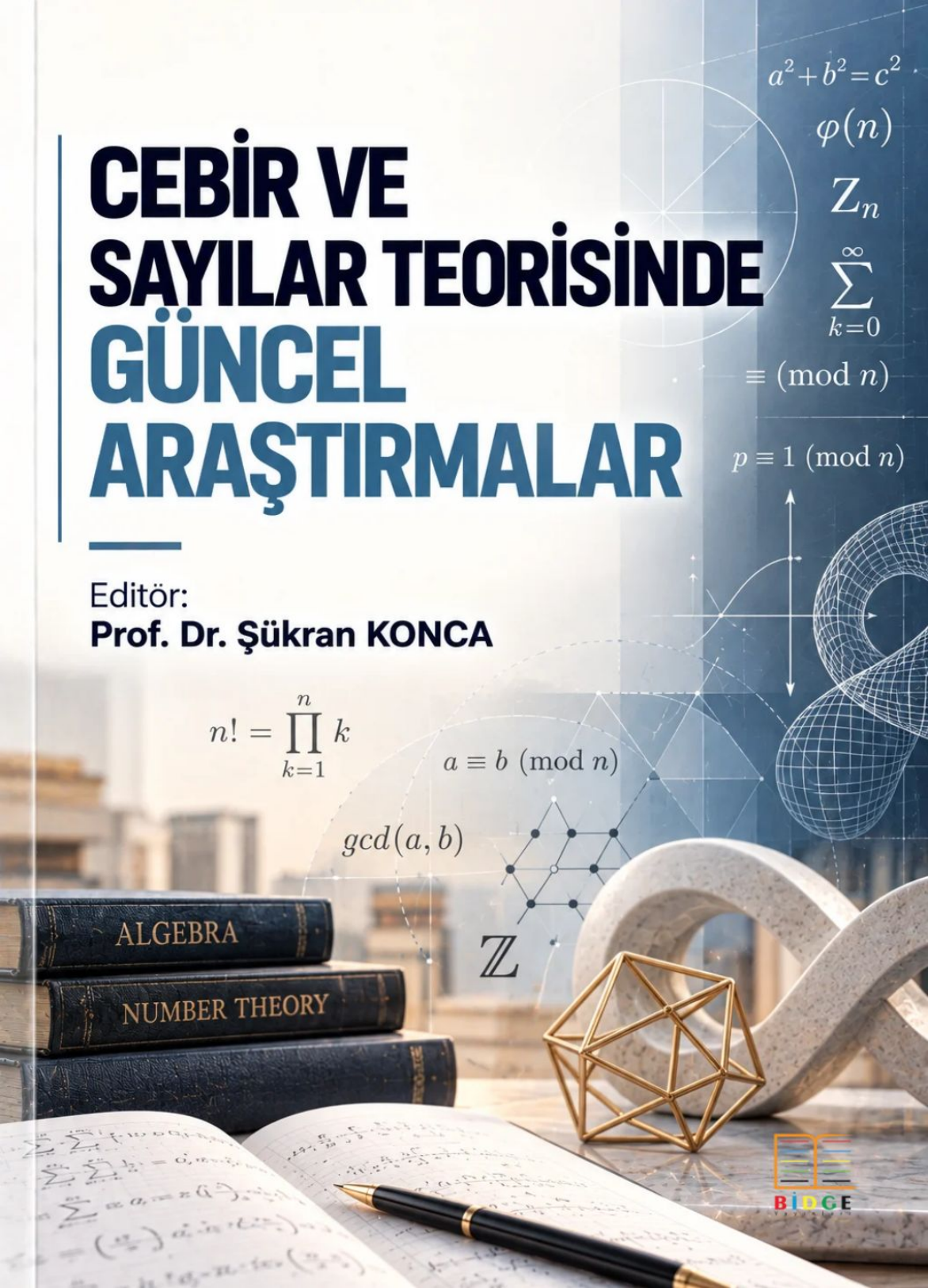
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİNDE GÜNCEL ARAŞTIRMALAR

Editör:
Prof. Dr. Şükran KONCA



BİDGE

BİDGE Yayınları

Cebir ve Sayılar Teorisinde Güncel Araştırmalar

Editör: ŞÜKRAN KONCA

ISBN: 978-625-5474-95-7

1. Baskı
Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL
Yayınlama Tarihi: 2026-10-25
BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374
Yayın hakları © BİDGE Yayınları
www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com
Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.
Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya / Ankara

ÖNSÖZ

Matematik, soyut yapıları anlamaya ve bu yapılar arasındaki ilişkileri ortaya koymaya çalışan temel bilim dallarından biridir. Özellikle cebir ve sayılar teorisi, hem matematiğin kuramsal gelişiminde hem de diğer bilim alanlarıyla kurduğu etkileşimlerde önemli bir yere sahiptir. Cebir ve Sayılar Teorisinde Güncel Araştırmalar adlı bu kitap, söz konusu alanlarda gerçekleştirilen güncel çalışmaları bir araya sunmaktadır. Kitapta, Ramanujan–Nagell denkleminin tarihsel gelişimi ve modern Diofant analizindeki yeri ele alınmakta; genelleştirilmiş Gibonacci kuaterniyonları üzerinden özel sayı dizileri ile cebirsel yapılar arasındaki ilişkiler incelenmekte ve Kleene cebirlerinin aksiyomatik temelleri değerlendirilmektedir. Kitabın hazırlanmasına katkı sağlayan tüm bölüm yazarlarına ve yayın sürecinde emeği geçen herkese teşekkür eder, bu çalışmaların, matematik alanında çalışan araştırmacılar, lisansüstü öğrenciler ve konuya ilgi duyan okuyucular için yararlı bir kaynak olmasını dilerim.

Prof. Dr. Şükran KONCA
Editör

İÇİNDEKİLER

RAMANUJAN–NAGELL DENKLEMİ: BİR SORUDAN MODERN DİOFANT ANALİZİNE 1
MURAT ALAN, MUSTAFA AYDIN

KISITLANMAMIŞ GIBONACCI 3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR 26
GÖKSAL BİLGİCİ

AN AXIOMATIC REVIEW OF KLEENE ALGEBRAS 46
ELİF ALTINAY ÖZASLAN

BÖLÜM 1

RAMANUJAN–NAGELL DENKLEMİ: BİR SORUDAN MODERN DİOFANT ANALİZİNE

MURAT ALAN[1]
MUSTAFA AYDIN[2]

Giriş

Sayılar kuramının en çekici yanlarından biri, ifadesi bir ortaokul öğrencisinin anlayabileceği kadar yalın olan bir sorunun, çözümü için on yıllar boyunca geliştirilmiş derin kuramlara ihtiyaç duyabilmesidir. Bu bölümün çıkış noktası olan Ramanujan–Nagell denklemi,

$$x^2 + 7 = 2^n$$

biçimindeki üstel Diofant denklemidir. Burada x bir tam sayı, n ise pozitif bir tam sayıdır. Soru şudur: İkinin hangi kuvvetlerinden 7 çıkarıldığında bir tam kare elde edilir? Küçük değerler denendiğinde $n = 3,4,5,7$ ve 15 için sırasıyla $x = 1,3,5,11$ ve 181

[1] Prof. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0003-2031-2725

[2] Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0001-6333-6474

çözümleri bulunur. Bunlardan sonuncusu $181^2 + 7 = 32768 = 2^{15}$ eşitliğine karşılık gelir ve tesadüf eseri bulunamayacak kadar büyüktür. Asıl mesele, başka çözüm bulunmadığının ispatlanmasıdır.

Yukarıdaki denklemin bir genelleştirmesi olarak

$$x^2 + C = y^n, \qquad n \geq 3$$

şeklindeki denklemlere *Ramanujan-Nagell denklemi* denir. Literatürde bu denklem *Lebesgue–Nagell denklemi* veya *genelleştirilmiş Lebesgue–Ramanujan–Nagell denklemi* olarak da adlandırılmaktadır. Bu bölümde her üç kullanım da bu anlamlarıyla kullanılmaktadır.

Bölümün amacı, Ramanujan'ın 1913'te sorduğu sorudan başlayarak, son yirmi yılın en canlı araştırma alanlarından biri olan ve C'nin asal kuvvetlerinden oluştuğu $x^2 + C = y^n$ denklemlerine uzanan gelişimi bütünlüklü biçimde sunmaktır. Önce problemin tarihsel arka planını kısaca özetleyeceğiz ve ardından Nagell'in fikrine dayanan klasik ispatı ayrıntılı olarak açıklayacağız. Lucas dizileri ve ilkel bölenler kuramı, bu ispatı modern yöntemlere bağlayan köprü olarak ele alınmaktadır. Bölümün ağırlık merkezini oluşturan son kısımlarda Lebesgue–Nagell denklemi, C'nin asal kuvvetlerinden oluştuğu durumlar için geliştirilen standart çözüm stratejisi ve bu alandaki güncel çalışmalar incelenecektir.

Tarihsel Arka Plan

Srinivasa Ramanujan (1887–1920), Cambridge'e gitmeden önceki yıllarda düşüncelerini paylaşabildiği başlıca platformlardan biri olan *Journal of the Indian Mathematical Society* dergisinin soru köşesine çeşitli problemler göndermiştir (Hardy, 1940). Bunlardan

biri, 1913 tarihli 5. ciltte 464 numarasıyla yayımlanmıştır. Ramanujan bu soruda $2^n - 7$ sayısının tam kare olduğu durumları sormuş ve bilinen beş çözüm dışında başka çözüm bulunmadığını öne sürmüştür (Ramanujan, 1913). Sanının kapsamlı el hesaplarına dayalı bir sezgiden doğduğu düşünülmektedir. Kabaca bir sezgisel hesap da bu sanıyı destekler: N civarındaki bir sayının kare olma "olasılığı" yaklaşık $1/\left(2\sqrt{N}\right)$ olduğundan $\sum_n 2^{-n/2-1}$ serisi yakınsaktır ve beklenen çözüm sayısı sonludur. Ancak bu tür sezgiler yanıltıcı da olabilir: Örneğin $x^2 + 23 = 2^n$ denklemi hem $3^2 + 23 = 2^5$ hem de $45^2 + 23 = 2^{11}$ çözümlerine sahiptir.

Problem otuz yıl sonra, 1943'te Norveçli matematikçi Wilhelm Ljunggren tarafından bağımsız biçimde yeniden ortaya atılmıştır (Ljunggren, 1943). İlk tam çözüm, Trygve Nagell tarafından 1948'de *Norsk Matematisk Tidsskrift* dergisinde Norveççe olarak yayımlanmıştır (Nagell, 1948). Bu sonuç uzun süre geniş matematik camiasınca bilinmemiştir. 1950'lerin sonunda denklem kodlama kuramı bağlamında yeniden gündeme gelmiş (Shapiro & Slotnick, 1959), aynı yıl Skolem, Chowla ve Lewis (1959) p-sel yöntemle yeni bir ispat vermiştir. Bunun üzerine Nagell ispatını 1961'de İngilizce olarak yeniden yayımlamış ve denklem o tarihten itibaren "Ramanujan–Nagell denklemi" adıyla anılmaya başlanmıştır (Nagell, 1961).

Denklemin sonraki tarihi iki doğrultuda ilerlemiştir. Birinci doğrultuda sağ taraftaki 2^n korunup 7 yerine başka sabitler alınmış ve $x^2 + D = 2^n$ ile $x^2 + D = p^n$ biçimindeki denklemlerin çözüm sayıları üzerine keskin sonuçlar elde edilmiştir (Apéry, 1960; Bauer & Bennett, 2002; Beukers, 1981a; Bugeaud & Shorey, 2001). İkinci doğrultuda ise sağ taraf değişken bir y^n kuvvetine dönüştürülmüş ve Lebesgue'nin 1850'deki çalışmasına uzanan Lebesgue–Nagell denklemiyle birleşilmiştir (Lebesgue, 1850). Bugün araştırmaların büyük bölümü bu ikinci doğrultuda, özellikle de C'nin asal

kuvvetlerinden oluştuğu durumlarda yoğunlaşmaktadır (Le & Soydan, 2020).

Cebirsel Ön Bilgiler: $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ Cisminin Aritmetiği

Nagell'in ispatının temel fikri, denklemin sol tarafını rasyonel tam sayılarda çarpanlarına ayrılamayan bir ifade olmaktan çıkarıp uygun bir halkada çarpanlarına ayırmaktır. $x^2 + 7 = (x + \sqrt{-7})(x - \sqrt{-7})$ özdeşliği, $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ ikinci dereceden sanal cisminde anlamlıdır. $-7 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan bu cismin tam sayılar halkası

$$R = \mathbb{Z}[\alpha], \qquad \alpha = \frac{1 + \sqrt{-7}}{2}$$

biçimindedir. α sayısı $t^2 - t + 2 = 0$ denkleminin bir köküdür. Eşleniği $\beta = \bar{\alpha} = (1 - \sqrt{-7})/2$ olarak gösterilirse $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 2$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{-7}$ eşitlikleri sağlanır. Bir $\gamma = a + b\alpha \in R$ elemanının normu $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = a^2 + ab + 2b^2$ olarak tanımlanır ve norm çarpımsaldır. İspat için gerekli üç temel olgu şunlardır (Stewart & Tall, 2016):

1. R halkası bu norma göre bir Öklid Bölgesidir. Dolayısıyla Esas İdeal Bölgesidir ve her eleman birimsellerle çarpım ve çarpanların sırası farkıyla tek türlü olarak asal çarpanlarına ayrılabilir. Bu özellik, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ biçimindeki sanal cisimler arasında yalnızca $d = 1,2,3,7,11$ için geçerlidir.
2. R halkasının birimselleri yalnızca ± 1'dir. Gerçekten de $N(a + b\alpha) = (a + b/2)^2 + 7b^2/4 = 1$ eşitliği yalnızca $b = 0$, $a = \pm 1$ için sağlanır.
3. $2 = \alpha\beta$ ayrışımında α ve β normu 2 olan, dolayısıyla asal olan ve birbirinin birimselle çarpımı olmayan yani

ilgili olmayan, elemanlardır. Başka bir deyişle 2 sayısı bu cisimde iki farklı asala ayrışır.

Üçüncü olgu, ispatın can alıcı noktasıdır. 2 sayısının R içinde çarpanlara ayrılışı, 2^n kuvvetinin $\alpha^n\beta^n$ biçiminde iki "yarıya" bölünmesine imkân tanır. α ve β ilgili olmadığı için bu yarılar birbirine karışmaz. Aynı fikir, ilerleyen kısımlarda ele alınacak $x^2 + C = y^n$ denklemlerinde de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ cisimleri üzerinden yeniden karşımıza çıkacaktır.

Klasik İspat: Nagell'in Yöntemi

Bu kısımda Nagell'in fikrine dayanan ve ders kitaplarında yerleşik hâle gelmiş olan ispatı ayrıntılı biçimde sunuyoruz (Nagell, 1961; Stewart & Tall, 2016).

Teorem 1 (Ramanujan–Nagell). $x^2 + 7 = 2^n$ denkleminin, x tam sayı ve n pozitif tam sayı olmak üzere çözümleri yalnızca $n \in \{3,4,5,7,15\}$ ve buna karşılık gelen $x \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 11, \pm 181\}$ değerleridir.

Birinci adım: Çift üs durumu. $n \leq 2$ için $2^n - 7 < 0$ olduğundan çözüm yoktur; dolayısıyla $n \geq 3$ ve x tektir. $n = 2k$ çift ise denklem $(2^k - x)(2^k + x) = 7$ biçiminde rasyonel tam sayılar içinde çarpanlarına ayrılır. $x > 0$ varsayılabilir. Bu durumda $2^k + x = 7$ ve $2^k - x = 1$ olmalıdır. Buradan $2^k = 4$ ve $x = 3$ bulunur; yani tek çözüm $n = 4$'tür. Bundan sonra n'nin tek olduğunu varsayacağız ve $m = n - 2$ yazacağız; m de tek bir sayıdır.

