MATEMATİK EĞİTİMİNDE GÜNCEL YAKLAŞIMLAR:

BİLİŞSEL SÜREÇLER, MATEMATİKSEL MODELLEME VE YENİLİKÇİ UYGULAMALAR

Editör:
Doç. Dr. SÜMEYRA SOYSAL



BİDGE Yayınları

Matematik Eğitiminde Güncel Yaklaşımlar: Bilişsel Süreçler, Matematiksel Modelleme ve Yenilikçi Uygulamalar

Editör: Doç. Dr. Sümeyra SOYSAL

ISBN: 978-625-5474-96-4

1. Baskı
Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL
Yayınlama Tarihi: 2026-10-25
BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374
Yayın hakları © BİDGE Yayınları
www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com
Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.
Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya / Ankara

ÖNSÖZ

Matematik, yalnızca sayılar ve işlemlerden oluşan bir disiplin değil; bireyin düşünme, akıl yürütme, problem çözme ve dünyayı anlamlandırma süreçlerinde önemli bir yere sahip olan evrensel bir bilgi alanıdır. Bu kitap, matematiksel düşünmenin çok boyutlu yapısını bilişsel, duyuşsal, eğitsel ve disiplinler arası perspektiflerden ele almayı amaçlamaktadır. Matematik kaygısı ve gelişimsel diskalkuli gibi öğrenme süreçlerini etkileyen faktörlerden matematiksel modellemenin farklı yaşam alanlarındaki uygulamalarına, somut öğretim materyallerinden üretken yapay zekâ destekli öğrenme ortamlarına uzanan bölümler, matematiğe ilişkin güncel kuramsal ve uygulamalı yaklaşımları bir araya getirmektedir. Farklı bakış açılarını bütüncül bir çerçevede sunan bu eserin, araştırmacılara, eğitimcilere, öğretmen adaylarına ve matematiksel düşünmeyle ilgilenen tüm okurlara katkı sağlamasını diliyoruz.

Doç. Dr. SÜMEYRA SOYSAL

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

İÇİNDEKİLER

GELİŞİMSEL DİSKALKULİDE ÇALIŞMA BELLEĞİ: KURAMSAL TEMELLER, AMPİRİK KANITLAR VE EĞİTSEL UYGULAMALAR 1
İHSAN SÖYLEMEZ

MATEMATİK KAYGISI MI, DİSKALKULİ Mİ? BENZERLİKLER VE AYIRT EDİCİ ÖZELLİKLER 42
İHSAN SÖYLEMEZ

TAHMİN ET-ÖLÇÜM YAP-KARŞILAŞTIR- YARGIDA BULUN! 97
MİHRİBAN HACISALİHOĞLU KARADENİZ

İSTEMDEN MATEMATİKSEL MUHAKEMEYE: ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ DESTEKLİ GÖREV TASARIMINDA BİLİŞSEL TALEP 139
GİZEM ÜNSAL

HUKUKTA MATEMATİKSEL MODELLEME 180
ALATTİN URAL

BÖLÜM 1

GELİŞİMSEL DİSKALKULİDE ÇALIŞMA BELLEĞİ: KURAMSAL TEMELLER, AMPİRİK KANITLAR VE EĞİTSEL UYGULAMALAR

İHSAN SÖYLEMEZ[1]

Giriş

Matematik dersinde zorlanan bir öğrenciyle karşılaşan bir eğitimcinin ilk açıklama denemesi çoğunlukla iki başlıktan birine yönelir: çaba eksikliği ya da yetenek yetersizliği. Bu iki açıklamanın ortak özelliği, güçlüğü öğrencinin bir niteliğine bağlaması ve dolayısıyla öğretim ortamına ilişkin herhangi bir çıkarım üretmemesidir. Oysa matematik güçlüğünün önemli bir bölümü, ne çabayla ne de genel zihinsel yetenekle açıklanabilen, çok daha özgül bir bilişsel darboğazdan kaynaklanmaktadır: bilgiyi zihinde etkin biçimde tutarken aynı anda o bilgi üzerinde işlem yapabilme kapasitesinin sınırlılığı.

Bir sınıf gözlemi

Dördüncü sınıf öğrencisi olan bir çocuk, sözel anlatımı akıcı ve sınıfın en meraklı öğrencilerinden biridir. Buna karşılık 7 + 8 işlemini her seferinde parmaklarıyla ve baştan sayarak bulmakta;

[1] Dr., Muş Alparslan Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, ORCID: 0000-0002-1705-1395

çok basamaklı toplamada eldeyi unutup adımı kaybetmekte; problem metninin ikinci cümlesine geldiğinde ilk cümlede verilen bilgiyi hatırlayamamakta; tahtadaki sayıya bakıp defterine yazana kadar sayıyı yitirmektedir.

Bu dört davranışın ortak paydası, sayının anlamına ilişkin bir kavrayış eksikliği değildir. Dördü de, bilgiyi etkin tutarken eşzamanlı olarak işleme gerektiren durumlarda ortaya çıkmaktadır. Bu ayrım, bölümün tamamına yön veren temel ayrımdır: çocuk işlemi bilmiyor değildir; adımları zihninde tutamadığı için tamamlayamamaktadır.

Bilmek ile tutabilmek arasındaki bu ayrım, yalnızca kuramsal bir incelik değildir. Ayrımın yapılmaması, eğitsel kararların da yanlış yönde kurulmasına yol açar. Güçlüğü bilgi eksikliği olarak okuyan bir eğitimci, doğal olarak daha fazla alıştırma önerir; oysa yükü taşıyamayan bir sistemin üzerine yük eklemek, yalnızca yanlış prosedürlerin pekişmesine ve kaçınma davranışının derinleşmesine hizmet eder. Buna karşılık güçlüğü bir tutma-ve-işleme kapasitesi sorunu olarak okuyan bir eğitimci, doğrudan denetleyebileceği bir hedef bulur: görevin bilişsel yükünü azaltmak.

Bu bölümün amacı, gelişimsel diskalkuli ile çalışma belleği arasındaki ilişkiyi kanıt düzeyleri gözetilerek sentezlemek ve bu sentezden türetilebilecek eğitsel çıkarımları ortaya koymaktır. Bölüm bu amaç doğrultusunda dört soruya yanıt aramaktadır. Birincisi, çalışma belleği ile matematik becerileri arasındaki ilişki hangi düzeydedir ve bu ilişki bileşenlere göre nasıl farklılaşmaktadır? İkincisi, gelişimsel diskalkulide hangi çalışma belleği bileşenleri akran karşılaştırmalarında belirgin biçimde farklılaşmaktadır? Üçüncüsü, çalışma belleğini doğrudan hedefleyen müdahalelerin akademik ölçütlere aktarımına ilişkin kanıt değeri nedir? Dördüncüsü, bu bulgular hangi öğretimsel ve kurumsal uygulamalara dönüştürülebilir?

Bölüm boyunca izlenen yöntemsel duruş, kanıt hiyerarşisinin gözetilmesidir. İddialar öncelikle meta-analizler ve sistematik derlemeler, ardından kontrollü deneysel çalışmalar, ardından geniş örneklemli korelasyonel çalışmalar temel alınarak kurulmuştur. Bu tercih, alanın yalnızca olumlu bulgularla değil, olumsuz bulgularla da ilerlediği kabulüne dayanmaktadır: bir uygulamanın işe yaramadığını bilmek, sınırlı zamanın ve kaynağın işe yarayan uygulamalara ayrılabilmesi bakımından en az olumlu bulgu kadar değerlidir.

Gelişimsel Diskalkuli: Kavramsal Çerçeve

Tanım ve Terminoloji

Gelişimsel diskalkuli, genel zihinsel yetenekten ve eğitim fırsatlarından bağımsız olarak sayı hissi, aritmetik olguların geri çağrılması, hesaplama akıcılığı ve niceliksel akıl yürütme alanlarında süreğen güçlükle seyreden özgül bir öğrenme güçlüğü olarak tanımlanmaktadır (Butterworth, 2005; von Aster & Shalev, 2007). Tanımın iki bileşeni özellikle önemlidir. Birincisi, güçlüğün alan-özgül olması: çocuk pek çok bilişsel alanda normal, kimi durumda üstün performans gösterirken yalnızca sayısal alanda takılmaktadır. İkincisi, güçlüğün kalıcılığı: uygun ve yeterli öğretime rağmen sürmesi, tanının temel ayırt edici ölçütüdür.

Terminoloji açısından bir inceliğin kayda geçirilmesi gerekmektedir. DSM-5'te ayrı bir "diskalkuli" tanı kategorisi bulunmamakta; tanı "Özgül Öğrenme Bozukluğu — matematik alanında bozulma ile" biçiminde konulmaktadır (American Psychiatric Association, 2013). "Diskalkuli" ise hem klinik uygulamada hem de alanyazında yerleşmiş, işlevsel bir adlandırmadır. Uygulamacıların resmî raporlarda farklı bir ifadeyle karşılaşabilecekleri bu ayrım, kurumlar arası yazışmalarda yanlış anlamaları önlemek bakımından bilinmelidir.

Yaygınlık ve Eş Tanı

Okul çağı nüfusunda yaygınlık, yaygın olarak %3–7 aralığında bildirilmektedir (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019). Bu aralığın genişliği bir belirsizlik göstergesi olmaktan çok, ölçme kararlarının doğrudan bir sonucudur: hangi kesme noktasının benimsendiği, hangi ölçme aracının kullanıldığı ve dışlama ölçütlerinin ne kadar sıkı uygulandığı, bildirilen oranı belirgin biçimde değiştirmektedir. Pratik karşılığı açısından bu oran, ortalama büyüklükteki bir sınıfta bir ya da iki öğrencinin bu tabloyla uyumlu güçlükler yaşayabileceği anlamına gelmektedir. Dikkat çekici olan, disleksiyle benzer sıklıkta görülmesine karşın diskalkulinin hem toplumsal hem de mesleki farkındalık düzeyinin belirgin biçimde düşük olmasıdır; Türkiye alanyazınında da öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki bilgi düzeyinin sınırlı olduğu bildirilmektedir (Sezer & Akın, 2011).

Diskalkuli nadiren tek başına görülür. Disleksi, dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluğu (DEHB) ve matematik kaygısıyla birliktelik oranları alanyazında geniş aralıklarla bildirilmektedir. Bu birlikteliğin iki sonucu vardır. Değerlendirme açısından, gözlenen matematik güçlüğünün hangi kaynaktan beslendiğinin ayrıştırılması gerekmektedir. Müdahale açısından ise, tek bir alana odaklanan bir destek programının çoğu durumda yetersiz kalacağı öngörülmelidir.

Birincil–İkincil Ayrımı ve Bilişsel Profiller

Diskalkulinin tek bir bilişsel profille temsil edilemeyeceği, alanyazının üzerinde giderek daha fazla uzlaştığı bir noktadır. Kaufmann et al. (2013) ile Price ve Ansari (2013), birincil ve ikincil diskalkuli ayrımını tartışmakta; Karagiannakis ve Cooreman (2015) ise dört bilişsel alana dayanan bir profil modeli önermektedir. Bu yaklaşımlar, uygulama diline aşağıdaki üç tablo hâlinde özetlenebilir.

Tablo 1. Gelişimsel diskalkulide ayırt edilen bilişsel profiller

Profil	Baskın özellik	Eğitsel öncelik
Çekirdek (birincil) profil	Sayı duyusu ve büyüklük temsili zayıftır; çalışma belleği görece korunmuştur.	Sayı hissini ve büyüklük temsilini doğrudan hedefleyen öğretim; nicelik–sembol eşlemesi.
Genel bilişsel (ikincil) profil	Çalışma belleği ve yürütücü işlevler zayıftır; sayı duyusu görece sağlamdır.	Bilişsel yükün azaltılması, dışsallaştırma, adım görünürlüğü ve otomatikleştirme.
Karma profil	Her iki alan birden zayıftır; klinik olarak en sık görülen ve en ağır seyreden tablodur.	Her iki hattın eşzamanlı ve uzun süreli yürütülmesi; yoğunlaştırılmış bireysel destek.

Kaynak: Kaufmann et al. (2013), Price ve Ansari (2013) ve Karagiannakis ve Cooreman (2015) temel alınarak yazar tarafından düzenlenmiştir.

Bu ayrımın uygulamaya dönük iki sonucu vardır. Birincisi, bir çocuğun diskalkuli tanısı alması, çalışma belleğinin zayıf olduğunun otomatik bir göstergesi değildir; tersi de doğrudur, çalışma belleği zayıf olan her çocuk diskalkulili değildir. İkincisi, profil farklılığı gözetilmeden uygulanan tek tip destek programları kaçınılmaz olarak verimsizdir: çekirdek sayı güçlüğü olan bir çocukla yürütücü işlev güçlüğü olan bir çocuğa aynı programın verilmesi, her iki çocuk açısından da kaynak israfı anlamına gelir.

Çalışma Belleği: Kuramsal Zemin

Tanım ve Kısa Süreli Bellekten Ayrımı

Çalışma belleği, bilgiyi kısa bir süre etkin durumda tutarken eşzamanlı olarak o bilgi üzerinde işlem yapılmasını sağlayan, kapasitesi sınırlı bir bilişsel sistem olarak tanımlanır (Baddeley & Hitch, 1974). Sistemi kısa süreli bellekten ayıran şey, depolama işlevine eklenen işlemleme katmanıdır. Bir sayı dizisinin duyulduğu sırayla tekrar edilmesi bir kısa süreli bellek görevidir; aynı dizinin tersten söylenmesi ise bir çalışma belleği görevidir, çünkü bilginin tutulmasıyla eşzamanlı olarak yeniden düzenlenmesini gerektirir.

Nitekim klinik değerlendirmede sayı dizisi geriye görevlerinin çalışma belleği ölçümü olarak kullanılmasının gerekçesi budur.

Kapasite sınırının büyüklüğü de sıklıkla yanlış anlaşılmaktadır. Yaygın biçimde bilinen “yedi artı eksi iki” değeri yalnızca depolamaya, yani kısa süreli belleğe ilişkindir. Eşzamanlı tutma ve işleme koşulunda işlevsel kapasite belirgin biçimde daralır ve üç ilâ dört birim düzeyine iner (Cowan, 2001). Bu nokta, eğitsel açıdan doğrudan bir sonuç üretir: bir öğrenciye “yalnızca dört adımlık” bir yönerge vermek, hiç de mütevazı bir talep değildir.

Çok Bileşenli Model

Baddeley ve Hitch (1974) çalışma belleğini tek parçalı bir depo olarak değil, birbiriyle etkileşim hâlinde çalışan alt sistemlerden oluşan bir yapı olarak kavramsallaştırmıştır. Modele 2000 yılında dördüncü bir bileşen eklenmiştir (Baddeley, 2000). Bileşenlerin işlevleri ve matematik öğrenmesindeki karşılıkları Tablo 2’de sunulmaktadır.

Tablo 2. Çalışma belleği bileşenleri ve matematik öğrenmesindeki karşılıkları

Bileşen	İşlevi	Matematikteki karşılığı
Merkezi yürütücü	Dikkati yönlendirir, kaynakları dağıtır, alt sistemleri eşgüdümler. Üç temel alt işlevi vardır: güncelleme, inhibisyon (ilgisizi bastırma) ve görevler arası geçiş.	Çok adımlı işlemin yönetimi, strateji seçimi, alışılmış ama yanlış prosedürün bastırılması, işlem türleri arasında geçiş.
Fonolojik döngü	Sözel ve işitsel bilgiyi tutar; içsel tekrarla etkin durumda korur.	Sayı sözcükleri, sayma dizisi, sözlü yönergeler, problem metninin içten okunması ve tutulması.
Görsel-uzamsal taslak	Görsel ve uzamsal bilgiyi tutar ve işler.	Sayı doğrusu üzerinde konumlama, basamak hizası ve sütun düzeni, geometrik ilişkiler, şema ve grafik okuma.

Bileşen	İşlevi	Matematikteki karşılığı
Epizodik tampon	Alt sistemlerden ve uzun süreli bellekten gelen bilgiyi bütünleşik bir temsilde birleştirir.	Problem bağlamının — verilen sayıların, aralarındaki ilişkinin ve sorulan sorunun— bir bütün olarak tutulması.

Kaynak: Baddeley ve Hitch (1974) ile Baddeley (2000) temel alınarak yazar tarafından düzenlenmiştir.

Bileşenlerin birbirinden bağımsız çalışmadığı vurgulanmalıdır. Tek bir sözel problem bile dört bileşenin tamamını eşzamanlı olarak devreye sokar: metin içten okunurken fonolojik döngü, durum şematize edilirken görsel-uzamsal taslak, sayılar ile ilişki ve soru birleştirilirken epizodik tampon, sürecin tamamı yönetilirken merkezi yürütücü çalışır. Bu eşzamanlılık, matematiksel problem çözmenin neden en yüksek bilişsel yükü taşıyan okul görevlerinden biri olduğunu açıklamaktadır.

Merkezi yürütücünün alt işlevleri arasında inhibisyon, diskalkuli tartışması bakımından özel bir yer tutar. İnhibisyon, o an geçerli olmayan ama güçlü biçimde tetiklenen bir tepkinin bastırılabilmesidir. Bu işlevin zayıflığı, ilerleyen bölümlerde ele alınacak sistematik hata örüntülerinin —örneğin her basamakta büyük rakamdan küçüğünü çıkarma eğiliminin— kaynağını oluşturur.

Kapasitenin Gelişimsel Seyri

Çalışma belleği kapasitesi sabit değildir; çocukluk boyunca düzenli biçimde artar. Gathercole et al. (2004) geniş bir örneklemde bu artışı belgelemiş; Henry (2012) ise gelişim sürecinde ortaya çıkan strateji değişimlerini ayrıntılandırmıştır. Yaklaşık değerler Tablo 3’te özetlenmektedir.

Tablo 3. Çalışma belleği kapasitesinin gelişimsel seyri (yaklaşık değerler)

Yaş	Yaklaşık kapasite	Baskın strateji ve eğitsel karşılığı
4–5 yaş	≈ 3 birim	Kodlama görsel-uzamsal ağırlıklıdır; içsel tekrar stratejisi henüz kullanılmaz. Görsel destek ve fiziksel deneyim önceliklidir.
7 yaş	≈ 3–4 birim	İçsel (sessiz) tekrar stratejisi devreye girer; sözel tutma güçlenir. Sesli düşünme modellemesi bu dönemde verimlidir.
9 yaş	≈ 4 birim	Sözel stratejiler yerleşir, kapasite istikrarlı biçimde artar. Not alma ve gruplama stratejileri öğretilebilir.
11 yaş	≈ 5 birim	Yetişkine yaklaşan kapasite; soyut işlemler desteklenebilir. Görsel destek sürdürülür, sözel stratejiler üzerine eklenir.

Kaynak: Gathercole et al. (2004) ile Henry (2012) temel alınarak düzenlenmiştir. Değerler ortalamalardır; bireysel değişkenlik geniştir.

Tablo 3'teki birim değerleri, kaynak çalışmaların doğrudan raporladığı biçim değil, alanyazındaki bulguların uygulamacı için açıklayıcı biçimde yaklaşıklaştırılmış bir özetidir; kesin ölçüm değerleri olarak kullanılmamalıdır.

Bu gelişimsel eğrinin değerlendirme açısından anlamı açıktır: "düşük çalışma belleği" yargısı ancak yaş normuna göre kurulduğunda anlamlıdır. Altı yaşındaki bir çocuğun üç adımlı bir yönergeyi tutamaması çoğu durumda gelişimsel bir olağanlıktır. Aynı güçlüğün on bir yaşında ve akranlardan belirgin biçimde geride sürmesi ise olgunlaşma gecikmesinden çok kalıcı bir farklılığa işaret edebilir. Bununla birlikte, eğrinin bir miktar altında olmak tek başına tanı ölçütü değildir; tanı için güçlüğün süreğen, yaygın ve —en önemlisi— uygun öğretime dirençli olması aranır.

Bir kavramsal uyarı burada kayda geçirilmelidir. Küçük yaşta kodlamanın görsel ağırlıklı olması bir strateji gözlemidir ve ileride ele alınacak "hangi bileşen matematik başarısını en çok yordar" sorusundan farklı bir düzleme aittir. İki bulgunun karıştırılması, alanyazında görünürde çelişki üreten yaygın bir okuma hatasıdır.

Çalışma Belleği ile Matematik Becerileri Arasındaki İlişki

Meta-Analitik Kanıt

Çalışma belleği ile matematik performansı arasındaki ilişki, tek bir çalışmanın rastlantısal bulgusu değil, birikimli bir sonuçtur. Friso-van den Bos et al. (2013), 111 çalışmayı birleştirdikleri meta-analizde çalışma belleğinin bütün bileşenlerinin matematik performansıyla anlamlı biçimde ilişkili olduğunu; en güçlü bağın ise sözel güncelleme görevlerinde ortaya çıktığını bildirmiştir.

İkinci ve alanın en sık atıf alan sentezi Peng et al. (2016) tarafından yürütülmüştür. Yüz on çalışmadan 829 etki büyüklüğünün birleştirildiği bu meta-analizde matematik ile çalışma belleği arasında orta düzeyde bir ilişki bildirilmiştir (r = .35, %95 GA [.32, .37]). Bulgular üç bakımdan ayrıca bilgilendiricidir. Birincisi, matematik sözel, sayısal ve görsel-uzamsal çalışma belleğiyle birbirine yakın düzeyde ilişkilidir; yani hiçbir bileşen tek başına belirleyici değildir. İkincisi, ilişki matematik becerisinin türüne göre farklılaşır: en güçlü bağ sözel problem çözme ve tam sayı hesaplamalarında, en zayıf bağ ise geometride gözlenmiştir. Üçüncüsü, ilişki, başka bir bozukluk ya da bilişsel açıkla birlikte seyreden matematik güçlüklerinde daha güçlüdür — bu bulgu, ilerleyen bölümde ele alınacak profil heterojenliğinin meta-analitik bir yansımasıdır.

Bu tablo, yaklaşık on yıl sonra üçüncü bir sentezle daha da inceltilmiştir. Zhang et al. (2023), 55 bağımsız örneklemde 11.224 ilkokul öğrencisini kapsayan meta-analizlerinde çalışma belleği ile aritmetik arasında anlamlı ve orta düzeyde bir ilişki bildirmiş; ayrıca gelişimsel bir incelik eklemişlerdir. Buna göre sözel bileşenin yordayıcı katkısı yaşla birlikte göreli olarak azalırken, görsel-uzamsal bileşenin katkısı ilkokul boyunca korunmaktadır. Sözel bileşenin ilkokul döneminde öne çıkması ile Peng et al.’nin (2016) bildirdiği dengeli tablo arasında bir çelişki yoktur: Zhang et al.

yalnızca ilkokul örneklemlerine odaklanırken, Peng et al. çok daha geniş bir yaş aralığını kapsamaktadır. Yaş, bileşenler arası sıralamanın sistematik bir düzenleyicisidir.

Bu bulguların yorumunda iki tür aşırılıktan kaçınılmalıdır. Birincisi, “orta düzey ilişki” ifadesi, çalışma belleğinin matematik başarısını tek başına belirlediği anlamına gelmez; çalışma belleği önemli ama tek olmayan bir yordayıcıdır. İkincisi, bu bulgulardan doğrudan bir öğretim reçetesi türetilmemelidir. Sözel bileşenin katkısının yaşla azaldığı bulgusu, “büyük çocukta görsel desteği bırakalım” biçiminde okunamaz; çünkü bulgu hangi bileşenin performansı ne ölçüde açıkladığına ilişkindir, hangi desteğin öğretimde etkili olduğuna ilişkin değildir. Öğretim tarafında doğru yaklaşım, görsel desteği hiçbir yaşta bırakmamak ve sözel stratejileri bunun üzerine eklemektir.

Beceri Alanlarına Göre Görünüm

Çalışma belleğinin matematik öğrenmesindeki rolü, tüm beceri alanlarında aynı biçimde ortaya çıkmaz. Dört alan ayırt edilebilir.

- Sayı işleme ve büyüklük karşılaştırması. İki sayının karşılaştırılması ya da bir sayının sayı doğrusunda konumlandırılması ağırlıklı olarak görsel-uzamsal taslağı çalıştırır. Bu alandaki güçlük, sayının anlamına ilişkin temsilin kendisiyle olduğu kadar, temsilin uzamsal olarak işlenmesiyle de ilgilidir.

- Aritmetik olguların geri çağrılması. “6 × 7” gibi temel olguların uzun süreli bellekten doğrudan erişilebilir hâle gelmesi, otomatikleşmeyi gerektirir. Çalışma belleği zayıf olan çocuklarda bu otomatikleşme gecikir.

- Çok basamaklı işlem. Elde tutma ve ara sonuçların saklanması, merkezi yürütücü ile fonolojik döngünün eşgüdümlü çalışmasını gerektirir. Sistemin taşması hâlinde işlem çöker ve çocuk baştan başlamak zorunda kalır.

- Sözel problem çözme. En yüksek yükün taşındığı alandır: metin tutulurken sayısal ilişkinin kurulması, ilişkiden işlemin türetilmesi ve sonucun bağlama geri yerleştirilmesi gerekir. Dört bileşen de eşzamanlı olarak devrededir.

Otomatikleşme ve Kısır Döngü

Aritmetik olguların otomatikleşmemesinin, çalışma belleği açısından kendini besleyen bir döngü ürettiği öne sürülmektedir. Aşağıdaki muhakeme, doğrudan sınanmış bir bulgudan çok, bilişsel kaynak kuramından türetilen ve alanyazındaki bulgularla tutarlı bir çıkarımdır; bu epistemik statü akılda tutulmalıdır. Temel olguları her seferinde yeniden hesaplamak zorunda kalan bir çocuk, kapasitesinin önemli bir bölümünü alt işleme harcar; geriye asıl problemin yapısını kurmaya ayrılacak kaynak kalmaz. Bu durum yalnızca yavaşlık üretmez; üst düzey matematiksel akıl yürütmenin önünü de yapısal olarak kapatır. Dolayısıyla temel olguların akıcılaştırılması, ezberciliğe dönüş değil, bilişsel kaynağın serbestleştirilmesi işlemidir. Bu ayrım, ilerleyen bölümde ele alınacak strateji setinin kuramsal gerekçesini oluşturur.

Gelişimsel Diskalkulide Çalışma Belleği Profili

Hangi Bileşen Farklılaşmaktadır?

Diskalkulili çocukların akranlarıyla karşılaştırıldığı çalışmalarda ortaya çıkan örüntü, genel popülasyonda gözlenen yordayıcılık örüntüsünden farklıdır. Szűcs et al. (2013), 1.004 çocuğun tarandığı bir havuzdan seçilen 9–10 yaş grubunda

diskalkulili çocuklar ile kontrol grubunu karşılaştırmış; beş rakip kuramı —büyüklük temsili, çalışma belleği, inhibisyon, dikkat ve uzamsal işleme— aynı örneklemde doğrudan sınamıştır. Diskalkulinin baskın özellikleri görsel-uzamsal çalışma belleği, görsel-uzamsal kısa süreli bellek ve inhibisyon işlevi —özellikle karışma bastırma (interference suppression)— güçlüğü olarak bildirilmiştir.

Bu bulgunun tek bir çalışmaya dayandırılmaması gerekir; nitekim meta-analitik kanıt da aynı yönü desteklemektedir. Peng et al. (2018), matematik güçlüğü olan bireylerde bilişsel açık profillerini birleştirdikleri kapsamlı meta-analizde, güçlüğün tek bir alana indirgenemeyeceğini ve çalışma belleği ile yürütücü işlevlerin profilin merkezinde yer aldığını ortaya koymuştur. Bununla birlikte, Szűcs et al.'nin örnekleminin dar bir yaş bandından oluşması, bileşenler arası sıralamanın gelişimsel olarak ne ölçüde kararlı olduğu sorusunu açık bırakmaktadır.

Bu bulgunun kuramsal önemi, tek nedenli açıklamalara ilişkin sonucundadır. Szűcs et al.'nin çalışması, diskalkulinin tek nedeninin bozulmuş büyüklük temsili olduğu yönündeki tekil açıklamayı desteklememiştir. Bu sonucun nasıl okunması gerektiği konusunda dikkatli olmak gerekir.

Çekirdek sayı duyusu kuramı, alanyazının en güçlü ve en verimli açıklama çerçevelerinden biridir ve burada en güçlü hâliyle kaydedilmelidir. Butterworth (2005, 2010), sayısallık (numerosity) kodlamasının doğuştan gelen ve alan-özgül bir kapasite olduğunu; diskalkulinin ise bu çekirdek kapasitenin gelişimsel bozulmasından kaynaklandığını savunur. Bu çerçevenin üstünlükleri gerçektir: güçlüğün neden matematik alanına özgü kaldığını, neden zekâdan bağımsız seyrettiğini ve neden erken yaşta —henüz karmaşık yürütücü yükler devreye girmeden— sayı-miktar eşlemesinde belirtiler verdiğini ekonomik biçimde açıklar. Ayrıca sayı temsilini doğrudan hedefleyen müdahalelerin kuramsal dayanağını oluşturur.

Dolayısıyla bu bölümün savunduğu konum, çekirdek kuramın yerine bir alternatif koymak değildir. Savunulan şey daha ölçülü bir iddiadır: tek modüllü bir açıklama, gözlenen vakaların tamamını kapsamaya yetmemektedir. Görsel-uzamsal işleme ve dikkat kontrolü gibi daha genel sistemler de tabloya dâhildir ve bazı çocuklarda çekirdek güçlük büyük olasılıkla sayı temsilinde, bazılarında ise bilişsel kontroldedir. Bu okuma, önceki bölümde ele alınan profil çeşitliliğiyle tutarlıdır ve iki çerçeveyi rakip değil tamamlayıcı konuma yerleştirir.

Bileşenler arasındaki farklılaşmanın derecesine ilişkin nicel bir kesinlik iddiası, mevcut kanıt tabanıyla desteklenemez. Alanyazının ağırlıklı eğilimi, en belirgin farklılaşmanın görsel-uzamsal taslak ve merkezi yürütücüde; daha az ve daha tutarsız farklılaşmanın fonolojik döngüde ortaya çıktığı yönündedir. Epizodik tampon ise en az incelenen bileşendir; bu bileşene ilişkin sınırlı bulgu, korunmuşluğun değil, araştırma boşluğunun göstergesi olarak okunmalıdır.

