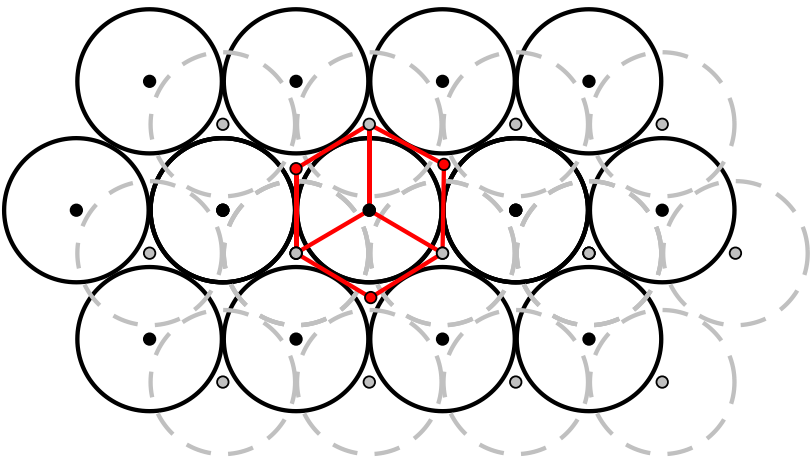
Arılar, ön ayaklarının pençeleriyle yukarıdan aşağıya doğru sarkarak kümelenirler, diğer arılar da ön ayaklarıyla onlara tutunurlar. Bir süre hareketsiz kalırlar. Ardından ürettikleri balmumu pulcuklarını arka ayaklarının kıllarıyla çeker, ön ayaklarına ve ağzına götürür. Pul kemirilir, dilin yoğun hareketleriyle parçalanır ve köpüklü bir sıvıyla ıslatılır. Tarağın tabanını oluşturmak için uygun zemine yapıştırılır. Daha sonra bu zemine dik şekilde balmumundan oluşan bir şerit oluşturularak (tamamı değil) ilk petekleri oluşturma sürecine başlanır. Birçok arının eklenmesiyle süreç sürdürülür.

Bal arıların petek oluşturma sürecinde kullandıkları balmumunun termoplastik ve viskoelastik özelliği vardır. Bir malzeme ısıtıldığında yumuşuyor/sıvılaşıyor, soğutulduğunda ise

kimyasal yapısı bozulmadan tekrar sertleşiyorsa termoplastik özelliktedir. Arılar balmumunu eritecek sıcaklığa ulaştıramazlar ama termoplastik hale getirirler; yani üzerine baskı uygulandığında sakız gibi kalıcı olarak şekil değiştirebilir (plastik deformasyon). Viskoelastiklik, bir katının mekanik bir yük (kuvvet) altındayken hem sıvı gibi akışkan (viskoz) hem de esnek (elastik) davranmasıdır. Bir malzemeye kuvvet uyguladığında önce esner (elastik), kuvvet devam ettikçe zamanla sakız gibi kalıcı olarak uzar/akar (viskoz). Kuvveti kaldırdığında ise hemen eski hâline dönmez, zamana bağlı olarak yavaşça toparlanır.

Arılar farklı desenlerde petek düzenlemeleri yapabilmektedir (rosetta, yatay, dikey, eğik). Bu desenlerin hepsinde balmumu şeridinin iki yüzünde kazılan çukurların kendi içindeki ve karşı taraftaki (kesikli) yerleşimleri şekildeki gibidir.

Şekil 10 Petek yapımının ilk aşaması olan çift yönlü çukurlar



Arılar önce balmumu şeridinin iki tarafında yarım küre benzeri oyuklar açar. İkinci sıra oyuklar üst sıradaki oyukların tam altına değil, yarıçap kadar kaymış şekilde oluşturulur. Aksi takdirde ortada kullanılmayacak ve aynı büyüklükte bir çukurun da açılamayacağı bir boşluk kalırdı; bu durum, balmumunun verimsiz