İkinci adım: Cisimde çarpanlara ayırma. Denklemi dörde bölersek

$$\frac{x + \sqrt{-7}}{2} \cdot \frac{x - \sqrt{-7}}{2} = 2^m = \alpha^m \beta^m$$

elde edilir. x tek olduğundan sol taraftaki çarpanlar R halkasının elemanlarıdır. Bu iki çarpanın ortak bir böleni δ olsaydı,

δ farkları olan $\sqrt{-7}$ sayısını ve çarpımları olan 2^m sayısını bölerdi. Bu durumda $N(\delta)$ hem 7'yi hem de 2^{2m}'yi bölerdi; dolayısıyla δ bir birim olurdu. O hâlde iki çarpan aralarında asaldır. Tek türlü çarpanlara ayrılma özelliği ve birimlerin ± 1 olması birlikte kullanıldığında, α ve β asallarından her birinin tüm kuvveti çarpanlardan yalnızca birine gider. Gerekirse x yerine $-x$ alarak

$$\frac{x+\sqrt{-7}}{2} = \pm\alpha^m, \qquad \frac{x-\sqrt{-7}}{2} = \pm\beta^m$$

yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarıldığında, ispatın tamamını taşıyan temel bağıntı ortaya çıkar:

$$\alpha^m - \beta^m = \pm(\alpha - \beta)$$

Üçüncü adım: İşaretin belirlenmesi. $m = 1$ için bağıntı "+" işaretiyle aşikâr olarak sağlanır ve $x = \pm 1$, $n = 3$ çözümünü verir. $m \geq 3$ olsun. $\alpha = 1 - \beta$ ve $2 = \alpha\beta$ olduğundan β^2 modülüne göre $\alpha^m = (1-\beta)^m \equiv 1 - m\beta$, $\beta^m \equiv 0$ ve $\alpha - \beta = 1 - 2\beta = 1 - \alpha\beta^2 \equiv 1$ denklikleri elde edilir. İşaret "+" olsaydı $1 - m\beta \equiv 1 \pmod{\beta^2}$, yani $\beta \mid m$ olurdu. Normlar alındığında bu, $2 \mid m^2$, dolayısıyla m'nin çift olması anlamına gelir. Bu ise m'nin tek oluşuyla çelişir. Demek ki $m \geq 3$ için işaret "–" olmalıdır.

Dördüncü adım: Binom açılımı. $\alpha^m - \beta^m = -\sqrt{-7}$ eşitliğini 2^m ile çarpıp binom teoremini uygularsak, $\left(1+\sqrt{-7}\right)^m - \left(1-\sqrt{-7}\right)^m = -2^m\sqrt{-7}$ elde ederiz. Sol tarafta yalnızca $\sqrt{-7}$'nin tek kuvvetleri kalır. Her iki taraf $2\sqrt{-7}$ ile bölündüğünde tamamen rasyonel bir koşul ortaya çıkar:

$$S(m) := \sum_{k\geq 0} \binom{m}{2k+1} (-7)^k = -2^{m-1}$$

Bu denklem doğrudan kontrol edilebilir: $S(3) = 3 - 7 = -4 = -2^2$, $S(5) = 5 - 70 + 49 = -16 = -2^4$ ve biraz daha uzun bir hesapla $S(13) = -4096 = -2^{12}$ bulunur. Bu üç değer sırasıyla

$n = 5,7,15$ çözümlerine karşılık gelir. Geriye bunların tek çözümler olduğunu göstermek kalmaktadır.

Beşinci adım: 7 modülüne göre eleme. $k \geq 1$ olan terimler 7'ye bölündüğünden $S(m) \equiv m \pmod 7$ olur. Böylece $m \equiv -2^{m-1} \pmod 7$ koşulu elde edilir. $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan 2^{m-1} değeri m'nin 3'e göre kalanına bağlıdır. Üç durum ayrı ayrı incelendiğinde Çin kalan teoremi yardımıyla $m \equiv 3,5$ veya $13 \pmod{21}$ sonucuna ulaşılır. Bu üç kalan sınıfının her biri, bilinen çözümlerden tam olarak birini içerir.

Altıncı adım: 7-sel ayırma lemması. Son adım, her kalan sınıfında en fazla bir çözüm bulunduğunu göstermektir. m ve m_1 aynı kalan sınıfında iki farklı çözüm olsun ve 7^ℓ, $m - m_1$ farkını tam olarak bölen en büyük 7 kuvveti olsun ($\ell \geq 1$). Bir yandan $3 \mid m - m_1$ olduğundan

$$2^{m-m_1} = 8^{(m-m_1)/3} = (1+7)^{(m-m_1)/3} \equiv 1 \pmod{7^{\ell+1}}$$

bulunur. Dolayısıyla $S(m) - S(m_1) = -2^{m_1-1}(2^{m-m_1} - 1) \equiv 0 \pmod{7^{\ell+1}}$ olur. Öte yandan $j = 2k+1$ için $\binom{m}{j} - \binom{m_1}{j}$ farkının $j!$ katı, $m - m_1$ ile bölünen bir tam sayıdır. $k \geq 1$ için $v_7\big((2k+1)!\big) \leq (2k+1)/6 < k$ eşitsizliği sağlandığından, $S(m) - S(m_1)$ farkında $k \geq 1$ olan her terim $7^{\ell+1}$ ile bölünür. Bu nedenle $S(m) - S(m_1) \equiv m - m_1 \pmod{7^{\ell+1}}$ olur. Ancak $m - m_1$ farkı $7^{\ell+1}$ ile bölünmez. Bu çelişki, $m = m_1$ olması gerektiğini gösterir. Böylece tek n için çözümler yalnızca $m \in \{1,3,5,13\}$, yani $n \in \{3,5,7,15\}$ olur ve Teorem 1 ispatlanmış olur. ▫

Altıncı adım, aslında $m \mapsto S(m)$ fonksiyonunun her kalan sınıfı üzerinde 7-sel analitik bir fonksiyon gibi davrandığı ve sıfırlarının sayısının sınırlı olduğu gözlemine dayanır. Bu, Skolem, Chowla ve Lewis'in (1959) kullandığı p-sel yöntemin özüdür: Uygun bir kalan sınıfında $u_m \mp 1$ ifadesi $\mathbb{Z}_p$ üzerinde yakınsak bir

kuvvet serisi olarak yazılır ve Strassmann teoremi bu serinin sıfır sayısını sınırlar (Hasse, 1966; Mordell, 1969).

Lucas Dizileri ve İlkel Bölenler

İkinci adımda elde edilen bağıntı, Lucas dizileri dilinde çok daha şeffaf bir biçim alır. α ve β yukarıdaki gibi olmak üzere

$$u_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}, \qquad v_m = \alpha^m + \beta^m$$

dizileri tanımlansın. $\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha\beta = 2$ olduğundan her iki dizi de $w_{m+1} = w_m - 2w_{m-1}$ yineleme bağıntısını sağlar; başlangıç değerleri $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ ve $v_0 = 2$, $v_1 = 1$'dir. İkinci adımdaki çarpanlara ayırma her $n \geq 3$ için $\left(x + \sqrt{-7}\right)/2 = \pm\alpha^{n-2}$ sonucunu verdiğinden Ramanujan–Nagell denklemi şu denk biçime dönüşür:

$$u_m = \pm 1, \qquad x = \pm v_m, \qquad m = n - 2$$

Başka bir deyişle Ramanujan–Nagell denklemini çözmek, belirli bir Lucas dizisinin hangi terimlerinin ± 1'e eşit olduğunu belirlemekle aynı şeydir. Tablo 1'de görüldüğü gibi $|u_m| = 1$ koşulunu sağlayan indisler $m = 1,2,3,5,13$'tür ve bunlara karşılık gelen $|v_m|$ değerleri tam olarak $1,3,5,11,181$'dir.

Tablo 1. u_m ve v_m Lucas Dizilerinin İlk Terimleri

m	u_m	v_m
0	0	2
1	1	1
2	1	−3
3	−1	−5
4	−3	1
5	−1	11
6	5	9
7	7	−13
8	−3	−31
9	−17	−5
10	−11	57

m	u_m	v_m
11	23	67
12	45	−47
13	−1	−181
14	−91	−87

Kaynak: Yineleme bağıntısı kullanılarak yazar tarafından hesaplanmıştır.

Bu bakış açısını modern yöntemlere bağlayan sonuç, Bilu, Hanrot ve Voutier'nin (2001) ilkel bölenler teoremidir. (α, β) bir Lucas çifti olsun; yani $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ aralarında asal sıfırdan farklı tam sayılar ve α/β bir birim kökü olmasın. Bir q asalı u_m'yi bölüyor ancak $(\alpha - \beta)^2 u_1 u_2 \cdots u_{m-1}$ çarpımını bölmüyorsa u_m teriminin *ilkel böleni* olarak adlandırılır. Benzer tanım, Lehmer dizileri için de yapılır.

Teorem 2 (Bilu–Hanrot–Voutier). Her Lucas çifti için $m > 30$ ise u_m teriminin en az bir ilkel böleni vardır. Ayrıca $m \leq 30$ için ilkel böleni olmayan tüm terimler açık olarak listelenmiştir. Lehmer dizileri için de benzer bir sonuç geçerlidir (Bilu et al., 2001).

Bu teorem Ramanujan–Nagell denklemine birkaç satırlık bir ispat sağlar. $u_m = \pm 1$ ise u_m'nin hiçbir asal böleni, dolayısıyla hiçbir ilkel böleni yoktur. Teorem 2 gereği $m \leq 30$ olmalıdır ve geriye kalan sonlu sayıdaki durum Tablo 1'deki yineleme ile denetlenerek $m \in \{1,2,3,5,13\}$ bulunur. Dikkat çekici bir ayrıntı olarak, $(1, -7)$ parametreli bu Lucas çifti için $m = 13$ değeri Bilu, Hanrot ve Voutier'nin istisnalar listesinde yer alır. Ramanujan'ın "geç" çözümü olan $181^2 + 7 = 2^{15}$, ilkel bölenler kuramının istisnai durumlarından birinin ta kendisidir.

İlkel bölenlerin bir başka temel özelliği, ilerleyen kısımlarda belirleyici rol oynayacaktır: p tek asal olmak üzere u_p teriminin bir ilkel böleni olan q asalı, diskriminantı bölmüyorsa $q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ koşulunu sağlar (Bilu et al., 2001). Dolayısıyla bir denklemin yapısı u_p'nin asal bölenlerini önceden verilmiş sonlu bir S kümesiyle sınırlıyorsa, p üssü $q^2 - 1$ $(q \in S)$ sayılarının asal bölenleri arasında

kalmak zorundadır. Bu basit gözlem, C'nin asal kuvvetlerinden oluştuğu $x^2 + C = y^n$ denklemlerinin çözümünde kullanılan stratejinin kalbini oluşturur.

Ramanujan–Nagell Tipi Genellemeler: $x^2 + D = 2^n$ ve $x^2 + D = p^n$

Klasik denklemin ilk doğal genellemesi, 7 yerine başka bir D sabitinin alınmasıdır. Apéry (1960), $D > 0$ ve $D \neq 7$ için $x^2 + D = 2^n$ denkleminin en fazla iki çözümü olduğunu göstermiştir. Beukers (1981a), Thue ve Siegel'den gelen hipergeometrik yöntemi geliştirerek iki çözümün yalnızca $D = 23$ ile $k \geq 4$ olmak üzere $D = 2^k - 1$ ailesinde gerçekleştiğini, diğer tüm pozitif D için en fazla bir çözüm bulunduğunu ispatlamıştır (Beukers, 1981a, 1981b). Bauer ve Bennett (2002), aynı yöntemi iyileştirerek p tek asal ve $p \nmid D$ olmak üzere $x^2 - D = p^n$ denkleminin en fazla üç pozitif çözümü olduğunu göstermiş; Bugeaud ve Shorey (2001) ise $D_1 x^2 + D_2 = \lambda k^n$ biçimindeki denklemler için açık istisna listeleriyle birlikte keskin üst sınırlar elde etmiştir.

Bu tür denklemlerin çözüm sayısının sonlu olduğu, Siegel'in eğriler üzerindeki tam sayı noktalarına ilişkin teoreminden kolayca çıkar (Siegel, 1929). $x^2 + D = AB^n$ denkleminde $n = 3q + r$ ($r \in \{0,1,2\}$) ve $Y = B^q$ yazıldığında $(AB^r x)^2 = (AB^r Y)^3 - D(AB^r)^2$ eşitliği elde edilir; bu, Mordell tipi bir eliptik eğri üzerindeki tam sayı noktasıdır. Siegel'in sonucu etkin olmadığından çözümlerin listelenmesi için Baker'ın lineer formlar kuramı gibi etkin yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur (Baker, 1975). Aynı "eliptik eğriye indirgeme" fikri, aşağıda göreceğimiz gibi, $x^2 + C = y^n$ denklemlerinin $n = 3$ durumunda bugün de standart araçtır.

Lebesgue–Nagell Denklemi: $x^2 + C = y^n$

Lebesgue (1850), $C = 1$ için $x^2 + 1 = y^n$ denkleminin aşikâr olmayan bir çözümü olmadığını göstermiştir. Nagell, ilerleyen

yıllarda başka küçük C değerleri için sonuçlar elde etmiştir. Cohn (1993), $1 \leq C \leq 100$ aralığındaki C değerlerinden 77'si için denklemi tamamen çözmüş; geri kalan durumlar ise ancak Bugeaud, Mignotte ve Siksek'in (2006) çalışmasıyla çözülebilmiştir. Bu yazarlar, Wiles'ın Fermat'nın Son Teoremi ispatında kullanılan modüler yöntemi Baker kuramı ve kapsamlı hesaplamalarla birleştirmiştir. Modüler yöntemin ana hatları şöyledir:

1. Varsayımsal bir (x, y, n) çözümüne, katsayıları çözüme bağlı olan bir eliptik eğri (Frey eğrisi) karşılık getirilir.
2. Eliptik eğrilerin modülerliği ve Ribet'in seviye düşürme teoremi kullanılarak bu eğrinin n modülüne göre Galois temsilinin, seviyesi çözümden bağımsız ve küçük olan bir modüler forma karşılık geldiği gösterilir.
3. Bu seviyedeki sonlu sayıdaki modüler form tek tek incelenerek n üzerinde güçlü kısıtlar ya da doğrudan çelişkiler elde edilir.
4. Geriye kalan küçük üsler için Baker tipi sınırlar, örgü indirgeme ve Thue denklemi çözücüleri kullanılır.

C sabit bir sayı olduğunda modüler yöntem çok etkilidir. Ancak C'nin kendisi de değişken üsler içerdiğinde, yani $C = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ biçiminde sonsuz bir aileden geldiğinde, problem nitelik değiştirir. Bu durumda tek bir denklem değil, sonsuz sayıda denklemden oluşan bir aile aynı anda çözülmek zorundadır. Son yirmi yılda bu tür ailelerin çözümü için oldukça sistematik bir strateji geliştirilmiştir.

C'nin Asal Kuvvetlerinden Oluştuğu Durum

$S = \{p_1, \ldots, p_s\}$ sonlu bir asal kümesi olsun. Genelleştirilmiş Lebesgue–Ramanujan–Nagell probleminin tipik biçimi şudur:

$$x^2 + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} = y^n, \qquad \gcd(x, y) = 1, \quad n \geq 3, \quad a_i \geq 0$$

Burada bilinmeyenler yalnızca x, y ve n değil, $a_1, \ldots, a_s$ üsleridir. $\gcd(x, y) = 1$ koşulu zorunludur: Bu koşul olmaksızın, S asallarından oluşan bir t için (x, y) çözümünden (xt^n, yt^2) çözümü türetilebilir ve aşikâr sonsuz aileler ortaya çıkar. Bu çerçevede çözümler genellikle seyrek ama şaşırtıcı biçimde "büyük" olabilir. Örneğin

$$10^2 + 3^5 = 7^3, \qquad 16^2 + 3^2 \cdot 41 = 5^4, \qquad 38^2 + 41^2 = 5^5, \qquad 95^2 + 2 \cdot 73^2 = 3^9$$

eşitliklerinden ilki $S = \{3\}$, ortadaki ikisi $S = \{3,41\}$ ve sonuncusu $S = \{2,3,73\}$ için bu tür çözümlere örnektir (Alan & Aydın, 2023; Alan & Zengin, 2020; Le & Soydan, 2020). Son örnekte $n = 9$ gibi görece büyük bir üssün ortaya çıkması, bu ailelerde sayısal aramanın tek başına yeterli olmadığını açıkça gösterir.