Kavramsal Ayrım: Yordayıcı Olmak ile Zedelenmiş Olmak

Bu bölümün savunduğu temel kavramsal ayrım burada ortaya konmaktadır. Alanyazında sıklıkla birbirinin yerine kullanılan iki soru, esasen farklı sorulardır ve farklı araştırma tasarımlarıyla yanıtlanır:

1. Genel popülasyonda matematik başarısını en güçlü biçimde hangi bileşen yordamaktadır? Bu soru, tipik gelişen geniş örneklemlerde yürütülen korelasyonel çalışmalar ve bunların meta-analizleriyle yanıtlanır. Yanıt, ağırlıklı olarak sözel çalışma belleğine ve merkezi yürütücüye —özellikle güncelleme görevlerine— işaret etmektedir (Friso-van den Bos et al., 2013; Zhang et al., 2023).

2. Diskalkulili çocuklarda hangi bileşen en belirgin biçimde zedelenmiştir? Bu soru, tanı almış grup ile eşleştirilmiş kontrol grubunun karşılaştırıldığı vaka-kontrol tasarımlarıyla yanıtlanır. Yanıt, ağırlıklı olarak görsel-uzamsal taslağa ve merkezi yürütücünün inhibisyon işlevine işaret etmektedir (Szűcs et al., 2013).

Bir bileşenin genel popülasyonda güçlü bir yordayıcı olması ile bir bozuklukta en çok zedelenen bileşen olması, mantıksal olarak birbirinden bağımsız iki olgudur. Bir değişken, popülasyon genelinde performans varyansının önemli bir bölümünü açıklıyor olabilir; buna karşılık klinik bir grubu kontrollerden ayıran asıl değişken bir başkası olabilir. Bu ayrım gözetilmediğinde alanyazın çelişkili görünmekte; uygulamacı, iki doğru bulgudan birini seçmek zorunda olduğu yanılgısına düşmektedir. Ayrım gözetildiğinde ise tablo tutarlıdır. Nitekim her iki soruda da değişmeyen tek isim merkezi yürütücüdür: hem en güçlü yordayıcılar arasındadır, hem de diskalkulide gözlenen inhibisyon açığının merkezinde yer alır.

Ayrımın uygulamaya dönük sonucu şudur: değerlendirme yapılırken hangi soruyu yanıtladığımızın farkında olmalıyız. Bir çocuğun matematik performansını yordamaya çalışıyorsak dikkat edilecek bileşenlerle, o çocuğun akranlarından hangi bakımdan ayrıldığını anlamaya çalışıyorsak dikkat edilecek bileşenler aynı olmayabilir.

Nedensellik Sorunu

Çalışma belleği zayıflığı ile matematik güçlüğü arasındaki ilişkinin yönü, mevcut kanıtla çözülmüş değildir. En az üç açıklama yarışmaktadır:

- Çalışma belleği zayıflığı nedensel bir etkendir ve matematik güçlüğünü doğurmaktadır.

- İlişki ters yönde işlemektedir: kronik başarısızlık ve buna eşlik eden kaygı, zaman içinde çalışma belleği performansını geriye doğru aşındırmaktadır.

- Ortak bir nörogelişimsel zemin, iki tabloyu birbirinden görece bağımsız biçimde doğurmaktadır.

Mevcut çalışmaların büyük çoğunluğu korelasyoneldir ve bu üç açıklama arasında ayrım yapmaya elverişli değildir. Uzunlamasına çalışmalar mevcuttur ancak sayıca sınırlıdır ve karışık sonuçlar bildirmektedir; ayrıca gözlemsel uzunlamasına tasarımlar da tek başlarına nedensellik kurmaya yetmez. Bu durum, alanın olgunlaşmamışlığı değil, kullanılan tasarımların doğal sınırıdır. Bununla birlikte belirsizliğin uygulamaya dönük önemli bir sonucu vardır: eğer çalışma belleği zayıflığı bir neden değil bir sonuçsa, onu doğrudan hedef alan bir müdahale nedeni değil belirtiyi hedeflemiş olur. Bu öngörü, müdahale başlığı altında ele alınacak bulguların kuramsal habercisidir.

Nörobiyolojik Zemin: Paylaşılan Kaynak

Davranışsal düzeyde gözlenen “anlıyorum ama yapamıyorum” tablosunun nöral düzeyde bir karşılığı bulunmaktadır. Görüntüleme çalışmalarının sentezi, sayısal işlem ile çalışma belleğinin büyük ölçüde örtüşen bir fronto-paryetal ağı kullandığını göstermektedir (Menon, 2016). Bu ağ içinde iki yapı özellikle öne çıkar. İntraparyetal sulkus, sayı büyüklüğü temsilinin merkezî yapısı olarak kabul edilmekte ve hem sayısal işlemede hem de uzamsal çalışma belleği görevlerinde etkinleşmektedir. Dorsolateral prefrontal korteks ise merkezi yürütücünün nöral karşılığı olarak, karmaşık işlem sırasında dikkat dağıtımını ve kaynak kontrolünü üstlenmektedir.

Bu örtüşmenin pedagojik çıkarımı doğrudandır. Sayısal işlem ile çalışma belleği aynı sınırlı nöral kaynağı paylaştığı için, biri

yoğun biçimde yüklendiğinde diğerine ayrılan pay azalır. Dolayısıyla “bilişsel yükü azaltmak”, pedagojik bir nezaket önerisi ya da beklentiyi düşürme çağrısı değildir; paylaşılan ve sınırlı bir kaynağın korunmasıdır. Bölümün ilerleyen kısmında sunulacak uygulama önerilerinin tamamı bu mekanizma üzerine kuruludur.

Yorum sınırının belirtilmesi gerekmektedir. Görüntüleme bulguları ilişkiseldir ve bir ağ örüntüsüne işaret etmektedir; tek bir “bozuk bölge” tespitine indirgenemez. Renkli beyin görüntülerinin ikna ediciliği ile açıklayıcılığı arasındaki farkın korunması, bu alandaki yaygın aşırı yorumlardan kaçınmanın koşuludur.

Duyuşsal Boyut: Matematik Kaygısı

Çalışma belleği tartışmasının duyuşsal boyuttan ayrı yürütülmesi mümkün değildir. Ashcraft ve Kirk (2001), matematik kaygısının zihinde ikincil bir görev gibi davrandığını ve çalışma belleğinin bir bölümünü işgal ettiğini göstermiştir. Kaygılı bir öğrenci problemi çözmeye çalışırken, kapasitesinin bir kısmı “ya yapamazsam” türünden izlem düşünceleriyle meşguldür; göreve ayrılan pay bu ölçüde azalır.

Bu mekanizmanın önemli bir sonucu, kaygının etkisinin göreve göre değişmesidir. Kaygı özellikle yüksek yüklü, karmaşık problemlerde belirgin biçimde performans düşürür; düşük yüklü, otomatikleşmiş işlemlerde etkisi sınırlı kalır. Çünkü zor problem kapasiteyi zaten doldurmuştur; kaygının eklediği yük sistemi taşırma noktasına getirir.

Nöral düzeyde de benzer bir tablo bildirilmektedir. Young et al. (2012), matematik kaygısı yüksek çocuklarda amigdala etkinliğinin arttığını ve çalışma belleğini destekleyen prefrontal alanların işlevselliğinin azaldığını göstermiştir. Kaygı, bu bulguya göre, belleğin nöral temelini doğrudan zayıflatmaktadır.

Kaygı ile performans arasındaki ilişkinin yönü, tıpkı çalışma belleği tartışmasında olduğu gibi, tam olarak çözülmüş değildir. Carey et al. (2016), bu belirsizliği “tavuk mu yumurta mı” sorusuyla çerçevelemiştir: kaygı mı düşük performansa yol açmakta, yoksa yinelenen başarısızlık mı kaygıyı üretmektedir? Alanyazında bu iki sürecin karşılıklı olarak birbirini beslediği ve kendini pekiştiren bir döngü oluşturduğu konusunda görece uzlaşı bulunmaktadır. Diskalkulili çocuklarda matematik kaygısının daha yüksek düzeylerde bildirilmesi (Rubinsten & Tannock, 2010), bu döngünün klinik gruplarda daha erken ve daha güçlü kurulduğuna işaret etmektedir.

Eğitsel çıkarım nettir: zaman baskısının azaltılması, tek başına en güçlü ve en düşük maliyetli kaygı müdahalesidir. Bir öğrenciye ek süre tanımak, bir ayrıcalık ya da beklentinin düşürülmesi değildir; kaygı yoluyla işgal edilmiş çalışma belleği kapasitesinin öğrenciye iadesidir. Hatanın öğrenme sürecinin olağan bir parçası olarak çerçevelenmesi ve başarılabilir küçük basamaklar kurgulanması, döngünün kırılmasına hizmet eden diğer iki temel müdahaledir.

Müdahale: Kanıtın Söyledikleri ve Söylemedikleri

Çalışma Belleği Eğitimi ve Uzak Transfer Sorunu

Çalışma belleği zayıfsa doğrudan çalıştırılarak güçlendirilebileceği düşüncesi, sezgisel olarak son derece makuldür. Bu düşünce, bilgisayar temelli ve uyarlanabilir bellek görevlerine — örneğin artan zorlukta dizi hatırlama ya da n-back türevi görevlere— dayanan ticari programların dayanağını oluşturmaktadır. Programlar ölçülebilir, ölçeklenebilir ve çocuğun düzeyine otomatik olarak uyarlanabilir olmaları nedeniyle okullar ve aileler tarafından yoğun ilgi görmekte, kimi zaman ciddi bütçeler bu programlara ayrılmaktadır.

İddianın en güçlü hâliyle kurulması, dürüst bir değerlendirmenin ön koşuludur. Nitekim bu programlar bir bakımdan gerçekten işe yaramaktadır: eğitilen görevde ve ona benzer bellek görevlerinde güvenilir bir gelişme gözlenmektedir. Alanyazında bu, yakın transfer olarak adlandırılır. Asıl soru ise farklıdır: bellek görevindeki kazanım, çocuğun gerçek matematik performansına aktarılmakta mıdır? Bu soru uzak transfer tartışmasının konusudur.

Melby-Lervåg et al. (2016), 87 yayını ve 145 karşılaştırmayı birleştirdikleri meta-analizde yakın transferin güvenilir biçimde gözlendiğini; buna karşılık zekâ, okuma ve aritmetik gibi uzak ölçütlerde —özellikle tedavi gören, yani aktif kontrol grubuyla karşılaştırıldığında— ikna edici bir kazanım bulunmadığını bildirmiştir. Dunning et al. (2013), aynı sonucu randomize kontrollü bir tasarımla göstermiş; bellekteki kazanımın akademik ölçütlere yansımadığını ortaya koymuştur.

Bu bulgu izleyen yıllarda zayıflamamış, aksine netleşmiştir. Aksayli et al. (2019), en yaygın ticari program olan Cogmed üzerine 50 çalışmayı birleştirmiş ve matematik gibi uzak ölçütlerde etkinin sıfıra yakın olduğunu; üstelik bu boşluğun çalışmalar arasında tutarlı biçimde gözlendiğini bildirmiştir. Sala ve Gobet (2020), tipik gelişen çocuklarda 41 çalışmayla aynı tabloyu doğrulamış ve yöntemsel açıdan çarpıcı bir örüntüye dikkat çekmiştir: araştırma tasarımı sağlamlaştıkça —özellikle aktif kontrol grubu kullanıldıkça— gözlenen etki küçülmektedir.

Aktif kontrol grubu kavramının açıklanması bu noktada gereklidir. Eğitim alan bir grup, hiçbir etkinlik yapmayan bir grupla karşılaştırıldığında ölçülen fark, müdahalenin kendisinden değil, ilgi görmenin ve etkinliğe katılmanın genel etkisinden kaynaklanıyor olabilir. Gerçek sınama, benzer süre boyunca başka bir etkinlikle meşgul olan bir grupla yapılan karşılaştırmadır. Etkinin bu

tasarımlarda erimesi, gözlenen kazanımın önemli bir bölümünün yöntemsel bir yapaylık olduğunu düşündürmektedir.

Bu değerlendirmenin sınırları belirtilmelidir. Birincisi, araştırmacıların kendileri de mutlak bir yargı bildirmemekte; mevcut kanıtın cesaret verici olmadığını ve yeni yaklaşımlara ihtiyaç duyulduğunu ifade etmektedir. İkincisi ve uygulama açısından daha önemlisi, bu bulgu doğrudan matematik içeriği ve sayı hissi öğreten yazılımları kapsamaz. Eleştirinin hedefi, genel bir bellek egzersizinin akademik çözüm olarak sunulmasıdır; teknolojinin kendisi değil.

Alternatif Çerçeve: Kapasiteyi Büyütmek Yerine Yükü Yönetmek

Kapasiteyi doğrudan artırma hedefinin kanıtla desteklenmemesi, çalışma belleğinin eğitsel açıdan işlevsiz bir kavram olduğu anlamına gelmez. Yalnızca hedefin yeniden tanımlanmasını gerektirir: kapasiteyi büyütmek yerine, mevcut kapasiteye binen yükü yönetmek. Bu yeniden tanımlamanın kuramsal dayanağı Sweller'in (1988) Bilişsel Yük Kuramıdır.

Kuram, öğrenme sırasında çalışma belleğine binen yükü üç türe ayırır. İçsel yük, öğrenilecek içeriğin kendi karmaşıklığından kaynaklanır ve kolayca değiştirilemez. Yabancı yük, öğretim tasarımının zayıflığından doğan ve öğrenmeye hiçbir katkı sağlamayan gereksiz yüktür. Yararlı yük ise şema kurmaya, yani öğrenmenin kendisine giden zihinsel çabadır ve korunması gerekir. Öğretmenin doğrudan denetleyebildiği yük türü yabancı yüktür; müdahalenin asıl hedefi de budur.

Bu ayrımın gözden kaçırılması, iyi niyetli bir yanlış uygulamaya yol açmaktadır. Amaç her şeyi kolaylaştırmak değildir; öğrenme tanımı gereği çaba gerektirir. Yapılması gereken, öğrenmeye katkısı olmayan gereksiz yükü —kalabalık ve süslü

materyalleri, gereğinden uzun yönergeleri, tutarsız biçimleri—temizlemek; sorunun bilişsel özünü ise korumaktır.

Gathercole–Alloway Çerçevesi: Yedi İlke

Bilişsel yük kuramının sınıf ortamına aktarılmış en yetkin biçimlerinden biri, Gathercole ve Alloway'in (2007) yıllara yayılan sınıf araştırmalarından türetilen yedi ilkeli müdahale çerçevesidir. Çerçevenin ayırt edici yanı, çocuğun belleğini değiştirmeye çalışmak yerine, mevcut kapasitesiyle başarılı olabileceği bir öğrenme ortamı tasarlamayı hedeflemesidir. İlkeler şunlardır:

1. Aşırı yüklenmeyi fark etmek: öğrencinin taşma noktasına geldiği anı gözlemek.
2. Riskli görevleri önceden izlemek: uzun yönergeler ve çok adımlı işlemler gibi başarısızlık olasılığı yüksek görevleri önceden kestirmek.
3. Yükü azaltmak: yönergeyi kısaltmak, görevi bölmek, adımları tek tek vermek.
4. Önemli bilgiyi yinelemek: yönergeyi tekrarlamak ve öğrenciden tekrar etmesini istemek.
5. Bellek desteği sağlamak: sayı doğrusu, çarpım ve formül kartı, hesaplama aracı gibi dışsal destekleri erişilebilir kılmak.
6. Strateji gelişimini desteklemek: not alma, gruplama, kendi kendine sesli yönerge verme ve yardım isteme becerilerini öğretmek.
7. Yardım istemeyi normalleştirmek: takılma anında soru sormayı güvenli ve olağan hâle getiren bir sınıf iklimi kurmak.

Beşinci ilke, uygulamada en sık itirazla karşılaşan ilkedir: dışsal desteklerin "kopya" sayılıp sayılmayacağı tartışılır. Bu itirazın

yanıtı ilkeseldir. Bir dışsal destek, eksik bir işlevi telafi eder; gözlük kullanımının görme işlevini desteklemesi gibi. Karar ölçütü ise pedagojiktir: o an işlemin kendisi mi öğretilmektedir, yoksa işlem bir araç olarak kullanılıp problem mi çözdürülmektedir? Hedef beceri hangisiyse, desteğe ilişkin karar da ona göre verilir.

Yedinci ilke, çoğu zaman teknik bir öneri olarak değil, bir sınıf iklimi meselesi olarak ele alınmalıdır. Takıldığında soru sormaktan çekinen bir öğrenci için, en iyi tasarlanmış strateji dahi işlevsiz kalır. Psikolojik güvenliğin kurulması, bu nedenle bilişsel yük yönetiminin ayrılmaz bir bileşenidir.

Somut–Temsilî–Soyut (CRA) Öğretim Dizisi

Yük azaltma ilkesinin en sistemli ve kademeli uygulaması, Bruner'in (1966) temsil kuramına dayanan somut–temsilî–soyut (concrete–representational–abstract, CRA) öğretim dizisidir. Dizi, bir kavramın önce elle tutulur nesnelerle, ardından resim ve şemalarla, en son yalnızca sembollerle öğretilmesini öngörür.

İki basamaklı ve onluk bozmayı gerektiren bir çıkarma işlemi üzerinden üç aşama şöyle somutlaşır. Somut aşamada öğrenci taban-10 blokları ya da bozuk parayla çalışır; bir onluğu fiziksel olarak bozarak çıkarmayı gerçekleştirir; bozma işlemini elleriyle deneyimler. Temsilî aşamada nesneler yerini çizime bırakır: basamak değeri kutuları, borç oku, sayı doğrusu üzerinde geriye atlama. Bu aşama, fiziksel deneyim ile sembol arasında köprü kurar. Soyut aşamada işlem yalnızca rakamlarla yürütülür; ancak semboller artık temellenmiş bir anlam taşımaktadır.

Dizinin çalışma belleğiyle bağı doğrudandır: somut ve görsel destekler bilgiyi zihnin dışında tutar. Blok masanın üzerinde, çizim kâğıttadır; öğrenci onları etkin biçimde tutmak zorunda değildir. Böylece çalışma belleği tutma yükünden kurtulup işlemeye ayrılabilir. Bu, yukarıda ele alınan "yükü dışsallaştırma" ilkesinin sistemli ve kademeli hâlidir.

Uygulamada iki tipik hata gözlenmektedir: soyut aşamaya erken atlamak ve somut aşamada gereğinden uzun kalmak. Aşamalar arasında geçiş ölçütü süre değil, bağımsız doğruluktur; öğrenci bir aşamada birbirini izleyen denemeleri kendi başına doğru yürütebiliyorsa bir sonraki aşamaya geçilir. Yaşa uygunluk kaygısı da sıklıkla dile getirilmektedir; yanıt, somut materyalin yaşa göre seçilmesidir: ortaokul düzeyinde blok yerine cetvel, ölçüm araçları, para ve gerçek veri kullanılabilir. İlke değişmez; materyal değişir.

Dizinin kanıt durumu olumludur; ancak kanıtın niteliği açıkça belirtilmelidir. Bouck et al. (2018) tarafından yürütülen kanıt sentezi, kalite göstergeleri ölçütüyle değerlendirdiği çalışmalar temelinde CRA'yı öğrenme güçlüğü alanında kanıta dayalı bir uygulama olarak nitelendirmektedir. Ebner et al. (2025) meta-analizi ise güçlü bir etki bildirmektedir (Tau-BC = .9965, %95 GA [.9947, .9983]).

Bu ikinci bulgunun okunmasında iki kayıt gereklidir. Birincisi, söz konusu sentez 30 tek-denekli desen (single-case design) çalışmasına dayanmaktadır; grup desenli, kontrol gruplu bir meta-analiz değildir. İkincisi, bildirilen etki büyüklüğü ölçeğin tavanına yakındır ve tek-denekli desen alanyazınının yayın yanlılığına açık olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla bu değer, CRA'nın etkililiğinin nicel bir kesinlik ölçüsü olarak değil, tutarlı bir olumlu örüntünün göstergesi olarak yorumlanmalıdır.

Bu kaydın açıkça düşülmesi, bölümün kendi yöntemsel duruşunun gereğidir. Çalışma belleği eğitimi programları, aktif kontrol grubu içeren tasarımlarda etkilerinin eridiği gerekçesiyle eleştirilmişti. Aynı ölçüt CRA'ya da uygulanmalıdır: CRA lehine en güçlü dayanak, tek bir tavan değeri değil, kanıta dayalı uygulama sentezi ile yaklaşımın bilişsel yük mekanizmasıyla kuramsal tutarlılığının birlikte oluşturduğu tablodur.

Çoklu Duyusal ve Teknoloji Destekli Yaklaşımlar

Çoklu duyusal öğretim, aynı kavramın görme, işitme, dokunma ve hareket kanalları üzerinden yaşatılmasını öngörür: sayıların kuma yazdırılması, yere çizilen bir sayı doğrusu üzerinde adımlanması gibi uygulamalar bu kapsamdadır. Yaklaşımın gerekçesi iki katmanlıdır. Birincisi, tek bir kanalın taşıyamadığı yükün kanallara dağıtılması; ikincisi, bellekte birden fazla erişim izinin oluşturulmasıdır.

Burada yaygın bir mitten kaçınılması gerekmektedir. Çoklu duyusal öğretimin gerekçesi "öğrenme stilleri" değildir; öğrencilerin görsel, işitsel ya da kinestetik öğrenenler olarak sınıflandırılıp yalnızca kendi stillerine uygun öğretim almasının etkili olduğu iddiası, bu iddiayı sınamak için gereken tasarımla yürütülmüş çalışmalarca desteklenmemektedir (Pashler et al., 2008). Doğru okuma şudur: çoklu kanal kullanımı bir stil eşleştirmesi değil, yük dağıtımı ve iz çoğaltma stratejisidir ve tüm öğrenciler için geçerlidir.

Teknoloji destekli yaklaşımlar açısından, çalışma belleği eğitimi tartışmasında ortaya konan ayrımın korunması gerekmektedir. İyi tasarlanmış bir uygulama üç işlevi yerine getirir: anında ve açıklayıcı geri bildirim verir, zorluk düzeyini öğrenciye uyarlar ve yinelemeyi oyunlaştırarak kaçınma davranışını azaltır. Türkiye alanyazınında Mutlu (2016), bilgisayar destekli öğretim materyallerinin matematik öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerin sayı algılama becerileri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Bir uygulamanın değerlendirilmesinde şu üç soru ölçüt olarak kullanılabilir: geri bildirim anında ve açıklayıcı mıdır; zorluk öğrenciye uyarlanmakta mıdır; ve doğrudan matematik içeriği mi öğretilmektedir, yoksa genel bir "beyin egzersizi" mi vaat edilmektedir? Üçüncü soru, uzak transfer tartışması ışığında belirleyici ayraçtır.

Sınıf Düzeyinde Strateji Seti

Yukarıdaki çerçevelerin sınıf pratiğine dönüşmüş hâli Tablo 4'te sunulmaktadır. Setin iki özelliği vurgulanmalıdır. Birincisi, stratejilerin hiçbiri ek bütçe gerektirmemektedir; bu, kaynak kısıtlı okullar açısından belirleyici bir üstünlüktür. İkincisi, stratejiler evrensel tasarım ilkesiyle tüm sınıfa uygulanabilir niteliktedir; dolayısıyla hiçbir öğrenciyi işaret etmeden ve etiketlemeden kullanılabilirler. Bu ikinci özellik, uygulamada öğretmen direncini belirgin biçimde azaltan bir çerçeveleme sunar: söz konusu olan "bir öğrenci için ek iş" değil, sınıfın tamamı için iyi öğretimdir.

Tablo 4. Çalışma belleğini destekleyen strateji seti

Strateji	Uygulama	Kuramsal gerekçesi
Görünür kıl	Ara adımları ve ara sonuçları yazdırmak; işlem basamaklarını tahtada görünür tutmak.	Tutma yükünün kâğıda devredilmesi (dışsallaştırma).
Parçala	Çok adımlı görevi numaralandırılmış alt adımlara bölmek ve her adımı işaretletmek.	Eşzamanlı tutulması gereken birim sayısının azaltılması.
Sesli düşün	İşlemi sesli modelleyerek uzman düşünme sürecini duyulur kılmak.	Fonolojik döngünün öz-düzenleme aracına dönüştürülmesi.
Somutla	Manipülatif, sayı doğrusu ve jeton kullanarak soyut sembolü temellendirmek.	Görsel-uzamsal desteğin sağlanması; CRA dizisinin somut aşaması.
Akıcılaştır	Temel aritmetik olguları kısa (5–10 dk) ve aralıklı pratikle otomatikleştirmek.	Alt işlemin kaynak tüketiminin ortadan kaldırılması.
Sadeleştir	Materyalden ilgisiz görselleri ve gereğinden uzun yönergeleri temizlemek.	Yabancı bilişsel yükün azaltılması (Sweller, 1988).
Ön-etkinleştir	Yeni konudan önce ilgili ön bilgiyi kısaca canlandırmak.	Uzun süreli bellekten şema çağrılarak yükün paylaştırılması.
Kaygıyı düşür	Zaman baskısını azaltmak, hatayı normalleştirmek, adım (kısmi) puanı vermek.	Kaygının işgal ettiği kapasitenin göreve iadesi.

Kaynak: Gathercole ve Alloway (2007), Sweller (1988) ve Friso-van den Bos et al. (2013) temel alınarak yazar tarafından düzenlenmiştir.

Kanıt Matrisi

Müdahaleler kanıt gücüne göre sıralandığında ortaya çıkan tablo Tablo 5'te özetlenmektedir. Sağ sütundaki "tek başına yetersiz" ifadesinin "zararlı" anlamına gelmediği özellikle vurgulanmalıdır. Sınıf içi uyarlamalar —ek süre, sadeleştirilmiş materyal, araç izni— son derece değerlidir; ancak öğrenmenin önünü açarlar, öğrenmenin kendisini sağlamazlar. Asıl kazanım, hedefe yakın ve doğrudan öğretimden gelmektedir. Zarar, bu uygulamaları tek başına çözüm sanıp sınırlı zamanı ve bütçeyi oraya yönlendirmekte ortaya çıkar.

Tablo 5. Müdahalelerin kanıt gücüne ve kanıt türüne göre değerlendirilmesi

Uygulama	Değerlendirme	Kanıtın türü
Bilişsel yükü azaltan sınıf içi uygulamalar (yedi ilke)	Desteklenmektedir	Kuram (Sweller) + sınıf araştırmalarına dayalı uygulama çerçevesi
Somut–temsilî–soyut (CRA) öğretim dizisi	Desteklenmektedir	Kanıta dayalı uygulama sentezi; ayrıca tek-denekli desen meta-analizi
Bellek desteği araçları (sayı doğrusu, kart)	Desteklenmektedir	Yük azaltma mekanizmasından türetilen uygulama uzlaşısı
Aritmetik olguların aralıklı pratikle akıcılaştırılması	Desteklenmektedir	Bilişsel kaynak kuramı + öğrenme ve bellek alanyazını
Hedefe yakın, doğrudan matematik öğretimi	Desteklenmektedir	Müdahale meta-analizleri; transfer mesafesi ilkesi
Genel "bellek egzersizi" programları	Tek başına yetersiz	Meta-analiz + RCT: uzak transfer kanıtı yok
Yalnızca ortam uyarlaması; doğrudan öğretim yürütmemek	Tek başına yetersiz	Uygulama çerçevelerinin kendi sınır kaydı
Kavramsal temeli olmayan yinelenen alıştırma	Tek başına yetersiz	Yanlış prosedürün pekişmesi riski
Tek teste dayalı değerlendirme; tanı beklenerek desteğin ertelenmesi	Tek başına yetersiz	Profil heterojenliği bulguları; erken destek gerekçesi

Kaynak: Melby-Lervåg et al. (2016), Dunning et al. (2013), Gathercole ve Alloway (2007) ile Ebner et al. (2025) temel alınarak düzenlenmiştir.

Bu matrisin uygulamacıya bıraktığı en kalıcı katkı, tek tek yöntemlerin listesi değil; yeni bir yöntemle karşılaşıldığında kullanılabilecek bir değerlendirme ölçütüdür. Üç soru yeterlidir: Yöntemin kanıtı nedir? Bir kontrol grubuyla karşılaştırılmış mıdır? Kazanım, eğitilen görevde değil gerçek beceride ölçülmüş müdür? Bu üç soru, "bilimsel" etiketiyle sunulan doğrulanmamış vaatlere karşı en güvenilir korumadır.

Okul Bağlamı: Bireyselleştirilmiş Eğitim Programı, Uyarlamalar ve Roller

Değerlendirme Uyarlamaları ve Görev Tasarımı

Sınıf düzeyindeki stratejilerin sürdürülebilir olması, kurumsal yapıya bağlanmalarına bağlıdır. Bireyselleştirilmiş Eğitim Programı (BEP) süreci, bu bağlanmanın temel aracıdır. Dört başlık öne çıkar.

- Değerlendirme uyarlaması: ek süre tanınması; soru sayısının azaltılıp hedefe yönelik hâle getirilmesi; çözüm adımlarının gösterilmesine kısmi (adım) puan verilmesi. Adım puanı, yolu doğru kurup son adımda hata yapan bir öğrencinin öğrenmesini görünür kılar; yalnızca sonuca bakan bir puanlama ise bu öğrenmeyi görmezden gelir.

- Araç izni: işlem sırasında çarpım kartı, formül kartı ve sayı doğrusu kullanımına izin verilmesi. Bu, akademik dürüstlüğe ilişkin bir ödün değil, çalışma belleği yükünü azaltan meşru bir uyarlamadır.

- Görev tasarımı: çok adımlı soruların bölünmesi, yönergenin sadeleştirilmesi, örnek çözümün öğrencinin görüş alanında tutulması.

- İş birliği: rehberlik servisi, sınıf öğretmeni, alan öğretmeni ve ailenin ortak ve tutarlı bir strateji dili kullanması.

Uyarlama ile müfredat değişikliği arasındaki ayrım sıklıkla karıştırılmaktadır. Ek süre, araç izni ve sadeleştirilmiş yönerge birer uyarlamadır; öğrenciden beklenen kazanımı düşürmez, yalnızca o kazanıma ulaşma yolunu erişilebilir kılar. Kazanımın kendisinin değiştirilmesi ise ayrı ve daha ağır bir karardır. Diskalkulili öğrencilerin çoğunun ihtiyacı, kazanımın düşürülmesi değil, yolun açılmasıdır.

Tutarlılığın kendisi de gizli bir yük azaltma stratejisidir. Ev, sınıf ve destek ortamı birbirinden farklı diller ve yöntemler kullandığında, öğrenci her ortama yeniden uyum sağlamak için ek bilişsel kaynak harcamak zorunda kalır. Ortak dil kurulduğunda bu kaynak öğrenmeye ayrılabilir hâle gelir.