kullanılması olurdu. Karşı taraftaki oyuklar ise bu taraftaki oyukların tam karşısına değil, merkezi üç oyuğun orta bölgesindeki alanın merkezine denk gelecek şekilde kazılır, aksi takdirde ara bölgelerde kullanılmamış balmumu kalırdı. Bu şekilde tüm çukurlar açıldıktan sonra değil, ilk iki veya üç hücre kabaca ortaya çıktıktan sonra, diğer arılar çabaya katılır ve yeni, bitişik hücreler oluşmaya başlar. Bu süreçte arılar balmumunu ısıtarak çalışmalarını sürdürürler. Böylece hem arıların balmumuyla çalışmaları kolaylaşır hem de doğal olarak fizik yasaları etkisini gösterir. Bu süreçte arıların çalışmaları; kazma (çeneleriyle çukur kazma/kazıma, ara bölgelerdeki fazla balmumunu kazma), ölçme (antenleriyle duvar kalınlıklarını, karşılıklı birbirlerine mesafelerini, uzunlukları) ve sürükleme/kaydırmadır (çeneleriyle fazla balmumunu duvarların yükseltilmesi amacıyla kaydırırken). Bununla birlikte, bu eylemleri yaparken ayaklarıyla duvarlara bir basınç da uygulamış olurlar. Arıların bu faaliyetleri ve matematik/fizik yasalarının da etkisiyle üç eşkenar dörtgenli piramidal tabanlı altıgen prizma oluşur. Bu süreçte arıların amacı böyle bir şekil oluşturmak değil, balmumunu verimli kullanmaya çalışmaktır. Buradaki matematiksel yasa, bir çemberin etrafına eş çemberlerden yalnızca 6 tane gelebilmesidir. Fizik yasaları açısından da arıların oldukça incelttiği ve göğüs kaslarıyla ısıttığı komşu duvarların hem arıların uyguladığı karşılıklı basınç hem de balmumunun viskoelastik özelliğinin etkisiyle, sabun köpüklerindeki fiziksel yasalara (En küçük yüzey alanı, yüzey gerilimi gibi) uyumlu olarak hareket ederek minimal yüzey, yani düz yüzey oluşturacakları söylenebilir.

Bu yapım sürecinde önemli bir nokta, balmumu şeridinde açılan çukurların arasında kalan bölgelerdeki balmumunun çıkarılması gereğidir. Bu durum balmumunun verimli kullanılması açısından gereklidir. Arılar bu ara bölgedeki balmumunu duvarları uzatmada ve hasarlı peteklerin onarımında kullanabilir. Boşalan bu

bölge arıların uyguladığı itme etkisiyle birbirlerine yaklaşır ve fizik yasalarının da etkisiyle düzleşmesi kolaylaşır.

Dutta (2021) tarafından yapılan çalışmada ya da aynı mantıkla gerçekleştirilen simülasyon matematiksel modelleme çalışmalarında, arıların açtıkları oyukların ara bölgelerinin boş olduğu, arılar tarafından aşamalı olarak sıcak balmumuyla doldurulduğu ve bazı fiziksel prensiplerin de etkili olmasıyla duvarların düzleştiği ortaya konmuştur.

Arılar, hücreleri şekillendirmek için çenelerini, gerekli kuvveti iletmek için bacaklarını ve hücreleri tanımlamak için antenlerini kullanırlar. İzodiametrik (aynı çaplı) hücreler oluşturulduktan sonra, işçiler üçlü birleşim noktalarının yakınındaki balmumu pullarını yoğurup ısıtarak komşu dairesel hücreler arasında bir köprü oluşturur (Dutta, 2021).

Şekil 11 Üç yuvarlak çukurun arasındaki boşluğun kapatılması



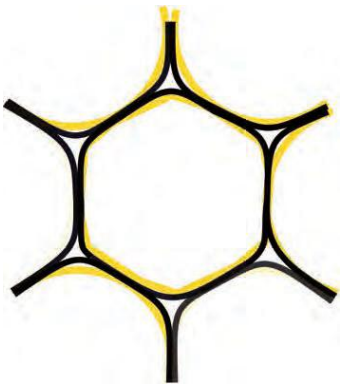
Dutta (2021)