Bu alandaki çalışmalar kabaca üç kuşakta toplanabilir (Le & Soydan, 2020). Birinci kuşakta C tek bir asalın kuvveti olarak alınmıştır. Bérczes ve Pink (2008), $x^2 + p^{2k} = y^n$ denklemini $p < 100$ asalları için çözmüş; Pan (2013) bu denklemin çözümlerini tüm tek asallar için tam olarak betimlemiştir. İkinci kuşakta C iki asalın kuvvetlerinin çarpımıdır. Luca'nın (2002) $x^2 + 2^a 3^b = y^n$ çalışması bu kuşağın öncüsü sayılabilir. Ardından $S = \{2,5\}$ ve $S = \{2,13\}$ için Luca ve Togbé (Luca & Togbé, 2008, 2009), $S = \{2,11\}$ için Cangül ve arkadaşları (2010), $S = \{2,19\}$ için Soydan, Ulas ve Zhu (2012), $S = \{5,11\}$ için Cangül ve arkadaşları (2010) ile Soydan ve Tzanakis (2016), $S = \{5,17\}$ için Pink ve Rábai (2011) sonuçlar elde etmiştir. Zhu, Le, Soydan ve Togbé (2015), p keyfi bir tek asal olmak üzere $x^2 + 2^a p^b = y^n$ ailesini belirli koşullar altında bütünüyle ele almıştır. Bu kuşağın yakın tarihli bir örneği, Alan ve

Zengin'in (2020) $x^2 + 3^a 41^b = y^n$ denklemini tamamen çözdüğü çalışmadır.

Üçüncü kuşakta C üç ya da daha fazla asalın kuvvetlerinden oluşur. Pink (2007), dört asallı $x^2 + 2^a 3^b 5^c 7^d = y^n$ denklemini incelemiştir. Cangül, Demirci, İnam, Luca ve Soydan (2013) $S = \{2,3,11\}$, Godinho, Marques ve Togbé (2016) $S = \{2,3,17\}$ ve $S = \{2,13,17\}$, Ghadermarzi (2019) ise $S = \{2,3,13\}$ ve $S = \{2,3,19\}$ durumlarını çözmüştür. Alan ve Aydın (2023), $x^2 + 2^a 3^b 73^c = y^n$ denkleminin aralarında asal x, y ve $n \geq 3$ için tüm çözümlerini belirlemiştir. Daha yakın tarihli çalışmalar, sağ tarafın da $2^m y^n$ gibi değiştirilmiş biçimlerini ele almaktadır; örneğin Baruah, Das ve Hoque (2024), $x^2 + 5^a 13^b 17^c = 2^m y^n$ denkleminin tüm çözümlerini vermiştir. Benzer türde yeni denklemler üzerine çalışmalar ön baskı olarak da yayımlanmaya devam etmektedir (Chakraborty et al., 2021; Muthuvel & Venkatraman, 2024). Tablo 2, bu çalışmalardan seçilmiş bir kesiti özetlemektedir.

Tablo 2. C'nin Asal Kuvvetlerinden Oluştuğu $x^2 + C = y^n$ Denklemleri Üzerine Seçilmiş Çalışmalar

C'nin biçimi	**Asal kümesi S**	**Çalışma**
p^{2k}	$\{p\}, p < 100$	Bérczes ve Pink (2008)
p^{2k}	$\{p\}$, p tek asal	Pan (2013)
$2^a 3^b$	$\{2,3\}$	Luca (2002)
$2^a 5^b$	$\{2,5\}$	Luca ve Togbé (2008)
$2^a 13^b$	$\{2,13\}$	Luca ve Togbé (2009)
$2^a 11^b$	$\{2,11\}$	Cangül, Demirci, Luca vd. (2010)
$5^a 11^b$	$\{5,11\}$	Cangül, Demirci, Soydan vd. (2010); Soydan ve Tzanakis (2016)
$5^a 17^b$	$\{5,17\}$	Pink ve Rábai (2011)
$2^a 19^b$	$\{2,19\}$	Soydan, Ulas ve Zhu (2012)
$2^a p^b$	$\{2, p\}$	Zhu, Le, Soydan ve Togbé (2015)
$3^a 41^b$	$\{3,41\}$	Alan ve Zengin (2020)
$2^a 3^b 5^c 7^d$	$\{2,3,5,7\}$	Pink (2007)

C'nin biçimi	Asal kümesi S	Çalışma
$2^a3^b11^c$	$\{2,3,11\}$	Cangül, Demirci, İnam vd. (2013)
$2^a3^b17^c$, $2^a13^b17^c$	$\{2,3,17\}$, $\{2,13,17\}$	Godinho, Marques ve Togbé (2016)
$2^a3^b13^c$, $2^a3^b19^c$	$\{2,3,13\}$, $\{2,3,19\}$	Ghadermarzi (2019)
$2^a3^b73^c$	$\{2,3,73\}$	Alan ve Aydın (2023)
$\pm2^a3^b5^c7^d11^e$	$\{2,3,5,7,11\}$	Bennett ve Siksek (2023)
$3^a19^b73^c$	$\{3,19,73\}$	Alan ve Aydın (2025)
$3^a7^b37^c$	$\{3,7,37\}$	Aydın ve Alan (2026)

Standart Çözüm Stratejisi

Yukarıda sayılan çalışmaların büyük çoğunluğu, ayrıntılarda farklılık gösterse de aynı iskeleti izler (Alan & Aydın, 2023; Le & Soydan, 2020). Bu iskeletin adımları şöyle özetlenebilir:

1. **Üssün indirgenmesi.** n'nin bir tek asal böleni p varsa $y^n = \left(y^{n/p}\right)^p$ yazılarak $n = p$ durumuna; aksi hâlde n dördün katı olduğundan $n = 4$ durumuna geçilir. Böylece $n \in \{3,4\}$ ya da $n = p \geq 5$ asal durumları incelenir.
2. **Karesiz kısmın ayrılması.** $C = dz^2$ yazılır; burada d, S asallarının karesiz bir çarpımıdır ve dolayısıyla yalnızca 2^s olası değer alır. Denklem $x^2 + dz^2 = y^p$ biçimine gelir.
3. **İkinci dereceden cisimde çarpanlara ayırma.** $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$ cisminde $\left(x + z\sqrt{-d}\right)\left(x - z\sqrt{-d}\right) = y^p$ ayrışımı kullanılır. $\gcd(x, y) = 1$ koşulu iki çarpanın ideal olarak aralarında asal olmasını sağlar. p, K'nin sınıf sayısını bölmüyorsa $x + z\sqrt{-d} = \varepsilon\left(u + v\sqrt{-d}\right)^p$ eşitliği elde edilir (burada ε bir birim, u ve v ise uygun tam ya da yarım tam sayılardır); bu,

Nagell'in $D = 7$ için yaptığı adımın doğrudan genellemesidir.

4. **Lucas–Lehmer dizisine geçiş.** Sanal kısımlar karşılaştırıldığında z sayısının, bir Lucas ya da Lehmer dizisinin p-inci terimi ile v'nin çarpımına eşit olduğu görülür. z yalnızca S asallarından oluştuğundan bu terimin bütün asal bölenleri S içinde kalır.
5. **İlkel bölenler ile üssün sınırlanması.** Teorem 2 gereği yeterince büyük p için terimin bir ilkel böleni q vardır ve $q \in S$ olmalıdır. $q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ koşulundan $p \mid q^2 - 1$ elde edilir. Böylece p üssü yalnızca birkaç olası değere iner; geriye kalan küçük durumlar Bilu, Hanrot ve Voutier'nin tabloları ve doğrudan hesaplama ile incelenir.
6. **Küçük üsler: Eliptik eğriler.** $n = 3$ durumunda $C = C_1 k^6$ yazılarak denklem, sonlu sayıda $Y^2 = X^3 - C_1$ Mordell eğrisi üzerindeki S-tam sayı noktalarının belirlenmesine indirgenir. $n = 4$ durumu da benzer biçimde dörtlü eğrilere ya da eliptik eğrilere indirgenir. Bu noktalar Magma gibi bilgisayar cebiri sistemlerindeki algoritmalarla hesaplanır.

Bu stratejinin gücü, S kümesinin aritmetiğini doğrudan p üssü üzerinde bir kısıta dönüştürmesindedir. Örneğin $S = \{2,3,73\}$ için $2^2 - 1 = 3$, $3^2 - 1 = 2^3$ ve $73^2 - 1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 37$ olduğundan beşinci adım, $p \geq 5$ için yalnızca $p = 37$ olasılığını bırakır. Bu basitleştirilmiş tabloda ayrıntılar (sınıf sayısının p ile bölünmesi, birimlerin etkisi ve küçük p değerleri için istisnalar) ayrıca ele alınmalıdır; ancak problemin özü, sonsuz bir denklem ailesinin birkaç somut hesaplamaya indirgenmesidir (Alan & Aydın, 2023). Aynı tablo, S büyüdükçe neden zorluğun arttığını da açıklar:

d için olası değer sayısı 2^s ile büyür, q^2-1 sayılarının asal bölenleri çoğalır ve $n=3$ durumunda incelenmesi gereken eliptik eğrilerin sayısı hızla artar.

Bu alandaki en kapsamlı güncel sonuçlardan biri, Bennett ve Siksek'in (2023) çalışmasıdır. Yazarlar, x^2-y^n farkının bütün asal bölenlerinin 13'ten küçük olduğu, yani $C=\pm 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e$ biçiminde olduğu durumda, aralarında asal x, y ve $n \geq 3$ için tüm çözümleri belirlemiş ve toplam 1.240 çözüm bulmuştur. Bu sonuç, y'nin çift olduğu ve önceki yöntemlerle ele alınamayan durumları da kapsar. Çalışmada p-sel ve karmaşık logaritmalardaki lineer formlar, Frey–Hellegouarch eğrileri aracılığıyla modülerlik, Lucas dizilerinin ilkel bölenleri, Thue–Mahler denklemi çözücüleri ve hesaplamalı elekler bir arada kullanılmıştır. Bu çalışma, tek tek S kümeleri için yazılan makalelerden, büyük asal kümelerini aynı anda kapsayan tekdüze algoritmalara geçişin açık bir göstergesidir.

Kombinatoryal Bağlantılar

Klasik denklem, ilk bakışta ilgisiz görünen iki kombinatoryal soruyla da yakından ilişkilidir. Birincisi, hem Mersenne sayısı (2^b-1) hem de üçgensel sayı ($T_k=k(k+1)/2$) olan sayıların belirlenmesidir. $2^b-1=k(k+1)/2$ eşitliği 8 ile çarpılıp düzenlendiğinde $(2k+1)^2+7=2^{b+3}$ elde edilir. Dolayısıyla Mersenne-üçgensel sayılar yalnızca $0,1,3,15$ ve $4095=T_{90}$'dır. İkinci bağlantı kodlama kuramındandır: N uzunluğunda iki hata düzelten mükemmel bir ikili kodun var olabilmesi için

$$1+N+\binom{N}{2}=2^r \quad \Leftrightarrow \quad (2N+1)^2+7=2^{r+3}$$

koşulu gerekir (Shapiro & Slotnick, 1959). Buradan $N \in \{0,1,2,5,90\}$ bulunur. $N=5$ uzunluğundaki tekrarlama kodu aşikâr bir mükemmel koddur. $N=90$ sayısal olarak umut verici olsa da bu parametrelere sahip mükemmel bir kodun var olmadığı

bilinmektedir (van Lint, 1999). Tablo 3, çözümlerin bu farklı yorumlarını bir arada sunmaktadır.

Tablo 3. Ramanujan–Nagell Denkleminin Çözümleri ve Farklı Yorumları

n	x	2^n	$m = n-2$	$2^{n-3}-1$ **(Mersenne-üçgensel)**	$N=(x-1)/2$ **(kod uzunluğu)**
3	1	8	1	0	0
4	3	16	2	1	1
5	5	32	3	3	2
7	11	128	5	15	5
15	181	32768	13	4095	90

Kaynak: Yazar tarafından hesaplanmıştır.

Hesaplamalı Yöntemler ve Biçimsel Doğrulama

Genelleştirilmiş denklemlerin çözümünde ortak bir iskelet bulunur: Önce kuramsal bir araçla çözümlerin büyüklüğü için çok büyük ama sonlu bir üst sınır elde edilir; ardından hesaplamalı yöntemlerle bu sınır taranabilir bir düzeye indirilir. Birinci aşamanın temel aracı, Baker'ın cebirsel sayıların logaritmalarındaki lineer formlar kuramıdır (Baker, 1975):

$$\Lambda = b_1 \log\alpha_1 + \cdots + b_k \log\alpha_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |\Lambda| > \exp(-\kappa \log B)$$

Burada $B = \max|b_i|$ ve κ yalnızca α_i sayılarına bağlı, açıkça hesaplanabilen bir sabittir. Bu tür sınırlar genellikle 10^{20} ile 10^{60} arasında değişen sayılardır. İkinci aşamada Lenstra–Lenstra–Lovász (LLL) örgü indirgeme algoritması ve Baker–Davenport tipi lemmalar devreye girer; örneğin Cangül, Demirci, Soydan ve Tzanakis'in (2010) çalışmasında 10^{58} mertebesindeki sınırlar bu yolla taranabilir aralıklara çekilmiştir. Daha karmaşık durumlarda problem Thue–Mahler denklemlerine indirgenir; Gherga ve Siksek (2025) bu denklemler için yalnızca tek bir sayı cisminde hesap gerektiren ve on birinci dereceye kadar örnekleri çözebilen verimli

bir algoritma geliştirmiştir. Kullanılan yöntemler ve bu yöntemlerin avantajlı ve dezavantajlı yönleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

.

Tablo 4. Ramanujan–Nagell Tipi Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Başlıca Yöntemlerin Karşılaştırılması

Yöntem	**Temel araç**	**Güçlü yönü**	**Sınırlılığı**
Cebirsel çarpanlara ayırma (Nagell)	İkinci dereceden cisimde tek türlü ayrışım	Temel düzeyde ve tam ispat	Sınıf sayısı 1 olan cisimlerle sınırlı
p-sel yöntem (Skolem)	p-sel analitik fonksiyonlar, Strassmann teoremi	Her kalan sınıfında çözüm sayısını sınırlar	Uygun asal ve sınıf analizine bağımlı
Hipergeometrik yöntem (Beukers)	Padé yaklaşımları, etkin irrasyonellik ölçüleri	Çözüm sayısı için tekdüze sınırlar	Belirli tabanlar için uygulanabilir
İlkel bölenler (BHV)	Lucas ve Lehmer dizileri	Üssü S'nin aritmetiğiyle sınırlar	Teoremin kendisi çok derin
Eliptik eğriler	S-tam sayı noktaları	$n = 3,4$ durumlarını tamamen çözer	Eğri sayısı S ile hızla artar
Baker kuramı ve LLL	Lineer formlar, örgü indirgeme	Genel, etkin ve hesaplanabilir	Başlangıç sınırları çok büyük
Modüler yöntem	Frey eğrileri, seviye düşürme	Büyük üsleri toptan eler	Küçük üsler için ek yöntem gerekir

Açık Problemler ve Gelecek Yönelimler

Klasik Ramanujan–Nagell denklemi tamamen çözülmüş olsa da onun etrafında oluşan problem ailesi hâlâ canlıdır. Güncel araştırmaların öne çıkan yönelimleri şöyle özetlenebilir (Bennett & Siksek, 2023; Le & Soydan, 2020):

- S asal kümesi verildiğinde $x^2 + C = y^n$ denkleminin tüm çözümlerini bulan, S'ye özgü makaleler yerine genel

ve tekdüze bir algoritmanın geliştirilmesi ve uygulanması.