Uygulama örneği: onluk bozmayı gerektiren çıkarma

Üçüncü sınıf öğrencisi olan bir çocuk, 52 − 27 işleminde onluk bozmayı sürekli unutmakta; kimi zaman her basamakta büyük rakamdan küçüğünü çıkararak 35 sonucuna ulaşmaktadır. Sözel olarak anlatıldığında işlemi kavramakta, ancak tek başına yürüttüğünde adımı kaybetmektedir.

Değerlendirme. Kavramın anlaşılmış olmasına karşın bağımsız yürütmede çökme, tipik bir tutma-ve-işleme tablosudur. Elde ve bozma bilgisi tutulurken eşzamanlı çıkarma yapılması merkezi yürütücüyü; basamakların hizalanması ve bozulan onluğun doğru sütunda tutulması görsel-uzamsal taslağı zorlamaktadır. “35” hatası ise dikkatsizlik değil, sistematik bir kestirmedir: “büyük rakamdan küçüğünü çıkar” alışkanlığının bastırılamaması, yani bir inhibisyon güçlüğüdür. Sistematik hatalar, rastlantısal hatalardan daha bilgilendiricidir; öğrencinin tam olarak nerede tıkandığını gösterirler.

Öğretim planı. Somut aşamada taban-10 blokları ya da bozuk parayla 52 kurulur, bir onluk fiziksel olarak bozulur ve 27 ayrılır. Temsilî aşamada aynı işlem basamak değeri kutuları ve borç oku ile çizdirilir; alternatif olarak sayı doğrusunda önce 20, sonra 7 geriye atlanır. Soyut aşamada işlem yalnızca rakamlarla yürütülür; ancak ara sonuç kutuları ve sütun renklendirmesi görünür tutulur ve öğrenci sesli düşünerek ilerler. Yük azaltma olarak bozma adımı görünür kılınır ve sayfada tek bir işlem bulundurulur. Otomatikleştirme hattında, bozma sırasında gereken alt işlemler — 10'a tümleme ve 10'dan çıkarma— kısa ve aralıklı pratikle akıcılaştırılır. Duyuşsal hatta ise zaman baskısı kaldırılır ve adım puanı verilir.

Kaçınılması gereken iki yanıt. "Daha çok soru çözsün" önerisi, yanlış prosedürü pekiştirdiği için işlevsizdir. "Dikkatini toplasın" önerisi ise hatalı bir okumaya dayanır; hata sistematiktir, dikkat dalgalanmasının ürünü değildir.

Rehberlik Hizmetlerinin Rolü

Okul psikolojik danışmanı ve rehber öğretmenin bu süreçteki rolü tanı koymak değildir; tanı, standart ölçme araçlarını ve dışlama ölçütlerini kullanan çok disiplinli bir ekip tarafından, Türkiye bağlamında Rehberlik ve Araştırma Merkezi ile gerektiğinde klinik birimler eliyle konulur. Buna karşılık dört rol doğrudan rehberlik hizmetlerine aittir.

- Fark etme: güçlüğü erken sezmek ve somut, tarihli gözlem notları tutmak. Gözlem notlarında yorum değil davranış kaydedilmelidir: "dikkatsizdi" yerine "üç adımlı yönergenin ikinci adımını atladı; bu hafta dört kez" gibi. Yorum tartışmaya açıktır; davranış kaydı ise yönlendirme ve BEP süreçlerinde doğrudan kullanılabilir.

- Ön değerlendirme ve yönlendirme: gözleme dayalı tarama araçlarının kullanılması ve gerektiğinde uzman birimlere yönlendirme. Alloway et al. (2009) tarafından geliştirilen Çalışma Belleği Derecelendirme Ölçeği, sınıf içi davranış örüntüsünün sistematik biçimde değerlendirilmesine olanak veren gözleme dayalı bir araç örneğidir.

- İş birliği: öğretmen, aile ve uzman birimler arasında ortak bir dil kurulmasını koordine etmek.

- Danışmanlık: özellikle matematik kaygısı ve akademik benlik algısı alanında hem öğrenciye hem aileye destek sunmak. Bu, mesleki formasyonun en doğrudan devreye girdiği alandır.

Düşük çalışma belleği kapasitesine sahip öğrencilerin sınıf içinde çoğunlukla uyumlu ve sessiz olmaları, fark edilmelerini geciktiren önemli bir etkendir. Davranış sorunu sergileyen öğrenci hızla görünür olurken, sessizce geride kalan öğrenci yıllarca gözden kaçabilmektedir. Bu nedenle proaktif gözlem, reaktif bir yönlendirme pratiğinden daha işlevseldir.

Aile ile İletişim

Aileyle kurulan iletişim, sürecin en kırılgan bileşenlerinden biridir. Üç ilke işlevseldir. Birincisi suçlamadan yaklaşmak: aileler çoğu zaman ya kendilerini ya çocuğu sorumlu tutmakta; güçlüğün nörogelişimsel temelli olduğunun aktarılması bu yükü hafifletmektedir. İkincisi güçlü yanları görünür kılmak: diskalkuli sayısal alanı etkiler, çocuğun genel yeterliğini değil. Üçüncüsü tutarlı bir dil kurmak: ev ve okulun aynı stratejileri kullanması, öğrenci açısından öngörülebilir ve güvenli bir ortam yaratır.

Ailenin süreci kabul etmekte zorlandığı durumlarda zorlayıcı bir tutum, çoğunlukla suçlama olarak algılanır ve iletişimi kapatır.

Güçlüklerin somut örneklerle ve yargısız biçimde paylaşılması, kapının açık bırakılması ve güven oluştukça sürecin yeniden ele alınması daha işlevsel bir yaklaşımdır.

Değerlendirmede Kullanılabilecek Bilgi Kaynakları

Bölüm boyunca yinelenen "çok boyutlu değerlendirme" çağrısının somut bir karşılığı olması gerekir. Uygulamacının elindeki bilgi kaynakları dört başlıkta toplanabilir.

- Sistematik gözlem. Sınıf içi davranış örüntüsünün yapılandırılmış biçimde kaydedilmesi. Alloway et al. (2009) tarafından geliştirilen Çalışma Belleği Derecelendirme Ölçeği, bu amaçla geliştirilmiş gözleme dayalı bir araç örneğidir.

- Bilişsel ölçüm. Sözel ve görsel-uzamsal çalışma belleğinin ayrı ayrı ölçülmesi; yalnızca depolamayı ölçen görevlerle (dizi ileri) tutma-ve-işlemeyi ölçen görevlerin (dizi geriye, karmaşık aralık görevleri) birlikte kullanılması. Tek bir görevin tek bir bileşeni temsil ettiği varsayımından kaçınılmalıdır.

- Alan-özgül ölçüm. Sayı hissi ve büyüklük temsilinin ayrıca değerlendirilmesi. Profil ayrımının yapılabilmesi, ancak bilişsel ölçüm ile alan-özgül ölçümün birlikte alınmasıyla mümkündür.

- Hata analizi. Öğrencinin ürettiği hataların sistematik mi rastlantısal mı olduğunun incelenmesi. Sistematik hatalar, standart puanların gösteremediği bir bilgiyi verir: güçlüğün tam olarak hangi işlem adımında oluştuğunu.

Türkiye bağlamında bu kaynakların önemli bir bölümü için ulusal norm çalışması ve ölçek uyarlaması ihtiyacı sürmektedir. Uygulamacının, kullandığı her aracın hangi popülasyonda

normlandığını ve hangi bileşeni ölçtüğünü bilerek karar vermesi; tek bir puana değil, kaynaklar arasındaki yakınsamaya bakması gerekir.

Ayırıcı Değerlendirme

Matematikte gözlenen düşük performans, tek bir tablonun göstergesi değildir. Farklı kaynaklardan beslenen güçlükler benzer bir yüzey görünümü üretebilir; ancak eğitsel yanıtları birbirinden belirgin biçimde ayrılır. Tablo 6, uygulamacının yönlendirme kararını desteklemek üzere temel ayrımları özetlemektedir.

Tablo 6. Matematik güçlüğünde ayırıcı değerlendirme çerçevesi

Tablo	Ayırt edici özellik	Pratik sınama
Gelişimsel diskalkuli	Sayı hissi ve hesaplamada çekirdek güçlük; diğer alanlar ve genel yetenek korunmuştur.	Uygun öğretime rağmen güçlüğün sürmesi; performansın tutarlı biçimde düşük olması.
Disleksi	Güçlük okuma temellidir; problem metni okunamadığı için matematik etkilenir. Sayı hissi sağlam olabilir.	Problem öğrenciye okunduğunda performansın belirgin biçimde düzelmesi.
DEHB	Dikkat ve dürtüsellik kaynaklıdır; bilgi mevcuttur ancak sürdürülemez, dikkatsizlik hataları görülür.	Performansın dalgalı olması; ilaç kullanımının belleğe dayalı becerileri düzeltirken temel sayı becerisini düzeltmemesi (Rubinsten et al., 2008).
Matematik kaygısı	Bilgi mevcuttur; kaygı anlık olarak çalışma belleğini bloke eder.	Baskısız, süresiz ve birebir ortamda performansın toparlanması.
Yetersiz öğretim / devamsızlık	Öğrenme fırsatı yeterince oluşmamıştır.	Uygun ve yoğunlaştırılmış öğretimle güçlüğün hızla kapanması (dışlama ölçütü).

Kaynak: Haberstroh ve Schulte-Körne (2019), von Aster ve Shalev (2007) ile Rubinsten et al. (2008) temel alınarak düzenlenmiştir.

Tablonun iki sınırı vurgulanmalıdır. Birincisi, bu kategoriler keskin sınırlarla ayrılmaz; birlikte görülmeleri kural dışı değil, olağandır. Bu nedenle ayırıcı değerlendirme, uygulamacının tanı koyması için değil, doğru yönlendirmeyi yapabilmesi için bir

çerçeve sunar. İkincisi, dışlama ölçütünün Türkiye bağlamında özel bir ağırlığı vardır: devamsızlık, sık öğretmen değişikliği ve salgın dönemine bağlı öğrenme kayıpları, diskalkuli görünümlü tablolar üretebilmektedir. Gerçek diskalkulinin uygun öğretime rağmen sürdüğü ölçütü, bu ayrımın anahtarıdır.

Uygulamada iki basit sınama, ayırt etmeye belirgin katkı sağlar. Problemin öğrenciye okunması, güçlüğün okuma temelli olup olmadığını hızla gösterir. Baskısız ve süresiz bir ortamda performansın toparlanıp toparlanmadığının gözlenmesi ise kaygı bileşeninin ağırlığını ortaya koyar.

Sınırlılıklar ve Araştırma Gündemi

Bu bölümde ortaya konan çerçevenin sınırlarının bildirilmesi, çerçeveye duyulan güveni azaltmaz; aksine, iddiaların hangi zeminde geçerli olduğunu belirginleştirir. Dört sınırlılık kaydedilmelidir.

- Tekil neden yoktur. Gelişimsel diskalkuli tek bir bilişsel eksiklikle açıklanamaz. Çalışma belleği önemli bir bileşendir; ancak açıklamanın tamamı değildir. Sayı temsili, dikkat kontrolü ve dil becerileri de tabloya katkıda bulunmaktadır.

- Nedensellik gösterilememiştir. Mevcut kanıtın büyük bölümü korelasyoneldir. Bölümde sunulan müdahale çıkarımları, bu sınır içinde okunmalıdır.

- Bireysel değişkenlik yüksektir. Profiller heterojendir; aynı strateji her öğrencide aynı sonucu vermez. Bölüm bir reçete değil, bir karar çerçevesi sunmaktadır.

- Ölçme kararları belirleyicidir. Kesme noktaları ve tanı ölçütleri araçtan araca ve bağlamdan

bağlama değişmektedir; yaygınlık ve grup farkı bulguları bu kararlara duyarlıdır.

Bu sınırlılıklar, ileri araştırmalar için bir gündem de önermektedir. Birincisi, aktif kontrol grubu içeren ve uzunlamasına izlem sağlayan tasarımlara ihtiyaç vardır; nedensellik sorusu ancak bu tür tasarımlarla ele alınabilir. İkincisi, profil temelli müdahale eşleştirmesi —hangi bilişsel profilin hangi öğretim dizisinden daha çok yararlandığı— sistematik biçimde sınanmayı beklemektedir. Üçüncüsü, epizodik tampon ile matematiksel problem çözme arasındaki ilişki, alanın en az incelenen kesişimlerinden biri olarak durmaktadır. Dördüncüsü, Türkiye bağlamında ölçme araçlarının uyarlanması, öğretmen ve öğretmen adaylarının farkındalık düzeyinin yükseltilmesi ve rehberlik hizmetlerinin bu süreçteki rolünün ampirik olarak incelenmesi öncelikli çalışma alanlarıdır.

Sonuç

Bu bölüm, gelişimsel diskalkulide çalışma belleğinin rolünü kanıt düzeyleri gözetilerek ele almış ve bu bilgiden türetilebilecek eğitsel çıkarımları tartışmıştır. Beş temel sonuç öne çıkmaktadır.

1. Güçlüğün önemli bir bölümü bir bilgi eksikliğinden değil, bir tutma-ve-işleme yükünden kaynaklanmaktadır. Öğrenci işlemi bilmiyor değildir; adımları eşzamanlı olarak tutamadığı için tamamlayamamaktadır. Bu ayrım, öğrencinin “tembel” ya da “dikkatsiz” olarak etiketlenmesini önleyen temel kavrayıştır.

2. Çalışma belleği, matematik öğrenmesinin merkezî bilişsel altyapısıdır. Ancak hangi bileşenin öne çıktığı, sorulan soruya bağlıdır: genel popülasyonda matematik başarısını en güçlü biçimde yordayan bileşen ile diskalkulide en belirgin biçimde zedelenen

bileşen aynı değildir. Her iki soruda da değişmeyen tek isim merkezi yürütücüdür.

3. Kapasiteyi doğrudan büyütmeyi hedefleyen genel bellek eğitimi programlarının akademik ölçütlere aktarımına ilişkin kanıt zayıftır. Buna karşılık bilişsel yükün yönetimi ve hedefe yakın doğrudan öğretim, daha güçlü bir kanıt tabanına sahiptir. Alanın mesajı umutsuzluk değil, hedef değişikliğidir.
4. Somut–temsilî–soyut öğretim dizisi ve bilginin dışsallaştırılması, kanıta dayalı ve maliyetsiz uygulamalardır. Bu uygulamalar yalnızca tanı almış öğrenciler için değil, evrensel tasarım ilkesiyle tüm sınıf için işlevseldir.
5. Odak etikette değil, ihtiyaçta olmalıdır. Bir öğrencinin raporunda hangi ifade yer alırsa alsın, uygulamacının sorusu değişmez: bu öğrenci şu anda hangi işi yapamamaktadır ve yük nereden azaltılabilir?

Bu sonuçların ortak zemini, ölçülü bir bilimsel duruştur. Bir uçta çalışma belleğini önemsizleştiren kayıtsızlık, diğer uçta belirli bir programın her sorunu çözeceğini vaat eden aşırı iyimserlik bulunmaktadır. İkisi de kanıtla desteklenmemektedir. Doğru konum ortadadır: çalışma belleğini ciddiye almak, yükü akıllıca yönetmek ve her kararı öğrencinin somut ihtiyacına göre uyarlamak.

Son olarak, alanın uygulamaya dönük en güçlü kaynağının pahalı bir program ya da özel bir cihaz olmadığı belirtilmelidir. Bilişsel yükün nerede ve neden oluştuğunu bilen; bunu görev tasarımına, değerlendirme kararlarına ve sınıf iklimine yansıtabilen bir eğitimci, bu alanda erişilebilir en etkili müdahale aracıdır.

Beyanlar

Destek beyanı. [Bu bölüm bir proje kapsamında üretildiyse proje numarası ve destekleyen kurum burada belirtilmelidir; değilse “Bu çalışma herhangi bir kurumdan destek almamıştır.” ifadesi kullanılır.]

Çıkar çatışması beyanı. Yazar, bu bölümün hazırlanmasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmadığını beyan eder.

Etik beyanı. Bu çalışma bir alanyazın derlemesidir; insan ya da hayvan katılımcı üzerinde veri toplanmamıştır. Dolayısıyla etik kurul onayı gerektiren bir uygulama içermemektedir.

Yapay zekâ kullanım beyanı. [Yayınevinin politikası gereğiyse, hazırlık sürecinde kullanılan araçlar burada belirtilmelidir.]

Bölümde kullanılan tablolar. Tabloların tamamı, belirtilen kaynaklar temel alınarak yazar tarafından düzenlenmiştir; hiçbiri özgün yayınlardan doğrudan alınmamıştır. Bu nedenle ayrıca izin gerektirmemektedir.

Kaynakça/References

Aksayli, N. D., Sala, G., & Gobet, F. (2019). The cognitive and academic benefits of Cogmed: A meta-analysis. *Educational Research Review, 27*, 229–243. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.04.003

Alloway, T. P., Gathercole, S. E., Kirkwood, H., & Elliott, J. (2009). The Working Memory Rating Scale: A classroom-based behavioral assessment of working memory. *Learning and Individual Differences*, *19*(2), 242–245. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.10.003

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed.). https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596

Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(2), 224–237. https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.224

Baddeley, A. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences, 4*(11), 417–423. https://doi.org/10.1016/S1364-6613(00)01538-2

Baddeley, A. D., & Hitch, G. (1974). Working memory. *Psychology of Learning and Motivation*, *8*, 47–89. https://doi.org/10.1016/S0079-7421(08)60452-1

Bouck, E. C., Satsangi, R., & Park, J. (2018). The concrete–representational–abstract approach for students with learning disabilities: An evidence-based practice synthesis. *Remedial and Special Education*, *39*(4), 211–228. https://doi.org/10.1177/0741932517721712

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences, 14*(12), 534–541. https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.007

Carey, E., Hill, F., Devine, A., & Szűcs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology, 6*, Article 1987. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01987

Cowan, N. (2001). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences, 24*(1), 87–114. https://doi.org/10.1017/S0140525X01003922

Dunning, D. L., Holmes, J., & Gathercole, S. E. (2013). Does working memory training lead to generalized improvements in children with low working memory? A randomized controlled trial. *Developmental Science, 16*(6), 915–925. https://doi.org/10.1111/desc.12068

Ebner, S., MacDonald, M. K., Grekov, P., & Aspiranti, K. B. (2025). A meta-analytic review of the concrete-representational-abstract math approach. *Learning Disabilities Research & Practice, 40*(1), 31–42. https://doi.org/10.1177/09388982241292299

Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H. G., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. H. (2013). Working memory and

mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational Research Review, 10*, 29–44. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.05.003

Gathercole, S. E., & Alloway, T. P. (2007). *Understanding working memory: A classroom guide*. Harcourt Assessment.

Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B., & Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology, 40*(2), 177–190. https://doi.org/10.1037/0012-1649.40.2.177

Haberstroh, S., & Schulte-Körne, G. (2019). The diagnosis and treatment of dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt International, 116*(7), 107–114. https://doi.org/10.3238/arztebl.2019.0107

Henry, L. (2012). *The development of working memory in children*. SAGE Publications.

Karagiannakis, G., & Cooreman, A. (2015). Focused MLD intervention based on the classification of MLD subtypes. S. Chinn (Ed.), *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 265–276). Routledge.

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., Henik, A., Jordan, N. C., Karmiloff-Smith, A. D., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R., & Nuerk, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology, 4*, Article 516. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516

Melby-Lervåg, M., Redick, T. S., & Hulme, C. (2016). Working memory training does not improve performance on measures of intelligence or other measures of “far transfer”:

Evidence from a meta-analytic review. *Perspectives on Psychological Science*, *11*(4), 512–534. https://doi.org/10.1177/1745691616635612

Menon, V. (2016). Working memory in children's math learning and its disruption in dyscalculia. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *10*, 125–132. https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.05.014

Mutlu, Y. (2016). *Bilgisayar destekli öğretim materyallerinin matematik öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerin sayı algılama becerileri üzerindeki etkilerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.

Pashler, H., McDaniel, M., Rohrer, D., & Bjork, R. (2008). Learning styles: Concepts and evidence. *Psychological Science in the Public Interest, 9*(3), 105–119. https://doi.org/10.1111/j.1539-6053.2009.01038.x

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., & Sun, C. (2016). A meta-analysis of mathematics and working memory: Moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. *Journal of Educational Psychology*, *108*(4), 455–473. https://doi.org/10.1037/edu0000079

Peng, P., Wang, C. C., & Namkung, J. (2018). Understanding the cognition related to mathematics difficulties: A meta-analysis on the cognitive deficit profiles and the bottleneck theory. *Review of Educational Research*, *88*(3), 434–476. https://doi.org/10.3102/0034654317753350

Price, G. R., & Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, causes, and treatments. *Numeracy*, *6*(1), Article 2. https://doi.org/10.5038/1936-4660.6.1.2

Rubinsten, O., Bedard, A.-C., & Tannock, R. (2008). Methylphenidate has differential effects on numerical abilities in ADHD children with and without co-morbid mathematical difficulties. *The Open Psychology Journal*, *1*, 11–17. https://doi.org/10.2174/1874350100801010011

Rubinsten, O., & Tannock, R. (2010). Mathematics anxiety in children with developmental dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, *6*, Article 46. https://doi.org/10.1186/1744-9081-6-46

Sala, G., & Gobet, F. (2020). Working memory training in typically developing children: A multilevel meta-analysis. *Psychonomic Bulletin & Review*, *27*(3), 423–434. https://doi.org/10.3758/s13423-019-01681-y

Sezer, S., & Akın, A. (2011). 6-14 yaş arasındaki öğrencilerde görülen diskalkuli üzerine öğretmen görüşleri. *İlköğretim Online*, *10*(2).

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*(2), 257–285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4

Szűcs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, *49*(10), 2674–2688. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.06.007

von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*(11), 868–873. https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x

Young, C. B., Wu, S. S., & Menon, V. (2012). The neurodevelopmental basis of math anxiety. *Psychological*

Science, *23*(5), 492–501. https://doi.org/10.1177/0956797611429134

Zhang, Y., Tolmie, A., & Gordon, R. (2023). The relationship between working memory and arithmetic in primary school children: A meta-analysis. *Brain Sciences*, *13*(1), Article 22. https://doi.org/10.3390/brainsci13010022

BÖLÜM 2

MATEMATİK KAYGISI MI, DİSKALKULİ Mİ? BENZERLİKLER VE AYIRT EDİCİ ÖZELLİKLER

İHSAN SÖYLEMEZ[1]

Giriş

Sınıf öğretmeninin gözlemi çoğu zaman aynıdır: çocuk matematik saatinde donuklaşır, parmak sayar, işlem sırasında kaybolur, sınavda boş bırakır. Gözlem doğrudur; ancak gözlemden yapılan çıkarım genellikle yanlıştır. Aynı davranışsal yüzey, köken, seyir ve müdahale gereksinimi bakımından belirgin biçimde ayrılan en az iki farklı durumdan kaynaklanabilir. Birincisi, sayısal büyüklüğü temsil etme ve işlemleme kapasitesindeki gelişimsel bir yetersizlik olan gelişimsel diskalkulidir. İkincisi, matematiksel bir görevle karşılaşıldığında ortaya çıkan olumsuz duygusal tepki örüntüsü olan matematik kaygısıdır.

Bu ayrımın pratik bedeli küçük değildir. Bilişsel kökenli bir güçlüğü kaygı olarak okuyan bir öğretmen, çocuğa “rahatla, yapabilirsin” diyerek sayı duyusu temelli yoğun öğretimi geciktirir; kaygı kökenli bir kaçınmayı diskalkuli olarak okuyan bir uzman ise çocuğu gereksiz biçimde tanı almış konumuna yerleştirir ve

[1] Dr., Muş Alparslan Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, ORCID: 0000-0002-1705-1395

öğrenilmiş çaresizliği pekiştirir. Her iki yanlış eşleştirme de zamanı, kaynağı ve çocuğun matematikle kurduğu ilişkiyi maliyetlendirir.

Alan yazın son on beş yılda bu ayrımı nicel olarak test edebilecek ölçekte veri üretmiştir. Devine ve arkadaşlarının 1.757 İngiliz öğrenci üzerinde yürüttüğü çalışma, sorunun cevabını beklenmedik bir yönde netleştirmiştir: gelişimsel diskalkuli tanı ölçütlerini karşılayan çocukların yüksek matematik kaygısı gösterme olasılığı tipik gelişim gösteren akranlarının yaklaşık iki katı olmakla birlikte, yüksek matematik kaygısı taşıyan çocukların %77'si normal ya da yüksek matematik performansı sergilemiştir (Devine vd., 2018). İki olgu istatistiksel olarak ilişkilidir ancak büyük ölçüde ayrışmaktadır. Bu bulgu, eğitim uygulamasında yerleşik olan "kaygı düşük başarının göstergesidir" varsayımını doğrudan çürütmektedir.

Bu bölümün amacı üç katmanlıdır. Birincisi, iki olgunun tanısal ve kuramsal sınırlarını güncel ölçütler ışığında netleştirmek. İkincisi, neden bu kadar sık karıştırıldıklarını — hangi bilişsel ve davranışsal zeminleri paylaştıklarını — mekanizma düzeyinde açıklamak. Üçüncüsü, uygulamacının kullanabileceği işlevsel ayırt edici ölçütler ile bunların sınırlılıklarını ortaya koymak.

Bölümün alan yazına özgün katkısı üçüncü amaçta yoğunlaşmaktadır. Matematik kaygısı ve diskalkuli üzerine yapılan derlemeler bu iki olguyu genellikle ayrı ayrı ele almakta, karşılaştırmalı çalışmalar ise tek bir bilişsel boyutla sınırlı kalmaktadır. Burada, çalışma belleğindeki çift ayrışma bulgusu (Mammarella vd., 2015) ile temel sayı işlemedeki farklılaşma bulguları (Maloney vd., 2010; Landerl vd., 2004) tek bir ayırt edici çerçevede birleştirilmekte ve bu çerçevenin sınanabilir öngörüleri açıkça formüle edilmektedir. Bölüm, kavramsal çerçeveden yaygınlık ve etki büyüklüğü verilerine, oradan kuramsal açıklamalara, ortak zemine, ayırt edici özelliklere ve nörobilişsel kanıtlara doğru ilerlemektedir.

Kavramsal ve Tanısal Çerçeve

Gelişimsel diskalkuli: tanım ve tanı ölçütleri

Gelişimsel diskalkuli terimi, ilk sistematik betimlemesinden bu yana yaklaşık yarım yüzyıldır kullanılmakta (Kosc, 1974) ancak tanımı üzerinde tam bir uzlaşma hâlâ sağlanabilmiş değildir. Egemen kuramsal çerçeve, bozukluğun özünde kümeleri ve onların sayısallıklarını (numerosity) anlamaya ilişkin çekirdek bir yetersizlik bulunduğunu öne sürer; bu yetersizlik ilkokul matematiğinin tüm bileşenlerinin altında yatan temel kapasiteyi zedeler (Butterworth, 2010; Butterworth vd., 2011). Butterworth'ün "sayı modülü" yaklaşımına göre diskalkuli, edinilmiş bir bilgi eksikliği değil, alana özgü doğuştan gelen bir işlemleme kapasitesindeki zayıflıktır.

Bu tekil-mekanizma yaklaşımı alanın tümü tarafından paylaşılmamaktadır. Kaufmann ve on üç meslektaşının kaleme aldığı uzlaşı metni, diskalkulinin sıklıkla — ancak yanlış biçimde — homojen bir bozukluk olarak ele alındığını belirtmekte ve bunun yerine bireysel farklılıkların davranışsal, bilişsel ve nöral kaynaklarını tanımlamaya odaklanan gelişimsel ve ayrımsal bir bakış açısı önermektedir (Kaufmann vd., 2013). Bu metin ayrıca bir çalışmada diskalkuli olarak ele alınan tablonun bir başkasında farklı bir matematiksel bozulma biçimi olarak kavramsallaştırılabildiğine dikkat çekmektedir.

Tanısal sınıflama sistemleri kuramsal iddiadan daha temkinli bir dil kullanır. DSM-5-TR, ayrı bir "diskalkuli" kategorisi tanımlamaz; bunun yerine Özgül Öğrenme Bozukluğu — matematik alanında bozulma ile tanısını kullanır ve dört ana ölçüt belirler: (a) uygun müdahalelere karşın en az altı ay süren akademik güçlük; (b) yaşa göre beklenenin belirgin biçimde altında, standart ölçümlerle nesnelleştirilmiş performans; (c) okul çağında başlangıç; (d) güçlüğün zihinsel yetersizlik, duyusal bozukluk, psikososyal

olumsuzluklar, yetersiz öğretim veya dil yeterliliği sorunlarıyla açıklanamaması (American Psychiatric Association, 2022). Bu tanı bir sayı duyusu ölçümü gerektirmez; performans temellidir. ICD-11 ise paralel bir yapı kullanarak Gelişimsel Öğrenme Bozukluğu — matematikte bozulma ile kategorisini tanımlar (World Health Organization, 2022).

Burada kritik bir gerilim vardır: kuramsal alan yazın diskalkuliyi mekanizma üzerinden tanımlarken, tanı sistemleri performans kesme noktası üzerinden tanımlamaktadır. Bu iki tanım aynı çocuk grubunu seçmez. Morsanyi ve arkadaşları (2018), 2.421 ilkokul öğrencisinden oluşan örneklemde DSM-5 ölçütlerini uyguladıklarında örneklemin %6'sının kalıcı ve ciddi matematik güçlüğü gösterdiğini, dışlama ölçütleri uygulandıktan sonra %5,7'sinin özgül öğrenme bozukluğu profiline uyduğunu bildirmişlerdir. Aynı örneklemde farklı bir kesme ölçütü kullanılsaydı oran belirgin biçimde değişecekti — bu, alan yazının en sık tekrarlanan metodolojik uyarısıdır.