Arılar balmumlarını erime başlangıcına kadar bile ısıtamıyorsa, bu dönüşüm nasıl mümkün olabilir? Altıgen hücreler oluşturmak için petek hücresinin içinde erime noktasına ulaşmak gerekli midir? İzodiametrik hücreler arasındaki boşlukların birleştirilmesi, onları altıgen bir yapıya nasıl dönüştürür? Talukdar ve Dutta (2019) tarafından yapılan çalışmada bu soruların yanıtı basitçe açıklanmıştır. Burada, bilgisayar deneyi yardımıyla, arıların balmumunu erime aralığının tamamına kadar ısıtmadan, bitişik duvarları kademeli olarak uzatabildikleri, aralarındaki temas alanını

artırabildikleri, düzleştirebildikleri ve izodiametrik hücreleri yuvarlak altıgen bir şekle dönüştürebildikleri ortaya konmuştur. Teknik olarak bu durum, üçlü birleşme noktasının yakınında arılar tarafından korunan sıcaklık gradyanından kaynaklanan termal genleşmedir; bu nedenle gerilim oluşur ve dairesel duvarlar kademeli olarak uzayarak altıgen hale gelir.

Arılar, bitişik iki dairesel hücrenin yeni temas noktasına kademeli olarak balmumu biriktirir ve onları ısıtır. Sonuç olarak, bitişik iki kenar kademeli olarak birbirine yaklaşır. Aynı zamanda, balmumu sıkıştırılır ve arılar bacaklarıyla fazla balmumunu kullanarak temas noktası üçlü birleşmenin merkezine yaklaşana kadar işlemi tekrarlar. Başlangıçtan itibaren her adımda, kenarların yer değiştirmeleri artar ve sonunda düzleşirler.

Şekil 12 Taze dairesel hücrelerin yuvarlak bir altıgene dönüşmesi.



Dutta (2021)

Karihaloo et al. (2013) tarafından yapılan sayısal bir simülasyon, erimiş balmumunun yaklaşık 45 C°'de üçlü birleşim yerlerinin yakınında viskoelastik olarak akması durumunda taze dairesel hücrelerin yuvarlak altıgen hücrelere dönüştüğünü göstermiştir.

Petek yapım sürecine evrimsel süreç açısından bakıldığında, başlangıçta farklı arı kolonilerinin farklı geometrik şekilleri

kullandığı, ancak günümüzde mevcut petek geometrisini yapabilenlerin hayatta kaldığı şeklinde bir açıklama yapılabilir. Ancak;

- Silindirik yapı dışında farklı geometrilerde petek yapıldığına dair fosil kayıtları yoktur
- Arıların petek oluşturma sürecinde, geometriye ilişkin bilinçli düşünmeleri değil, yalnızca balmumunu verimli kullanmaya ilişkin basit davranışları söz konusudur.
- Şu anki petek geometrisini kullanmayan ve bağımsız silindir hücreler inşa eden arı türleri de hâlâ yaşamlarını sürdürmektedir.

İlk başta uygun olmayan petek şeklini oluşturan arı kolonilerinin, sarfedilen enerji-elde edilen bal probleminde başarılı olunamamasına bağlı olarak yok olma sürecine girdiklerini fark edip farklı geometriler deneme, sonuçlarını gözlemleme ve daha sonraki denemelere ışık tutacak geçmiş bilgileri sonraki nesillere aktarma gibi arıların bilişsel kapasitelerinin çok üzerinde bir gelişim süreci yaşamış olmaları da olası değildir. Arıların yukarıda bahsedilen petek yapma süreci göz önüne alındığında, böyle bir deneme-yanılma yaklaşımı uygun bir bakış açısı olarak görünmemektedir.

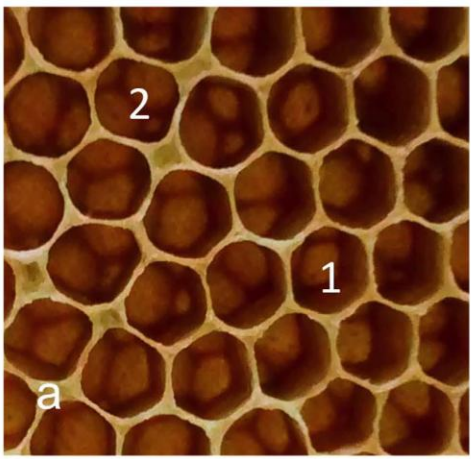
Mevcut bilgiler temelinde bu sürece ilişkin şunlar söylenebilir: Arılar ilk başta bir yuva oluşturmak için, doğal ve basit bir davranış olarak, vücut ölçüleriyle uyumlu silindirik oyuklar açmışlardır. Tehlikeler nedeniyle oyuk, kovuk gibi yerlere yerleşenler artık yuvalarını toprağa değil, ürettikleri balmumu pullarından oluşturdukları yüzeye taşımışlardır. Yer ve malzeme kısıtı nedeniyle silindirik yuvaları birbirine bitişik ve verimli bir şekilde kullanmaya başlamışlardır. Yukarıda açıklandığı gibi, basit ve doğal davranışlarla verimli kullanmanın sonucunda mevcut petek yapısı oluşmuştur. Bu optimizasyon sürecine, yukarıda açıklandığı gibi, fizik yasaları da katkı sağlamıştır. Bazı arı kolonileri yıl boyu