- Sınıf sayısının p üssüyle bölündüğü durumlar ile y'nin çift olduğu durumlar gibi standart stratejinin doğrudan işlemediği hâllerin sistematik biçimde ele alınması.
- $x^2 + C = 2^m y^n$, $D_1 x^2 + D_2^m = k^n$ ve $x^2 + C = y^n$ ile $C < 0$ gibi değiştirilmiş biçimlerin incelenmesi ve çözüm sayıları için keskin üst sınırların elde edilmesi.
- Thue–Mahler ve S-birim denklemi çözücülerinin verimliliğinin artırılması ve bunların açık kaynaklı bilgisayar cebiri sistemlerine aktarılması.
- Büyük ölçüde hesaplamaya dayanan sonuçların biçimsel olarak doğrulanması ve bu süreçte yapay zekâ destekli ispat araçlarının sistematik kullanımı.

Sonuç

Ramanujan–Nagell denklemi, yalın bir sorunun nasıl zengin bir kuramsal yapı gerektirecek bir araştırma alanına dönüşebileceğinin güzel bir örneğidir. Ramanujan'ın 1913'te sayısal sezgiye dayanarak öne sürdüğü sanı, otuz beş yıl sonra Nagell tarafından ikinci dereceden bir cismin aritmetiği ve ustaca kurgulanmış bir 7-sel argümanla ispatlanmıştır. Bu ispatın merkezindeki fikir, yani denklemi uygun bir ikinci dereceden cisimde çarpanlarına ayırıp bir Lucas dizisine indirgemek, bugün $x^2 + C = y^n$ denklemlerinin çözümünde kullanılan standart stratejinin de çekirdeğini oluşturmaktadır.

C'nin bir ya da birkaç asalın kuvvetlerinden oluştuğu genelleştirilmiş Lebesgue–Ramanujan–Nagell denklemleri, son yirmi yılda Türkiye'den araştırmacıların da önemli katkılar sunduğu verimli bir alan hâline gelmiştir. Bu alandaki çalışmalar, Bilu–Hanrot–Voutier ilkel bölenler teoremi ile eliptik eğriler üzerindeki S-

tam sayı noktalarının hesaplanmasını birleştiren ortak bir yöntem çevresinde şekillenmiştir. Bennett ve Siksek'in çalışması ise alanın, tek tek asal kümeleri için yazılan sonuçlardan büyük asal kümelerini aynı anda kapsayan tekdüze algoritmalara doğru ilerlediğini göstermektedir.

Bu konuya ilgi duyanlar için bu konu, cebirsel sayılar kuramı, Lucas dizileri, eliptik eğriler ve Diofant yaklaşımlarının bir arada kullanıldığı ideal bir çalışma alanıdır. Bu bölümde sunulan klasik ispatı yeniden üretmek, küçük bir S kümesi için $x^2 + C = y^n$ denkleminin çözümlerini bilgisayarla aramak ve standart stratejinin adımlarını bu örnek üzerinde izlemek, okuyucunun konuyu derinleştirmesi için yararlı alıştırmalar olacaktır.

Kaynakça

Alan, M., & Zengin, U. (2020). On the Diophantine equation $x^2 + 3^a41^b = y^n$. *Periodica Mathematica Hungarica, 81*(2), 284–291. https://doi.org/10.1007/s10998-020-00321-6

Alan, M., & Aydın, M. (2023). On the Diophantine equation $x^2 + 2^a3^b73^c = y^n$. *Archivum Mathematicum, 59*(5), 411–420. https://doi.org/10.5817/AM2023-5-411

Alan, M., & Aydın, M. (2025). Concerning the Solutions of Some Lebesgue-Ramanujan-Nagell Equations. *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, *8*(3), 173-182. https://doi.org/10.33434/cams.1675491

Apéry, R. (1960). Sur une équation diophantienne. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 251*, 1263–1264.

Aydın, M., & Alan, M. (2026). A Note on a Lebesgue-Ramanujan-Nagell Type Diophantine Equation. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, *16*(6), 1017-1033.

Baker, A. (1975). *Transcendental number theory*. Cambridge University Press.

Banwait, B. S. (2026). *A formal proof of the Ramanujan–Nagell theorem in Lean 4* (arXiv:2604.09808). arXiv. https://arxiv.org/abs/2604.09808

Baruah, P., Das, A., & Hoque, A. (2024). Complete solutions of a Lebesgue–Ramanujan–Nagell type equation. *Archivum Mathematicum, 60*(3), 135–144. https://doi.org/10.5817/AM2024-3-135

Bauer, M., & Bennett, M. A. (2002). Applications of the hypergeometric method to the generalized Ramanujan–Nagell equation. *The Ramanujan Journal, 6*(2), 209–270.

Bennett, M. A., & Siksek, S. (2023). Differences between perfect powers: The Lebesgue–Nagell equation. *Transactions of the American Mathematical Society, 376*(1), 335–370. https://doi.org/10.1090/tran/8734

Bérczes, A., & Pink, I. (2008). On the Diophantine equation $x^2 + p^{2k} = y^n$. *Archiv der Mathematik, 91*(6), 505–517.

Beukers, F. (1981a). On the generalized Ramanujan–Nagell equation I. *Acta Arithmetica, 38*(4), 389–410. https://doi.org/10.4064/aa-38-4-389-410

Beukers, F. (1981b). On the generalized Ramanujan–Nagell equation II. *Acta Arithmetica, 39*(2), 113–123. https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/acta-arithmetica/all/39/2/103066/on-the-generalized-ramanujan-nagell-equation-ii

Bilu, Y., Hanrot, G., & Voutier, P. M. (2001). Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 539*, 75–122. https://doi.org/10.1515/crll.2001.080

Bugeaud, Y., Mignotte, M., & Siksek, S. (2006). Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations II: The Lebesgue–Nagell equation. *Compositio Mathematica, 142*(1), 31–62. https://wrap.warwick.ac.uk/33971

Bugeaud, Y., & Shorey, T. N. (2001). On the number of solutions of the generalized Ramanujan–Nagell equation. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 539*, 55–74.

Cangül, İ. N., Demirci, M., İnam, İ., Luca, F., & Soydan, G. (2013). On the Diophantine equation $x^2 + 2^a3^b11^c = y^n$. *Mathematica Slovaca, 63*(3), 647–659.

Cangül, İ. N., Demirci, M., Luca, F., Pintér, Á., & Soydan, G. (2010). On the Diophantine equation $x^2 + 2^a11^b = y^n$. *The Fibonacci Quarterly, 48*(1), 39–46.

Cangül, İ. N., Demirci, M., Soydan, G., & Tzanakis, N. (2010). On the Diophantine equation $x^2 + 5^a \cdot 11^b = y^n$. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, 43*(2), 209–225. https://projecteuclid.org/euclid.facm/1291903397

Chakraborty, K., Hoque, A., & Sharma, R. (2021). On the solutions of certain Lebesgue–Ramanujan–Nagell equations. *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51*(2), 459–471.

Cohn, J. H. E. (1993). The Diophantine equation $x^2 + C = y^n$. *Acta Arithmetica, 65*(4), 367–381.

Ghadermarzi, A. (2019). On the Diophantine equations $x^2 + 2^\alpha3^\beta19^\gamma = y^n$ and $x^2 + 2^\alpha3^\beta13^\gamma = y^n$. *Mathematica Slovaca, 69*(3), 507–520.

Gherga, A., & Siksek, S. (2025). Efficient resolution of Thue–Mahler equations. *Algebra & Number Theory, 19*(4). https://msp.org/ant/2025/19-4/ant-v19-n4-p02-s.pdf

Godinho, H., Marques, D., & Togbé, A. (2016). On the Diophantine equation $x^2 + C = y^n$ for $C = 2^a3^b17^c$ and $C = 2^a13^b17^c$. *Mathematica Slovaca, 66*(3), 565–574.

Hardy, G. H. (1940). *Ramanujan: Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Cambridge University Press.

Hasse, H. (1966). Über eine diophantische Gleichung von Ramanujan-Nagell und ihre Verallgemeinerung. *Nagoya Mathematical Journal, 27*(1), 77–102.

Le, M., & Soydan, G. (2020). A brief survey on the generalized Lebesgue–Ramanujan–Nagell equation. *Surveys in Mathematics and its Applications, 15*, 473–523. https://emis.univie.ac.at/journals/SMA/v15/a15_20.html

Lebesgue, V.-A. (1850). Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^m = y^2 + 1$. *Nouvelles Annales de Mathématiques, 9*, 178–181.

Ljunggren, W. (1943). Oppgave nr 2. *Norsk Matematisk Tidsskrift, 25*, 29.

Luca, F. (2002). On the equation $x^2 + 2^a 3^b = y^n$. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 29*(4), 239–244.

Luca, F., & Togbé, A. (2008). On the equation $x^2 + 2^a 5^b = y^n$. *International Journal of Number Theory, 4*(6), 973–979.

Luca, F., & Togbé, A. (2009). On the equation $x^2 + 2^\alpha 13^\beta = y^n$. *Colloquium Mathematicum, 116*(1), 139–146.

Mordell, L. J. (1969). *Diophantine equations*. Academic Press.

Muthuvel, S., & Venkatraman, R. (2024). *An exponential Diophantine equation $x^2 + 3^a 113^\beta = y^n$* (arXiv:2405.09252). arXiv. https://arxiv.org/abs/2405.09252

Nagell, T. (1948). Løsning till oppgave nr 2. *Norsk Matematisk Tidsskrift, 30*, 62–64.

Nagell, T. (1961). The Diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$. *Arkiv för Matematik, 4*(2–3), 185–187. https://projecteuclid.org/euclid.afm/1485893356

Pan, X. (2013). The exponential Lebesgue–Nagell equation $x^2 + p^{2m} = y^n$. *Periodica Mathematica Hungarica, 67*(2), 231–242.

Pink, I. (2007). On the Diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$. *Publicationes Mathematicae Debrecen, 70*(1–2), 149–166.

Pink, I., & Rábai, Z. (2011). On the Diophantine equation $x^2 + 5^k 17^l = y^n$. *Communications in Mathematics, 19*(1), 1–9.

Ramanujan, S. (1913). Question 464. *Journal of the Indian Mathematical Society, 5*, 130.

Shapiro, H. S., & Slotnick, D. L. (1959). On the mathematical theory of error-correcting codes. *IBM Journal of Research and Development, 3*(1), 25–34.

Siegel, C. L. (1929). Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. *Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1*, 41–69.

Skolem, T., Chowla, S., & Lewis, D. J. (1959). The Diophantine equation $2^{n+2} - 7 = x^2$ and related problems. *Proceedings of the American Mathematical Society, 10*(5), 663–669. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1959-0109137-4

Soydan, G., & Tzanakis, N. (2016). Complete solution of the Diophantine equation $x^2 + 5^a 11^b = y^n$. *Bulletin of the Hellenic Mathematical Society, 60*, 125–152.

Soydan, G., Ulas, M., & Zhu, H. (2012). On the Diophantine equation $x^2 + 2^a 19^b = y^n$. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 43*(3), 251–261.

Stewart, I., & Tall, D. (2016). *Algebraic number theory and Fermat's last theorem* (4th ed.). CRC Press.

van Lint, J. H. (1999). *Introduction to coding theory* (3rd ed.). Springer.

Zhu, H., Le, M., Soydan, G., & Togbé, A. (2015). On the exponential Diophantine equation $x^2 + 2^a p^b = y^n$. *Periodica Mathematica Hungarica, 70*(2), 233–247. https://doi.org/10.1007/s10998-014-0073-9

BÖLÜM 2

KISITLANMAMIŞ GIBONACCI 3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

GÖKSAL BİLGİCİ[1]

Giriş

Fibonacci dizisi, ikinci dereceden yinelemeli dizilerin en bilinen örneklerinden biridir ve cebirsel, kombinatorik ve sayı kuramsal bakış açılarından kapsamlı biçimde incelenmiştir. Lucas dizisi farklı başlangıç değerleriyle aynı yineleme bağıntısını sağlarken, Gibonacci dizisi (Benjamin & Quinn, 2004; Koshy, 2018) Fibonacci yinelemesini koruyup başlangıç koşullarının keyfî seçilmesine izin verir. Özellikle $G_1 = a$ ve $G_2 = b$ olmak üzere Gibonacci dizisi aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \qquad n \geq 3 \tag{1}$$

Gibonacci dizisi Fibonacci dizisiyle aşağıdaki bağıntı aracılığıyla ilişkilidir:

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1} \tag{2}$$

[1] Prof. Dr., Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, ORCID: 0000-0001-9964-5578

Ayrıca Gibonacci dizisi Binet-benzeri bir gösterime sahiptir. Bu bağıntılar, klasik Fibonacci özdeşliklerinin daha genel başlangıç koşullarına aktarılmasında etkili bir araçtır (Koshy, 2018; Vajda, 1989).

Fibonacci sayılarıyla ilişkili kuaterniyon dizileri Horadam'ın (1963) çalışmasına kadar uzanır. Horadam, dört ardışık Fibonacci sayısını kuaterniyon katsayıları olarak kullanarak Fibonacci kuaterniyonlarını aşağıdaki biçimde tanımlamıştır:

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3} \tag{3}$$

Fibonacci kuaterniyonlarının temel özellikleri Iyer (1969) ve Halıcı (2012) tarafından incelenmiş, Swamy (1973) ise genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarını tanımlamıştır. Horadam (1993), kuaterniyon katsayılı yineleme bağıntılarını genel Horadam dizisi (Horadam, Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, 1965) çerçevesinde ele almıştır. Sonraki çalışmalarda bu yapılar kompleks Fibonacci kuaterniyonlarına (Halıcı, On complex Fibonacci quaternions, 2013), Fibonacci kuaterniyonlarının çeşitli genellemelerine (Halıcı & Karataş, 2017; Polatlı & Kesim, 2015; Tan, Yılmaz, & Şahin, 2016) ve split, dual ya da genelleştirilmiş kuaterniyon cebirlerindeki karşılıklarına (Akyiğit, Kösal, & Tosun, 2013; Flaut & Shpakivskyi, 2013; Nurkan & Güven, 2015) taşınmıştır. Bu tür yapıların önemli bir bölümünde katsayılar, temel dizinin ardışık terimlerinden seçilmektedir. Daşdemir ve Bilgici (2021), bu kısıtı kaldırarak katsayılarda keyfî tam sayı kaydırmalarına izin veren kısıtlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını tanımlamışlardır:

$$F_n^{(p,q,r)} = F_n + iF_{n+p} + jF_{n+q} + kF_{n+r} \tag{4}$$

Kısıtlanmamış yaklaşım daha sonra doğrudan Gibonacci kuaterniyonlarına da uygulanmıştır (Bilgici, 2020).

Genelleştirmenin bir diğer yönü ise temel kuaterniyon cebiriyle ilgilidir. Şentürk ve Ünal (2022), bilinen çeşitli kuaterniyon sistemlerini özel durum olarak kapsayan üç parametreli bir çerçeve sunarak 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyon cebirini tanıtmışlardır. Bilgici (2022) daha sonra Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarını tanımlamış, bu yapılar için Binet formülleri ile klasik özdeşliklerin genelleştirmelerini elde etmiştir.

Daha yakın tarihli çalışmalarda İşbilir ve Gürses (2024), ardışık Horadam bileşenlerine sahip Horadam 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarını ele almış; Binet formülü, üreteç fonksiyonları ve çeşitli yapısal sonuçlar elde etmişlerdir. Ardışık Gibonacci katsayılı 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlar ile kısıtlanmamış Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlar da benzer biçimde incelenmiştir (Bilgici, 2024; Bilgici, 2024).