Matematik kaygısı: tanım ve yapısal konumu

Matematik kaygısı, matematiksel içerikli durumlarla — sınav, ders, günlük yaşamda sayı kullanımı — karşılaşıldığında ortaya çıkan gerilim, endişe ve korku tepkisi olarak tanımlanır (Ashcraft, 2002). Ölçüm geleneği Richardson ve Suinn'in (1972) Matematik Kaygısı Derecelendirme Ölçeği ile başlamış; Dowker ve arkadaşlarının (2016) altmış yıllık alan yazını değerlendiren derlemesinde ayrıntılandırdığı üzere, yaşa ve bağlama uyarlanmış çok sayıda araca ayrılmıştır. Bu bölümde tartışılan çocuk çalışmalarının dayandığı iki temel araç, ilkokul ve ortaokul öğrencileri için geliştirilen değiştirilmiş kısaltılmış matematik kaygısı ölçeği (mAMAS; Carey vd., 2017) ile 7–9 yaş için geliştirilen erken matematik kaygısı ölçeğidir (Young vd., 2012 çalışmasında kullanılmıştır).

Matematik kaygısının kavramsal konumunu belirleyen üç ayrım vardır. Birincisi, durum–sürekli kaygı ayrımı: matematik kaygısı hem anlık bir durum tepkisi hem de görece kararlı bir eğilim olarak ölçülebilir; iki ölçüm türü farklı yordayıcı desenler üretir. İkincisi, alan özgüllüğü: matematik kaygısı genel kaygıdan ayrışan bir yapıdır. Hill ve arkadaşları (2016), ilkokul ve ortaokul öğrencilerinde genel kaygı kontrol edildikten sonra da matematik kaygısının ayrı bir yapı olarak varlığını sürdürdüğünü göstermiştir. Üçüncüsü, sınav kaygısından ayrım: Hembree'nin (1990) meta-analizinde matematik kaygısının sınav kaygısıyla ilişkisi r = ,52 olarak, genel kaygıyla ilişkisi ise r = ,35 olarak bildirilmiştir. İlişki güçlüdür ancak özdeşlik derecesinde değildir; matematik-kaygılı bireyler sınav dışı matematik durumlarında da tepki gösterirler.

Matematik kaygısı bir psikiyatrik tanı kategorisi değildir. Ne DSM-5-TR'de ne de ICD-11'de bağımsız bir bozukluk olarak yer alır. Bu, onun eğitsel önemini azaltmaz; ancak ayırıcı tanı tartışmasında iki olgunun ontolojik olarak farklı düzlemlerde bulunduğunu hatırlatır: biri tanısal bir bozukluk, diğeri boyutsal bir duygusal değişkendir. Bu asimetri, karşılaştırmalı çalışmaların yorumlanmasında sıklıkla gözden kaçar ve yaygınlık oranlarının karşılaştırılmasını doğrudan etkiler; bu nokta matematik kaygısının yaygınlığı ele alınırken yeniden ayrıntılandırılmaktadır. Cipora ve arkadaşları (2022), alanın bu konudaki temel açığını net biçimde ortaya koymaktadır: matematik kaygısı yaygınlığını tahmin etmek için üzerinde uzlaşılmış dışsal bir ölçüt bulunmamakta; öz-bildirim, nörofizyolojik ve bilişsel ölçümler arasındaki ilişkiler yapı geçerliği bakımından yeterince aydınlatılmamıştır.

Terminolojik kargaşa ve sonuçları

Alan yazında en az beş terim kısmen örtüşen ancak özdeş olmayan grupları tanımlamaktadır: gelişimsel diskalkuli, matematik öğrenme güçlüğü/bozukluğu, matematikte özgül öğrenme

bozukluğu, matematikte düşük başarı ve aritmetik güçlük. Bu terimler farklı kesme noktalarına (genellikle 5., 10., 16. veya 25. yüzdelik) ve farklı dışlama ölçütlerine karşılık gelir. Devine ve arkadaşlarının (2013) gösterdiği üzere, yalnızca tanı ölçütünü değiştirmek yaygınlık tahminini ve hatta cinsiyet oranını değiştirmektedir.

Terminolojik dağınıklığın altında kuramsal bir soru yatar: gözlenen heterojenlik, farklı mekanizmalara mı işaret eder? Rubinsten ve Henik (2009), heterojenliğin zorunlu olarak farklı mekanizmalar anlamına gelmediğini; tek bir çekirdek yetersizliğin gelişim boyunca farklı bilişsel bağlamlarla etkileşerek çeşitli klinik görünümler üretebileceğini savunmuşlardır. Bu görüş, Kaufmann ve arkadaşlarının (2013) ayrımsal yaklaşımıyla tam olarak uzlaşmaz; alan bu konuda hâlâ bölünmüştür.

Türkçe alan yazında ek bir katman bulunmaktadır: “matematik öğrenme güçlüğü” ifadesi hem klinik anlamda diskalkuliyi hem de eğitsel anlamda genel düşük başarıyı karşılayacak biçimde kullanılabilmektedir. Bu bölüm boyunca gelişimsel diskalkuli terimi, dışlama ölçütleri uygulanmış ve kalıcılığı gösterilmiş özgül matematik bozukluğu için; matematik güçlüğü terimi ise ölçüt uygulanmamış düşük başarı için ayrılmıştır.

Yaygınlık, Etki Büyüklükleri ve Eş-Görülüm

Gelişimsel diskalkulinin yaygınlığı

En sık aktarılan aralık %3–7’dir. Butterworth ve arkadaşları (2011) %5–7, Kucian ve von Aster (2015) %3–6 aralığını bildirmektedir. Morsanyi ve arkadaşlarının (2018) DSM-5 ölçütleriyle elde ettiği %5,7 oranı bu aralığın ortasına düşmektedir. Ancak Devine ve arkadaşları (2013), farklı tanı ölçütlerinin kullanıldığı çalışmalar bir araya getirildiğinde yaygınlık tahminlerinin %1,3 ile %10 arasında dağıldığını göstermiştir. Bu geniş dağılım, diskalkulinin nadir mi yoksa yaygın mı olduğu

sorusunun cevabının büyük ölçüde tanımın kendisinde saklı olduğunu ortaya koyar.

Matematik kaygısının yaygınlığı: karşılaştırılabilirlik sorunu

Matematik kaygısı için yaygınlık kavramı problemlidir; çünkü kaygı sürekli bir değişkendir ve "yüksek kaygı" tanımı keyfi bir kesme noktasına dayanır. Devine ve arkadaşları (2018), 1.757 İngiliz çocuktan oluşan örneklemlerinde ortalama puanı "orta düzey kaygı" eşiğinin üzerinde olan çocukların oranını %11 olarak bildirmiştir.

Bu oranın diskalkulinin %3–7'lik aralığıyla yan yana konulması yanıltıcı olur ve bölümde bilinçli olarak kaçınılan bir karşılaştırmadır. Üç neden vardır. Birincisi, %11 tek bir ülkede, tek bir ölçekle, tek bir kesme noktasıyla elde edilmiş bir orandır; diskalkuli aralığı ise çok sayıda çalışmanın sentezidir. İkincisi, daha katı kesme noktaları kullanıldığında "yüksek kaygılı" sayılan çocukların oranı belirgin biçimde düşmektedir; oran, seçilen eşikle birlikte değişmektedir. Üçüncüsü ve en temelde, tanısal bir kategorinin yaygınlığı ile boyutsal bir değişkenin belirli bir eşiğin üzerindeki oranı aynı türden nicelikler değildir (yukarıda matematik kaygısının yapısal konumu başlığında belirtildiği gibi). Bu nedenle iki oran, karşılaştırmalı özet tablosunda (Tablo 2) ayrı ayrı ve kaynak koşullarıyla birlikte verilmiştir.

Kaygı ile performans arasındaki ilişkinin büyüklüğü

Matematik kaygısı ile matematik performansı arasındaki ilişkinin varlığı tartışmalı değildir; tartışmalı olan büyüklüğü ve yönüdür. Otuz yılı aşan meta-analitik gelenek dikkate değer bir yakınsama sergilemektedir:

Tablo 1. Matematik kaygısı–matematik performansı ilişkisine dair meta-analitik bulgular

Çalışma	Kapsam	Bildirilen ilişki
Hembree (1990)	151 çalışma	r = −,27 (üniversite öncesi); r = −,31 (üniversite)
Ma (1999)	26 çalışma, ilk ve ortaöğretim	r = −,27
Namkung vd. (2019)	131 çalışma, 478 etki büyüklüğü	r = −,34 (ilkokul −,27; ortaokul −,36)
Zhang vd. (2019)	84 örneklem, N = 8.680	Negatif; bölgeye ve sınıf düzeyine göre değişken (Asya'da en güçlü, Avrupa'da en zayıf)
Barroso vd. (2021)	747 etki büyüklüğü (1992–2018 çalışmaları)	r = −,28; 3–5. sınıf r = −,20, %95 GA [−,25, −,14]; yaklaşık sayı sistemi görevlerinde r = −,09, %95 GA [−,18, ,005], anlamlı değil
Caviola vd. (2022)	N = 906.311	r = −,30; ileri matematik alanlarında −,31, temel sayısallıkta −,22

Not. Güven aralıkları yalnızca özgün çalışmalarda raporlandığı ölçüde aktarılmıştır; Hembree (1990) ve Ma (1999) aralık bildirmemektedir. Caviola ve arkadaşları (2022) nokta tahminlerini Monte Carlo dağılımlarının ortancası, aralıkları ise 2,5–97,5 yüzdelik değerleri olarak raporlamaktadır.

Bu tablodan üç çıkarım yapılabilir. Birincisi, ilişki tutarlı ancak küçük-orta düzeydedir; yaklaşık −,30 civarında yoğunlaşmaktadır. Bu, kaygının matematik performansındaki varyansın yaklaşık %9'unu açıkladığı anlamına gelir — önemli, ancak belirleyici olmaktan uzak bir oran. Kaygıyı düşük başarının başlıca açıklaması sayan yaygın görüş, bu veriyle bağdaşmaz.

İkincisi, ilişkinin yaşla birlikte güçlendiği yönünde işaretler vardır; ancak bulgular tutarlı değildir. Namkung ve arkadaşlarının (2019) alt grup katsayıları ilkokuldan ortaokula −,27'den −,36'ya yükselmekle birlikte, sınıf düzeyi bu meta-analizde anlamlı bir düzenleyici olarak bulunmamıştır. Buna karşılık Zhang ve arkadaşları (2019) ilişkiyi en zayıf ilkokul, en güçlü lise gruplarında raporlamış; Hill ve arkadaşları (2016) da kaygı–performans bağının eğitim çizgisinde daha geç belirginleştiğini göstermiştir. Caviola ve

arkadaşları (2022) ise ters yönde, çocuklarda yetişkinlerden daha güçlü bir ilişki bildirmektedir. Dolayısıyla gelişimsel örüntü açık uçlu bir sorudur; erken müdahale gerekçesi bu tartışmadan değil, kaygının erken ilkokulda ölçülebilir hâle gelmesinden türetilmelidir.

Üçüncüsü — ve bu bölüm açısından en önemlisi — Barroso ve arkadaşlarının (2021) iki bulgusu beklenenin tersi yöndedir ve ayırıcı tanıyla doğrudan ilgilidir.

1. İlişki, düşük matematik yeteneğine sahip örneklemlerde daha güçlü değil, daha zayıftır. Temel matematik becerileri zayıf olan bireylerde kaygı ile başarı arasındaki bağ, yüksek performans gösterenlerdekine kıyasla gevşemektedir.
2. Daha da çarpıcı olanı, ilişkinin yaklaşık sayı sistemini ölçen görevlerde anlamlı çıkmamasıdır ($r = -,09$; %95 GA [−,18, ,005]; $p = ,06$). Barroso ve arkadaşlarının incelediği tüm düzenleyici alt gruplar içinde anlamlı olmayan tek alt grup budur.

İkinci bulgunun kuramsal ağırlığı büyüktür. Yaklaşık sayı sistemi, aşağıda çekirdek sayı duyusu yetersizliği hipotezinde görüleceği üzere diskalkulinin çekirdek yetersizlik adayıdır. Matematik kaygısının tam olarak bu düzeyde ölçülebilir bir etki üretmemesi, kaygının sayısal çekirdeğe dokunmadığı yorumunu desteklemekte ve bölümün ayırt edici çerçevesine meta-analitik bir dayanak sağlamaktadır. Bulgunun sınırlılığı, bu alt grubun görece az sayıda çalışmaya dayanması ve güven aralığının sıfıra çok yakın bir üst sınırla kapanmasıdır; kesin bir “etki yok” iddiası değil, “etki gösterilememiştir” saptamasıdır.

Cinsiyet farklılıkları

Matematik kaygısında cinsiyet farkı görece tutarlıdır: Hembree (1990) kadınların daha yüksek düzey bildirdiğini, ancak

kaygı ile düşük performans arasındaki bağın üniversite öncesi erkeklerde daha güçlü olduğunu rapor etmiştir. Hill ve arkadaşları (2016) hem ilkokul hem ortaokul düzeyinde kızların daha yüksek matematik kaygısı bildirdiğini göstermiştir. Devine ve arkadaşları (2012) ise bu farkın ölçüm koşuluna duyarlı olduğunu ortaya koymuştur: sınav kaygısı kontrol edildiğinde tablo değişmektedir. Caviola ve arkadaşlarının (2022) 906.311 katılımcılık meta-analizinde ise cinsiyet farkı bulunmamıştır — bu, farkın örneklem ve ölçüm bağımlı olduğunu düşündürür.

Diskalkulide tablo farklıdır. Morsanyi ve arkadaşları (2018), kalıcı matematik güçlüğünün erkek ve kızlarda eşit sıklıkta görüldüğünü bildirmiştir. Devine ve arkadaşları (2013) daha inceltilmiş bir sonuca ulaşmıştır: diskalkulide cinsiyet farkının varlığı, kullanılan tanı ölçütüne bağlıdır. Bu, alan yazındaki çelişkili cinsiyet bulgularının önemli bir bölümünü açıklamaktadır.

İki bulgunun birlikte okunması ilgi çekicidir: kızlar diskalkuliye daha yatkın olmadıkları hâlde matematik kaygısını daha yoğun bildirmektedirler. Bu asimetri, kaygının bilişsel yetersizlikten bağımsız kaynakları olabileceğini düşündürmektedir; ancak mevcut veriler kesitseldir ve nedensel bir yorumu desteklemez.

Eş-görülüm

Bu sorunun en doğrudan cevabı Devine ve arkadaşlarının (2018) çalışmasından gelmektedir:

- Diskalkuli tanı ölçütlerini karşılayan çocukların yüksek matematik kaygısı gösterme olasılığı, tipik matematik performansı gösteren akranlarının yaklaşık iki katıdır; diskalkulili çocukların yaklaşık beşte biri aynı zamanda yüksek matematik kaygısı taşımaktadır.

- Buna karşılık, yüksek matematik kaygısı taşıyan çocukların %77'si normal ya da yüksek matematik performansı sergilemektedir.
- Eş-görülüm kızlarda erkeklerden daha sıktır.

Birinci ve ikinci bulgunun birlikte değerlendirilmesi bölümün merkezî tezini oluşturur: ilişki asimetriktir. Diskalkuli kaygı riskini artırmaktadır; ancak kaygı, diskalkulinin göstergesi değildir. Uygulamada bu, "kaygılı görünen çocuk için diskalkuli değerlendirmesi" refleksinin çoğunlukla yanlış pozitif üreteceği anlamına gelir.

Diskalkulinin diğer nörogelişimsel bozukluklarla eş-görülümü de yüksektir. Morsanyi ve arkadaşları (2018), matematikte özgül öğrenme bozukluğu profili gösteren çocuklarda okuma güçlüğünün (%5,6) ve dil güçlüklerinin (%11,5) yanı sıra sosyal-duygusal-davranışsal güçlüklerin, otizmin ve dikkat eksikliği hiperaktivite bozukluğunun anlamlı biçimde daha sık görüldüğünü bildirmiştir. Bu, "saf" diskalkuli vakalarının klinikte azınlıkta olduğunu ve ayırıcı tanının yalnızca kaygıyı değil tüm nörogelişimsel spektrumu kapsaması gerektiğini gösterir.

Türkiye verileri

Türkiye'de matematik alanına özgü, DSM ölçütleri uygulanmış ve dışlama kriterleri denetlenmiş epidemiyolojik bir diskalkuli çalışması henüz mevcut değildir. En yakın veri, Görker ve arkadaşlarının (2017) Edirne il merkezinde 2. 3. ve 4. sınıf düzeyindeki 2.174 çocukla yürüttüğü tarama çalışmasıdır. Öğretmen ve ebeveyn kontrol listeleri kullanılarak elde edilen olası özgül öğrenme bozukluğu yaygınlığı %13,6 (erkeklerde %17, kızlarda %10,4); matematik alanındaki bozulma oranı ise %6,5 olarak bildirilmiştir. Bu oran uluslararası %3–7 aralığıyla uyumludur.

Ancak yöntemsel farkın altı çizilmelidir: Görker ve arkadaşlarının çalışması standart başarı testine ve klinik değerlendirmeye değil, kontrol listelerine dayanan bir olası yaygınlık tahminidir. Bu nedenle Morsanyi ve arkadaşlarının (2018) DSM-5 temelli %5,7'lik oranıyla doğrudan karşılaştırılmamalıdır. İki oranın birbirine yakın çıkması dikkat çekici olsa da, yöntemsel eşdeğerlik anlamına gelmez.

Kaygı–başarı ilişkisi bakımından Türkiye verisi uluslararası tablodan ayrışmaktadır. Mutlu (2019), 288 üçüncü sınıf öğrencisiyle yürüttüğü çalışmada matematik kaygısı ile matematik başarısı arasında r = −,597 gibi belirgin biçimde güçlü bir ilişki bulmuştur. Bu katsayı, Tablo 1'deki meta-analitik değerlerin yaklaşık iki katıdır ve ölçme aracı ile örneklem özelliklerinden kaynaklanıyor olabilir; ancak Türkiye bağlamında kaygı–başarı bağının uluslararası ortalamadan daha sıkı olabileceği ihtimalini gündeme getirmektedir ve doğrulanmayı beklemektedir.

Aynı çalışmanın ikinci bulgusu ayırıcı tanı açısından daha da doğrudan ilgilidir: matematik öğrenme güçlüğü grubundaki öğrencilerin kaygı düzeyi, düşük başarılı öğrencilerin kaygı düzeyinden anlamlı biçimde farklı çıkmamıştır (Mutlu, 2019). Bu, kaygı düzeyinin tek başına diskalkuli ile genel düşük başarıyı ayırt edemeyeceğini gösteren doğrudan bir ulusal kanıttır ve ayırt edici özellikler başlığındaki çok ölçütlü yaklaşımın gerekçesini güçlendirir.

Kuramsal Açıklamalar

Gelişimsel diskalkuliye ilişkin kuramlar

(a) Çekirdek sayı duyusu yetersizliği hipotezi. Bu görüşe göre diskalkuli, nicelikleri yaklaşık olarak temsil eden sistemdeki bir bozukluktan kaynaklanır (Butterworth, 2010). Piazza ve arkadaşları (2010), diskalkulili çocuklarda sayı keskinliğinin gelişimsel yörüngesinin ciddi biçimde bozulduğunu; on yaşındaki diskalkulili

bir çocuğun keskinliğinin tipik gelişen beş yaşındaki bir çocuğunkine yaklaştığını göstermiştir. Landerl ve arkadaşları (2004), yalnızca diskalkuli tanısı alan 8–9 yaşındaki çocukların, ortalamanın üzerindeki zekâ, sözcük dağarcığı ve çalışma belleği puanlarına karşın temel sayı işleme görevlerinde bozulma gösterdiğini bildirmiştir. Bu bulgu, alana özgü bir yetersizlik lehine güçlü bir kanıttır.

(b) Erişim yetersizliği hipotezi. Rousselle ve Noël (2007), 45 matematik öğrenme güçlüğü olan çocuğu 45 tipik gelişen akranıyla karşılaştırdıklarında, güçlük yaşayan çocukların yalnızca sembolik büyüklük karşılaştırmasında (Arap rakamları) bozulma gösterdiğini, sembolik olmayan karşılaştırmada (nokta kümeleri) ise bozulma göstermediğini bulmuşlardır. Bu sonuç, sorunun niceliği temsil etmede değil, sembolden niceliğe erişimde olduğunu öne süren erişim yetersizliği hipotezini doğurmuştur.

İki hipotez arasındaki tartışma, tipik gelişim verileri üzerinden yürütülen meta-analitik kanıtlarla kısmen çözülmüştür. Schneider ve arkadaşları (2017), sembolik ve sembolik olmayan büyüklük işlemlemesinin matematik yetkinliğiyle ilişkisini inceledikleri meta-analizde, sembolik işlemlemenin matematik başarısıyla anlamlı biçimde daha güçlü ilişkili olduğunu göstermişlerdir. Bu, erişim yetersizliği hipotezini dolaylı olarak destekler. Ancak diskalkuli örneklemlerinde bulguların örneklem şiddetine ve görev parametrelerine duyarlı kaldığı unutulmamalıdır; şiddetli vakalarda her iki sistemde de bozulma bildiren çalışmalar mevcuttur.

(c) Alana özgü olmayan bilişsel açıklamalar. Szűcs ve arkadaşları (2013), egemen büyüklük-temsili kuramını bir dizi alternatifle sistematik olarak karşılaştırdıkları çalışmalarında, diskalkulinin en güçlü şekilde görsel-uzamsal bellek ve ket vurma (inhibition) bozukluğuyla ilişkili olduğunu; büyüklük temsili göstergelerinin ise ayırt edici olmadığını bulmuşlardır. Bu çalışma,

diskalkuliyi tek bir çekirdek yetersizliğe indirgeyen açıklamalara yöneltilen en sık atıf yapılan itirazdır.

Bu itiraz, terminolojik kargaşa başlığında değinilen heterojenlik tartışmasıyla doğrudan bağlantılıdır. Rubinsten ve Henik (2009) çeşitliliğin tek bir mekanizmadan doğabileceğini savunurken, Kaufmann ve arkadaşları (2013) birden çok, gerçekten sayısal nitelikte eksikliğin — büyüklük temsili, sözel sayı temsilleri, aritmetik olgu bilgisi, görsel-uzamsal sayı biçimleri, sıralılık — ayrı ayrı etkilenebileceğini öne sürmektedir. Alan bu konuda uzlaşmış değildir ve bu, ayırt edici ölçüt geliştirme çabasının önündeki temel engellerden biridir.

(d) Dört basamaklı gelişimsel model. von Aster ve Shalev (2007) yukarıdaki tartışmayı gelişimsel bir çerçeveye oturtur. Modele göre: (1) niceliğin çekirdek temsili "sayı" kavramının anlamını sağlar; (2) bu temel, dilsel sayı sembollerinin edinimini mümkün kılar; (3) ardından Arap rakamı sembolleri edinilir; (4) gelişen çalışma belleği, okul yıllarında genişleyen bir zihinsel sayı doğrusunun oluşumunu destekler. Modelin ayırt edici gücü, farklı basamaklardaki aksamaların farklı diskalkuli profilleri üreteceğini öngörmesidir; bu da klinikteki heterojenliği kuramsal olarak açıklar ve (c)'deki itirazla kısmen uzlaşır.

Şekil 1. von Aster ve Shalev'in (2007) dört basamaklı gelişim modeli



Kaynak: von Aster ve Shalev (2007) modelinden uyarlanmıştır.

Matematik kaygısına ilişkin kuramlar

(a) İşlem Etkinliği Kuramı ve Dikkat Kontrol Kuramı. Eysenck ve arkadaşlarının (2007) Dikkat Kontrol Kuramı, kaygının bilişsel performansa etkisini açıklayan en yaygın çerçevedir. Kuram iki temel ayrım yapar: performans etkililiği (çıktının niteliği) ile işlem etkinliği (çıktı ile harcanan bilişsel kaynak arasındaki oran). Kaygı, etkinliği etkililikten daha fazla bozar; birey doğru sonuca ulaşabilir ancak bunun için orantısız kaynak harcar. Kuram ayrıca kaygının çalışma belleğinin merkezî yönetici bileşenini, özellikle ket vurma ve geçiş yapma işlevlerini zedelediğini öne sürer. Bu öngörü, ilerleyen kısımda sınanabilir bir ayırt edici ölçüte dönüştürülecektir.

(b) Çalışma belleği işgali. Ashcraft ve Kirk'in (2001) klasik çalışması bu mekanizmanın deneysel kanıtını sunar. Yüksek matematik kaygılı bireyler, özellikle hesaplama temelli ölçümlerde daha küçük çalışma belleği kapasitesi göstermiş; bu daralma, bellek yükü altında yapılan zihinden toplama işlemlerinde tepki süresi ve hata oranlarında belirgin artışa yol açmıştır. Yazarların yorumu açıktır: matematik kaygısı çevrimiçi performansı geçici bir çalışma belleği kesintisi yoluyla bozmaktadır. Buradaki "geçici" niteleyicisi, diskalkuliden ayrışmanın kilit noktasıdır.

(c) Kaçınma modeli. Kaygı, matematikle karşılaşmayı azaltır; azalan karşılaşma pratiği düşürür; düşük pratik performansı düşürür; düşük performans kaygıyı besler. Maloney ve Beilock (2012), bu döngünün yalnızca bireysel değil kuşaklararası ve kurumsal bileşenleri olduğunu vurgulamakta; kaygının kaynakları arasında düşük düzeyli sayısal işlemleme farklılıklarının yanı sıra öğretmen ve ebeveyn tutumlarının da bulunduğunu belirtmektedir. Bu model, kaygının uzun vadeli etkisinin çevrimiçi bellek işgalinden değil, biriken öğrenme fırsatı kaybından kaynaklandığını öne sürer — ve Namkung ve arkadaşlarının (2019) gelişimsel bulgularıyla tutarlıdır.

(d) Yön tartışması ve karşılıklı nedensellik. Carey ve arkadaşları (2016) iki rakip açıklamayı sistematik olarak karşılaştırmıştır: Yetersizlik Kuramı (düşük performans kaygıyı doğurur) ve Zayıflatıcı Kaygı Modeli (kaygı performansı düşürür). Yazarlara göre kanıtlar çelişkilidir: boylamsal çalışmalar ve öğrenme güçlüğü olan çocuklarla yapılan araştırmalar Yetersizlik Kuramını desteklerken, kaygı düzeyini deneysel olarak değiştiren çalışmalar Zayıflatıcı Kaygı Modelini desteklemektedir. Bu karışık tablo yazarları Karşılıklı Kurama yöneltmiştir. Namkung ve arkadaşlarının (2019) meta-analizi de bu yorumu destekler; kaygıdan performansa ve performanstan kaygıya doğru boylamsal ilişkilerin benzer güçte olduğu bulunmuştur.

Ma (1999) ve Hembree (1990) meta-analizlerinin ilişkinin cinsiyet, sınıf düzeyi ve ölçme aracı gruplarında tutarlı çıkması, bu döngünün belirli alt gruplara özgü bir olgu değil, genel bir örüntü olduğunu göstermektedir.

Ortak Zemin: Neden Bu Kadar Sık Karıştırılıyorlar?

İki olgunun uygulamada ayrıştırılamamasının rastlantısal olmadığı, en az beş ortak zeminden anlaşılabilir.

Birincisi, davranışsal yüzey aynıdır. Her iki durumda da çocuk yavaş çalışır, parmak sayar, olgusal bilgiye başvurmak yerine sayarak hesaplar, sınavda soruları atlar. Gözlemsel veri tek başına ayrım yapmaya yetmez. Mutlu’nun (2019) Türkiye örneklemindeki bulgusu — matematik öğrenme güçlüğü grubunun kaygı düzeyinin düşük başarılı gruptan farklı çıkmaması — bu yüzey benzerliğinin ölçme düzeyinde de sürdüğünü göstermektedir.

İkincisi, her iki durum da çalışma belleğiyle ilişkilidir — ancak farklı yollarla. Diskalkulide çalışma belleği zayıflığı, matematiksel gelişimin bir önkoşulundaki yetersizliği yansıtır (Szűcs vd., 2013; von Aster & Shalev, 2007); kaygıda ise çalışma belleği kaynakları endişe içerikli düşünceler tarafından anlık olarak

işgal edilir (Ashcraft & Kirk, 2001; Eysenck vd., 2007). Yüzeyde her iki çocuk da “aklında tutamıyor” görünür. Bu iki yolun ayrıştırılabilir olduğunu gösteren ampirik kanıt, çalışma belleğinde çift ayrışma başlığında ayrıntılandırılmıştır.

Üçüncüsü, ölçme araçları çoğunlukla ayırt edici değildir. Standart bir matematik başarı testi, düşük puanın kaynağını değil yalnızca varlığını gösterir. Yüksek kaygılı bir çocuk, zaman baskılı bir testte diskalkulili bir çocukla neredeyse özdeş bir puan profili üretebilir.

Dördüncüsü, kaçınma davranışı ortaktır. Diskalkulili çocuk başarısızlık deneyimini azaltmak için, kaygılı çocuk duygusal rahatsızlığı azaltmak için kaçınır. Sonuç aynı davranıştır.

Beşincisi ve belki en önemlisi, ikisi gerçekten birbirini üretebilir. Rubinsten ve Tannock (2010), duygusal hazırlama görevi kullanarak diskalkulili çocuklarda örtük matematik kaygısının varlığını göstermiştir; matematikle ilişkili sözcükler, bu çocuklarda özellikle toplama ve çarpma işlemlerinde kaygılı bir etki üretmiştir. Bu bulgu, diskalkulinin zamanla ikincil bir duygusal tepki geliştirdiği yorumunu destekler.

Rubinsten ve Tannock’un örneklemi küçüktür (12 diskalkulili, 11 tipik gelişen çocuk) ve tek başına genelleme taşımaz. Bulgu daha sonra aynı paradigmayla yinelenmiştir: Kucian ve arkadaşları (2018b), diskalkulisi olan ve olmayan çocuklarda matematiksel performans, matematik kaygısı ve duygusal hazırlama arasındaki ilişkiyi inceleyerek bu hattı genişletmiştir. Lai ve arkadaşları (2015) ise 224 çocukla yürüttükleri çalışmada matematik kaygısının sözel problem çözme performansı üzerindeki etkisinin matematik öğrenme güçlüğü olan ve olmayan gruplarda farklılaştığını göstermiştir.

Bu birikim iki şey söyler: kaygının öz-bildirim ölçekleriyle yakalanamadığı vakalarda örtük ölçümler farkı ortaya çıkarabilir; ve

diskalkulili çocuklarda duygusal bileşen, öz-bildirim ölçekleri "normal" gösterse bile mevcut olabilir.

Bu ortak zeminler ayrımı zorlaştırır; ancak imkânsız kılmaz.

Ayırt Edici Özellikler

Bu kısım bölümün çekirdeğidir. Aşağıdaki ölçütlerin hiçbiri tek başına tanı koydurucu değildir; birlikte değerlendirildiklerinde ayırt edici bir profil oluştururlar.