çiçeğin bulunduğu coğrafyalarda yaşadığından, bal depolama hayati önemde olmamıştır ve petek optimizasyonu sürecine girmemişlerdir. Çiçeklerin bulunmadığı uzun aylar boyunca hayatta kalabilmeleri için daha fazla bal depolamaları gereken koloniler ise doğal olarak optimizasyon sürecine girmiştir.

Bu çift yönlü petek yapısında arıların yaptığı çeşitli hatalar vardır. Çift yönlü petek geometrisinin yapımında, arıların optimize etmesi gereken unsurlardan bazıları şunlardır:

- Bir pulun etrafına 6 pul yerine bazen 5 ya da farklı sayıda düzensiz pul konulması. Şekil 13'te, hücrenin 6 hücreyle çevrelenmesi ya da düzgün şekilde çevrelenmemesi durumunda oluşan petekler görülmektedir.

Şekil 13 Hatalı petekler



Nazzi (2016)

- Silindirler arasında boşluk bırakılması sonucunda düzgün 6-gensel prizmaların uygun şekilde oluşmaması.
- Balmumunun uygun sıcaklığa getirilmemesi sonucunda peteklerin uygun formda oluşmaması ve daha fazla enerji harcanması

- Balmumu kendi başına kırılgan bir malzemedir; ancak son çalışmalar, bal arılarının peteğin çekme dayanımını artırmak (Hepburn & Kurstjens, 1988) ve yuva sıcaklığı dalgalanmasını en aza indirmek için yuvalarını, eski kozalardan elde edilen ipek liflerle güçlendirdiğini bulmuştur (Zhang et al. 2010) (Akt. Cope, 2022). Bu güçlendirmenin yapılmaması ya da uygun şekilde yapılamaması
- Petek yapımında çeşitli ölçümlerin uygun şekilde yapılmaması

Kaynakça

Aristoteles (1910). *Historia animalium* (D. W. Thompson, Trans.). Oxford, England: Clarendon Press.

Bauer, D., & Bienefeld, K. (2013). Hexagonal comb cells of honeybees are not produced via a liquid equilibrium process. *Naturwissenschaften, 100*, 45–49.

Cope, G. (2022). *The evolution of honeycomb* (Master's thesis, Kennesaw State University). Kennesaw, GA: Kennesaw State University.

Darchen, R. (1956). La construction sociale chez *Apis mellifica*. *Insectes Sociaux, 3*(2).

Darchen, R. (1968). Le travail de la cire et la construction dans la ruche. In R. Chauvin (Ed.), *Traité de biologie de l'abeille* (Vol. 2, pp. 241–331). Paris, France: Masson et Cie.

Dauter, Z., & Jaskolski, M. (2025). Honeycombs—their variety, topology and symmetry. *Acta Crystallographica Section A: Foundations and Advances, 81*(2), 159–166. doi:10.1107/S2053273325000889

Dutta, K. (2021). Natural hexagons: Honeybee's pursuit of perfection and revered mystery. *Resonance, 26*, 399–413. doi:10.1007/s12045-021-1138-8

Engel, M. S. (1999). The taxonomy of recent and fossil honey bees (Hymenoptera: Apidae; *Apis*). *Journal of Hymenoptera Research, 8*(2), 165–196.