Bu çalışmada söz konusu iki genelleştirme doğrultusu bir araya getirilmektedir. Başka bir ifadeyle, Gibonacci dizisinin keyfî başlangıç koşulları ile terimlerdeki keyfî indeks kaydırmaları aynı anda 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyon cebirine taşınmaktadır. Böylece kısıtlanmamış Gibonacci kuaterniyonlarını, kısıtlanmamış Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarını ve ardışık Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarını özel durum olarak içeren ortak bir çerçeve elde edilmektedir.

Çalışmanın bu önceki çalışmalara göre katkısı üç noktada özetlenebilir. Birincisi, yardımcı kuaterniyonların iki farklı sıradaki çarpımı, yalnızca kaydırma ve cebir parametrelerine bağlı olan simetrik bir U ve antisimetrik bir V bileşenine ayrıştırılmaktadır. İkincisi, bu ayrışım sayesinde Gibonacci başlangıç değerlerinin tüm özdeşliklerdeki etkisi tek bir $\Delta = a^2 + ab - b^2$ skaler çarpanına

indirgenmektedir. Üçüncüsü, dizinin değişmeli olmama davranışını açıkça ölçen bir komütatör özdeşliği verilmekte ve dizinin hangi koşulda değişmeli olduğu tam olarak belirlenmektedir.

Ön Bilgiler

Aşağıdaki sayılar, Fibonacci yinelemesine ait karakteristik denklemin kökleri olsun:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

Bu kökler için aşağıdaki temel bağıntılar geçerlidir:

$$\alpha + \beta = 1, \qquad \alpha\beta = -1, \qquad \alpha - \beta = \sqrt{5} \tag{6}$$

$G_1 = a$ ve $G_2 = b$ başlangıç değerleriyle tanımlanan Gibonacci dizisi için

$$c = a + (a-b)\beta, \qquad d = a + (a-b)\alpha \tag{7}$$

yazalım. Bu durumda Binet-benzeri gösterim

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{8}$$

şeklindedir. Basit bir hesaplama sonucunda

$$cd = a^2 + ab - b^2 \tag{9}$$

elde edilir. Kolaylık amacıyla çalışma boyunca

$$\Delta = a^2 + ab - b^2 \tag{10}$$

gösterimi kullanılacaktır. Yineleme bağıntısı tüm tam sayı indekslerine genişletilebilir; özellikle $G_0 = b - a$ olur.

3-Parametreli Genelleştirilmiş Kuaterniyon Cebiri

$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ olsun. 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyon cebiri, $w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $w = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k$ biçimindeki elemanlardan oluşur. Burada i, j ve k birimleri aşağıdaki çarpım kurallarını sağlar (Şentürk & Ünal, 2022):

$$i^2 = -\theta_1\theta_2, \qquad j^2 = -\theta_1\theta_3, \qquad k^2 = -\theta_2\theta_3 \tag{11}$$

$$ij = \theta_1 k = -ji, \qquad jk = \theta_3 i = -kj, \qquad ki = \theta_2 j = -ik \tag{12}$$

w kuaterniyonunun eşleniği ve normu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{w} = w_0 - w_1 i - w_2 j - w_3 k \tag{13}$$

$$N(w) = w\overline{w} = w_0^2 + \theta_1\theta_2 w_1^2 + \theta_1\theta_3 w_2^2 + \theta_2\theta_3 w_3^2 \tag{14}$$

Kısıtlanmamış Gibonacci 3-Parametreli Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

Tanım 1. $p, q, r \in \mathbb{Z}$ olsun. n. kısıtlanmamış Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyon (KG3PGK) aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = G_n + iG_{n+p} + jG_{n+q} + kG_{n+r} \tag{15}$$

Burada "kısıtlanmamış" sözcüğü, üç vektörel katsayının Gibonacci dizisinin ardışık terimleri olmak zorunda olmadığını ifade etmektedir. $(p, q, r) = (1,2,3)$ alındığında Tanım 1, ardışık Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarına (Bilgici, 2024) indirgenir:

$$\mathcal{G}_n^{(1,2,3)} = G_n + iG_{n+1} + jG_{n+2} + kG_{n+3} \tag{16}$$

Teorem 1. Her n tam sayısı için aşağıdaki yineleme bağıntısı geçerlidir:

$$\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{n-1}^{(p,q,r)} + \mathcal{G}_{n-2}^{(p,q,r)} \tag{17}$$

İspat. Tanım 1 ve Gibonacci sayılarının yineleme bağıntısı kullanılırsa, skaler bileşen ile üç vektörel bileşenin her biri aynı ikinci dereceden yinelemeyi sağlar. Bu nedenle bileşenler ayrı ayrı toplandığında (17) eşitliği doğrudan elde edilir. □

Eşlenik ve Norm

KG3PGK'nin eşleniği aşağıdaki biçimdedir:

$$\overline{\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}} = G_n - iG_{n+p} - jG_{n+q} - kG_{n+r} \tag{18}$$

Buna göre norm

$$N\left(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}\right) = G_n^2 + \theta_1\theta_2 G_{n+p}^2 + \theta_1\theta_3 G_{n+q}^2 + \theta_2\theta_3 G_{n+r}^2 \tag{19}$$

olur. Norm sıfırdan farklı olduğunda ters eleman

$$\left(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}\right)^{-1} = \frac{\overline{\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}}}{N\left(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}\right)} \tag{20}$$

biçiminde elde edilir.

Binet-Benzeri Formül

Aşağıdaki yardımcı kuaterniyonları tanımlayalım:

$$\hat{\alpha} = 1 + i\alpha^p + j\alpha^q + k\alpha^r \tag{21}$$

$$\hat{\beta} = 1 + i\beta^p + j\beta^q + k\beta^r \tag{22}$$

Teorem 2. Her $n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki Binet-benzeri formül geçerlidir:

$$\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = \frac{c\hat{\alpha}\alpha^n - d\hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \tag{23}$$

İspat. Tanım 1'de yer alan dört Gibonacci terimine (8) eşitliği uygulanır. Karakteristik köklere ait ortak üs çarpanları gruplanınca (21) ve (22) ile tanımlanan yardımcı kuaterniyonlar ortaya çıkar. Böylece (23) eşitliği elde edilir. □

Bu ifade, kısıtlanmamış Fibonacci/Lucas kuaterniyonları, kısıtlanmamış Gibonacci kuaterniyonları ve ardışık Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için bilinen Binet formüllerini aynı çerçevede genişletmektedir.

Üreteç Fonksiyonları

Teorem 3. Tanım 1 ile verilen dizinin adi üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(p,q,r)}\, t^n = \frac{\mathcal{G}_0^{(p,q,r)} + \left(\mathcal{G}_1^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_0^{(p,q,r)}\right) t}{1 - t - t^2} \tag{24}$$

İspat. Dizinin adi üreteç fonksiyonu $\Phi(t)$ ile gösterilsin. (17) yineleme bağıntısı kullanılarak $\Phi(t)$, $t\Phi(t)$ ve $t^2\Phi(t)$ ifadeleri uygun biçimde birbirinden çıkarılır. Başlangıç terimleri ayrıldığında (24)'teki rasyonel ifade elde edilir. □

Teorem 4. Dizinin üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki biçimdedir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(p,q,r)} \frac{t^n}{n!} = \frac{c\hat{\alpha}e^{\alpha t} - d\hat{\beta}e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \tag{25}$$

İspat. (23) bağıntısının seriye yerleştirilmesi ve üstel fonksiyonun Taylor açılımının kullanılmasıyla doğrudan elde edilir. □

Temel Bir Çarpım Lemması

3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonların değişmeli olmaması nedeniyle, $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ve $\hat{\beta}\hat{\alpha}$ çarpımları genel olarak birbirinden farklıdır. Aşağıdaki iki yardımcı kuaterniyonu tanımlayalım:

$$U = 1 - \theta_1\theta_2(-1)^p - \theta_1\theta_3(-1)^q - \theta_2\theta_3(-1)^r + iL_p + jL_q + kL_r \tag{26}$$

$$V = i\theta_3(-1)^r F_{q-r} + j\theta_2(-1)^p F_{r-p} + k\theta_1(-1)^q F_{p-q} \tag{27}$$

Lemma 1. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = U + \sqrt{5}\,V \tag{28}$$

$$\hat{\beta}\hat{\alpha} = U - \sqrt{5}\,V \tag{29}$$

İspat. Çarpımlar (12)'deki kurallar kullanılarak açılır. $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ çarpımının skaler kısmı

$$1 - \theta_1\theta_2(\alpha\beta)^p - \theta_1\theta_3(\alpha\beta)^q - \theta_2\theta_3(\alpha\beta)^r$$

biçimindedir ve $\alpha\beta = -1$ olduğundan (26)'daki U kuaterniyonunun skaler kısmına eşittir. i bileşeni, reel birimle yapılan çarpımlardan gelen $\alpha^p + \beta^p = L_p$ terimi ile jk ve kj çarpımlarından gelen karma terimlerin toplamıdır. Karma terimler için

$$\theta_3(\alpha^q\beta^r - \alpha^r\beta^q) = \theta_3(\alpha\beta)^r(\alpha^{q-r} - \beta^{q-r})$$

olur. $(\alpha\beta)^r = (-1)^r$ ve $\alpha^{q-r} - \beta^{q-r} = \sqrt{5}F_{q-r}$ eşitlikleri kullanıldığında bu ifade $\sqrt{5}\theta_3(-1)^r F_{q-r}$ değerine eşit olur; dolayısıyla i bileşeni $L_p + \sqrt{5}\theta_3(-1)^r F_{q-r}$ biçimindedir. Benzer biçimde $ki = \theta_2 j$ ve $ij = \theta_1 k$ kuralları kullanılarak j ve k bileşenleri sırasıyla $L_q + \sqrt{5}\theta_2(-1)^p F_{r-p}$ ve $L_r + \sqrt{5}\theta_1(-1)^q F_{p-q}$ ifadelerine indirgenir. Bu bileşenler (26) ve (27) ile

karşılaştırıldığında (28) eşitliği elde edilir. $\hat{\beta}\hat{\alpha}$ çarpımında α ile β'nın rolleri yer değiştirir; skaler kısım ile Lucas terimleri değişmezken karma terimlerin işareti değişir. Böylece (29) eşitliği elde edilir. □

Temel Özdeşlikler

Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri Fibonacci ve Gibonacci sayıları için klasik sonuçlardır (Koshy, 2018; Vajda, 1989). Bu bölümde söz konusu özdeşliklerin KG3PGK için karşılıkları verilmektedir.

Teorem 5 (Vajda Özdeşliği). x, y ve z keyfî tam sayılar olmak üzere aşağıdaki özdeşlik geçerlidir:

$$\mathcal{G}_{x+y}^{(p,q,r)}\mathcal{G}_{x+z}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_{x}^{(p,q,r)}\mathcal{G}_{x+y+z}^{(p,q,r)} = \Delta(-1)^{x}F_{y}(UF_{z} - VL_{z}) \qquad (30)$$

İspat. (23) Binet-benzeri formülü sol tarafa uygulanır. Aynı köke ait karesel terimler sadeleşir ve $cd = \Delta$ bağıntısıyla yalnızca karışık çarpımlar kalır. Lemma 1 ile Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri kullanıldığında (30)'un sağ tarafı elde edilir. □

$(p, q, r) = (1,2,3)$ seçildiğinde bu teorem, ardışık Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için daha önce elde edilen Vajda-tipli özdeşliğe indirgenir.

Sonuç 1 (Catalan Özdeşliği). Teorem 5'te $z = -y$ alınırsa

$$\mathcal{G}_{x+y}^{(p,q,r)}\mathcal{G}_{x-y}^{(p,q,r)} - \left(\mathcal{G}_{x}^{(p,q,r)}\right)^{2} = \Delta(-1)^{x+y+1}\left(UF_{y}^{2} + VF_{2y}\right) \qquad (31)$$

elde edilir. Bu sonuçta Fibonacci ve Lucas sayılarının negatif indeks bağıntıları ile iki kat indeks bağıntısından yararlanılmıştır.

Sonuç 2 (Cassini Özdeşliği). Sonuç 1'de $y = 1$ alınırsa

$$\mathcal{G}_{x+1}^{(p,q,r)}\mathcal{G}_{x-1}^{(p,q,r)} - \left(\mathcal{G}_{x}^{(p,q,r)}\right)^{2} = \Delta(-1)^{x}(U + V) \qquad (32)$$

eşitliği elde edilir.

d'Ocagne Özdeşliği

Teorem 6. m ve n keyfî tam sayılar olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\mathcal{G}_m^{(p,q,r)}\mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_{m+1}^{(p,q,r)}\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = \Delta(-1)^n(UF_{m-n} + VL_{m-n}) \qquad (33)$$

İspat. Binet-benzeri formül sol tarafa uygulandığında aynı köke ait terimler sadeleşir ve geriye iki karışık çarpım kalır. Lemma 1 bu çarpımlara uygulandıktan sonra Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri kullanılır. Böylece (33) eşitliği elde edilir. □

Bu sonuç, kısıtlanmamış Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile ardışık katsayılı Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için bilinen d'Ocagne özdeşliklerini aynı çerçevede genelleştirir.

Bir Komütatör Özdeşliği

Önerilen çerçevenin önemli bir yönü, değişmeli olmama etkisinin açık biçimde gösterilebilmesidir.

Teorem 7. m ve n keyfî tam sayılar olmak üzere

$$\mathcal{G}_m^{(p,q,r)}\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_n^{(p,q,r)}\mathcal{G}_m^{(p,q,r)} = 2\Delta(-1)^m VF_{n-m} \qquad (34)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Binet-benzeri formül kullanıldığında komütatör, iki yardımcı kuaterniyonun çarpım farkı ile karakteristik köklerin çapraz çarpım farkının çarpımına indirgenir. Lemma 1 ve Fibonacci sayılarının Binet bağıntısı bu iki farkı sırasıyla V ve bir Fibonacci terimi cinsinden verir. Sadeleştirme sonucunda (34) elde edilir. □

Teorem 7'nin önemli bir sonucu, dizinin herhangi iki teriminin komütatörünün m ve n'den bağımsız olan aynı V saf

kuaterniyonunun reel bir katı olmasıdır. V yalnızca p, q, r kaydırmaları ile θ_1, θ_2, θ_3 cebir parametrelerine bağlıyken, Gibonacci başlangıç değerlerinin etkisi tek bir $\Delta = a^2 + ab - b^2$ skaler çarpanında toplanmaktadır. Dolayısıyla değişmeli olmama engeli bütünüyle V tarafından belirlenir. Aşağıdaki sonuç bu gözlemi, dizinin değişmeli olma koşulu biçiminde ifade etmektedir.

Sonuç 3. $\theta_1\theta_2\theta_3 \neq 0$ ve $\Delta \neq 0$ olsun. Bu durumda dizinin bütün terimlerinin ikişerli olarak değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $p = q = r$ olmasıdır.

İspat. $p = q = r$ ise $F_0 = 0$ olduğundan (27)'den $V = 0$ bulunur ve (34)'ten bütün komütatörler sıfır olur. Tersine, bütün terimler ikişerli olarak değişmeli olsun. (34)'te $n = m + 1$ alınırsa $F_1 = 1$ ve $\Delta \neq 0$ olduğundan $V = 0$ elde edilir. $\theta_1\theta_2\theta_3 \neq 0$ olduğundan (27)'den $F_{q-r} = F_{r-p} = F_{p-q} = 0$ bulunur. $F_k = 0$ eşitliği yalnızca $k = 0$ için sağlandığından $p = q = r$ olur. □

a ve b ikisi birden sıfır olmayan tam sayılar olduğunda $\Delta \neq 0$ koşulu kendiliğinden sağlanır. Gerçekten $b = 0$ ise $\Delta = a^2 \neq 0$ olur; $b \neq 0$ iken $\Delta = 0$ eşitliği a/b oranının irrasyonel $(-1 \pm \sqrt{5})/2$ değerlerinden birine eşit olmasını gerektirir.