Çalışma belleğinde çift ayrışma

Ayırt edici kanıtın en güçlü örneği Mammarella ve arkadaşlarının (2015) çalışmasıdır. Araştırmacılar, gelişimsel diskalkulisi olan, yüksek matematik kaygısı taşıyan ve tipik gelişen çocukları — okuduğunu anlama, zekâ ve genel kaygı bakımından eşleştirerek — sözel ve görsel-uzamsal kısa süreli bellek ile çalışma belleği görevlerinde karşılaştırmıştır. Sonuç bir çift ayrışmadır: diskalkulili çocuklar sözel görevlerde bozulma göstermezken görsel-uzamsal çalışma belleği görevinde özgül bir bozulma sergilemiş; buna karşılık yüksek kaygılı çocuklar özellikle sözel çalışma belleği görevinde bozulmuştur.

Bu bulgu, iki olgunun "aynı çalışma belleği sorununun iki yüzü" olmadığını göstermesi bakımından belirleyicidir. Tabloyu karmaşıklaştıran bir ayrıntı da vardır: Ramirez ve arkadaşları (2013), erken ilkokulda kaygı ile başarı arasındaki olumsuz ilişkinin yalnızca çalışma belleği yüksek olan çocuklarda ortaya çıktığını bulmuştur. Aynı ekip bu örüntüyü strateji kullanımıyla açıklamıştır: yüksek kaygılı çocuklar gelişmiş çözüm stratejilerine daha az başvurmaktadır (Ramirez vd., 2016). Dolayısıyla kaygının çalışma belleğini işgal etmesi, kaynağı bol olan çocukları göreli olarak daha fazla etkilemektedir. Sözel çalışma belleğindeki bozulma, kaygı kuramlarının öngördüğü endişe kaynaklı iç konuşma işgaliyle tutarlıdır; görsel-uzamsal bozulma ise sayısal büyüklüğün uzamsal

temsiliyle ve Szűcs ve arkadaşlarının (2013) diskalkuli bulgularıyla örtüşür.

Çalışma belleğinin bu ilişkideki aracı rolü meta-analitik düzeyde de desteklenmektedir: Finell ve arkadaşları (2022), matematik kaygısı ile matematik performansı arasındaki ilişkide çalışma belleğinin aracılık ettiğini göstermiştir. Ancak bu meta-analiz diskalkuli ile kaygıyı ayrıştırmamakta; yalnızca kaygı tarafının mekanizmasını aydınlatmaktadır.

Çift ayrışma bulgusunun sınırlılığı, tek bir çalışmadan gelmesi ve bağımsız örneklemlerde henüz yeterince yinelenmemiş olmasıdır. Ayrıca gruplar genel kaygı bakımından eşleştirilmiş olsa da, örneklem büyüklükleri klinik grup çalışmaları için tipik biçimde mütevazıdır. Çift ayrışmanın bağımsız örneklemlerde yinelenmesi, bu bölümün önerdiği çerçevenin en öncelikli sınama gereksinimidir.

Temel sayı işleme

Diskalkulinin ayırt edici imzası, aritmetik öncesi düzeyde — hesaplama gerektirmeyen görevlerde — ortaya çıkar. Landerl ve arkadaşlarının (2004) çalışması bu bozulmanın zekâ ve çalışma belleği kontrol edildikten sonra bile sürdüğünü; Piazza ve arkadaşları (2010) ise sayı keskinliğindeki bozulmanın şiddetini gelişimsel gecikme olarak nicelendirmiştir.

Matematik kaygısında tablo daha tartışmalıdır. Maloney ve arkadaşları (2011), yüksek kaygılı bireylerde sayısal uzaklık etkisinin daha büyük olduğunu, yani sayısal büyüklük temsillerinin daha az keskin göründüğünü bulmuştur. Ancak aynı ekibin daha önceki bir çalışması (Maloney vd., 2010), kaygının sayma performansını etkilerken subitizing (küçük sayıları anlık algılama) performansını etkilemediğini göstermiştir. Bu ayrım kritiktir: subitizing en temel ve en otomatik sayısal kapasitedir ve yüksek kaygıdan korunmuş görünmektedir.

Buradan sınanabilir bir hipotez türetilebilir: eğer subitizing kaygıdan etkilenmiyor ancak diskalkulide etkileniyorsa, subitizing performansı iki olgu arasında özgül bir ayırt edici gösterge işlevi görebilir. Hipotezin ilk yarısı doğrudan kanıtlanmıştır (Maloney vd., 2010). İkinci yarısı ise doğrudan sınanmamıştır: Landerl ve arkadaşlarının (2004) çalışması diskalkulili çocukların nokta sayma görevlerinde bozulma gösterdiğini ortaya koymakta, ancak subitizing aralığı ile sayma aralığını bu bölümün gerektirdiği kesinlikte ayrıştırmamaktadır. Dolayısıyla önerilen gösterge, mevcut hâliyle bir araştırma hipotezidir, doğrulanmış bir ayırt edici araç değildir. İki grubu aynı subitizing paradigmasında doğrudan karşılaştıran bir çalışma, bu bölümün gelecek araştırma gündemine ilk sırada girmektedir.

Duygusal yükün kaldırılmasına duyarlılık: kuramsal olarak türetilmiş bir öngörü

Dikkat Kontrol Kuramının (Eysenck vd., 2007) etkililik/etkinlik ayrımı ile Ashcraft ve Kirk'in (2001) "geçici kesinti" kavramsallaştırması birlikte ele alındığında şu öngörü türetilir: kaygı kaynaklı düşük performans, değerlendirme baskısı kaldırıldığında kısmen toparlanmalı; diskalkuli kaynaklı düşük performans ise büyük ölçüde değişmemelidir. Zaman baskısının kaldırıldığı, notlandırılmayan, bireysel ve destekleyici bir ortamda uygulanan bir görev, bu öngörüye göre kaygılı çocukta belirgin performans artışı üretirken diskalkulili çocukta sınırlı bir değişim üretecektir.

Bu öngörünün üç sınırlılığı açıkça belirtilmelidir. Birincisi, Ashcraft ve Kirk'in (2001) çalışması yetişkinlerle, laboratuvar koşullarında ve ikili görev paradigmasıyla yürütülmüştür; çocuklarda sınıf ortamına doğrudan aktarımı ampirik olarak gösterilmiş değildir. İkincisi, diskalkulili çocuklarda örtük kaygının varlığı (Rubinsten & Tannock, 2010) baskı kaldırıldığında onların da

bir miktar toparlanabileceği anlamına gelir; yani beklenen fark mutlak değil, derecelidir. Üçüncüsü, tek bir gözlemin doğal değişkenliği yüksektir.

Bu nedenlerle söz konusu gözlem, tek başına ayırt edici bir ölçüt olarak kullanılmamalı, yalnızca değerlendirme ve ayırıcı tanı kısmında ayrıntılandırılan çok aşamalı protokolün destekleyici bir bileşeni olarak ele alınmalıdır. Uygulamacıya önerilen kullanım, tanı koymak değil, kapsamlı değerlendirmeye yönlendirme kararını bilgilendirmektir.

Alan özgüllüğü, kalıcılık ve bağlamsal değişkenlik

Diskalkulide bozulma sayısal alanla sınırlıdır ve zaman içinde kararlıdır. Kalıcılık, bu olgunun en iyi belgelenmiş özelliklerinden biridir: Shalev ve arkadaşlarının (2005) altı yıllık ileriye dönük izlem çalışması, diskalkuli tanısı almış çocukların önemli bir bölümünde matematiksel güçlüklerin ergenliğe kadar sürdüğünü göstermiştir. Morsanyi ve arkadaşlarının (2018) uyguladığı DSM-5 temelli “kalıcılık” ölçütü tam da bu özelliği yakalamayı hedefler.

Matematik kaygısında performans örüntüsü bağlama göre dalgalanır: aynı çocuk evde ödevini yapabilirken sınavda çökebilir. Performansın bağlamsal değişkenliği kaygı lehine bir işarettir; ancak bu, kaygının kalıcı olmadığı anlamına gelmez. Aksine, kaygının müdahaleye görece duyarlı olduğu iddiası ancak müdahale kanıtıyla desteklenebilir ve bu kanıt, nörobilişsel değiştirilebilirlik ve müdahale kısımlarında sunulmaktadır.

Karşılaştırmalı özet

Tablo 2. Gelişimsel diskalkuli ile matematik kaygısının ayırt edici ölçütler açısından karşılaştırılması

Ölçüt	Gelişimsel diskalkuli	Matematik kaygısı	Dayanak
Temel nitelik	Bilişsel/ nörogelişimsel bozukluk	Duygusal tepki örüntüsü (boyutsal)	Kavramsal ve tanısal çerçeve
Tanısal statü	DSM-5-TR ve ICD-11'de tanımlı	Bağımsız tanı kategorisi değil	APA (2022); WHO (2022)
Çekirdek yetersizlik	Sayısallık temsili ve/veya sembole erişim	Endişe kaynaklı bilişsel kaynak işgali	Butterworth (2010); Rousselle & Noël (2007); Ashcraft & Kirk (2001)
Temel sayı işleme	Nokta sayma ve büyüklük karşılaştırmada bozulma	Sayma etkilenir; subitizing korunur	Landerl vd. (2004); Piazza vd. (2010); Maloney vd. (2010, 2011)
Çalışma belleği profili	Görsel-uzamsal ÇB'de özgül bozulma	Sözel ÇB'de bozulma	Mammarella vd. (2015); Szűcs vd. (2013)
Duygusal yük kaldırıldığında	Sınırlı değişim (öngörü)	Kısmi toparlanma (öngörü)	Kuramsal türetim; doğrulanmamış
Bağlamsal değişkenlik	Düşük (kararlı profil)	Yüksek (durum bağımlı)	Shalev vd. (2005); Hill vd. (2016)
Kalıcılık	Ergenliğe kadar süren güçlükler	Müdahaleyle azalabilir	Shalev vd. (2005); Supekar vd. (2015)
Cinsiyet dağılımı	Büyük ölçüde eşit; ölçüte duyarlı	Kızlarda daha yüksek bildirim	Morsanyi vd. (2018); Devine vd. (2013); Hill vd. (2016)
Yaygınlık	%3–7 (ölçüte bağlı; aralık %1,3–10)	Tek örneklemde %11; ölçek ve kesme noktasına bağlı	Butterworth vd. (2011); Devine vd. (2013, 2018)
Nöral korrelat	Parietal bölgeler, özellikle IPS	Amigdala hiperaktivitesi; parietal/prefrontal hipoaktivite	Butterworth vd. (2011); Young vd. (2012)

Not. Satırlar grup düzeyi bulgulara dayanmaktadır ve bireysel vakalarda kesin ayrım sağlamaz. "Duygusal yük" satırı ampirik olarak doğrulanmamış kuramsal bir öngörüdür (kuramsal öngörü; ilgili başlığa bakınız). Yaygınlık satırındaki iki

değer farklı türden niceliklerdir ve doğrudan karşılaştırılamaz (karşılaştırılabilirlik sorunu başlığına bakınız).

Nörobilişsel Kanıtlar

Gelişimsel diskalkulide nöral bulgular

Diskalkuliye ilişkin görüntüleme çalışmalarının odağı intraparietal sulkus (IPS) ve çevresindeki parietal ağdır. Butterworth ve arkadaşları (2011), sayısallık işlemlemesinin nöral temellerinin hem yetişkinlerde hem çocuklarda yapısal ve işlevsel görüntüleme ile araştırıldığını ve diskalkulide bu sistemin bozulmasına ilişkin nöral belirteçlerin tanımlandığını bildirmektedir. von Aster ve Shalev (2007), sayı işlevleri için önemli parietal alanların yanı sıra yürütücü çalışma belleği ve dikkat işlevlerinin baskın olduğu frontal bölgelerin de diskalkulili çocuklarda düşük etkinleşme gösterdiğini aktarmaktadır.

Bu tablo tek anlamlı değildir. Szűcs ve arkadaşları (2013), görüntüleme bulgularının IPS'nin büyüklük temsili dışındaki işlevlerindeki bozulmalarla da tutarlı olabileceğine dikkat çekmiştir. IPS çok işlevli bir bölgedir; dolayısıyla bir "IPS bulgusu" tek başına çekirdek sayı duyusu kuramını kanıtlamaz. Kaufmann ve arkadaşlarının (2013) vurguladığı gibi, nöral düzeyde de bireysel farklılıkların kaynaklarını ayrıştırmayı hedefleyen bir yaklaşım gerekmektedir.

Matematik kaygısında nöral bulgular

Matematik kaygısının nöral temellerine ilişkin dönüm noktası çalışması Young ve arkadaşlarına (2012) aittir. Araştırmacılar, 7–9 yaşındaki 46 çocukla yürüttükleri işlevsel MRG çalışmasında, matematik kaygısının sağ amigdala bölgelerinde hiperaktivite ile ilişkili olduğunu göstermişlerdir. Aynı çalışmada matematik kaygısı, matematiksel akıl yürütmede görev alan posterior parietal ve dorsolateral prefrontal korteks bölgelerinde

azalmış etkinlikle ilişkili bulunmuştur. Çok değişkenli sınıflama analizi, amigdaladaki çok voksel etkinlik örüntülerinin genel etkinleşme düzeyinden bağımsız olarak ayrıştığını ortaya koymuştur.

İşlevsel bulgulara yapısal bir katman da eklenmiştir. Kucian ve arkadaşları (2018a), çocuklarda matematik kaygısının nöroyapısal bir korelatını tanımlayarak, kaygının yalnızca anlık işlevsel tepki düzeyinde kalmayıp beyin yapısıyla da ilişkili olabileceğini göstermiştir. Bu, kaygının kısa süreli bir durum tepkisine indirgenemeyeceğine işaret eder.

Bu bulgu deseni davranışsal ayrımın nöral karşılığını sunar. Diskalkulide birincil sorun sayısal işlemleme ağının kendisindeyken; matematik kaygısında sayısal ağ görece sağlam olmakla birlikte duygusal tepki sistemi tarafından çevrimdışı bırakılmaktadır.

Suárez-Pellicioni ve arkadaşları (2016), matematik kaygısının performansa olumsuz etkisini açıklayan üç ana mekanizmayı derlemiştir: çalışma belleği kaynakları için rekabet, düşük düzeyli sayısal temsil yetersizliği ve ket vurma/dikkat kontrolü yetersizliği. Yazarlar, elektrofizyolojik kanıtların — özellikle sayısal çelişki izleme ve uyarlanma paradigmalarındaki olay ilişkili potansiyel bulgularının — bu mekanizmaların birbirini dışlamadığına işaret ettiğini belirtmektedir. Bu üçlü yapı, matematik kaygısına ilişkin kuramlar kısmındaki tartışmanın nörofizyolojik karşılığıdır.

Değiştirilebilirlik: nedensellik sorusuna kısmi yanıt

Kesitsel görüntüleme verilerinin en ciddi sınırlılığı nedensellik yönünü belirleyememesidir: amigdala hiperaktivitesi kaygının nedeni midir, yoksa yıllarca süren olumsuz matematik deneyiminin sonucu mu? Bu soruya doğrudan konuşan iki çalışma hattı vardır.

Birincisi müdahale çalışmalarıdır. Supekar ve arkadaşları (2015), sekiz haftalık bire bir bilişsel öğreticilik programının yüksek matematik kaygılı çocuklarda kaygıyı azalttığını ve amigdalada merkezlenen duygu ilişkili devrelerdeki atipik işlevsel tepkileri ile bağlantısallığı düzelttiğini göstermiştir. Bulgunun kavramsal önemi büyüktür: doğrudan kaygıyı hedeflemeyen, matematiksel becerileri geliştirmeye yönelik bir müdahale, kaygıyı ve onun nöral imzasını birlikte değiştirmiştir. Bu, amigdala hiperaktivitesinin en azından kısmen sonuç niteliğinde ve değiştirilebilir olduğunu düşündürür; ayrıca yukarıda ele alınan Karşılıklı Kuramın müdahale düzeyindeki karşılığını oluşturur.

İkincisi beyin uyarımı çalışmalarıdır. Sarkar ve arkadaşları (2014), transkraniyal doğru akım uyarımı kullanarak dorsolateral prefrontal korteks etkinliğini değiştirdiklerinde yüksek ve düşük matematik kaygılı bireylerin performans ve fizyolojik tepki örüntülerinin farklılaştığını bildirmiştir. Deneysel manipülasyon içermesi bakımından bu çalışma, kesitsel korelasyonların ötesine geçen bir kanıt düzeyi sunar.

Bu iki hat, kaygının nöral imzasının sabit bir biyolojik belirteç değil, deneyime duyarlı bir durum olduğunu göstermektedir. Diskalkulinin nöral bulguları için benzer bir değiştirilebilirlik iddiası aynı güçle yapılamaz; kalıcılık verileri (Shalev vd., 2005) aksi yönde bir tablo çizmektedir. Bu asimetri, Tablo 2'deki "kalıcılık" satırının dayanağıdır.

Nörobilişsel kanıtların sınırlılıkları

Bu bulgular ayırıcı tanıya doğrudan tercüme edilemez. En az dört sınırlılık dikkate alınmalıdır. Birincisi, örneklem büyüklükleri küçüktür; Young ve arkadaşlarının (2012) çalışması 46 çocuk üzerinde yürütülmüştür ve bu, gelişimsel nörogörüntülemede tipik ancak istatistiksel güç bakımından mütevazı bir sayıdır. İkincisi, grup düzeyindeki farklar bireysel tanı için gereken duyarlılık ve

özgüllüğü sağlamaz. Üçüncüsü, yukarıdaki müdahale bulguları nedensellik sorusunu tümüyle çözmez; yalnızca değiştirilebilirliği gösterir. Dördüncüsü, nöral bulguların eğitsel karar süreçlerine erken aktarılması nöromit üretimi riskini taşır.

Nörobilişsel kanıtların bu bölümdeki işlevi tanı koydurmak değil, davranışsal ayrımın biyolojik olarak da makul olduğunu göstermek ve müdahale yollarının neden farklılaşması gerektiğini açıklamaktır. Uygulamadaki ayırıcı değerlendirme, bir sonraki kısımda ele alınacağı üzere, davranışsal ve eğitsel göstergelere dayanmak zorundadır.

Değerlendirme ve Ayırıcı Tanı

Önceki kısımlar bir sonuca varmıştı: hiçbir tekil gösterge iki olguyu güvenilir biçimde ayırmaz. Bu, ayrımın yapılamayacağı anlamına gelmez; tek aşamalı değerlendirmenin yetersiz olduğu anlamına gelir. Bu kısım, çok aşamalı bir değerlendirme mantığını ve onun Türkiye'deki karşılığını ele almaktadır.

Neden çok aşamalı değerlendirme?

Tek bir standart matematik başarı testine dayanan değerlendirme üç ayrı hatayı aynı anda üretir. Birincisi, düşük puanın kaynağını göstermez; diskalkuli, kaygı, yetersiz öğretim ve devamsızlık aynı puanı üretebilir. İkincisi, kesme noktasına aşırı duyarlıdır; yukarıda gösterildiği gibi ölçüt değişince yaygınlık %1,3 ile %10 arasında oynamaktadır (Devine vd., 2013). Üçüncüsü, tek bir ölçüm anına bağlıdır ve DSM-5-TR'nin aradığı kalıcılık ölçütünü karşılayamaz (American Psychiatric Association, 2022).

Türkiye alan yazınında bu soruna doğrudan yanıt veren bir model önerilmiştir. Mutlu ve Akgün (2017), matematik öğrenme güçlüğünün tanılanmasında Çoklu Süzgeç Modelini geliştirmiştir. Modelde beş bileşen art arda birer süzgeç işlevi görür: öğretmen görüşü, diskalkuli ön değerlendirme testi, diskalkuli tarama aracı,

öğrenci tanıma formu ve zekâ testi. Yazarlar modeli üç öğrenci üzerinde uygulayarak matematik öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencileri belirlemişlerdir. Modelin kavramsal katkısı, tanılamayı tek bir karar anı olmaktan çıkarıp art arda daralan bir eleme süreci olarak kurgulamasıdır.

Modelin ampirik dayanağının sınırlılığı da belirtilmelidir: üç öğrencilik bir uygulama, modelin işleyebileceğini gösterir ancak duyarlılık ve özgüllük değerleri üretmez. Model, sınanmış bir tanılama algoritması değil, kavramsal bir çerçevedir.

Bu bölümde önerilen ayırıcı değerlendirme mantığı Çoklu Süzgeç Modeliyle uyumlu ancak ona bir boyut eklemektedir: süzgeçlerden biri duygusal bileşeni ölçmelidir. Gerekçe, Türkiye verileri başlığında aktarılan ulusal bulgudur — Mutlu'nun (2019) örnekleminde matematik öğrenme güçlüğü grubunun kaygı düzeyi düşük başarılı gruptan ayrışmamıştır. Duygusal bileşen ölçülmezse model, diskalkuliyi genel düşük başarıdan ayırt eder ama kaygıdan ayırt edemez. Bu ekleme, mevcut bölümün Türkiye alan yazınına dönük en somut önerisidir ve sınanmayı bekleyen bir öneridir, doğrulanmış bir değişiklik değildir.

Ölçme araçları

Tablo 3. Ayırıcı değerlendirmede kullanılabilecek ölçüm alanları ve araç örnekleri

Ölçüm alanı	İşlevi	Araç örnekleri	Türkiye'de durum
Temel sayı işleme	Diskalkulinin çekirdek göstergesi	Nokta sayma, sembolik/sembolik olmayan büyüklük karşılaştırma, sayı doğrusu tahmini	Olkun ve Akkurt Denizli (2015) görevleri mevcut
Matematik başarısı	Performans düzeyinin belirlenmesi	Standart başarı testleri, hesaplama performans testleri	Türkçeye uyarlanmış araçlar mevcut (Öztürk vd., 2019)

Ölçüm alanı	İşlevi	Araç örnekleri	Türkiye'de durum
Matematik kaygısı	Duygusal bileşenin ölçümü	mAMAS (Carey vd., 2017); erken matematik kaygısı ölçeği (Young vd., 2012)	mAMAS'ın Türkçe standardizasyonu yok
Genel kaygı	Alan özgüllüğünün denetimi — zorunlu	Çocuk kaygı envanterleri	Uyarlanmış araçlar mevcut
Çalışma belleği	Bilişsel profil (destekleyici)	Sözel ve görsel-uzamsal ÇB görevleri	Standart bataryalarda mevcut
Zekâ	Dışlama ölçütü	Bireysel zekâ testleri	RAM protokollerinde mevcut
Öğretim geçmişi	Dışlama ölçütü — en çok ihmal edilen	Devam kaydı, öğretim sürekliliği, dil yeterliliği	Sistematik toplanmıyor

Genel kaygı ölçümünün zorunluluğu ayrıca vurgulanmalıdır. Mammarella ve arkadaşlarının (2015) çift ayrışma bulgusunun ikna ediciliği, grupların genel kaygı ve zekâ bakımından eşleştirilmiş olmasından gelir. Devine ve arkadaşları (2012), sınav kaygısı kontrol edildiğinde matematik kaygısındaki cinsiyet farkının nasıl değiştiğini göstererek bu denetimin ölçüm düzeyindeki önemini ortaya koymuştur. Genel kaygı denetlenmeden ölçülen "matematik kaygısı", büyük ölçüde genel kaygının bir yansıması olabilir (Hill vd., 2016).

Kritik boşluk. Türkiye'de, matematik alanına özgü olarak standardize edilmiş, normları oluşturulmuş ve diskalkuli ile kaygıyı birlikte değerlendirebilen bütünleşik bir bataryanın bulunmaması, bu bölümün önerdiği çerçevenin uygulanmasının önündeki en somut engeldir.

Ölçüm sorununun kendisi de tartışmalıdır. Cipora ve arkadaşları (2022), matematik kaygısı alan yazınının en temel açıklarından birinin yaygınlık için dışsal ölçüt bulunmaması

olduğunu; öz-bildirim, nörofizyolojik ve bilişsel ölçümler arasındaki ilişkilerin yapı geçerliği bakımından yeterince aydınlatılmadığını belirtmektedir. Ayrıca durum ve sürekli kaygı arasındaki tutarsızlık, uygulamada hangi ölçümün ne anlama geldiğini belirsizleştirmektedir.

Dışlama ölçütleri ve öğretim yetersizliğinin elenmesi

DSM-5-TR'nin dördüncü ölçütü — güçlüğün yetersiz öğretimle açıklanamaması — uygulamada en çok ihmal edilen ölçüttür ve Türkiye bağlamında özel bir ağırlık taşır. Düzensiz devam, sınıf mevcudu, öğretmen değişikliği, birleştirilmiş sınıf uygulaması ve öğretim dili farklılığı sayısal beceri edinimini doğrudan etkiler. Bu koşullarda düşük performans gösteren bir çocuğa diskalkuli tanısı vermek, sistemik bir sorunu bireysel bir bozukluğa dönüştürmek anlamına gelir.

Okul dışı öğrenme ortamı da bu denklemin parçasıdır. Mutaf-Yıldız ve arkadaşlarının (2020) sistematik derlemesi, ev ortamındaki sayısal etkinliklerle çocukların matematiksel becerileri arasındaki ilişkiyi incelemiş ve bulguların etkinlik türüne göre değiştiğini ortaya koymuştur. Dolayısıyla "yetersiz öğretim" ölçütü yalnızca okulu değil, çocuğun sayısal deneyim havuzunun tamamını kapsamalıdır.

DSM-5-TR ayrıca uygun müdahalelere karşın en az altı ay süren güçlük aramaktadır. Bu ölçüt, değerlendirmeyi zorunlu olarak müdahaleye tepki mantığına bağlar: nitelikli, hedeflenmiş bir öğretim denenmeden kalıcılık iddia edilemez. Uygulamada bu, tanılama sürecinin bir ölçme etkinliği değil, belgelenmiş bir öğretim denemesi içermesi gerektiği anlamına gelir.

Yanlış pozitif ve yanlış negatif riskleri

İki hata türünün maliyetleri simetrik değildir.

Yanlış pozitif (kaygılı çocuğa diskalkuli tanısı): Çocuk kalıcı bir bozukluk etiketi alır, beklentiler düşürülür, öğrenilmiş çaresizlik pekişir. Devine ve arkadaşlarının (2018) bulgusu bu riskin büyüklüğünü gösterir: yüksek kaygılı çocukların %77'si normal ya da yüksek performans göstermektedir.

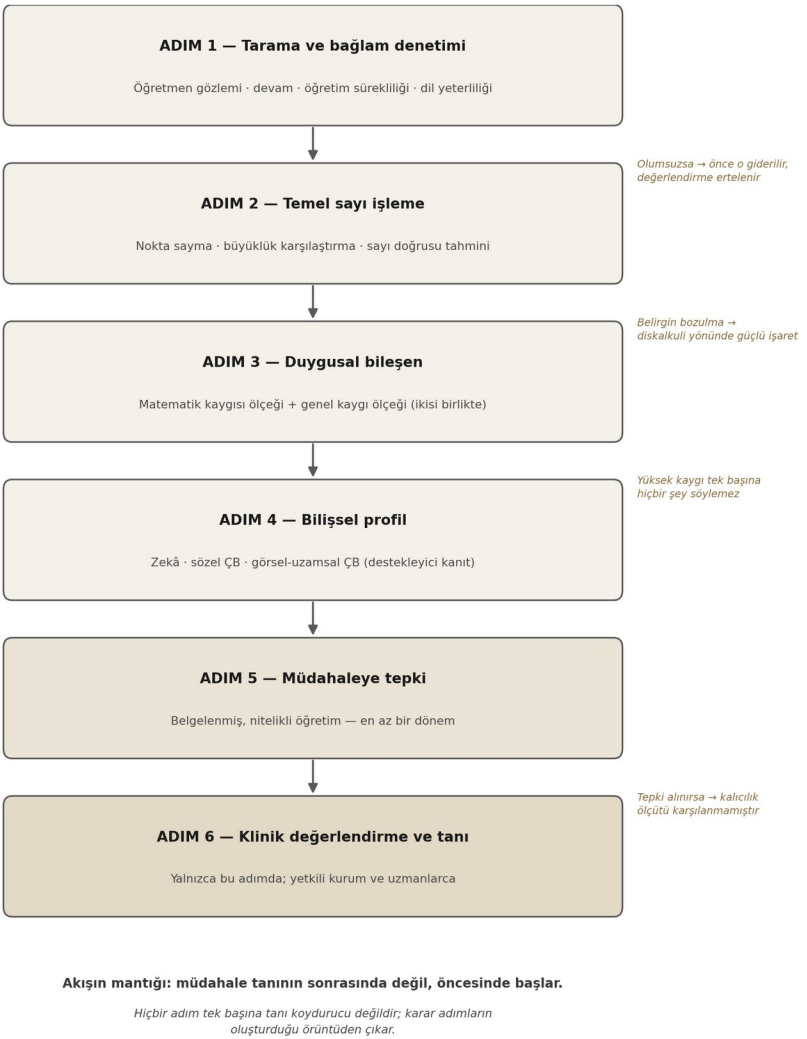
Yanlış negatif (diskalkulili çocuğa "kaygılı, geçer" denmesi): Çocuk yıllarca uygun olmayan öğretim alır; kalıcılık verileri (Shalev vd., 2005) bu kaybın telafi edilmediğini göstermektedir. Ayrıca Kucian ve arkadaşlarının (2018b) bulgusu, bu çocuklarda ikincil bir duygusal yükün de biriktiğini düşündürür.

Etik sonuç açıktır: hiçbir tanı, kapsamlı ve çok kaynaklı bir değerlendirme olmadan verilmemeli; hiçbir güçlük de "büyür geçer" diye izlenmeden bırakılmamalıdır. İki hatadan kaçınmanın tek yolu, tanı kararını erteleyip müdahaleyi hemen başlatmaktır — çünkü her iki durumda da ilk adım nitelikli öğretimdir.

Karar akışı

Aşağıdaki akış, tanı koymak için değil, yönlendirme kararını bilgilendirmek için tasarlanmıştır. Adımların hiçbiri tek başına tanı koydurucu değildir; ayrıca akışın bütünü olarak bir duyarlılık ve özgüllük çalışmasıyla sınanmamıştır. Kuramsal ve ölçüt temelli bir öneridir.

Şekil 2. Ayırıcı değerlendirmede önerilen karar akışı



Ölçüt kaynakları: American Psychiatric Association (2022); Mutlu ve Akgün (2017).