Gallo, V., & Chittka, L. (2018). Cognitive aspects of comb-building in the honeybee. *Frontiers in Psychology, 9*, 900. doi:10.3389/fpsyg.2018.00900

Gharooni Fard, G., Zhang, D., López Jiménez, F., & Peleg, O. (2022). Crystallography of honeycomb formation under geometric frustration. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 119*(48), e2205043119. doi:10.1073/pnas.2205043119

Hales, T. C. (2001). The honeycomb conjecture. *Discrete & Computational Geometry, 25*(1), 1–22. doi:10.1007/s004540010071

Hepburn, H. R. (1983). Comb construction by the African honeybee, *Apis mellifera adansonii*. *Journal of the Entomological Society of Southern Africa, 46*(1).

Hepburn, H. R. (1986). *Honeybees and wax: An experimental natural history*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Hepburn, H. R., Muerrle, T., & Radloff, S. E. (2007). The cell bases of honeybee combs. *Apidologie, 38*, 268–271.

Huber, F. (1926). *New observations upon bees* (C. P. Dadant, Trans.; 2nd ed.). Hamilton, IL: American Bee Journal. (Original work published 1814)

Jeong, D., Li, Y., Kim, S., Choi, Y., Lee, C., & Kim, J. (2019). Mathematical modeling and computer simulation of the three-

dimensional pattern formation of honeycombs. *Scientific Reports, 9*, 20364. doi:10.1038/s41598-019-56942-6

Karihaloo, B. L., Zhang, K., & Wang, J. (2013). Honeybee combs: How the circular cells transform into rounded hexagons. *Journal of the Royal Society Interface, 10*(86).

MacLaurin, C. (1743). Of the bases of the cells wherein the bees deposit their honey. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

Michener, C. D. (2007). *The bees of the world*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.

Nazzi, F. (2016). The hexagonal shape of the honeycomb cells depends on the construction behavior of bees. *Scientific Reports, 20(6)*, 28341. doi:10.1038/srep28341

Oelsen, G. V., & Rademacher, E. (1979). Untersuchungen zum Bauverhalten der Honigbiene (*Apis mellifica*). *Apidologie, 10*(2).

Pakutsa, A., & Zaborovskyi, A. (2022). May the honeycomb architectural deviations reflect the bees engineering prowess? *Uludağ Arıcılık Dergisi, 22*(2), 203–210. doi:10.31467/uluaricilik.1153269

Pappus of Alexandria. (2024). *Book V of the mathematical collection of Pappus of Alexandria* (J. B. Little, Trans.). Holy Cross Bookshelf, 65.

Pirk, C. W. W., Hepburn, H. R., Radloff, S. E., & Tautz, J. (2004). Honeybee combs: Construction through a liquid equilibrium process? *Naturwissenschaften, 91*(7), 350–353. doi:10.1007/s00114-004-0539-3

Pratt, S. C. (2000). Gravity-independent orientation of honeycomb cells. *Naturwissenschaften, 87*(1).

Rau, P. (1929). Orphan nests of *Polistes* (Hymenoptera: Vespidae). *Entomological News, 40*.

Raffiudin, R. (2002). *Honey bee behavioural evolution and itpr gene structure studies* (Doctoral dissertation, James Cook University).

Roubik, D. W. (1989). *The ecology and natural history of tropical bees*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Talukdar, D., & Dutta, K. (2019). A simplified thermomechanical approach to visualize hexagonal honeycomb construction. *SN Applied Sciences, 1*, 1220. doi:10.1007/s42452-019-1239-0

Thompson, D. W. (1917). *On growth and form*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Tóth, L. F. (1964). What the bees know and what they do not know. *Bulletin of the American Mathematical Society, 70*, 468–481. doi:10.1090/S0002-9904-1964-11155-1

Turner, C. H. (1912). An orphan colony of *Polistes pallipes* Lepel. *Psyche: A Journal of Entomology, 19*, 067292.

Vandenberg, J. D., Massie, D. R., Shimanuki, H., Peterson, J. R., & Poskevich, D. M. (1985). Survival, behaviour and comb construction by honeybees, *Apis mellifera*, in zero gravity aboard NASA Shuttle Mission STS-13. *Apidologie, 16*, 369–384.

Yang, S., Gong, X., Zhou, D., Zhang, X., Kuang, H., & Dong, K. (2022). Structure of Fejes Tóth cells in natural honey bee combs. *Apidologie, 53*(6). doi:10.1007/s13592-022-00915-8

Zhang, J. (1989). *Fossil insects from Shanwang, Shandong, China*. Shandong, China: Shandong Science and Technology Publishing House.


BİDGE