Diğer Özdeşlikler

KG3PGK dizisi Fibonacci yinelemesini sağladığından standart toplama mekanizması bileşen bazında genişler. Özellikle

$$\mathcal{G}_{m+n}^{(p,q,r)} = F_{n+1}\mathcal{G}_m^{(p,q,r)} + F_n\mathcal{G}_{m-1}^{(p,q,r)} \tag{35}$$

ve

$$\sum_{\ell=0}^{n} \mathcal{G}_\ell^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{n+2}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_1^{(p,q,r)} \tag{36}$$

özdeşlikleri elde edilir. Bu eşitlikler karşılık gelen Gibonacci özdeşliklerinden bileşen bazında da kanıtlanabilir.

Teorem 8. m ve n keyfî tam sayılar olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\mathcal{G}_{m+n}^{(p,q,r)} + (-1)^n \mathcal{G}_{m-n}^{(p,q,r)} = L_n \mathcal{G}_m^{(p,q,r)} \tag{37}$$

$$\mathcal{G}_{m+n}^{(p,q,r)} - (-1)^n \mathcal{G}_{m-n}^{(p,q,r)} = F_n (\mathcal{G}_{m+1}^{(p,q,r)} + \mathcal{G}_{m-1}^{(p,q,r)}) \tag{38}$$

İspat. $\alpha\beta = -1$ olduğundan $(-1)^n \alpha^{-n} = \beta^n$ ve $(-1)^n \beta^{-n} = \alpha^n$ olur. (23) Binet-benzeri formülü kullanıldığında, ortak $\alpha - \beta$ paydası dışında (37)'nin sol tarafındaki $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ terimlerinin katsayıları sırasıyla $c\alpha^m(\alpha^n + \beta^n)$ ve $-d\beta^m(\alpha^n + \beta^n)$ biçiminde toplanır. $\alpha^n + \beta^n = L_n$ olduğundan (37) elde edilir. Benzer biçimde (38)'in sol tarafı $F_n(c\hat{\alpha}\alpha^m + d\hat{\beta}\beta^m)$ ifadesine eşittir. Öte yandan $\alpha + \alpha^{-1} = \sqrt{5}$ ve $\beta + \beta^{-1} = -\sqrt{5}$ olduğundan $\mathcal{G}_{m+1}^{(p,q,r)} + \mathcal{G}_{m-1}^{(p,q,r)} = c\hat{\alpha}\alpha^m + d\hat{\beta}\beta^m$ bulunur ve (38) elde edilir. □

(37) özdeşliği $n = 1$ için (17) yineleme bağıntısına indirgenir; $n = m$ alındığında ise $\mathcal{G}_{2m}^{(p,q,r)} + (-1)^m \mathcal{G}_0^{(p,q,r)} = L_m \mathcal{G}_m^{(p,q,r)}$ elde edilir.

Teorem 9. Her $n \geq 1$ tam sayısı için aşağıdaki toplam formülleri geçerlidir:

$$\sum_{\ell=1}^{n} \mathcal{G}_{2\ell-1}^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{2n}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_0^{(p,q,r)} \tag{39}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} \mathcal{G}_{2\ell}^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{2n+1}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_1^{(p,q,r)} \tag{40}$$

İspat. (17) bağıntısından $\mathcal{G}_{2\ell-1}^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{2\ell}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_{2\ell-2}^{(p,q,r)}$ ve $\mathcal{G}_{2\ell}^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{2\ell+1}^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_{2\ell-1}^{(p,q,r)}$ yazılabilir. Bu eşitlikler $\ell = 1,2,\dots,n$ için toplandığında toplamlar teleskopik hâle gelir ve (39) ile (40) elde edilir. □

Teorem 10. m bir tam sayı ve $n \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki binom toplamları geçerlidir:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{G}_{m+k}^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{m+2n}^{(p,q,r)} \tag{41}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mathcal{G}_{m+2k}^{(p,q,r)} = \mathcal{G}_{m+n}^{(p,q,r)} \tag{42}$$

İspat. $\alpha^2 = \alpha + 1$ olduğundan binom teoremi ile $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k = (1+\alpha)^n = \alpha^{2n}$ bulunur; aynı eşitlik β için de geçerlidir. Bu bağıntılar (23) formülünde kullanıldığında (41) elde edilir. Benzer biçimde $\alpha^2 - 1 = \alpha$ ve $\beta^2 - 1 = \beta$ olduğundan $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\alpha^{2k} = (\alpha^2-1)^n = \alpha^n$ olur ve (42) elde edilir. □

Teorem 11. Tanım 1'de $a = b = 1$ alınarak elde edilen kısıtlanmamış Fibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyon

$$\mathcal{F}_n^{(p,q,r)} = F_n + iF_{n+p} + jF_{n+q} + kF_{n+r}$$

ile gösterilsin. Bu durumda her n tam sayısı için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = a\mathcal{F}_{n-2}^{(p,q,r)} + b\mathcal{F}_{n-1}^{(p,q,r)} \tag{43}$$

İspat. (2) bağıntısı Tanım 1'deki dört bileşene ayrı ayrı uygulanırsa $s \in \{0,p,q,r\}$ için $G_{n+s} = aF_{n+s-2} + bF_{n+s-1}$ elde edilir. Bu bileşenler kuaterniyonik tabanda birleştirildiğinde (43) bulunur. □

Teorem 11, önerilen yapının kısıtlanmamış Fibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarının doğrusal bir birleşimi olduğunu gösterir. Dolayısıyla Gibonacci başlangıç değerleri yapıya yalnızca doğrusal katsayılar olarak girer.

Teorem 12. Her n tam sayısı için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} - \beta \mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = c\hat{\alpha}\alpha^n \tag{44}$$

$$\mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} - \alpha \mathcal{G}_n^{(p,q,r)} = d\hat{\beta}\beta^n \tag{45}$$

İspat. (23) formülü kullanıldığında $\mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} - \beta \mathcal{G}_n^{(p,q,r)}$ ifadesinde $\hat{\beta}$ terimleri sadeleşir ve $\hat{\alpha}$ teriminin katsayısı $c\alpha^n(\alpha-\beta)/(\alpha-\beta) = c\alpha^n$ olur. Bu, (44) eşitliğidir. (45) eşitliği α ile β'nın rolleri değiştirilerek aynı biçimde elde edilir. □

Teorem 12, dizinin ardışık terimleri arasındaki oranın asimptotik davranışını belirlemek için kullanılabilir. Kolaylık amacıyla (14)'e uygun olarak $N(\hat{\alpha}) = 1 + \theta_1\theta_2\alpha^{2p} + \theta_1\theta_3\alpha^{2q} + \theta_2\theta_3\alpha^{2r}$ yazalım.

Sonuç 4. a ve b ikisi birden sıfır olmayan tam sayılar ve $N(\hat{\alpha}) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} (\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1} = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1} \mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} = \alpha \tag{46}$$

olur.

İspat. $c = 0$ eşitliği $b = a\beta$ olmasını gerektirdiğinden ve β irrasyonel olduğundan, a ve b ikisi birden sıfır olmayan tam sayılar iken $c \neq 0$ olur. (8) gösteriminden $G_k = c\alpha^k/(\alpha-\beta) + O(\alpha^{-k})$ yazılabildiğinden (19) normu için $N(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}) = c^2\alpha^{2n}N(\hat{\alpha})/5 + O(1)$ bulunur. Buna göre yeterince büyük n için $\mathcal{G}_n^{(p,q,r)}$ tersinirdir ve (20) formülünden $(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1}$ tersinin bileşenleri $O(\alpha^{-n})$ mertebesindedir. (45) eşitliğinden

$$\mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)}(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1} = \alpha + d\beta^n\hat{\beta}(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1}$$

yazılabilir. $\beta^n = (-1)^n\alpha^{-n}$ olduğundan sağ taraftaki ikinci terim $O(\alpha^{-2n})$ mertebesindedir ve $n \to \infty$ iken sıfıra gider. Soldan çarpım için $(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1}\mathcal{G}_{n+1}^{(p,q,r)} = \alpha + d\beta^n(\mathcal{G}_n^{(p,q,r)})^{-1}\hat{\beta}$ eşitliği kullanılarak aynı sonuç elde edilir. □

Sonuç 4, ardışık Fibonacci sayılarının oranının altın orana yakınsaması sonucunun KG3PGK için değişmeli olmayan bir karşılığıdır. $N(\hat{\alpha}) \neq 0$ koşulu, θ_1, θ_2 ve θ_3 aynı işaretli olduğunda (örneğin Hamilton kuaterniyonlarında) kendiliğinden sağlanır.

Özel Durumlar

Önerilen yapı, daha önce incelenmiş çok sayıda kuaterniyon ailesini özel durum olarak kapsamaktadır. Tablo 1 bu indirgemelerin başlıcalarını göstermektedir.

Tablo 1. Önerilen yapının başlıca özel durumları

Koşullar	Elde edilen dizi
p=1, q=2, r=3	Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları
$\theta_1=\theta_2=\theta_3=1$	Kısıtlanmamış Gibonacci Hamilton kuaterniyonları
a=b=1	Kısıtlanmamış Fibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları
a=1, b=3	Kısıtlanmamış Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları
a=b=1, (p,q,r)=(1,2,3)	Fibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları
a=1, b=3, (p,q,r)=(1,2,3)	Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları
$\theta_1=\theta_2=\theta_3=1$, (p,q,r)=(1,2,3)	Klasik ardışık Gibonacci kuaterniyonları

Kaynak: Yazar tarafından oluşturulmuştur.

Bu özel durumlar, Tanım 1'in yalnızca bir gösterim değişikliği olmadığını; dizi parametreleri (a, b), kaydırma

parametreleri (p, q, r) ve cebir parametreleri $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ bağımsız biçimde değiştirilebilen ortak bir parametre uzayı sunduğunu göstermektedir.

Sonuç

Bu çalışmada Gibonacci dizisinin keyfî başlangıç koşulları, kuaterniyon katsayılarındaki keyfî indeks kaydırmaları ve 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyon cebirinin üç cebirsel parametresi tek bir yapı içinde birleştirilerek kısıtlanmamış Gibonacci 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları tanıtılmıştır. Bu yeni aile için Binet-benzeri formül, adi ve üstel üreteç fonksiyonları, eşlenik, norm ve ters eleman ifadeleri elde edilmiştir. Bunlara ek olarak indeks toplama, tek ve çift indisli toplam ve binom toplamı özdeşlikleri ile ardışık terimlerin oranına ilişkin bir limit sonucu verilmiştir.

Yapının temel özelliklerinden biri, Lemma 1'de verilen aşağıdaki ayrışımdır:

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = U + \sqrt{5}\,V, \qquad \hat{\beta}\hat{\alpha} = U - \sqrt{5}\,V$$

Bu ayrışım cebirin simetrik ve değişmeli olmayan bileşenlerini birbirinden ayırmaktadır. Söz konusu ayrışım kullanılarak Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri kompakt biçimde elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen

$$\mathcal{G}_m^{(p,q,r)}\mathcal{G}_n^{(p,q,r)} - \mathcal{G}_n^{(p,q,r)}\mathcal{G}_m^{(p,q,r)} = 2\Delta(-1)^m V F_{n-m}$$

komütatör özdeşliği, dizinin değişmeli olmama davranışının V ile kontrol edildiğini, keyfî Gibonacci başlangıç değerlerinin etkisinin ise $\Delta = a^2 + ab - b^2$ skalerinde toplandığını göstermektedir. Buna dayanarak, dejenere olmayan cebirlerde dizinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşulun $p = q = r$ olduğu gösterilmiştir.

Önerilen aile, daha önce incelenen çeşitli kuaterniyon dizilerini özel durum olarak kapsamaktadır ve bu nedenle sonraki çalışmalar için birleştirici bir çerçeve sunmaktadır. Gelecekte matris gösterimleri, determinant ve karakteristik polinom formülleri, sonsuz seri özdeşlikleri, genel binom dönüşümleri, üreteç matrisleri, daha yüksek mertebeden yinelemeli dizilere dayalı genişletmeler ve yapının hibrit sayılar (Özdemir, 2018; Szynal-Liana & Włoch, 2019) gibi farklı sayı sistemlerine aktarılması incelenebilir.

Kaynakça

Akyiğit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2013). Split Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras, 23*(3), 535–545. doi:10.1007/s00006-013-0401-9

Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (2004). *Proofs that really count: The art of combinatorial proof.* Mathematical Association of America. doi:10.5860/choice.41-4086

Bilgici, G. (2020). Unrestricted Gibonacci quaternions. *IOSR Journal of Mathematics, 16*(6), 40–43. https://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol16-issue6/Series-2/G1606024043.pdf adresinden alındı

Bilgici, G. (2022). Fibonacci 3-parameter generalized quaternions. *European Journal of Science and Technology, 41*, 357–361. doi:10.31590/ejosat.1166686

Bilgici, G. (2024). 3-parameter quaternions with coefficients derived from random Fibonacci and Lucas numbers. M. Süer (Dü.) içinde, *Matematik değerlendirmeleri* (s. 47–56). YAZ Yayınları. doi:10.70269/10.70269/3786458273

Bilgici, G. (2024). Gibonacci 3-parameter generalized quaternions. A. Demirçalı (Dü.) içinde, *Advances in science and mathematics* (s. 67–76). Platanus Publishing.

Daşdemir, A., & Bilgici, G. (2021). Unrestricted Fibonacci and Lucas quaternions. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 4*(1), 1–9. doi:10.33401/fujma.752758

Flaut, C., & Shpakivskyi, V. (2013). On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras, 23*(3), 673–688. doi:10.1007/s00006-013-0388-2

Halıcı, S. (2012). On Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras, 22*(2), 321–327. doi:10.1007/s00006-011-0317-1

Halıcı, S. (2013). On complex Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras, 23*(1), 105–112. doi:10.1007/s00006-012-0337-5

Halıcı, S., & Karataş, A. (2017). On a generalization for Fibonacci quaternions. *Chaos, Solitons & Fractals, 98*, 178–182. doi:10.1016/j.chaos.2017.03.037

Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly, 70*(3), 289–291. doi:10.2307/2313129

Horadam, A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *The Fibonacci Quarterly, 3*(3), 161–176. doi:10.1080/00150517.1965.12431416

Horadam, A. F. (1993). Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly, 2*(2), 23–33.

İşbilir, Z., & Gürses, N. (2024). Horadam 3-parameter generalized quaternions. *Honam Mathematical Journal, 46*(3), 407–427. doi:10.5831/HMJ.2024.46.3.407

Iyer, M. R. (1969). A note on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly, 7*(3), 225–229. doi:10.1080/00150517.1969.12431146

Koshy, T. (2018). *Fibonacci and Lucas numbers with applications* (2nd b., Cilt 1). Wiley. doi:10.1002/9781118742297

Nurkan, S. K., & Güven, İ. A. (2015). Dual Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras, 25*(2), 403–414. doi:10.1007/s00006-014-0488-7

Özdemir, M. (2018). Introduction to hybrid numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras, 28*(1), Article 11. doi:10.1007/s00006-018-0833-3

Polatlı, E., & Kesim, S. (2015). On quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components. *Advances in Difference Equations, 2015*, Article 169. doi:10.1186/s13662-015-0511-x

Swamy, M. N. (1973). On generalized Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly, 11*(5), 547–549. doi:10.1080/00150517.1973.12430808

Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2019). The Fibonacci hybrid numbers. *Utilitas Mathematica, 110*, 3–10.

Şentürk, T. D., & Ünal, Z. (2022). 3-parameter generalized quaternions. *Computational Methods and Function Theory, 22*, 575–608. doi:10.1007/s40315-022-00451-7

Tan, E., Yılmaz, S., & Şahin, M. (2016). On a new generalization of Fibonacci quaternions. *Chaos, Solitons & Fractals, 82*, 1–4. doi:10.1016/j.chaos.2015.10.021

Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: Theory and applications.* Ellis Horwood.