Akışın mantığı şudur: müdahale tanının sonrasında değil, öncesinde başlar. Bu, hem DSM-5-TR ölçütlerinin gereğidir hem de yanlış pozitif ve yanlış negatif risklerini birlikte azaltır.

Vaka Vinyetleri

Aşağıdaki vinyetler, alan yazında betimlenen grup düzeyi profillerden derlenmiş kurgusal örneklerdir; ilk üçü tipik profilleri, dördüncüsü ise hiçbir profile uymayan durumu örneklemektedir. Bunlar gerçek vakalar değildir, herhangi bir kişiye dayanmamaktadır ve gerçek vakaların taşıdığı belirsizliği yansıtmazlar. Amaçları tanı koyma pratiği sunmak değil, önceki kısımlardaki ölçütlerin birlikte nasıl okunacağını göstermektir. Gerçek değerlendirmede profiller nadiren bu kadar net ayrışır.

Vinyet A — Sayısal çekirdekte yetersizlik

Elif, 3. sınıf. Okuma ve sözel ifade becerileri yaşıtlarıyla uyumlu; sınıf içi katılımı iyi. Matematikte 4+3'ü her seferinde parmaklarıyla sayarak buluyor; iki ay önce öğrendiği toplama olgularını hatırlamıyor. Nokta sayma görevinde üç noktalı kümeleri bile tek tek sayıyor. Sayı doğrusunda 50'yi işaretlemesi istendiğinde tutarsız yerlere koyuyor. Kaygı ölçeğinde puanı ortalama; matematik dersinde gergin görünmüyor, aksine istekli. Ev ödevlerinde de aynı hatalar sürüyor. Bu tablo iki yıldır değişmemiş.

Okuma: Bozulma hesaplama öncesi düzeyde ve bağlamdan bağımsız. Duygusal yük düşük olmasına karşın performans düşük — kaygı açıklamasını zayıflatan en güçlü işaret. Nokta sayma bulgusu Landerl ve arkadaşlarının (2004) profiline uymaktadır. Yönlendirme: Adım 2'de güçlü işaret; Adım 5 müdahalesine geçilir.

Vinyet B — Duygusal kökenli kaçınma

Kerem, 5. sınıf. Ev ödevlerini büyük ölçüde doğru yapıyor; annesiyle çalışırken zorlanmıyor. Sınavda ilk üç soruyu çözüyor, sonra bloke oluyor; kâğıdın kalanı boş. Zaman tutulmayan bir ortamda aynı soruları çözebiliyor. Nokta sayma, büyüklük karşılaştırma ve sayı doğrusu görevlerinde akranlarıyla aynı

düzeyde. Matematik kaygısı ölçeğinde yüksek, genel kaygı ölçeğinde ortalama. Karne notu iki yıldır dalgalanıyor.

Okuma: Temel sayı işleme sağlam; performans bağlama göre değişiyor; kaygı alan-özgül. Bu profil Devine ve arkadaşlarının (2018) bulgusundaki %77'lik gruba karşılık gelir. Yönlendirme: Diskalkuli değerlendirmesi endike değil; kaygı odaklı destek ve değerlendirme tasarımında düzenleme.

Vinyet C — Eş-görülüm

Zeynep, 4. sınıf. Nokta sayma ve büyüklük karşılaştırmada belirgin bozulma; sayı olgularını geri getiremiyor. Aynı zamanda matematik saatinden önce mide ağrısı bildiriyor, tahtaya kalkmayı reddediyor, "ben zaten yapamıyorum" diyor. Zaman baskısı kaldırıldığında bir miktar toparlanıyor ama akran düzeyine ulaşmıyor. Genel kaygı ortalama.

Okuma: İki tablo birlikte. Bu, Devine ve arkadaşlarının (2018) bildirdiği "diskalkulili çocukların yaklaşık beşte biri" grubudur ve Kucian ve arkadaşlarının (2018b) betimlediği örüntüyle tutarlıdır. Kısmi toparlanma, kaygının performansa ek bir yük bindirdiğini ama tek açıklama olmadığını gösterir. Yönlendirme: İki hatlı müdahale; önceliklendirme için bkz. eş-görülümde önceliklendirme başlığı.

Vinyet D — Ayırıcı tanının kapsamadığı durum

Üç vinyetin okuru yanıltabilecek ortak bir özelliği vardır: hepsinde tablo yorumlanabilir çıkmaktadır. Uygulamada dördüncü ve muhtemelen en sık karşılaşılan durum, hiçbir profile net uymayan çocuktur: temel sayı işlemede sınırda performans, orta düzey kaygı, düzensiz devam geçmişi, iki yıl önce okul değiştirmiş. Bu çocuk için doğru karar tanı değil, Adım 1'e dönüp bağlamsal değişkenleri gidermek ve Adım 5 müdahalesini belgeleyerek yürütmektir. Karar

akışının değeri, net vakaları sınıflandırmasından çok, net olmayan vakalarda acele tanıyı engellemesindedir.

Ayrışan Müdahale Yolları

Ayırıcı tanının tüm gerekçesi buradadır: iki olgu farklı müdahale gerektirir ve yanlış eşleştirilmiş müdahale yalnızca etkisiz değil, zaman kaybı nedeniyle zararlıdır.

Gelişimsel diskalkulide müdahale

Kanıt tabanı. Gersten ve arkadaşlarının (2009) 42 müdahale çalışmasını sentezleyen meta-analizi, öğrenme güçlüğü olan öğrencilerde matematik öğretiminin bileşenlerini karşılaştırmıştır. Öğrenci geri bildirimi ile hedef belirleme ve sınıf içi akran destekli öğrenme dışındaki tüm bileşenler anlamlı ortalama etkiler üretmiş; etkiler 0,21 ile 1,56 arasında değişmiştir. İki bileşen hem istatistiksel hem pratik olarak öne çıkmıştır: açık öğretim (explicit instruction) ve sezgisel strateji öğretimi. Bu bulgu, keşfe dayalı yaklaşımların diskalkulili öğrenciler için tek başına yeterli olmadığını göstermesi bakımından önemlidir.

Meta-analizin sınırlılığı, öğrenme güçlüğü tanımının çalışmalar arasında değişmesidir; sentez “diskalkuli” değil, geniş anlamda öğrenme güçlüğü örneklemlerini kapsamaktadır. Etkilerin diskalkuliye özgü olduğu doğrudan gösterilmemiştir.

Sayı duyusu temelli çalışma. Kucian ve arkadaşları (2011), 8–10 yaşındaki 16 diskalkulili çocukla beş haftalık bilgisayar temelli bir zihinsel sayı doğrusu eğitimi uygulamış; tasarımı nörogörüntülemeyle birlikte değerlendirmiştir. Örneklem küçüktür ve kesin bir etkililik iddiası taşımaz; sayı doğrusu temelli tasarımın uygulanabilirliğini göstermektedir.

Türkiye’den doğrudan kanıt. Öztürk, Durmaz ve Can (2019), özgül öğrenme güçlüğü tanısı almış 5–8. sınıf düzeyindeki 15 öğrenciyle üç haftalık sayı konuşmaları uygulaması yürütmüştür.

Tek gruplu ön test–son test yarı deneysel desende, uygulamanın öğrencilerin sayı duyusu puanlarını istatistiksel olarak anlamlı biçimde artırdığı bulunmuştur. Yazarların kendi belirttiği sınırlılıklar — küçük grup, kısa süre, kontrol grubu yokluğu — bulgunun kesinliğini sınırlar; ancak Türkiye koşullarında sayı duyusu temelli müdahalenin uygulanabilirliğini göstermesi bakımından değerlidir. Filiz (2021) ise ulusal müdahale birikimini derleyerek bu çalışmaların genel eğilimini ortaya koymuştur.

Uygulama ilkeleri. Alan yazından türetilen ortak ilkeler: hesaplama öncesi sayısallık çalışmasına yeterli zaman ayırmak; somuttan yarı somuta ve soyuta kademeli ilerlemek; olgusal bilgiyi otomatikleştirmeden önce anlamlandırmak; zaman baskılı alıştırmadan kaçınmak; yoğunluk ve süreklilik sağlamak.

Matematik kaygısında müdahale

Kanıt tabanı. Sammallahti ve arkadaşlarının (2023) meta-analizi bu alanın en güncel sentezidir: 50 çalışma, 75 etki büyüklüğü. Bulgular:

- Müdahaleler kaygıyı azaltmada orta düzeyde etkilidir ($g = -0{,}467$).
- Aynı müdahaleler matematik performansını da artırmaktadır ($g = 0{,}502$).
- Bilişsel destek ve duygu düzenleme odaklı müdahaleler her iki çıktıda da etkilidir; daha uzun süreli müdahaleler ve 12 yaş üstü öğrencileri hedefleyen müdahaleler kaygıda en büyük azalmayı sağlamıştır.

İkinci ve üçüncü bulgular birlikte kritik bir sonuç üretir: kaygıyı azaltmanın tek yolu doğrudan duyguyu hedeflemek değildir; matematiksel yetkinliği artırmak da kaygıyı azaltır. Supekar ve arkadaşlarının (2015) nörogörüntüleme bulgusu bunun mekanizma düzeyindeki karşılığıdır.

Sidney ve arkadaşları (2025) bu birikime önemli bir uyarı eklemektedir: alan, ölçeklenebilir ve uygulanabilir müdahalelere hâlâ ihtiyaç duymaktadır; mevcut çalışmaların çoğu laboratuvar veya kısa süreli okul koşullarında yürütülmüştür. Moustafa ve arkadaşları (2021) ise müdahalelerin bireyselleştirilmesi gerektiğini savunmakta; matematik kaygısının heterojen kaynaklarının tek tip bir programla karşılanamayacağını belirtmektedir. Ramirez ve arkadaşları (2018), bu heterojenliği kuramsal bir çerçeveye bağlamakta ve kaygının performansa etkisinin yalnızca kaynak işgaliyle değil, bireyin kendi kaygı belirtilerini nasıl yorumladığıyla da açıklanması gerektiğini öne sürmektedir.

İfade edici yazma. Park ve arkadaşları (2014), sınav öncesi yedi dakikalık ifade edici yazma müdahalesini test etmiştir. Kontrol koşulunda yüksek kaygılı katılımcılar düşük kaygılılardan anlamlı biçimde kötü performans gösterirken, ifade edici yazma koşulunda iki grup arasındaki fark ortadan kalkmıştır. Mekanizma, çalışma belleği işgali açıklamasıyla doğrudan bağlantılıdır: yazma, araya giren endişe düşüncelerini azaltarak çalışma belleği kaynaklarını serbest bırakmaktadır. Bu yorumu meta-analitik düzeyde destekleyen kanıt da vardır: Finell ve arkadaşları (2022), çalışma belleğinin matematik kaygısı ile matematik performansı arasındaki ilişkide aracı rol oynadığını göstermiştir.

Müdahalenin sınırlılığı, örneklemin üniversite öğrencilerinden oluşması ve tek seferlik bir sınav bağlamında test edilmesidir; ilkokul çocuklarında ve uzun vadede aynı etkiyi ürettiği gösterilmemiştir.

Yetişkin kaynaklı aktarım. Beilock ve arkadaşları (2010), on yedi kadın sınıf öğretmeniyle yürüttükleri çalışmada, öğretmenin matematik kaygısının yıl başında öğrenci başarısıyla ilişkisiz olduğunu, yıl sonunda ise kız öğrencilerin başarısıyla olumsuz ilişkili hâle geldiğini; ilişkinin kız öğrencilerin kalıp yargıyı benimsemesi üzerinden işlediğini göstermiştir. Bulgu tartışmasız

değildir: Plante, Protzko ve Aronson (2010), aynı verinin kalıp yargı tehdidi çerçevesiyle de açıklanabileceğini öne sürerek alternatif bir yorum sunmuştur. Örneklem küçüktür (17 sınıf) ve bulgu Türkiye'de yinelenmemiştir.

Maloney ve arkadaşları (2015) benzer bir aktarımı ebeveynlerde bulmuştur — kritik bir koşulla: ebeveyn kaygısı yalnızca ebeveyn sık sık matematik ödevine yardım ettiğinde çocuğun başarısını ve kaygısını olumsuz etkilemektedir. Seyrek yardım eden kaygılı ebeveynlerin çocuklarında bu ilişki görülmemiştir.

Bu bulgunun uygulamaya çevirisi ince bir noktadır ve sıklıkla yanlış anlaşılır: mesaj "kaygılı ebeveyn ödeve karışmasın" değildir. Mesaj, yardımın niteliğinin niceliğinden önemli olduğu ve kaygılı yetişkinlerin desteklenmeden çocukla matematik çalışmasının riskli olabileceğidir.

Erken dönem ve tutumlar. Krinzinger, Kaufmann ve Willmes (2009), erken ilkokul yıllarında matematik kaygısı ile matematik becerisi arasındaki ilişkiyi inceleyerek bu ilişkinin en erken dönemde henüz yerleşmemiş olabileceğine işaret etmiştir. Dowker ve arkadaşları (2019) ise küçük çocuklarda tutum ile performans arasındaki ilişkinin bileşenlere göre değiştiğini göstermiştir. İkisi birlikte, önleyici çalışmanın en verimli olacağı pencerenin erken ilkokul olduğunu düşündürmektedir.

Değerlendirme tasarımı. Zaman baskısının azaltılması, düşük riskli sık ölçme, hata normalleştirmesi ve rekabetçi olmayan sınıf iklimi, kaygı yükünü doğrudan azaltan yapısal düzenlemelerdir. Bunlar müdahale değil önlemedir ve tüm sınıfa uygulanabilir.

Eş-görülümde önceliklendirme

Vinyet C'deki gibi iki tablonun birlikte bulunduğu durumlarda hangi hattın önceleneceği pratik bir sorudur. Alan yazın

bu soruyu doğrudan test eden bir karşılaştırmalı deney sunmamaktadır. Aşağıdaki üç ilke mevcut kanıtlardan türetilmiş çıkarımlardır, doğrulanmış protokoller değildir.

Birincisi, matematiksel yetkinlik hattı ertelenmemelidir. Sammallahti ve arkadaşlarının (2023) bilişsel destek bulgusu ile Supekar ve arkadaşlarının (2015) öğreticilik bulgusu, beceri geliştirmenin kaygıyı da azalttığını göstermektedir. Ters yönde — yalnızca kaygıyı azaltmanın sayısal yetersizliği gidereceğine dair — karşılaştırılabilir bir kanıt bulunmamaktadır. Bu asimetri, kanıtın yokluğundan mı yoksa etkinin yokluğundan mı kaynaklandığı ayırt edilememektedir; yalnızca kaygı hedefleyen müdahalelerin diskalkulili örneklemlerde sayısal çıktılar üzerindeki etkisi yeterince araştırılmamıştır.

İkincisi, kaygı yükü öğrenmeyi engelleyecek düzeydeyse önce o hafifletilmelidir. Çalışma belleği işgal altındayken yoğun öğretim verimsizdir (Ashcraft & Kirk, 2001; Finell vd., 2022). Bu durumda değerlendirme tasarımı düzenlemeleri ve duygu düzenleme desteği, öğretimin önkoşulu olarak ele alınmalıdır.

Üçüncüsü, iki hat eşzamanlı yürütülebilir ve genellikle yürütülmelidir. Sammallahti ve arkadaşlarının (2023) meta-analizinde hem bilişsel destek hem duygu düzenleme kategorilerinin etkili bulunması, birleşik tasarımları desteklemektedir.

Türkiye Bağlamı

Kurumsal yapı ve süreç

Türkiye’de özgül öğrenme güçlüğü tanılaması, Rehberlik ve Araştırma Merkezleri ile sağlık kuruluşları arasında paylaşılan bir süreçtir. Yapının ayırıcı tanı açısından üç sınırlılığı vardır.

Birincisi, matematiğe özgü ayrışma zayıftır. Değerlendirme çoğunlukla özgül öğrenme güçlüğü genel başlığı altında yürütülmekte; okuma, yazma ve matematik alt tiplerinin

ayrıştırılması sınırlı kalmaktadır. Oysa Morsanyi ve arkadaşlarının (2018) verisi, matematik alanındaki bozulmanın kendine özgü bir eş-görülüm profili taşıdığını göstermektedir.

İkincisi, duygusal bileşen sistematik olarak ölçülmemektedir. Matematik kaygısı, tanılama protokollerinin rutin bir parçası değildir. Bu, Şekil 2'deki Adım 3'ün kurumsal karşılığının bulunmadığı anlamına gelir.

Üçüncüsü, müdahaleye tepki verisi tanılamaya girdi oluşturmamaktadır. DSM-5-TR'nin "uygun müdahalelere karşın" ölçütü belgelenmiş bir öğretim denemesini gerektirir; mevcut süreç ise ağırlıklı olarak kesitsel ölçüme dayanmaktadır.

Bu üç saptama, mevzuat metinlerinin sistematik bir incelemesine değil, alan yazındaki betimlemelere ve uygulama gözlemlerine dayanmaktadır; ampirik bir süreç değerlendirmesi olarak okunmamalıdır.

Alan yazın birikimi ve boşluklar

Türkiye'de diskalkuli alan yazını son on yılda belirgin biçimde gelişmiştir. Mutlu, Olkun, Akgün ve Sarı'nın (2020) editörlüğünü yaptığı derleme cildi, tanım, özellikler, yaygınlık, nedenler ve tanılama başlıklarını Türkçe olarak bir araya getiren ilk kapsamlı çalışmalardandır. Tanılama yönteminde Çoklu Süzgeç Modeli (Mutlu & Akgün, 2017), temel sayı işleme ölçümünde Olkun ve Akkurt Denizli'nin (2015) çalışması, müdahalede ise Öztürk ve arkadaşlarının (2019) sayı konuşmaları uygulaması yerleşik başvuru kaynakları hâline gelmiştir.

Buna karşılık üç boşluk sürmektedir:

- Epidemiyoloji. Matematik alanına özgü, DSM ölçütleri uygulanmış ve dışlama kriterleri denetlenmiş ulusal bir yaygınlık çalışması yoktur. Görker ve arkadaşlarının (2017) %6,5'lik matematik bozukluğu

oranı en yakın veridir ancak kontrol listesi temellidir (Türkiye verileri başlığına bakınız).

- Bütünleşik batarya. Diskalkuli ve matematik kaygısını aynı örneklemde, standardize normlarla ölçebilen bir araç seti bulunmamaktadır.

- Ayrışma çalışması. Mammarella ve arkadaşlarının (2015) çift ayrışma deseni Türkiye örnekleminde yinelenmemiştir.

Mutlu'nun (2019) bulgusu bu boşlukların pratik sonucunu göstermektedir: matematik öğrenme güçlüğü grubunun kaygı düzeyi düşük başarılı gruptan ayrışmamıştır. Kaygı ölçümü, mevcut araçlarla tek başına ayırıcı işlev görmemektedir.

Öğretmen yetiştirme

Beilock ve arkadaşlarının (2010) bulgusu, sınıf öğretmeni yetiştirme programları için doğrudan bir çıkarım taşır: öğretmen adaylarının matematik kaygısı, mesleki bir yeterlik sorunu olarak ele alınmalıdır. Bulgu ABD örnekleminde, on yedi sınıflık küçük bir grupta elde edilmiştir ve alternatif yorumu tartışmalıdır (Plante vd., 2010); Türkiye'de yinelenmesi gerekmektedir. Ancak kuramsal gerekçe ve risk büyüklüğü, yinelenme beklenmeden önleyici adım atılmasını haklı kılacak düzeydedir.

Sınırlılıklar ve Gelecek Araştırma Gündemi

Bu bölümün sınırlılıkları

Bölüm bir derlemedir; sistematik derleme protokolü izlememiştir. Kaynak seçimi kapsayıcı olmakla birlikte tam bir tarama değildir ve yayın yanlılığı denetlenmemiştir. Sunulan ayırt edici ölçütler grup düzeyi bulgulara dayanmakta; hiçbiri bireysel tanı için gereken duyarlılık ve özgüllük değerleriyle raporlanmamıştır. Şekil 2'deki karar akışı ve Çoklu Süzgeç Modeline önerilen

duygusal süzgeç eklentisi, kuramsal türetimlerdir ve sınanmamıştır. Türkçe alan yazın kapsanmış ancak sistematik olarak taranmamıştır. Vinyetler kurgusaldır ve gerçek vakaların belirsizliğini yansıtmaz.

Alan yazının sınırlılıkları

Ölçüt bağımlılığı. Yaygınlıktan cinsiyete, eş-görülümden nöral bulgulara kadar neredeyse her sonuç kullanılan kesme noktasına duyarlıdır (Devine vd., 2013; Kaufmann vd., 2013). Alan, üzerinde uzlaşılmış bir tanı tanımına sahip değildir. Cipora ve arkadaşları (2022) aynı sorunu kaygı tarafı için de saptamakta; yaygınlık tahmini için dışsal ölçüt geliştirilmesi gerektiğini savunmaktadır.

Örneklem büyüklükleri. Ayırıcı bulguların çoğu küçük klinik örneklemlerden gelmektedir: Mammarella ve arkadaşları (2015), Kucian ve arkadaşları (2011), Young ve arkadaşları (2012), Öztürk ve arkadaşları (2019).

Yinelenme açığı. Bölümün merkezî ayırt edici bulgusu olan çalışma belleği çift ayrışması bağımsız örneklemlerde yeterince yinelenmemiştir.

Kültürel dar kapsam. Temel bulguların büyük bölümü Batı Avrupa ve Kuzey Amerika örneklemlerinden gelmektedir. Zhang ve arkadaşlarının (2019) meta-analizinde kaygı–performans bağının Asyalı öğrencilerde en güçlü, Avrupalı öğrencilerde en zayıf çıkması ve Mutlu'nun (2019) Türkiye örnekleminde bulduğu belirgin biçimde güçlü ilişki (r = −,597), bağlamsal değişkenliğin ciddiye alınması gerektiğini göstermektedir.

Gelecek araştırma gündemi

Öncelik sırasıyla:

1. Subitizing karşılaştırması. Diskalkulili, yüksek kaygılı ve tipik gelişen çocukların aynı subitizing

paradigmasında doğrudan karşılaştırılması — temel sayı işleme başlığında formüle edilen hipotezin doğrudan sınaması ve bölümün en özgün öngörüsü.

2. Çift ayrışmanın yinelenmesi. Mammarella ve arkadaşlarının (2015) deseninin geniş ve bağımsız örneklemlerde — Türkiye dâhil — sınanması.
3. Duyarlılık ve özgüllük. Önerilen ölçütlerin ve Şekil 2'deki akışın bireysel düzeyde sınıflandırma başarısının ROC analizleriyle raporlanması. Grup farkı, tanısal yarar demek değildir.
4. Duygusal süzgecin sınanması. Çoklu Süzgeç Modeline önerilen eklentinin, modelin özgün hâliyle karşılaştırmalı olarak test edilmesi.
5. Boylamsal ayrışma. Diskalkuli ve kaygının gelişimsel yörüngelerinin aynı kohortta okul öncesinden ergenliğe izlenmesi (Carey vd., 2016; Krinzinger vd., 2009).
6. Türkiye epidemiyolojisi. Matematiğe özgü, DSM-5-TR ölçütleriyle ve dışlama kriterleri denetlenerek yürütülecek ulusal yaygınlık çalışması.
7. Eş-görülümde müdahale karşılaştırması. önceliklendirme başlığında ilkeler düzeyinde bırakılan sorunun rastgele atamalı bir tasarımla test edilmesi.
8. Ölçek standardizasyonu. mAMAS'ın (Carey vd., 2017) Türkçe geçerlik, güvenirlik ve norm çalışmasının yapılması.

Sonuç

Bu bölümün çıkış sorusu pratikti: matematikte zorlanan bir çocuğun sorunu bilişsel mi, duygusal mı? Alan yazın bu soruya üç düzeyde yanıt vermektedir.

Kavramsal düzeyde, iki olgu farklı türden şeylerdir. Gelişimsel diskalkuli tanısal bir bozukluk; matematik kaygısı boyutsal bir duygusal değişkendir. Yaygınlık oranlarını yan yana koymak bile bu asimetri nedeniyle yanıltıcıdır.

Ampirik düzeyde, ilişki gerçek ancak zayıf ve asimetriktir. Meta-analitik yakınsama kaygı–performans ilişkisini yaklaşık r = −,30 civarında sabitlemektedir; açıklanan varyansın yaklaşık %9'u. Diskalkuli kaygı riskini yaklaşık iki katına çıkarmakta, buna karşılık yüksek kaygılı çocukların %77'si normal ya da yüksek performans göstermektedir (Devine vd., 2018). Barroso ve arkadaşlarının (2021) bulgusu tabloyu tamamlar: kaygı ile performans arasındaki bağ, yaklaşık sayı sistemini ölçen görevlerde anlamlı çıkmamıştır (r = −,09; %95 GA [−,18, ,005]). Yani kaygının, diskalkulinin bulunduğu düzeyde — sayısal çekirdekte — ölçülebilir bir etki ürettiği gösterilememiştir. Bu, kesin bir "etki yok" iddiası değil, mevcut kanıtın sınırıdır.

Mekanizma düzeyinde, iki olgu ayrıştırılabilir izler bırakmaktadır. Çalışma belleğinde çift ayrışma (Mammarella vd., 2015), temel sayı işlemede farklılaşma (Maloney vd., 2010; Landerl vd., 2004) ve nöral düzeyde parietal–amigdala ayrımı (Butterworth vd., 2011; Young vd., 2012) tutarlı bir tablo oluşturmaktadır. Bölümün özgün katkısı bu izleri tek bir ayırt edici çerçevede birleştirmek ve çerçevenin sınanabilir öngörülerini açıkça formüle etmektir.

Uygulamacı için sonuç üç cümlede toplanabilir. Birincisi, tek bir gösterge yeterli değildir; karar göstergelerin birlikte oluşturduğu örüntüden çıkar. İkincisi, tanı beklenmeden müdahale başlar — her iki durumda da ilk adım nitelikli, açık ve yoğun öğretimdir (Gersten

vd., 2009). Üçüncüsü, matematiksel yetkinliği artırmak kaygıyı da azaltır (Sammallahti vd., 2023; Supekar vd., 2015); tersi yönde eşdeğer bir kanıt bulunmamaktadır.

Bölümün başındaki öğretmen gözlemine dönersek: donuklaşan, parmak sayan, sınavda boş bırakan çocuk için doğru soru “bu çocuk kaygılı mı, diskalkulili mi?” değildir. Doğru soru şudur: “Bu çocuğun sayısal çekirdeği sağlam mı, ve bunu anlamak için ne yaptım?”