BÖLÜM 3

AN AXIOMATIC REVIEW OF KLEENE ALGEBRAS

ELİF ALTINAY ÖZASLAN[1]

Introduction

Kleene algebra provides an algebraic framework for reasoning about systems in which actions may be combined by choice, sequential composition, and finite iteration (Kozen, 1994). As Kozen (1994) observed, instances of these algebraic structures appear across diverse domains of theoretical computer science, including relational calculi (Ng, 1984; Ng & Tarski, 1977), language and automata theory (Kuich, 1987; Kuich & Salomaa, 1986), algorithm design and shortest-path formulations (Aho et al., 1975; Mehlhorn, 1984), and formal program semantics (Kozen, 1981). Within regular expressions, the primary operations naturally reflect set union, sequence concatenation, and the Kleene star operator (Kozen, 1997/2012; Kuich & Salomaa, 1986). In mobile robotics, paths through a map can similarly be represented by concatenating finite motion primitives and choosing among alternative feasible motions (Özaslan & Özaslan, 2026). The ordering and repeated execution of tasks in an automation system provide another example in which the expressive power of Kleene algebra can be utilized.

[1]Öğr. Gör. Dr., Kastamonu University, Faculty of Science, Department of Mathematics, ORCID: 0000-0001-9560-1973

The significance of Kleene algebra becomes evident from the diversity of its application areas: many properties shared by these apparently different structures can be derived from a small collection of algebraic axioms. Rather than proving the same result separately for languages, relations, graphs, or other concrete models, one can reason abstractly with the operations $+$, $\cdot$, and *. Any identity or inequality established from the Kleene algebra axioms then holds in every model satisfying those axioms. This axiomatic viewpoint, following Kozen (1994), is the main perspective adopted in this chapter.

This chapter offers a self-contained survey of the axiomatic basis of Kleene algebras and investigates their core algebraic characteristics. We begin with the basic notions required for the discussion, including binary relations and reflexive transitive closure, binary operations, monoids, semirings, idempotent semirings, and the canonical order induced by idempotent addition. We also recall alphabets, strings, and concatenation in preparation for the language model of Kleene algebra (Kozen, 1997/2012; Kuich & Salomaa, 1986).

Building upon these structures, we examine Kleene algebras within the axiomatic framework formulated by Kozen (1994). We review basic properties of the star operation, including its monotonicity and its characterization as the least reflexive and transitive element containing a given element. We also present several useful algebraic identities, including the denesting and shifting rules, and conclude by showing that the star operation yields the least solution of linear equations of the form $b + aX = X$, a fact closely related to classical path algorithms on graphs (Aho et al., 1975; Mehlhorn, 1984).

Preliminaries

This section establishes the preliminary terminology, definitions, and elementary facts required throughout our discussion.

Binary relations

Given a set X, a *binary relation* R over X is defined as any collection of ordered pairs formed from X, i.e., an arbitrary subset $R \subseteq X \times X$:

$$R \subseteq X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

The relation R is reflexive whenever $(x, x) \in R$ holds for every element $x \in X$, and transitive whenever $(x, y) \in R$ together with $(y, z) \in R$ guarantees $(x, z) \in R$. Designating the diagonal (identity) relation by

$$1 = \{(x, x) \mid x \in X\},$$

reflexivity is simply the condition $1 \subseteq R$. As developed later, this relational perspective extends directly to arbitrary Kleene algebras. Composition of two binary relations R and R' yields a new relation specified by:

$$R \circ R' = \{(x, z) | \exists y \in X \text{ such that } (x, y) \in R \text{ and } (y, z) \in R'\}$$

A relation R is transitive if $R \circ R \subseteq R$.

The *reflexive transitive closure* of R, denoted R', is characterized as the minimal relation satisfying $1 \subseteq R'$, $R \subseteq R'$, and closed under composition ($R' \circ R' \subseteq R'$). Relation algebras equipped with a transitive-closure operation were studied by Ng and Tarski (1984; 1977). Their setting is closely related to Kleene algebra, but their completeness result relies on the presence of a converse operator and therefore concerns a proper subclass of Kleene algebras in the sense of Kozen (1994).

We refer to a binary relation $\leq$ on X as a *partial order* provided it fulfills three properties:

- reflexivity: $x \leq x$ for each $x \in X$;
- antisymmetry: $x \leq y$ and $y \leq x$ jointly imply $x = y$;
- transitivity: $x \leq y$ together with $y \leq z$ ensures $x \leq z$.

Binary operations and basic properties

Suppose that X is a non-empty set. A *binary operation* $\circ$ on X assigns to each pair $(x, y) \in X \times X$ a unique image $x \circ y \in X$,

$$\circ : X \times X \to X,$$

written $(x, y) \mapsto x \circ y$.

Such an operation is *associative* whenever

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

for all $x, y, z \in X$.

It is *commutative* if

$$x \circ y = y \circ x$$

for all $x, y \in X$.

A designated element $e \in X$ acts as a two-sided *identity* element for $\circ$ if

$$e \circ x = x \circ e = x$$

for all $x \in X$.

An element $x \in X$ is called *idempotent* with respect to $\circ$ if

$$x \circ x = x.$$

Monoids and semirings

A structure $(S, \circ)$ forms a *monoid* if the operation $\circ$ is associative and admits an identity element.

Expanding this concept, a *semiring* consists of an algebraic structure $(S, +, \cdot, 0, 1)$ where $(S, +, 0)$ constitutes an abelian monoid and $(S, \cdot, 1)$ forms a monoid, tied together by two structural laws:

- two-sided annihilation by the additive identity element 0:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

- two-sided distributivity of multiplication over addition: for all $a, b, c \in S$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

When the additive operation is idempotent, the structure is called an *idempotent semiring*:

$$a + a = a$$

for all $a \in S$.

Multiplication $a \cdot b$ is abbreviated by juxtaposition ab.

Canonical order on idempotent semirings

Every idempotent semiring $(S, +, \cdot, 0, 1)$ naturally carries a partial order $\leq$ induced by its additive structure, specified by

$$a \leq b \iff a + b = b$$

Proposition 1. *The relation $\leq$ defines a partial order on S.*

Proof. Reflexivity: For any $a \in S$, idempotence of $+$ gives $a + a = a$, hence $a \leq a$.

Antisymmetry: Suppose $a \leq b$ and $b \leq a$. Then $a + b = b$ and $b + a = a$. By commutativity of $+$,

$$a = b + a = a + b = b,$$

so $a = b$.

Transitivity: Suppose $a \leq b$ and $b \leq c$. Then $a + b = b$ and $b + c = c$. Using associativity of $+$,

$$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c,$$

so $a \leq c$. □

Proposition 2. *Suppose $(S, +, \cdot, 0, 1)$ is an idempotent semiring with*

canonical order $\leq$. *For all* $a, b \in S$,

$$a \leq b \iff \exists\, x \in S \text{ such that } a + x = b.$$

Proof. If $a + x = b$ for some $x \in S$, then

$$a + b = a + (a + x) = (a + a) + x = a + x = b$$

using associativity and idempotence of $+$. Conversely, if $a + b = b$ then taking $x = b$ yields $a + x = b$. □

The canonical order is compatible with $+$ and $\cdot$ in the following sense:

Proposition 3. *Suppose* $(S, +, \cdot, 0, 1)$ *is an idempotent semiring with canonical order* $\leq$. *Then, for all* $a, b, c, d \in S$:

(i) *If* $a \leq b$ *then* $a + c \leq b + c$ *and* $c + a \leq c + b$.

(ii) *If* $a \leq b$ *then* $ac \leq bc$ *and* $ca \leq cb$.

(iii) *If* $a \leq b$ *and* $c \leq d$ *then* $ac \leq bd$.

Proof. Suppose $a \leq b$.

(i)

$$\begin{aligned} a + b &= b \\ (a + b) + c &= b + c \\ (a + b) + c + c &= b + c \\ (a + c) + (b + c) &= b + c \\ a + c &\leq b + c. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} a + b &= b \\ (a + b)c &= bc \\ ac + bc &= bc \\ ac &\leq bc. \end{aligned}$$

(iii) If $a \leq b$ and $c \leq d$ then $a + b = b$ and $c + d = d$.

$$\begin{aligned} ac + bd &= ac + b(c + d) \\ &= ac + bc + bd \\ &= (a + b)c + bd \\ &= bc + bd \\ &= b(c + d) = bd. \end{aligned}$$

□

Proposition 4. *Suppose* $(S, +, \cdot, 0, 1)$ *is an idempotent semiring with canonical order* $\leq$*. The element* $a + b$ *serves as the supremum (least upper bound) of* a *and* b *relative to* $\leq$*.*

Proof. We first verify that $a + b$ bounds both elements from above. Indeed,

$$a + (a + b) = (a + a) + b = a + b,$$

which implies $a \leq a + b$. In like manner,

$$b + (a + b) = (b + a) + b = a + b$$

via commutativity and idempotence of $+$, so $b \leq a + b$.

Next, consider any upper bound $c \in S$ satisfying $a \leq c$ and $b \leq c$, which signifies that $a + c = c$ and $b + c = c$. By associativity,

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + c = c$$

demonstrating $a + b \leq c$. We conclude that $a + b$ is the least upper bound of a and b. □

Lemma 5. *Suppose* $(S, +, \cdot, 0, 1)$ *is an idempotent semiring with canonical order* $\leq$. *For any elements* $a, b, c \in S$, *if* $a + b \leq c$ *then* $a \leq c$ *and* $b \leq c$.

Proof. Since $a + b \leq c$, we know $(a + b) + c = c$.

$$a + c = a + (a + b + c) = (a + a) + (b + c) = a + b + c = c.$$

Thus, $a \leq c$. Similarly, $b \leq c$. □

Alphabets, strings, and concatenation

We briefly recall standard notions from automata and formal language theory; see Kozen (1997/2012) and Kuich and Salomaa (1986) for detailed treatments.

Let Σ denote an alphabet, that is, a finite collection of primitive symbols (letters), typically written $a, b, c, \ldots$. For instance, $\Sigma = \{a, b\}$ forms a binary alphabet.

A word (or string) over Σ is a finite sequence of symbols drawn from Σ, denoted $x, y, z, \ldots$.

The sequence containing no symbols is the null string ϵ, having length zero by convention.

The collection of all finite words over Σ, including ϵ, is denoted by the Kleene closure Σ^*. For example, if $\Sigma = \{a, b\}$, then

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb, \ldots\}.$$

By standard convention, $\emptyset^* = \{\epsilon\}$.

The basic operation on strings is *concatenation*. Given strings x and y, their concatenation is the string xy obtained by appending y to the end of x. Concatenation is associative:

$$(xy)z = x(yz)$$

for all strings x, y, z, and the empty string ϵ is an identity element:

$$\epsilon x = x\epsilon = x$$

for all strings x. Thus, $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ is a monoid, where $\cdot$ denotes concatenation.

Lifting this concatenation to languages (subsets $A, B \subseteq \Sigma^*$), the product language is defined elementwise:

$$AB = \{ xy \mid x \in A,\ y \in B \}.$$

This operation extends word concatenation to subsets of Σ^* and serves as multiplication in the language-theoretic model of Kleene algebra.

Kleene Algebras

In the previous section we introduced idempotent semirings and the canonical order on them. We now add a unary star operation to this algebraic structure and define Kleene algebras axiomatically. The literature contains several inequivalent definitions of Kleene algebra (Kozen, 1981; Kuich & Salomaa, 1986); throughout this chapter we follow the equational and Horn axiomatization of Kozen (1994).

Definition 6. *A Kleene algebra is an algebraic structure* $(\mathcal{K}, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ *where* $\mathcal{K}$ *is a set containing* 0 *and* 1*, equipped with binary operations* $+$*,* $\cdot$*, and a unary operation* **, satisfying the following axioms:*

$$\text{Associativity of } +\text{:}\quad a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1}$$

$$\text{Commutativity of } +\text{:}\quad a + b = b + a \tag{2}$$

$$\text{Identity element for } +\text{:}\quad a + 0 = 0 + a = a \tag{3}$$

$$\text{Associativity of } \cdot\text{:}\quad a(bc) = (ab)c \tag{4}$$

$$\text{Identity element for } \cdot\text{:}\quad a1 = 1a = a \tag{5}$$

$$\text{Annihilator for } \cdot\text{:}\quad a0 = 0a = 0 \tag{6}$$

$$\text{Left distributivity of } \cdot \text{ over } +\text{:}\quad a(b + c) = ab + ac \tag{7}$$

$$\textit{Right distributivity of } \cdot \textit{ over } +\textit{:}\quad (a+b)c = ac + bc \tag{8}$$

$$\textit{Idempotence of } +\textit{:}\quad a + a = a \tag{9}$$

$$1 + aa^* = a^* \tag{10}$$

$$1 + a^*a = a^* \tag{11}$$

$$b + ax \le x \;\Rightarrow\; a^*b \le x \tag{12}$$

$$b + xa \le x \;\Rightarrow\; ba^* \le x \tag{13}$$

Here, the order $\le$ *is defined by*

$$a \le b \iff a + b = b. \tag{14}$$

Axioms (1)–(9) characterize $(\mathcal{K}, +, \cdot, 0, 1)$ as an idempotent semiring, while the remaining axioms (10)–(13) govern the behavior of the iteration operator *. Consequently, a Kleene algebra is precisely an idempotent semiring augmented with a star operator subject to (10)–(13). We will refer to the axioms (12) and (13) as the *Horn axioms*.

The Horn axioms are induction principles: they assert that a^*b (respectively ba^*) is the least prefixpoint of the monotone map $x \mapsto b+ax$ (respectively $x \mapsto b+xa$). In the theory of programs and dynamic algebras one also encounters a stronger infinitary $*$-*continuity* condition, asserting that star is the supremum of its finite approximants; the relationship between induction and $*$-continuity was analyzed by Kozen (1981). The axiomatization used here is finitary and does not assume $*$-continuity (Kozen, 1994).

Moreover, due to the Proposition (1), $\le$ is a partial order. More explicitly, it satisfies the properties of reflexivity ($a \le a$), antisymmetry ($a \le b$ and $b \le a \Rightarrow a = b$), and transitivity ($a \le b$ and $b \le c \Rightarrow a \le c$).

We now consider two standard models of Kleene algebra.

Example 7 (Kleene algebra of all subsets of Σ^*). Fix a finite alphabet Σ and consider the power set $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. This is the standard language-theoretic model of Kleene algebra, often called the algebra of regular events when restricted to regular sets (Kozen, 1994, 1997/2012; Kuich & Salomaa, 1986).

We define the operations as follows. For $A, B \subseteq \Sigma^*$,

- addition (join) is set-theoretic union:
$$A + B = A \cup B,$$
- multiplication is set concatenation (as defined above):
$$AB = \{\, xy \mid x \in A,\ y \in B \,\},$$
- the additive zero is the empty set:
$$0 = \emptyset,$$
- the multiplicative unit is the singleton containing the empty string:
$$1 = \{\epsilon\}.$$

For $A \subseteq \Sigma^*$, we define

$$A^0 = \{\epsilon\}, \qquad A^{n+1} = A^n A \quad \text{for } n \geq 0,$$

and

$$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n.$$

Equivalently, A^* is the least subset $X \subseteq \Sigma^*$ such that

$$\{\epsilon\} \subseteq X \quad \text{and} \quad XA \subseteq X.$$

With these operations, $(\mathcal{P}(\Sigma^*), +, \cdot, {}^*, 0, 1)$ is a Kleene algebra.

Example 8. (Kleene algebra of binary relations) For arbitrary set X, the family of all binary relations on X provides another foundational model of Kleene algebra under union, relation composition, and reflexive transitive closure (Kozen, 1994); the relational

setting with transitive closure was studied extensively by Ng and Tarski (1984; 1977). We define the operations as follows. For any relation R, R' defined on X,

- addition (join) is set-theoretic union:
$$R + R' = R \cup R'$$
- multiplication is the relational composition:
$$R \circ R' = \{(x, z) | \exists y \in X \text{ such that } (x, y) \in R \text{ and } (y, z) \in R'\}$$
- the additive zero is the empty relation:
$$0 = \emptyset,$$
- the multiplicative unit is the identity relation:
$$1 = \{(x, x) | x \in X\}.$$

  For any relation R defined on X, we define
$$R^0 = \{(x, x) | x \in X\}, \qquad R^{n+1} = R^n \circ R \quad \text{for } n \geq 0,$$
  and
$$R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

With these operations, the family of all binary relations on X is a Kleene algebra.

By construction, R^* is the reflexive transitive closure of R, that is, the least reflexive and transitive relation containing R.

Algebraic Properties of Kleene Algebra

In this section, we present the basic algebraic properties of Kleene algebras.

Proposition 9. *In any Kleene algebra, all operators are monotone with respect to the order* $\leq$.

Proof. Due to the Proposition (3) we know the monotonicity of the operators + and ·. It remains to show that the $*$ operator is monotone with respect to the order $\leq$. More explicitly, we want to show that if $a \leq b$ then $a^* \leq b^*$.

Suppose $a \leq b$. Then,

$ab^* \leq bb^*$	monotonicity of ·
$1 + ab^* \leq 1 + bb^*$	monotonicity of +
$1 + ab^* \leq b^*$	axiom(10)

Due to the Axiom (12), last inequality implies that $a^* \leq b^*$. □

Proposition 10. *The Horn axioms* (12) *and* (13) *are equivalent to*

$$ax \leq x \Rightarrow a^*x \leq x \tag{15}$$

$$xa \leq x \Rightarrow xa^* \leq x \tag{16}$$

Proof. We first prove that the Horn axiom (12) implies the axiom (15). Suppose that $ax \leq x$. Then,

$$x + ax \leq x + x = x.$$

The Horn axiom (12) implies that $a^*x \leq x$.

Conversely, we wish to prove that the axiom (15) implies the Horn axiom (12). Suppose $b + ax \leq x$. We need to show $a^*b \leq x$. Since $b + ax \leq x$, by Lemma (5), we get $b \leq x$, and $ax \leq x$. Due to the axiom (15), $a^*x \leq x$.

Thus, by monotonicity of ·, $a^*b \leq a^*x \leq x$. □

Proposition 11. *Suppose $\mathcal{K}$ is a Kleene algebra. For any $a \in \mathcal{K}$, the following inequalities hold:*

(i) $a^* = a^* + 1$

(ii) $1 \leq a^*$

(iii) $aa^* \leq a^*$, *and* $a^*a \leq a^*$,

(iv) $a \leq a^*$

(v) $a^*a^* \leq a^*$

Proof. For part (i), due to axiom (10),

$$a^* = aa^* + 1 = aa^* + (1 + 1) = (aa^* + 1) + 1 = a^* + 1.$$

Part (ii) follows immediately from (i).

For part (iii),

$$\begin{aligned} aa^* + a^* &= aa^* + 1 + aa^* \\ &= 1 + aa^* && \text{(by idempotence of } +) \\ &= a^* && \text{(by axiom (10)} \end{aligned}$$

Thus, $aa^* \leq a^*$.

For part (iv), we multiply the inequality $1 \leq a^*$ on the left by a to get

$$a \leq aa^*. \tag{17}$$

By using (iii), we get

$$a \leq aa^* \leq a^*. \tag{18}$$

By transitivity of the relation $\leq$, we get $a \leq a^*$.

For part (v), recall $aa^* \leq a^*$ from (iii). Due to the implication (15), we get

$$a^*a^* \leq a^* \tag{19}$$

□

Definition 12. *Suppose* $\mathcal{K}$ *is a Kleene algebra. An element* $x \in \mathcal{K}$ *is said to be* ***reflexive*** *if* $1 \leq x$*; and* ***transitive*** *if* $xx \leq x$.

We say that x *contains* a *if* $a \leq x$.

Proposition 13. *Suppose* $\mathcal{K}$ *is a Kleene algebra. For any* $a \in \mathcal{K}$, a^* *is the least reflexive, transitive element containing* a.

Proof. Due to Proposition (11), a^* is a reflexive and transitive element containing a. Now, suppose that x is any element of $\mathcal{K}$ such that $1 \leq x$, $xx \leq x$, and $a \leq x$. We wish to show that $a^* \leq x$.

$$\begin{aligned} a &\leq x \\ ax &\leq xx && \text{(by monotonicity of } \cdot\text{)} \\ 1 + ax &\leq 1 + xx && \text{(by monotonicity of } +\text{)} \\ 1 + ax &\leq x + x && \text{(since } x \text{ is reflexive and transitive)} \\ 1 + ax &\leq x && \text{(by idempotence of } +\text{)} \end{aligned}$$

Due to Horn axiom (12), $a^* \leq x$. Thus a^* is the least reflexive, transitive element containing a. □

Remark 14. The reflexive transitive closure of a relation, as defined in the preliminaries, coincides with this definition. In the special case of relation algebras, Ng and Tarski obtained completeness results for transitive closure in the presence of converse (1984; 1977); Kozen's axiomatization applies uniformly without requiring converse (Kozen, 1994).

Proposition 15. *In any Kleene algebra, the following equalities hold:*

(i) $a^*a^* = a^*$

(ii) $a^*a = aa^*$

(iii) $a^{**} = a^*$

(iv) $a^* = (aa)^* + a(aa)^*$

Proof. We prove these equalities by showing the inequality in both directions.

For part (i), we recall the inequality $a^*a^* \leq a^*$ from Proposition (11)-(v). For the reverse inequality,

$$a^*a^* = a^*(1 + aa^*) = a^* + a^*(aa^*) \geq a^* \tag{20}$$

(20) implies $a^*a^* = a^*$.

For part (ii), we use axiom (10):

$$1 + aa^* \leq a^*$$
$$a(1 + aa^*) \leq aa^*$$
$$a + a(aa^*) \leq aa^*$$

Due to the (12), $a^*a \leq aa^*$.

Conversely, we use axiom (11):

$$1 + a^*a \leq a^*$$
$$(1 + a^*a)a \leq a^*a$$
$$a + (a^*a)a \leq a^*a$$

Due to the (13), $aa^* \leq a^*a$. Both inequalities imply $a^*a = aa^*$.

For (iii), we first use the monotonicity of operator $*$:

$$a \leq a^*$$
$$a^* \leq (a^*)^* = a^{**}.$$

For the reverse inequality, we use (i) and Proposition (11)-(i):

$$1 + a^*a^* = 1 + a^* = a^*. \tag{21}$$

Thus, $1 + a^*a^* \leq a^*$. Axiom (12) implies, $(a^*)^* \leq a^*$.

For property (iv), we start by proving that

$$(aa)^* + a(aa)^* \leq a^*. \tag{22}$$

We can obtain it from the following

$$a \leq a^* \tag{23}$$
$$aa \leq aa^* \leq a^* \tag{24}$$
$$(aa)^* \leq a^{**} = a^* \tag{25}$$
$$a(aa)^* \leq aa^* \tag{26}$$
$$a(aa)^* \leq a^* \quad (\text{since } aa^* \leq a^*) \tag{27}$$

(25), (27) and idempotency of +, imply the desired inequality.

Conversely, to prove

$$a^* \leq (aa)^* + a(aa)^*, \tag{28}$$

by applying the axiom (12), it suffices to show

$$1 + a\big((aa)^* + a(aa)^*\big) \leq (aa)^* + a(aa)^*. \tag{29}$$

We obtain it by

$$\begin{aligned} 1 + a\big((aa)^* + a(aa)^*\big) &= 1 + a(aa)^* + aa(aa)^* && (30)\\ &\leq 1 + a(aa)^* + (aa)^* && (31)\\ &\leq a(aa)^* + (aa)^* && (32) \end{aligned}$$

since $1 \leq (aa)^*$ □

Proposition 16. *Suppose $\mathcal{K}$ is a Kleene algebra. For any $a, b, c \in \mathcal{K}$, if $ab = bc$ then $a^*b = bc^*$.*

Proof. We show each inequality and then use antisymmetry of $\leq$ to conclude equality.

We start by proving that $a^*b \leq bc^*$. By Horn axiom (12), it is sufficient to show

$$b + a(bc^*) \leq bc^*. \tag{33}$$

$ab = bc$ implies $ab \leq bc$. Moreover, we have

$$c \leq c^*$$

$$bc \leq bc^*$$

by monotonicity of $\leq$. Thus, we get $ab \leq bc \leq bc^*$. Then, by associativity of $\cdot$, monotonicity of $\leq$, and

$$\begin{aligned} ab &\leq bc^* && (34)\\ (ab)c^* &\leq (bc^*)c^* && (35)\\ a(bc^*) &\leq b(c^*c^*) && (36)\\ a(bc^*) &\leq bc^* \quad (\text{since } c^*c^* = c^*) && (37) \end{aligned}$$

$1 \leq c^*$ implies $b \leq bc^*$. Hence, by using monotonicity of $\leq$,

and idempotence of +, we obtain

$$b + a(bc^*) \leq bc^* + bc^* = bc^*.$$

For the reverse inequality, (13), it suffices to show

$$b + (a^*b)c \leq a^*b. \tag{38}$$

$ab = bc$ implies $bc \leq ab$. We then use similar arguments:

$$a^*(bc) \leq a^*(ab) \tag{39}$$

$$(a^*b)c \leq (a^*a)b \leq a^*b \quad (\text{since } a^*a \leq a^*) \tag{40}$$

$1 \leq a^*$ implies $b \leq a^*b$. Hence, we get the desired inequality

$$b + (a^*b)c \leq a^*b + a^*b = a^*b.$$

□

Proposition 17. *(Denesting Rule) Suppose $\mathcal{K}$ is a Kleene algebra. For any $a, b \in \mathcal{K}$,*

$$(a + b)^* = (a^*b)^*a^* \tag{41}$$

Proof. We show each inequality and then use antisymmetry of $\leq$ to conclude equality.

First, we want to prove the inequality

$$(a^*b)^*a^* \leq (a + b)^*. \tag{42}$$

Since $a \leq a + b$, by monotonicity of $*$,

$$a^* \leq (a + b)^*. \tag{43}$$

It is easy to see that

$$b \leq a + b \leq (a + b)^*. \tag{44}$$

Using (43), and (44) and the monotonicity of the $*$ operation, we get

$$a^*b \leq (a + b)^*(a + b)^* = (a + b)^*. \tag{45}$$

By applying the operator $*$ to the inequality above, we derive

$$(a^*b)^* \leq (a+b)^{**} = (a+b)^*. \tag{46}$$

Thus, by using (43) and (46), and monotonicity of $\cdot$, we obtain the desired inequality (42).

For the reverse inequality, due to the Horn axiom (13), it suffices to show

$$1 + (a^*b)^*a^*(a+b) \leq (a^*b)^*a^* \tag{47}$$

Due to Proposition (11)-(ii) and (iii), we can write the following inequalities:

$$1 \leq (a^*b)^*a^*, \tag{48}$$

and

$$(a^*b)^*a^*a \leq (a^*b)^*a^*. \tag{49}$$

We see that

$$(a^*b)^*a^*b \leq (a^*b)^* \quad \text{(because } c^*c \leq c^* \text{ for any } c \in \mathcal{K}\text{)} \tag{50}$$

Since $1 \leq a^*$, by the monotonicity of $\cdot$, (50) implies

$$(a^*b)^*a^*b \leq (a^*b)^*a^* \tag{51}$$

We conclude the inequality (47) from (48), (49) and (51). □

Proposition 18. *(Shifting Rule) Suppose $\mathcal{K}$ is a Kleene algebra. For any $a, b \in \mathcal{K}$,*

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{52}$$

Proof. We show each inequality and then use antisymmetry of $\leq$ to conclude equality.

We start by proving that

$$a(ba)^* \leq (ab)^*a. \tag{53}$$

By the Horn axiom (13), it is sufficient to show

$$a + (ab)^*a(ba) \leq (ab)^*a. \tag{54}$$

We can do it as follows:

$$1 \leq (ab)^* \tag{55}$$

$$a \leq (ab)^* a \quad \text{(by monotonicity of } \cdot) \tag{56}$$

We also have

$$(ab)^* a(ba) = (ab)^*(ab)a \leq (ab)^* a, \tag{57}$$

by the Proposition (11)-(iii).

By monotonicity and the idempotency of +, (56) and (57) together imply the desired inequality (54).

For the reverse, we similarly use the Horn axiom (12). It suffices to prove

$$a + (ab)a(ba)^* \leq a(ba)^*. \tag{58}$$

From the arguments above, we get

$$a \leq a(ba)^*, \tag{59}$$

and

$$(ab)a(ba)^* = a(ba)(ba)^* \leq a(ba)^*. \tag{60}$$

(59) and (60) imply the inequality (58). □

Proposition 19. *For the linear equation*

$$b + aX = X \tag{61}$$

defined on any Kleene algebra, where X is a variable, a^*b is the unique least solution with respect to the canonical (natural) order.

Proof. We first check that a^*b is a solution, then show it is the least

one with respect to $\leq$.

$$
\begin{aligned}
1 + aa^* &= a^* \\
(1 + aa^*)b &= a^*b \\
b + (aa^*)b &= a^*b \quad \text{distributivity of } \cdot \text{ over } + \\
b + a(a^*b) &= a^*b \quad \text{associativity of } \cdot \\
a(a^*b) + b &= a^*b.
\end{aligned}
$$

Assume that $z \in \mathcal{K}$ is another solution to (61). Thus, $az+b = z$. We wish to show that $a^*b \leq z$. Since $z = (az + b) + z$, $az + b \leq z$. Due to (12), $a^*b \leq z$. □

Conclusion

In this chapter, we have given an axiomatic overview of Kleene algebras and derived several algebraic properties directly from the finitary axiomatization of Kozen (1994). These properties underwrite applications ranging from regular languages and automata (Kozen, 1997/2012; Kuich, 1987; Kuich & Salomaa, 1986), through relational models (Ng, 1984; Ng & Tarski, 1977), to path problems in algorithm design (Aho et al., 1975; Iwano & Steiglitz, 1990; Mehlhorn, 1984) and the semantics of programs (Kozen, 1981).

REFERENCES

Aho, A. V., Hopcroft, J. E., & Ullman, J. D. (1975). *The design and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley.

Iwano, K., & Steiglitz, K. (1990). A semiring on convex polygons and zero-sum cycle problems. *SIAM Journal on Computing*, *19*(5), 883–901. https://doi.org/10.1137/0219061

Kozen, D. C. (1981). On induction vs. *-continuity. In D. C. Kozen (Ed.), *Logics of programs* (pp. 167–176, Vol. 131). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/BFb0025782

Kozen, D. C. (1994). A completeness theorem for Kleene algebras and the algebra of regular events. *Information and Computation*, *110*(2), 366–390. https://doi.org/10.1006/inco.1994.1037

Kozen, D. C. (2012). *Automata and computability*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1844-9 (Original work published 1997)

Kuich, W. (1987). The Kleene and the Parikh theorem in complete semirings. In T. Ottmann (Ed.), *Automata, languages, and programming: 14th international colloquium* (pp. 212–225, Vol. 267). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/3-540-18088-5_17

Kuich, W., & Salomaa, A. (1986). *Semirings, automata, languages*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69959-7

Mehlhorn, K. (1984). *Data structures and algorithms 2: Graph algorithms and NP-completeness*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69897-2

Ng, K. C. (1984). *Relation algebras with transitive closure* [Doctoral dissertation, University of California, Berkeley].

Ng, K. C., & Tarski, A. (1977). Relation algebras with transitive closure [Abstract 742-02-09]. *Notices of the American Mathematical Society*, *24*, A29–A30.

Özaslan, T., & Özaslan, E. A. (2026). Scalable truncated kleene star on maze graphs. *2026 34th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)*, 1–4.


BİDGE