Kaynakça/References

American Psychiatric Association. (2022). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5th ed., text rev.). https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425787

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, *11*(5), 181–185. https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196

Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(2), 224–237. https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.224

Barroso, C., Ganley, C. M., McGraw, A. L., Geer, E. A., Hart, S. A., & Daucourt, M. C. (2021). A meta-analysis of the relation between math anxiety and math achievement. *Psychological Bulletin*, *147*(2), 134–168. https://doi.org/10.1037/bul0000307

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860–1863. https://doi.org/10.1073/pnas.0910967107

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, *14*(12), 534–541. https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.007

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From brain to education. *Science*, *332*(6033), 1049–1053. https://doi.org/10.1126/science.1201536

Carey, E., Hill, F., Devine, A., & Szűcs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology, 6*, 1987. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01987

Carey, E., Hill, F., Devine, A., & Szűcs, D. (2017). The modified abbreviated math anxiety scale: A valid and reliable instrument for use with children. *Frontiers in Psychology, 8*, 11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00011

Caviola, S., Toffalini, E., Giofrè, D., Ruiz, J. M., Szűcs, D., & Mammarella, I. C. (2022). Math performance and academic anxiety forms, from sociodemographic to cognitive aspects: A meta-analysis on 906,311 participants. *Educational Psychology Review, 34*, 363–399. https://doi.org/10.1007/s10648-021-09618-5

Cipora, K., Santos, F. H., Kucian, K., & Dowker, A. (2022). *Mathematics anxiety—Where are we and where shall we go? Annals of the New York Academy of Sciences, 1513*(1), 10–20. https://doi.org/10.1111/nyas.14770

Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D., & Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and Brain Functions, 8*, 33. https://doi.org/10.1186/1744-9081-8-33

Devine, A., Hill, F., Carey, E., & Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. *Journal of Educational Psychology, 110*(3), 431–444. https://doi.org/10.1037/edu0000222

Devine, A., Soltész, F., Nobes, A., Goswami, U., & Szűcs, D. (2013). Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. *Learning and Instruction*, *27*, 31–39. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.02.004

Dowker, A., Cheriton, O., Horton, R., & Mark, W. (2019). Relationships between attitudes and performance in young children's mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(3), 211–230. https://doi.org/10.1007/s10649-019-9880-5

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). *Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? Frontiers in Psychology*, *7*, 508. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Eysenck, M. W., Derakshan, N., Santos, R., & Calvo, M. G. (2007). Anxiety and cognitive performance: Attentional control theory. *Emotion*, *7*(2), 336–353. https://doi.org/10.1037/1528-3542.7.2.336

Filiz, T. (2021). Matematik öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilere yönelik öğretimsel müdahalelerin öğrencilerin akademik başarılarına etkisinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi*, *22*(4), 1025–1055. https://doi.org/10.21565/ozelegitimdergisi.713496

Finell, J., Sammallahti, E., Korhonen, J., Eklöf, H., & Jonsson, B. (2022). Working memory and its mediating role on the relationship of math anxiety and math performance: A meta-analysis. *Frontiers in Psychology*, *12*, 798090. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.798090

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional

components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202–1242. https://doi.org/10.3102/0034654309334431

Görker, I., Bozatlı, L., Korkmazlar, Ü., Yücel Karadağ, M., Ceylan, C., Söğüt, C., Aykutlu, H. C., Subay, B., & Turan, N. (2017). The probable prevalence and sociodemographic characteristics of specific learning disorder in primary school children in Edirne. *Nöropsikiyatri Arşivi*, *54*(4), 343–349. https://doi.org/10.5152/npa.2016.18054

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 33–46. https://doi.org/10.2307/749455

Hill, F., Mammarella, I. C., Devine, A., Caviola, S., Passolunghi, M. C., & Szűcs, D. (2016). Maths anxiety in primary and secondary school students: Gender differences, developmental changes and anxiety specificity. *Learning and Individual Differences*, *48*, 45–53. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.02.006

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., Henik, A., Jordan, N. C., Karmiloff-Smith, A. D., Kucian, K., Rubinsten, O., Szűcs, D., Shalev, R., & Nuerk, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, *4*, 516. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516

Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, *7*(3), 164–177. https://doi.org/10.1177/002221947400700309

Krinzinger, H., Kaufmann, L., & Willmes, K. (2009). Math anxiety and math ability in early primary school years. *Journal of*

Psychoeducational Assessment, *27*(3), 206–225. https://doi.org/10.1177/0734282908330583

Kucian, K., & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European Journal of Pediatrics*, *174*(1), 1–13. https://doi.org/10.1007/s00431-014-2455-7

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *57*(3), 782–795. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.01.070

Kucian, K., McCaskey, U., O'Gorman Tuura, R., & von Aster, M. (2018a). Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children. *Translational Psychiatry*, *8*, 273. https://doi.org/10.1038/s41398-018-0320-6

Kucian, K., Zuber, I., Kohn, J., Poltz, N., Wyschkon, A., Esser, G., & von Aster, M. (2018b). Relation between mathematical performance, math anxiety, and affective priming in children with and without developmental dyscalculia. *Frontiers in Psychology*, *9*, 263. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00263

Lai, Y., Zhu, X., Chen, Y., & Li, Y. (2015). Effects of mathematics anxiety and mathematical metacognition on word problem solving in children with and without mathematical learning difficulties. *PLOS ONE*, *10*(6), e0130570. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0130570

Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, *93*(2), 99–125. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004

Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 520–540. https://doi.org/10.2307/749772

Maloney, E. A., & Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: Who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends in Cognitive Sciences*, *16*(8), 404–406. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.06.008

Maloney, E. A., Ansari, D., & Fugelsang, J. A. (2011). The effect of mathematics anxiety on the processing of numerical magnitude. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *64*(1), 10–16. https://doi.org/10.1080/17470218.2010.533278

Maloney, E. A., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2015). Intergenerational effects of parents' math anxiety on children's math achievement and anxiety. *Psychological Science*, *26*(9), 1480–1488. https://doi.org/10.1177/0956797615592630

Maloney, E. A., Risko, E. F., Ansari, D., & Fugelsang, J. (2010). Mathematics anxiety affects counting but not subitizing during visual enumeration. *Cognition*, *114*(2), 293–297. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2009.09.013

Mammarella, I. C., Hill, F., Devine, A., Caviola, S., & Szűcs, D. (2015). Math anxiety and developmental dyscalculia: A study on working memory processes. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, *37*(8), 878–887. https://doi.org/10.1080/13803395.2015.1066759

Morsanyi, K., van Bers, B. M. C. W., McCormack, T., & McGourty, J. (2018). The prevalence of specific learning disorder in mathematics and comorbidity with other

developmental disorders in primary school-age children. *British Journal of Psychology, 109*(4), 917–940. https://doi.org/10.1111/bjop.12322

Moustafa, A. A., Al-Emadi, A. A., & Megreya, A. M. (2021). The need to develop an individualized intervention for mathematics anxiety. *Frontiers in Psychology, 12*, 723289. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.723289

Mutaf-Yıldız, B., Sasanguie, D., De Smedt, B., & Reynvoet, B. (2020). Probing the relationship between home numeracy and children's mathematical skills: A systematic review. *Frontiers in Psychology, 11*, 2074. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.02074

Mutlu, Y. (2019). Math anxiety in students with and without math learning difficulties. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *11*(5), 471–475. https://doi.org/10.26822/iejee.2019553343

Mutlu, Y., & Akgün, L. (2017). Matematik öğrenme güçlüğünü tanılamada yeni bir model önerisi: Çoklu süzgeç modeli. *İlköğretim Online*, *16*(3), 1153–1173. https://doi.org/10.17051/ilkonline.2017.330247

Mutlu, Y., Olkun, S., Akgün, L., & Sarı, M. H. (Ed.). (2020). *Diskalkuli: Matematik öğrenme güçlüğü tanımı, özellikleri, yaygınlığı, nedenleri ve tanılanması*. Pegem Akademi. https://doi.org/10.14527/9786257228664

Namkung, J. M., Peng, P., & Lin, X. (2019). The relation between mathematics anxiety and mathematics performance among school-aged students: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 89*(3), 459–496. https://doi.org/10.3102/0034654319843494

Olkun, S., & Akkurt Denizli, Z. (2015). Temel sayı işleme görevleri kullanılarak matematik bozukluğu riskli öğrencilerin belirlenmesi. *Düşünen Adam: The Journal of Psychiatry and Neurological Sciences*, *28*(1), 47–57. https://doi.org/10.5350/DAJPN2015280105

Öztürk, M., Durmaz, B., & Can, D. (2019). Sayı konuşmalarının diskalkulik ortaokul öğrencilerinin sayı duyularına etkisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *27*(6), 2467–2480. https://doi.org/10.24106/kefdergi.3337

Park, D., Ramirez, G., & Beilock, S. L. (2014). The role of expressive writing in math anxiety. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *20*(2), 103–111. https://doi.org/10.1037/xap0000013

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*(1), 33–41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012

Plante, I., Protzko, J., & Aronson, J. (2010). *Girls' internalization of their female teacher's anxiety: A "real-world" stereotype threat effect? Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(20), E79. https://doi.org/10.1073/pnas.1003503107

Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2016). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, *141*, 83–100. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.07.014

Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2013). Math anxiety, working memory, and math achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development, 14*(2), 187–202. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.664593

Ramirez, G., Shaw, S. T., & Maloney, E. A. (2018). Math anxiety: Past research, promising interventions, and a new interpretation framework. *Educational Psychologist*, *53*(3), 145–164. https://doi.org/10.1080/00461520.2018.1447384

Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, *19*(6), 551–554. https://doi.org/10.1037/h0033456

Rousselle, L., & Noël, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, *102*(3), 361–395. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005

Rubinsten, O., & Henik, A. (2009). Developmental dyscalculia: Heterogeneity might not mean different mechanisms. *Trends in Cognitive Sciences*, *13*(2), 92–99. https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.11.002

Rubinsten, O., & Tannock, R. (2010). Mathematics anxiety in children with developmental dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, *6*, 46. https://doi.org/10.1186/1744-9081-6-46

Sammallahti, E., Finell, J., Jonsson, B., & Korhonen, J. (2023). A meta-analysis of math anxiety interventions. *Journal of Numerical Cognition*, *9*(2), 346–362. https://doi.org/10.5964/jnc.8401

Sarkar, A., Dowker, A., & Cohen Kadosh, R. (2014). Cognitive enhancement or cognitive cost: Trait-specific outcomes of brain stimulation in the case of mathematics anxiety. *Journal of Neuroscience*, *34*(50), 16605–16610. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.3129-14.2014

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Schmidt, S. S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis. *Developmental Science*, *20*(3), e12372. https://doi.org/10.1111/desc.12372

Shalev, R. S., Manor, O., & Gross-Tsur, V. (2005). Developmental dyscalculia: A prospective six-year follow-up. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *47*(2), 121–125. https://doi.org/10.1017/s0012162205000216

Sidney, P. G., Scheibe, D. A., Zahrn, L., Brown, K. G. I., & Thompson, C. A. (2025). Developing effective interventions for math anxiety. *Current Directions in Psychological Science*. https://doi.org/10.1177/09637214241300111

Suárez-Pellicioni, M., Núñez-Peña, M. I., & Colomé, À. (2016). Math anxiety: A review of its cognitive consequences, psychophysiological correlates, and brain bases. *Cognitive, Affective, & Behavioral Neuroscience*, *16*(1), 3–22. https://doi.org/10.3758/s13415-015-0370-7

Supekar, K., Iuculano, T., Chen, L., & Menon, V. (2015). Remediation of childhood math anxiety and associated neural circuits through cognitive tutoring. *Journal of Neuroscience*, *35*(36), 12574–12583. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.0786-15.2015

Szűcs, D., Devine, A., Soltész, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, *49*(10), 2674–2688. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.06.007

von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*(11), 868–873. https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x

World Health Organization. (2022). *International classification of diseases for mortality and morbidity statistics* (11. revizyon). https://icd.who.int/

Young, C. B., Wu, S. S., & Menon, V. (2012). The neurodevelopmental basis of math anxiety. *Psychological Science*, *23*(5), 492–501. https://doi.org/10.1177/0956797611429134

Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The relationship between math anxiety and math performance: A meta-analytic investigation. *Frontiers in Psychology*, *10*, 1613. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01613

BÖLÜM 3

TAHMİN ET-ÖLÇÜM YAP-KARŞILAŞTIR-YARGIDA BULUN!

MİHRİBAN HACISALİHOĞLU KARADENİZ[1]

1. Giriş

Gerçek hayat durumlarında sıklıkla kullanılan ölçmenin tarihi yüz binlerce yıl önce yaşamış Çin, Mısır ve Babil uygarlıklarından gelmektedir (Baki, 2020). Ölçme, bir nesnenin veya bir olayın ölçülebilen bir özelliğine sayısal değer vermeyi ifade eden matematiksel bir süreçtir. Sayısal değerler nesnenin içinde niteliği betimleyen belirli bir birimin kaç kere olduğunun belirlenmesidir (Van den Heuvel Panhuizen & Elia, 2011). Ölçme, çevredeki nesnelerin ve olayların anlamlandırılmasına yardımcı olduğu gibi matematiğin gerçek yaşamla olan ilişkisini göstermesinin (Baturo & Nason, 1996) yanı sıra sayılar ve geometri arasındaki ilişkinin de temelini oluşturmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Ölçme kavramı; uzunluk, alan, çevre, para, zaman, kütle, hacim gibi kavramlardan oluşmaktadır (Baykul, 2020). Ölçme aynı zamanda kesir, rasyonel sayı, ondalık gösterim ve oran gibi matematiksel kavramların

[1] Prof. Dr., Giresun Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid: 0000-0002-7836-6868

incelenmesinde de temel oluşturmaktadır (NCTM, 2006). Bu nedenle matematiksel kavram ve becerilerin geliştirilmesinde, günlük hayat ile matematiği ilişkilendirmede ölçme konusunun öğretimi öğrenciler için oldukça anlamlı görülmektedir (Tan Şişman & Aksu, 2009).

Alan ve Çevre Ölçme

Matematik öğretiminde çevre ve alan kavramları, öğrencilerin okul öncesi çağlarından itibaren karşılaştıkları temel geometrik konular arasındadır. Alan, bir düzlem parçasının büyüklüğü olup alan ölçümü ise alanda birim kabul edilen bir düzlem parçasından kaç tane olduğunun bulunmasıdır (Baykul, 2020). Alan, herhangi bir bölge içindeki iki-boyutlu uzay olarak tanımlanmaktadır (Van de Walle, et al., 2014). Alan, bir geometrik şeklin kapladığı yüzey miktarını ifade eder ve genellikle belirli matematiksel yöntemlerle hesaplanır. Örneğin, dikdörtgenin alanı, uzunluk ve genişlik değerlerinin çarpımı ile belirlenir (Şimşek & Boz, 2015). Aslında alan kavramı öyle sıradan bir kuralla ifade edilecek, basite indirgenecek bir kavram değil aksine öğrencilerin mekânsal ilişkileri görmesine ve uzamsal düşünme becerilerinin gelişmesine katkı sağlarken, geometrik kavrayışlarını da derinleştiren önemli bir kavramdır. Alan, bir düzlem parçasının büyüklüğü, alan ölçümü ise alanda birim olarak seçilen bir düzlem parçasından ne kadar olduğunun belirlenmesi işlemidir (Baykul, 2020). Alan ölçümü ise, iki boyutlu bir bölgenin sınırları içerisinde kalan bölge ya da yüzeyin miktarını sayısal olarak ifade etme işlemidir (Cathcart, et al., 2011). Dolayısıyla alan ölçümüne ait temel kavramların öğrencilerin zihninde geliştirilebilmesi için öğretmenlerin, öğrencileri farklı birimlerle ölçüm yapmaya uygun ortamlar hazırlaması ve farklı ölçme durumlarıyla karşılaştırması oldukça önemlidir. Bu duruma örnek vermek gerekirse; çocuk parkının planlanması, oturduğumuz evin ya da sınıfın alanının hesaplanması gibi günlük hayat durumlarından alınan kesitlerin ders

içeriklerine uyarlanmasının, öğrencilerin bu matematiksel kavramları daha anlamlı biçimde öğrenmelerini sağladığını ortaya koymuştur (Huang & Li, 2015). Çevre, bir şeklin dış sınırlarını oluşturan kenarların toplam uzunluğu olarak tanımlanırken çevre ölçümü ise, iki boyutlu bölgenin etrafındaki mesafe miktarını sayısal olarak belirleme işlemidir (Davis, et al., 2017). Daha açık olarak, kapalı bir şeklin bütün kenarlarının uzunluklarının toplamı çevresini belirler. Örneğin, bir dikdörtgenin çevresi, uzun ve kısa kenarlarının toplamı şeklinde hesaplanmaktadır.

Tahmin Nedir ve Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli İlkokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda Nasıl Ele Alınıyor?

Tahmin, zihinden hesaplama yaparak cevabın yaklaşık değerini bulmak olarak da tanımlanmaktadır (Reys & Bestgen, 1981). Tahmin becerisi, matematiksel akıl yürütmeyi gerektiren önemli bir beceri olduğundan (Segovia-Alex & Castro, 2009), ölçümü yapılacak nesnenin gerçek değerinin bilinmediği durumlarda yapılan bir eylem olarak ölçmeye dayanan yaklaşık bir değer bulma süreci biçiminde tanımlanmaktadır (Enloe, et al., 2000; Micklo, 1999). Tahmin becerisi, öğrencilerin günlük yaşam problemlerine karşı pratik çözümler üretmeleri ve sayısal muhakeme yeteneklerini kullanmaları açısından önemlidir. Günlük yaşamda karşılaşılan birçok durumda bireylerden kesin hesaplama yapmaksızın tahmin yürütmeleri beklenmektedir. Market ya da pazar alışverişinden yemek pişirmeye, yolculuk süresi planlamasından evdeki eşyaların yer ve konumunu belirlemeye kadar çeşitli alanlarda kullanılan tahmin becerileri, pratik çözümler üretme sürecinde önemli rol oynamaktadır. Bu beceri yalnızca günlük yaşama katkı sağlamakla kalmayıp matematiksel düşünmenin gelişimine de katkıda bulunmaktadır. Özellikle ilkokul düzeyinde tahmin becerilerinin erken yaşlarda kazandırılması, öğrencilerin problem çözme, mantıksal akıl yürütme ve karar verme gibi üst düzey bilişsel becerilerinin gelişmesine katkı sağlamaktadır.

Ölçümü tahmin ederken öğrenci neyi ölçeceğine odaklanır ve günlük hayatta kullandığı standart ölçme birimlerine aşina olur. Bu nedenle bir nesneye dair ölçümü tahmin etme, ölçmeyi anlamayı kolaylaştırmakla kalmaz, aynı zamanda öğrencilerde kıymetli bir hayat becerisinin gelişmesini sağlar (Baykul, 2009). Öğretim programında (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) ölçülecek nesnenin niteliğinin seçilmesi, karşılaştırma ve sıralama yapma, standart olmayan birimlerin kullanımının ardından standart birimler kullanarak ölçme yapma, edinilen bu bilgileri uygulama ve yorumlama gibi becerilerin kazandırılması hedeflenmiştir. Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli İlkokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda da matematiksel temsil, matematiksel muhakeme, matematiksel problem çözme, veri ile çalışma ve veriye dayalı karar verme, matematiksel araç ve teknoloji ile çalışma becerisi gibi alan becerilerine yer verilmektedir (MEB, 2024). Bu bağlamda Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli (TYMM) vizyonu, öğrencilerin yalnızca bilgiye ulaşan edilgen ögeler değil; bilgiyi aktif olarak yaşam temelli öğrenme yaklaşımları ile uyumlu şekilde öğrenci merkezli bir anlayış çerçevesinde yapılandırılan, problem çözen, gözleme dayalı tahmin eden, mevcut bilgiye/veriye dayalı tahmin eden, sorgulayan ve yaşamla ilişkilendiren öğrenme-öğretme uygulamalarının birer özne olmasını hedeflemektedir (MEB, 2025).

Tahmin etme becerisi güncel öğretim programında, kavramsal becerilerden biri olan "gözleme dayalı tahmin etme" ve içerik çerçevesinde de "geometrik şekillerin çevre uzunluklarını tahmin etme" biçiminde karşımıza çıkmaktadır. İlkokul Matematik Dersi 3. Sınıf öğretim programında "Nesnelerin Geometrisi" temasında öğrencilerin matematiksel araç ve gereç kullanarak geometrik şekiller çizebilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca bu temada öğrencilerin standart ve standart olmayan uzunluk ölçme araçları ile şekillerin çevre uzunluğunu tahmin edebilmesi ve tahminini ölçüm sonucu ile karşılaştırabilmesi amaçlanmaktadır. Kısaca güncel

program, öğrencilerin geometrik şekillerin çevre uzunluğunu bulmada matematiksel araçlardan yararlanabilmesini; standart olmayan ölçü birimini kullanarak şeklin alanına ilişkin tahminde bulunabilmesini; tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunabilmesine teşvik etmektedir. Benzer olarak 4. Sınıf öğretim programında aynı temada öğrencilerin geometrik şekillerin çevre uzunluğunu bulmada matematiksel araç ve teknolojiden yararlanabilmesi; standart olmayan ölçü birimini kullanarak şeklin birim cinsinden alanına ilişkin tahminde bulunabilmesi; tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunabilmesi beklenmektedir (MEB, 2024).

Bir nesnenin boyutu; öncelikle karış, parmak, ayak, adım veya kulaç gibi standart olmayan doğal ölçme birimleriyle tahmin edildikten sonra defter, kitap, mendil, silgi, A4 kâğıdı, post-it gibi araçlarla kaplama, eşleştirme veya doldurma gibi yöntemler kullanılarak metre ve santimetre gibi standart ölçme birimleriyle ölçülür (Van de Walle, et al., 2014). Bir başka deyişle ölçme süreci, nesnenin uygun birimle karşılaştırılması temeline dayanır. Bu doğrultuda yapılan tahminler, sürecin sonunda elde edilen gerçek ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırılarak öğrencilerin kendi tahminleri üzerine düşünmesi ve tahminine ilişkin yargıda bulunması sağlanır (MEB, 2024).

Şekillerin Çevre Uzunluğunu ve Alanlarını Tahmin Etmeye İlişkin Zorluklar ve Kavram Yanılgıları

Geometri öğretiminde şekillerin çevre uzunluğu ve alanlarını bulma ya da tahmin etme ve tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunmada öğrencilerin birtakım zorluklarla karşılaştıkları bilinmektedir. Şekillerin çevre uzunluğu ve alanlarını tahmin etme ve tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunma eyleminden

bahsetmeden önce çevre ölçümüne dair hesabının alan ölçümü hesabıyla karıştırılması, çevreyi hesaplarken alışılagelmiş basit formüllerin ilk akla gelmesi ve alan ile çevre arasındaki ayrımın tam olarak anlaşılamaması gibi durumlar olduğunu belirtmekte fayda vardır (Zacharos, 2006). Daha açık bir biçimde söylenecek olursa, öğrenciler, çevreleri eşit olan geometrik şekillerin alanlarının da eşit olduğunu düşünmektedirler (Winarti, Amin, et al., 2012; Rickard, 2005). Dolayısıyla pek çok araştırmada öğrencilerin şekillerin çevre uzunluğunu ve alanlarının ölçümünde ne yapacağını kestirememe ya da kavramları anlama ve uygulamada birtakım zorluklarla karşı karşıya kalma, bu iki kavramı sıklıkla birbirine karıştırma durumlarıyla baş etmekte zorlandıkları açığa çıkmıştır (Dağlı & Peker, 2012; Geliçi, 2022; Outhred & Mitchelmore, 2000). Bu durumun bir sonucu olarak, öğrencilerin şekillerin çevre uzunluğunu bulmada ve bu uzunlukları karşılaştırmada, bir şeklin çevre uzunluğunu ve alanını tahmin etmede zorluk yaşadıkları, çevrenin sabit olmadığına, değişebilirliğine ve alanın korunumuna ilişkin kavram yanılgılarına sahip oldukları, birim kareyi alan ölçme birimi olarak ele almadıkları, çevre ve alan kavramlarını birbirine karıştırdıkları ortaya çıkmıştır (Aydın-Karaca, 2014). Bu bağlamda eğitim kademeleri farklılaşsa da genel olarak öğrencilerin tahmin becerilerinin istenilen düzeyde olmadığı düşünülmektedir (Dorko & Speer, 2015; Kumandaş & Gündüz, 2014; Şişman & Aksu, 2016). Matematik başarısı yüksek olan öğrencilerin tahmin becerilerinin de gelişmiş olduğu görülmekle birlikte, bu durum onların özellikle uzunluk, alan ve hacim ölçümü konularında herhangi bir öğrenme zorluğu yaşamayacağı anlamına gelmemektedir (Chappell & Thompson, 1999; Martin & Strutchens, 2000). Dolayısıyla öğretim sürecinde yaşanan bu zorlukların açıkça ortaya konulması; öğrencilerin şekillerin çevre uzunluğunu ve birim cinsinden alanlarını tahmin etme, bu tahminleri ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırma ve kendi tahminleri üzerine değerlendirmelerde

bulunabilmelerini sağlayarak öğrenme sürecine önemli bir katkı sunmaktadır.

Tahmin çeşitlerinden işleme dayalı tahmin, matematiksel işlem ve problemlerin sonucunu bulmada hesaplama yapmadan, en uygun ve gerçeğe yakın sonuçlar verilmesi (Dowker, 1992), ölçüme dayalı tahmin ise bir nesnenin ölçülerinin ölçme aracı kullanılmadan yaklaşık olarak belirlenmesi sürecidir (Budak, 2019). Ölçmeye dayalı tahmin, öğrencilerin uzunluk, ağırlık, alan, hacim, zaman gibi ölçü birimlerine ilişkin yaklaşık değerler öngörebilmesini ifade eder (Sowder, 1992). Bu tür tahminler, öğrencilerin matematiksel kavramları sezgisel olarak anlamlandırmalarına olanak sağlar. Ancak özellikle Türkiye'de yapılan çalışmaların pek çoğunun işleme dayalı tahmin becerisine odaklandığı; ölçmeye dayalı tahmin becerilerinin sınırlı sayıda incelendiği görülmektedir (Akkuşçi, 2019; Aydoğdu, 2020; Satan, 2020). Ölçmeye dayalı tahminle ilgili yapılan çalışmalarda öğrencilerin çevre ve alan hesabı konularında kavram yanılgısına sahip olmaları ya da ölçüm sırasında zorluk yaşamaları da bu konuda eksikleri olduklarını ortaya koymaktadır (Aydoğdu, 2020).

İlkokul düzeyindeki öğrencilerin şekillerin çevre uzunluğunu ve ölçü birimleri cinsinden alanlarını tahmin etmede dolayısıyla ilerleyen süreçte bunları hesaplamada sıkça hata yaptıkları ve bu hataların analizinin öğretimsel açıdan kritik öneme sahip olduğu vurgulanmaktadır. Öğrencilerin, şekillerin çevre uzunluğu ve ölçü birimleri cinsinden alanını tahmine dayalı bulmada ön öğrenmelerinin eksiksiz ve güçlü olması; bu kavramların bir üst sınıfa taşındığında öğretilen kavramla ilişkilendirilebilmesi anlamına gelmektedir (Outhred et al., 2003; Outhred & Mitchelmore, 2000). Dolayısıyla gerçek hayat problemlerini çözmede uygun stratejiyi bulma, muhakeme yapabilme, çıkarımda bulunabilme ve yorumlayabilme nitelikli bir tahmin becerisiyle doğrudan ilişkilidir. Bu doğrultuda, tahmine dayalı ders etkinlikleri

tasarlanırken öğrencilerin kavramakta zorlandıkları ölçme konusuna ilişkin örneklere daha fazla yer verilmesi, zengin öğrenme ortamlarının sağlanması önerilebilir (Çınar & Biber, 2024). Diğer taraftan öğretmen adaylarının da şekillerin çevre uzunluğunu ve alan ölçümüne ilişkin bilgi düzeylerinin sınırlı olmasının, öğrencilerin yanlış/eksik öğrenmelerine zemin hazırlayarak zorluk yaşama/kavram yanılgısına sahip olma olasılıklarını artırdığını ortaya koymaktadır (Runnalls & Hong, 2017; Şimşek & Boz, 2015). Dolayısıyla öğretmenlerin yanı sıra öğretmen adaylarının da çevre ve alan ölçme konularındaki pedagojik yeterliliklerinin geliştirilmesine ihtiyaç duyulduğunu (Küçük-Demir, 2022), dolayısıyla öğrencilerin sahip oldukları zorluk/kavram yanılgısının da öğretmenlerin eksik ya da yetersiz pedagojik alan bilgilerini yansıtmalarından kaynaklı olduğunu düşündürmektedir.

Maarif Modeli İlkokul Matematik Dersi 3. Sınıf Programında Öğrenme-Öğretme Uygulamaları

Çalışmada ulaşılmaya çalışılan öğrenme çıktısı ve süreç bileşenlerine ilişkin bilgiler aşağıda sunulmuştur:

MAT.3.3.4. Standart olmayan ve standart ölçme araçları ile şekillerin çevre uzunluğunu tahmin edebilme

Öncelikle standart olmayan uzunluk ölçme araçlarına yönelik hatırlatmalar yapılır. Nesnelerin ya da geometrik cisimlerin ilgili yüzeyinin çevresinin ölçülmesine dikkat çekilir. Çevre uzunluğu ölçülmesi planlanan cismin çevre uzunluğu ölçümüne konu olan ilgili yüzeyinin hangi şekle karşılık geldiğini belirlemeye yönelik etkinlikler yapılır. Örneğin bir konserve kutusunun tabanının çevre uzunluğu için çembere, bir sıra ya da kitabın üst yüzeyinin çevre uzunluğu için dikdörtgene vurgu yapılır. Öğrencilerden nesnenin çevre uzunluğuna göre uygun standart olmayan uzunluk ölçme araçları (parmak, karış, kâğıt, kalem, silgi vb.) kullanarak çevre uzunluğu hakkında tahminde bulunmaları istenir. Belirlenen

standart olmayan uzunluk ölçme araçları ile ölçüm yapılır. Az, çok, eşit, uzun, kısa, büyük, küçük gibi ifadelerden uygun olanı seçilerek tahmin ve ölçüm sonucu karşılaştırılır, tahminlerinin doğruluğuna ilişkin yargıda bulunmaları sağlanır. Ardından nesnenin yan yüzeyinde bir noktadan başlatılarak etrafına bir ip dolandırılarak başlangıç noktasına tekrar geldiğinde ip dolama faaliyeti sonlandırılır. Bu faaliyetten sonra standart uzunluk ölçme aracı ile ipin uzunluğu ölçülerek ipin uzunluğu belirlenir. Böylece nesnenin ilgili yüzeyine karşılık gelen şeklin çevre uzunluğunu fark etmeleri sağlanır. Bu süreçte çeşitli standart olmayan ya da standart uzunluk ölçme araçları kullanılır ve farklı şekiller üzerinden ölçüm yapılır. Araç gerecin yanı sıra görseller üzerinden geometrik şekillerin çevre uzunlukları hesaplanır (MEB, 2024).

Maarif Modeli İlkokul Matematik Dersi 4. Sınıf Programında Öğrenme-Öğretme Uygulamaları

Çalışmada ulaşılmaya çalışılan öğrenme çıktısı ve süreç bileşenlerine ilişkin bilgiler aşağıda sunulmuştur:

MAT.4.3.4. Standart olmayan ölçü birimleri cinsinden şekillerin alanlarını tahmin edebilme

Öğrencilerden boş bir zeminin (dikdörtgen ve kare gibi) kare, dikdörtgen ve üçgen gibi geometrik şekillerden birisinin sürekli ve boşluk bırakmayacak şekilde kaplanması istenir. Öğrencilerden zeminin geometrik şekil cinsinden kaplanan miktarı hakkında yorum yapması beklenir. Bu kaplanan zeminin alan olduğu, kullanılan şekillerin de alanın birimi olduğunun fark edilmesi sağlanır. Bu süreçte öğrencilerin de sürece dâhil olabileceği, ölçüme ve tahmine dayalı çeşitli etkinlikler yapılır. Örneğin öğrencilerden bir bahçe tasarlamaları istenir. Düzenli veya düzensiz şekle sahip bu bahçenin alanını belirledikleri uygun bir şekille kaplayarak bahçenin kaç şekil ile kaplandığını bulmaları sağlanır. Alan ölçme çalışmaları kareli kâğıda çizilen şekillerle tekrar edilmesi sağlanarak öğrencilerin

süreçte öğrenmiş olduklarını pekiştirmeleri sağlanır. Örneğin kareli kâğıda çizilen geometrik şekillerin alanı hesaplanırken renkli kalemler kullanılır ve her birim kare renkli kalemle taranır. Taranan birim kareler birlikte sayılır ve kaç birim kare olduğunun yazılması istenir. Her bir kenarının uzunluğu bir birim olan kareye birim kare denildiğine göre bu süreçte farklı büyüklüklerde birim karelere yer verilir. Şekillerin kenar ve köşe özelliklerinin yorumlanmasına, matematiksel araç ve teknolojiden yararlanılmasına ve şekillerin alanlarının standart olmayan ölçü birimleri cinsinden tahmin edilmesine yönelik performans görevi verilebilir (MEB, 2024).

Çalışmanın Amacı ve Önemi

Bu çalışmada, şekillerin çevre uzunluğu ve birim cinsinden alanlarını tahmin etme süreçlerinin ele alındığı sınıf içi uygulamalarda; standart olmayan ölçme araçlarıyla bu büyüklükleri tahmin etmeye, standart ölçme araçları yardımıyla tahminleri ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak bunlara ilişkin yargılarda bulunmaya odaklanan etkinliklerin hazırlanması ve öğretmenlerin bunlardan yararlanması amaçlanmıştır.

Çalışmada Maarif Modeli ilkokul matematik dersi öğretim programında ele alınan 3. Sınıf kazanımı; “standart olmayan/standart ölçme araçları ile şekillerin çevre uzunluğunu tahmin edebilme” biçimindedir. İlgili kazanımın açıklamalarına bakılacak olursa; standart olmayan ve standart uzunluk ölçme araçlarına ilişkin deneyimini, tahmine konu olan şeklin çevre uzunluğu ile ilişkilendirebilir. Belirlenen standart olmayan ve standart uzunluk ölçme aracına göre çevre uzunluğuna ilişkin tahminde bulunarak tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunmasının gerektiği ifade edilmektedir (MEB, 2024). Çalışmada ele alınan diğer sınıf düzeyi olan 4. Sınıf kazanımı “standart olmayan ölçü birimleri cinsinden şekillerin alanlarını tahmin edebilme” biçiminde ele alınmıştır. İlgili kazanımın

açıklamaları da verilecek olursa; standart olmayan ölçü birimleri cinsinden şekillerin alanlarını tahmin edebilme ve standart olmayan ölçü birimlerine ilişkin deneyimini, tahmine konu olan şeklin alanıyla ilişkilendirir. Dolayısıyla belirlenen standart olmayan ölçü birimini kullanarak şeklin alanına ilişkin tahminde bulunarak tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunmasının gerektiği ifade edilmektedir (MEB, 2024).

Öğrencilerin geometrik şekillerin çevre uzunluğunu ölçmede matematiksel araç ve teknolojiden yararlanabilmesini; standart olmayan ölçü birimini kullanarak şeklin alanına ilişkin tahminde bulunabilmesini; tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak yargıya varabilmesini amaçlayan bu çalışmada, Nesnelerin Geometrisi temasına ait 3. Sınıf ve 4. Sınıf düzeyinden seçilen kazanımlar doğrultusunda hazırlanan etkinlikler aşağıda sunulmuştur:

2. Etkinlik Planı I

Dersin Adı: Matematik

Sınıf Düzeyi: 3.sınıf

Tema No: 4.

Tema Adı: Nesnelerin Geometrisi (1)

Öğrenme Çıktısı ve Süreç Bileşenleri:

MAT.3.3.4. Standart olmayan ve standart ölçme araçları ile şekillerin çevre uzunluğunu tahmin edebilme

a) Standart olmayan ve standart uzunluk ölçme araçlarına ilişkin deneyimini, tahmine konu olan şeklin çevre uzunluğu ile ilişkilendirir.

b) Belirlenen standart olmayan ve standart uzunluk ölçme aracına göre çevre uzunluğuna ilişkin tahminde bulunur.

c) Tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunur.

Öğrenme-Öğretme Yöntem/Teknikleri: İşbirlikli öğrenme stratejisi, sunuş yoluyla öğrenme stratejisi, aktif öğrenme, anlatım yöntemi, soru-cevap yöntemi, problem çözme yöntemi, örnek olay yöntemi, tartışma yöntemi, grup çalışması, keşfederek öğrenme, Philips 66 tekniği, kart gösterme tekniği.

Kullanılan Eğitim Teknolojileri/Araç ve Gereçler: Kare pano, ataç, cetvel, çubuk, kâğıt, kalem, renkli çubuk, karton.

Ön Hazırlık/Giriş:

Bu bölümde öğrencilerin bireysel ve grup olarak çalışmaları planlanmıştır.

Giriş aşamasında İlkokul Matematik Dersi Öğretim Programı (1, 2, 3 ve 4.Sınıflar) TYMM'de yer alan Öğrenme Öğretme Uygulamaları kapsamında aşağıdaki aşamalara yer verilecektir.

1. Öncelikle standart olmayan uzunluk ölçme araçlarına yönelik hatırlatmalar yapılır.
2. Öğrencilerden nesnenin çevre uzunluğuna göre uygun standart olmayan uzunluk ölçme araçları ve doğal ölçme araçları (parmak, karış, ayak, kalem, silgi vb.) kullanarak çevre uzunluğu hakkında tahminde bulunmaları istenir.
3. Belirlenen standart olmayan uzunluk ölçme araçları ile ölçüm yapılır.
4. Nesnelerin (1) ya da geometrik cisimlerin (2) ilgili yüzeyinin çevresinin ölçülmesine dikkat çekilir.
5. Çevre uzunluğu ölçülmesi planlanan geometrik cismin çevre uzunluğu ölçümüne konu olan ilgili yüzeyinin hangi geometrik şekle karşılık geldiğini belirlemeye yönelik uygulamalar yapılır. Örneğin bir konserve

kutusunun tabanının çevre uzunluğu için çembere, bir sıra ya da kitabın üst yüzeyinin çevre uzunluğu için dikdörtgene vurgu yapılır.

6. Nesnenin ilgili yüzeyine karşılık gelen geometrik şeklin çevre uzunluğunu fark etmeleri sağlanır.
7. Az, çok, eşit, uzun, kısa, büyük, küçük gibi ifadelerden uygun olan seçilerek tahmin ve ölçüm sonucu karşılaştırılır. Tahminlerinin doğruluğuna ilişkin yargıda bulunmaları sağlanır.
8. Süreçte farklı standart olmayan ya da standart uzunluk ölçme araçları kullanılır ve farklı geometrik şekiller üzerinden ölçüm yapılır.
9. Araç gerecin yanı sıra görseller üzerinden geometrik şekillerin çevre uzunlukları hesaplanır.
10. Öğrencilerin yaptıkları tahmin ile ölçüm arasındaki fark azalana kadar çeşitli uygulamalar yapılır.
11. Tahmini ile ölçüm sonucu arasında büyük fark olan öğrenciler sabırlı olmaları yönünde teşvik edilir.

Bu açıklamalar göz önünde bulundurulup ilk olarak aşağıdaki etkinlik ve sonrasında Örnek Olay 1 kullanılır.

Etkinlik: Bedenimizdeki Ölçme Araçları

Amaç: Kulaç, karış, adım, ayak ve parmak gibi doğal ölçme birimlerini fark etmek ve bu birimleri nesnelerin çevrelerini ölçme ile ilişkilendirmek.

Tahmin Becerisinin Ele Alınma Biçimi: Nesnenin büyüklüğüne uygun standart olmayan ölçme aracını seçme ve kendi vücut ölçme araçlarını referans alarak çevre uzunluğunu tahmin edebilme.

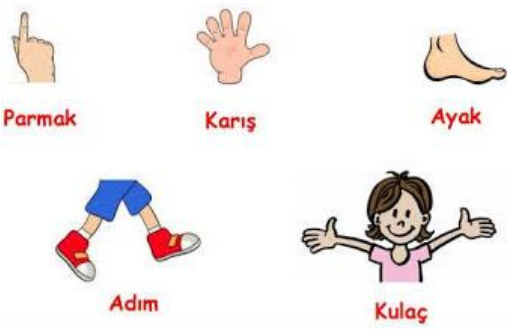
Uygulama: Tahtaya 5 farklı nesne görseli (Sıra yüzeyi, silgi kapağı, yazı tahtası, defter kapağı, halı) asılır.

Resim 1 Nesne görselleri



Kaynak: Google-Görseller

Resim 2 Standart olmayan ölçme araçları görseli



Kaynak: URL-1

Öğretmen kendi vücut birimlerini göstererek "Metre yokken bu ölçme araçları kullanılıyordu. Sizce sıra yüzeyi, silgi kapağı, yazı tahtası, defter kapağı, halıdan hangisinin çevresini parmak ile, hangisini karış ile, hangisini kulaç ile ölçmek en kolay olur?" diye sorar. Öğrencilerin fikirleri dinlenir. Öğrenciler birimleri eşleştirdikten sonra öğretmen sıranın üst yüzeyini gösterir: "Sizce kendi karışınızla bu sıranın çevresi kaç karış gelir?" der. Öğrenciler

tahminlerini söyler, ardından sırayla kendi karışlarıyla sıralarının çevresini ölçerler, sonuçlarını arkadaşlarıyla paylaşırlar ve karşılaştırırlar. Ardından öğretmen aşağıda verilen Örnek Olayı öğrencilere sunar.

Örnek Olay ((1) Nesnelerin ilgili yüzeyinin çevresinin ölçülmesine dikkat çekme):

Ahmet'in babası, ders çalışma sürecini planlamasını kolaylaştırmak için Ahmet'e bir kare pano alır. Kare panoya, ödevlerini, ders programını, planlamalarını asması için raptiyeler ve ataçlar verir. Ahmet, bu panoyu gördüğünde çok sevinir ve odasındaki duvara asar. İlk iş olarak, ders programını bir raptiye yardımıyla panosuna asar. Gruplandırarak ataç ile bir araya getirdiği ödevleri ise ders programının yanında panoda yerini alır. O anda Ahmet, kare panonun etrafına yatay olarak konumlandırdığı ataçları dizdiğinde kaç atacın gerekeceğini merak etmiştir. Sorusuna cevap bulabilmek için panoyu ve ataçları alarak babasının yanına gider. Babası, "Tahmin et bakalım." der.

Sizce Ahmet'in, panonun etrafında kaç ataç kullanacağına dair tahmini ne olabilir?

Resim 3 Kare pano ve ataçlar



Kaynak: Google-Görseller

Örnek olay öğrencilere yöneltilerek, panonun etrafında kaç ataç kullanılacağına dair tahminleri sırasıyla alınır. Sonrasında

aşağıda verilen problem durumu ve Philips 66 öğretim tekniği uygulamasıyla devam edilir.

Öğretmene Not: Sınıftaki tüm öğrencilerin örnek olay yönteminin uygulamasına aktif katılım göstermeleri sağlanmalıdır. Yapılan uygulamalarla öğrencilerin kavramlara dair ilgi ve merak duymalarını sağlamak, günlük hayatla ilişkilendirmek amaçlandığından sürece katılım önemlidir. Örnek olayın uygulamasında; öğrenciler verilen örnek olayı okur, sorunu tanımlar ve bireysel çözümler düşünür. Küçük gruplar hâlinde fikir alışverişi yapılır. Öğretmen kontrolünde öğrencilerin neden-sonuç ilişkileri ve çözümleri tartışılır. Ortak bir karara varılır.

(2) Geometrik cisimlerin ilgili yüzeyinin çevresinin ölçülmesine dikkat çekme:

Öğrencilere, "Bir karınca bir kutu üzerine çıkıp o kutunun bir kenarına ait bir köşeden başlayıp etrafını bir tur dolanmak istiyor. Sizce bu karınca kutunun etrafında bir tur dolanırken kaç karış boyu yol yürür? Tahmin edelim." sorusu yönlendirilir. Öğretmen öğrencilere, kutunun etrafının kaç karış ile ölçülebileceğinin hangi geometrik şekle karşılık geldiğini belirlemeye yönelik olarak kutunun üst yüzeyine dikkat etmeleri gerektiğini söyler. Sonrasında öğretmen, öğrencilerin problem durumuna dair tahminlerini oluşturmak üzere Philips 66 tekniğini kullanır. Öğrenciler altışar kişilik gruplara ayrılır. Her grup kendi içinden bir sözcü ve yazıcı seçer. Sözcü, grubun aldığı kararı sınıfa iletir, yazıcı ise notları alır. Problem durumu 6 dakika boyunca tartışılır. Sürenin sonunda her grubun sözcüsü, elde ettikleri tahminleri tüm sınıfa sınar. Öğretmen bu tahminleri tahtaya yazar ve bir tartışma ortamı oluşturulur. Böylelikle ele alınan öğrenme çıktısı bağlamında "Nesnelerin ya da geometrik cisimlerin ilgili yüzeyinin çevresinin ölçülmesine dikkat çekme" adımı tamamlanmış olur.

Öğretmene Not: Etkinliğin giriş bölümünde yer verilmesi planlanan Philips 66 tekniğine yönelik olarak tartışma tekniği uygulanırken, konunun dışına çıkılmamasına, dersin asıl amacından uzaklaşılmamasına dikkat edilmelidir.

İşleniş:

Bu bölümde öğrencilerin bireysel ve grup olarak çalışmaları planlanmıştır.

Bu aşamada belirlenen standart olmayan uzunluk ölçme araçları ile gerçek ölçüm yapılır ve tahmin ile ölçüm sonuçları karşılaştırılarak öğrencilerin sonuçlara varmaları sağlanır. Ardından nesnenin yan yüzeyinde bir noktadan başlatılarak etrafına bir ip dolandırılarak başlangıç noktasına tekrar geldiğinde ip dolama sonlandırılır. Bu uygulamadan sonra standart uzunluk ölçme aracı ile ipin uzunluğu ölçülerek ipin gerçek uzunluğu belirlenir. Böylece öğrencilerin nesnenin ilgili yüzeyine karşılık gelen geometrik şeklin çevre uzunluğunu fark etmeleri sağlanır.

Öğretmene Not: Öğrencilerin yaptıkları tahmin ile ölçüm arasındaki fark azalana kadar uygulamalar devam etmelidir. Bu süreçte tahmini ile ölçüm sonucu arasında büyük fark olan öğrenciler sabırlı olmaları yönünde teşvik edilir.

İlgili açıklamalar göz önünde bulundurularak aşağıda uygulama adımları verilen etkinlik öğrencilere yöneltilir. Amaç, öğrencinin elindeki bildiği bir uzunluğu (referans) hedef nesneyle karşılaştırabilmesini sağlamaktır.

1. Öğretmen, sınıfa özdeş çubuklar getirir. Bu çubukların uzunluğunu (10 cm) cetvel ile ölçerek öğrencilere gösterir. Her öğrencinin eline 10 cm uzunluğunda mavi birer çubuk verir. Bu çubukların “referans çubuğu” olduğunu söyler.
2. Öğretmen tahtaya büyük bir kare pano asar. Önce bu mavi çubuğu panonun bir kenarının üzerine koyar: “Çocuklar, bu

mavi çubuğun boyunu ölçtük, 10 cm olarak belirledik. Bu panonun sadece bu kenarı, elimizdeki çubuktan yaklaşık kaç tane eder?" diye sorar. (**Tahmin et**)

3. Öğrencilerin soruya ilişkin tahminleri alınır. Öğretmen, öğrencilerin tahminlerini dinledikten sonra *"Bu panonun etrafını (4 kenarını) bu çubuklar ile kaplamak istersek, bu çubuktan toplam kaç taneye ihtiyacı olur?"* diyerek öğrencilerin ölçme deneyimini, hedef şeklin tüm çevresiyle ilişkilendirmesini sağlar. Bu sayede, çevre ölçme kavramı öğrencilere hissettirilmiş olur.
4. Bir şeklin çevresi ile ilgili öğrencilere, "Çevre bir şeklin ya da nesnenin etrafıdır. Bir şeklin veya nesnenin kenar uzunluklarının toplamına o şeklin çevre uzunluğu denir." bilgisi verilir.
5. Tahtada yer alan pano, öğrencilerde yer alan mavi çubuklar ile kaplanır ve çevresinde toplam kaç tane mavi çubuk olduğu belirlenir. (**Ölçüm Yap**)
6. Öğrencilerin tahminleri ile gerçek sonuç karşılaştırılır. (**Karşılaştır**)
7. Çevreye ilişkin tahminler ile gerçek ölçüm karşılaştırılır ve öğrenciler tahminine ilişkin yargıda bulunur. (**Yargıda Bulun**)
8. Son olarak, öğrencilerde "çevre" kavramının oluşmasını sağlamak amacıyla aşağıdaki görseller verilir ve nesnelerin çevrelerini belirleyerek renkli kalemle çizmeleri istenir.

Resim 4 Çevresi belirlenecek olan görseller



Kaynak: Google-Görseller

Bu uygulamadan sonra aşağıda adımları verilen etkinlik, problem durumu ve alıştırma öğrencilere yöneltilir:

Etkinlik

1. Öğrencilere bir kitabın çevresi gösterilir. Öğrencilere ip dağıtılır. Öğrencilerden, bu kitabın etrafını tam bir tur sarabileceğini tahmin ettiği uzunlukta bir ipi makasla kesmeleri istenir.
2. Öğrenciler sırayla kestiği ipi kitabın etrafına sarar. Öğretmen öğrencilere "İp kısa mı geldi, uzun mu geldi?" diye sorar. Bu geri bildirim ile çocuğun "uzunluk" ve "çevre" kavramlarını doğrudan geliştirebileceği düşünülmektedir.

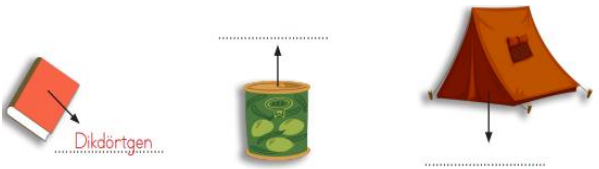
Problem Durumu

Çiftçi Ali, dikdörtgen şeklindeki tarlasının etrafına tel çekmeyi düşünür. Yanında metre olmadığı için tarlanın çevre uzunluğunu adım ile ölçer. Yaptığı ölçüme göre tel alır. Çiftçi Ali'nin aldığı tel eksik ya da fazla gelmiş olabilir mi? Neden? Düşünelim.

Alıştırma

Aşağıda görselleri verilen nesnelerin ok ile belirtilen yüzeyinin hangi geometrik şekil olduğunu örnekteki gibi noktalı yerlere yazalım.

Resim 5 Nesne görselleri



Kaynak: Kaya, et al., 2026

Öğrenme çıktısına ilişkin "standart olmayan ve standart uzunluk ölçme araçlarına ilişkin deneyimini, tahmine konu olan şeklin çevre uzunluğu ile ilişkilendirme", "belirlenen standart olmayan ve standart uzunluk ölçme aracına göre çevre uzunluğuna ilişkin tahminde bulunma" ve "tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunma" biçimindeki süreç bileşenlerine ulaşılması hedeflenmektedir. İşleniş aşaması sonlandırılarak sürecin değerlendirmesini yapmak üzere ölçme ve değerlendirme aşamasına geçilir.

Ölçme ve Değerlendirme:

Bu bölümde öğrencilerin bireysel olarak çalışmaları planlanmıştır.

Etkinliğin bu aşaması için öncelikle Kart Gösterme tekniği uygulamasına yönelik aşağıdaki kartlar her bir öğrenci için ayrı ayrı hazırlanır. Dolayısıyla her öğrencinin 7 adet kartı bulunmalıdır.

Resim 6 Kart Gösterme tekniğinde kullanılacak olan materyal



Kaynak: Görsel yapay zekâ ile oluşturulmuştur.

"Az, çok, eşit, uzun, kısa, büyük, küçük gibi ifadelerden uygun olan seçilerek tahmin ve ölçüm sonucu karşılaştırılır. Tahminlerinin doğruluğuna ilişkin yargıda bulunmaları sağlanır." ve "Süreçte farklı standart olmayan ya da standart uzunluk ölçme araçları kullanılır ve farklı geometrik şekiller üzerinden ölçüm yapılır." öğrenme çıktılarına uygun olarak aşağıdaki tablo hazırlanır.

Tabloda uygulama aşamaları verilerek diğer sütunlar öğrencilerle birlikte doldurulur. Uygulama aşaması verildiğinde öğrencilerin ölçmeye dair tahminde bulunarak ellerindeki kartlardan birini havaya kaldırmaları istenir.

Tablonun aşamalara göre nasıl doldurulabileceğine dair örnekler aşağıda verilmiştir.

Tablo 1 Ölçme uygulamaları

Uygulama	**Tahmin & Deneyim**	**Ölçme**	**Karşılaştırma/ Yargıda Bulunma**
Bir ders kitabının yüzeyine karşılık gelen geometrik şeklin çevresine 12 adet ataç koyulur.	Öğrenciler "Bu kitabın çevresi sizce 12 ataş olabilir mi?" sorusuna cevap olarak kendi tahminlerini söyler.	Kitabın çevresi ataşlar dizilerek ölçülür ve gerçek ölçüm yapılır.	Öğrenciler ellerindeki değerlendirme kartlarından uygun olanı seçerek karşılaştırma yapar: "Benim tahminim (12 ataş), gerçek ölçüm sonucundan (16 ataş) **az** çıktı. Çünkü ben kitabın uzun kenarını daha kısa diye tahmin etmiştim." En başta da **eşit** kartını kaldırmıştım."
Öğrenciler bahçedeki büyük dikdörtgen bölgenin etrafında durur.	Her öğrenci çevrenin kaç adım olduğunu tahmin eder (Örn: "Tahminim 24 adım")	Öğrenciler kendi adımlarıyla dikdörtgenin çevresini yürüyerek gerçek adım sayısını bulur	Öğrenciler ellerindeki değerlendirme kartlarından uygun olanı seçerek karşılaştırma yapar: "Adım birimimle yaptığım tahmin,

		(Örn: 30 adım).	gerçek ölçümdeki çevre uzunluğundan **küçük** bir sayı çıktı. En başta da **büyük** kartını kaldırmıştım.”
Dairesel bir bölgeye sahip bir nesnenin çevresi ip yardımıyla tahmin edilmeye çalışılır.	Öğretmen 20 cm’lik bir ip parçasını gösterir. Öğrencilerden silindir kutunun çevresinin kaç santimetre geleceğini tahmin etmeleri istenir (Örn: “Tahminim 50 cm”).	Kutunun etrafına ip sarılır, açılır ve metre ile ölçülür (Gerçek çevre: 35 cm).	Öğrenciler ellerindeki değerlendirme kartlarından uygun olanı seçerek karşılaştırma yapar: “Dairesel yüzeyin çevresini tahmin ederken cismi daha büyük gördüğüm için tahminim gerçek sonuçtan **çok** çıktı. En başta da **eşit** kartını kaldırmıştım.”
Dikdörtgensel bir bölgenin çevresi cetvel yardımıyla tahmin edilmeye çalışılır.	Öğrencilere referans olarak 30 cm’lik bir cetvel gösterilir. Sıranın üst yüzeyinin çevresi için santimetre cinsinden bir tahmin yapmaları istenir (Örn: “Tahminim 120 cm”).	Cetvelle sıranın 4 kenarı tek tek ölçülüp toplanır (Gerçek ölçüm: 160 cm).	Öğrenciler ellerindeki değerlendirme kartlarından uygun olanı seçerek karşılaştırma yapar: “Sıranın gerçek çevresi benim tahmin ettiğim değerden 40 cm **uzun** hesaplandı. Çünkü sıranın özellikle uzun kenarını zihnimde olduğundan daha **kısa** düşünmüştüm.

Kaynak: Yazar

3. Etkinlik Planı II

Dersin Adı: Matematik

Sınıf Düzeyi: 4.sınıf

Tema No: 5.

Tema: Nesnelerin Geometrisi (1)

Öğrenme Çıktısı ve Süreç Bileşenleri:

MAT.4.3.4. Standart olmayan ölçü birimleri cinsinden şekillerin alanlarını tahmin edebilme

a) Standart olmayan ölçü birimlerine ilişkin deneyimini, tahmine konu olan şeklin alanıyla ilişkilendirir.

b) Belirlenen standart olmayan ölçü birimini kullanarak şeklin alanına ilişkin tahminde bulunur.

c) Tahminini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak tahminine ilişkin yargıda bulunur.

Öğrenme-Öğretme Yöntem/Teknikleri: İşbirlikli öğrenme stratejisi, sunuş yoluyla öğrenme stratejisi, aktif öğrenme, anlatım yöntemi, soru-cevap yöntemi, problem çözme yöntemi, keşfederek öğrenme, tartışma yöntemi, Rulman tekniği.

Kullanılan Eğitim Teknolojileri/Araç ve Gereçler: Defter, post-it kare kâğıt, eva, kalem, renkli kalem.

Ön Hazırlık/Giriş:

Bu bölümde öğrencilerin bireysel olarak çalışmaları planlanmıştır.

Giriş aşamasında ilk olarak öğrencilerin ilgi ve dikkatini çekmek amacıyla aşağıdaki uygulamaya yer verilir:

“Ekrem, öğretmeni ve arkadaşlarıyla bir hafta sonu pikniğe gider. Öğrenciler, öğretmen kontrolünde bir doğa gezisine çıkar. Ormanda yürüyüş yaparken Ekrem bir hayvanın ayak izini görür, seslenerek arkadaşlarını çağırır ve hemen fotoğrafını çekerler.

Resim 1 Temsili hayvan ayak izi



Kaynak: Görsel yapay zekâ ile oluşturulmuştur.

Öğretmen, öğrencilerin bu ilgisini karşılıksız bırakmaz ve bu ayak izini, alan kavramını ele alacağı dersinde kullanmaya karar verir. Ertesi gün matematik dersine, bu ayak izinin posteri ile gelir. Öğrenciler ise dün piknikte gördükleri ayak izini gördüklerinde çok heyecanlanır ve öğretmenlerine bu ayak izi ile ne yapacaklarını sorar. Öğretmen de "Bu ayak izinin kapladığı yeri bulmak istiyoruz ama cetvelimiz bu izin boyutuna küçük geliyor. Bu alanı nasıl bulabiliriz?" sorusunu öğrencilere sorar.

Öğrencilerin soru ile ilgili tartışmaları ve fikirlerini söylemeleri istenir. Öğretmen, öğrencilerin ayak izini sınıftaki farklı birimler (post-it, çikolata kutuları, avuç içi) ile doldurmayı amaçlayarak öğrencilere "Acaba bu izi kaplamak için bu birimlerin hangisinden kaç tane gerekir?" sorusunu sorar. Öğretmen, öğrencilere alanın "bir yüzeyi boşluk kalmayacak şekilde kaplama" olduğunu keşfettirmeyi ve nesnelerin boyutu ile kaplanacak alan arasında ilişki kurmalarını sağlamayı amaçlamaktadır.

Giriş aşamasındaki diğer uygulamada;

Öğrencilerden boş bir zeminin (dikdörtgen ve kare gibi) kare, dikdörtgen ve üçgen gibi geometrik şekillerden birisi ile sürekli ve boşluk bırakmayacak şekilde kaplanması istenir.

Öğrencilerden zeminin geometrik şekil cinsinden kaplanan miktarı hakkında yorum yapması beklenir.

Öğretmen, masasının üzerine bir defter koyar. Yanına post-it (kare yapışkanlı kâğıt) çıkarır.

Resim 2 Defter ve post-it kâğıtlar



Kaynak: Google-Görseller

Öğrencilere, “Bu defterin kapağını hiç boşluk kalmayacak şekilde bu kare kâğıtlarla tamamen kaplamak istesek, sizce kaç tane kâğıda ihtiyacımız olur?” sorusu sorulur.

Öğrencilere tahmin etmeleri için süre verilir, ilk tahminleri alınır ve tahminleri sırasıyla tahtaya yazılır. Ardından öğretmen defterin kapağının sadece bir kenarına 3-4 adet post-it yapıştırır.

Resim 3 Defter kapağının bir kısmının post-it ile kaplanması



Kaynak: Yazar

Öğrencilere,

“Kapağın bir kısmının kaplandığını gördünüz. Bu deneyiminiz ilk tahmininizi değiştirmenize yardımcı oldu mu? Değiştiyse yeni tahmininiz nedir?” sorusu sorulur. Bu sayede öğrencilerin, “şeklin kapladığı yüzey” fikrine odaklanmaları sağlanır. Ayrıca standart bir ölçü birimi olmadan da “birim yüzeyler” (kare kâğıt, kart, kapak) sayılarak bir şeklin alanının ölçülebileceği sezdirilir.

İşleniş:

Bu bölümde öğrencilerin bireysel ve grup olarak çalışmaları planlanmıştır.

İşleniş aşamasında ilk olarak öğrencilerin kaplanan zeminin alan olduğunu, kullanılan şekillerin de alanın birimi olduğunu fark etmeleri sağlanır. Bu süreçte öğrencilerin de dâhil olabileceği ölçüme ve tahmine dayalı çeşitli uygulamalar yapılır. Uygulamalardan birincisine ilişkin ilk etkinliğin uygulama adımları aşağıda verilmiştir.

Etkinlik 1: Tahminler Nerede? Ölçümlerim Nerede?

Öğrenciler 4'erli gruplara ayrılır.

Her gruba farkı standart olmayan birimlerin yer aldığı bir "alan ölçme tablosu" verilir:

Tablo 1 Alan ölçme tablosu

GRUP ÇALIŞMASI KARTI			
Ölçülecek Yüzey	**Ölçü Birimimiz**	**Tahminimiz (Birim)**	**Ölçüm Sonucu (Birim)**
Matematik Kitabı	Kare not defteri	…. Adet	…. Adet
Sıranın Üst Yüzeyi	Post-it kâğıdı	…. Adet	…. Adet
Hikâye Kitabı	Kare kraker	…. Adet	…. Adet

Kaynak: Yazar

Gruplardaki öğrenciler önce belirlenen ölçü birimini ölçülecek yüzeyin bir köşesine değecek biçimde yerleştirir.

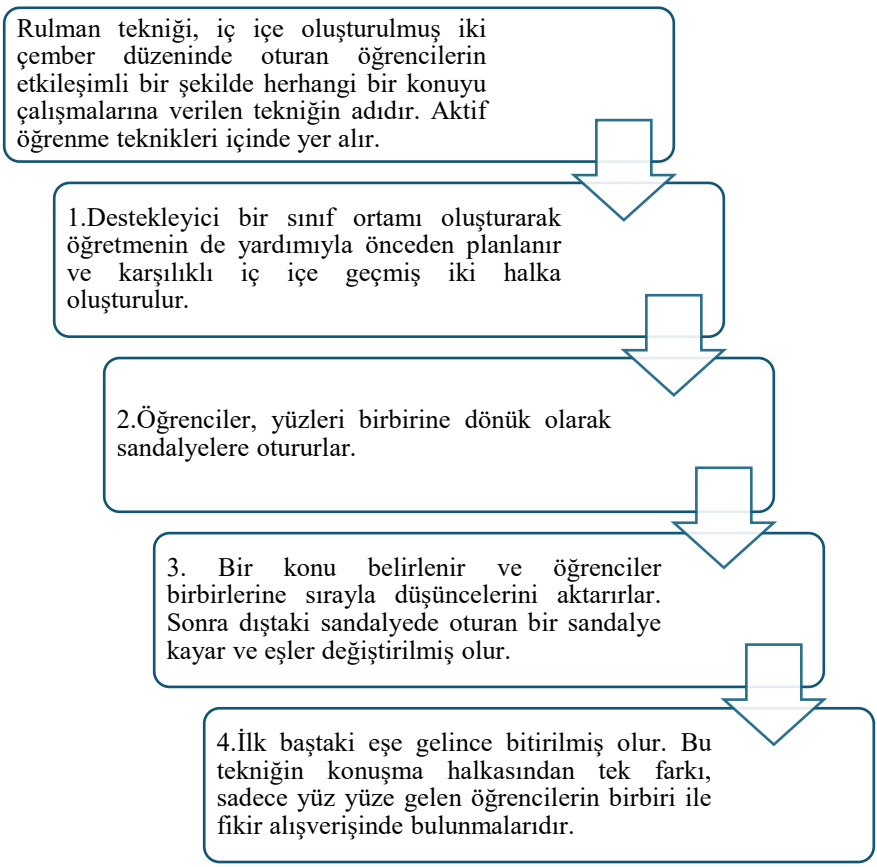
Birimin kapladığı yeri ve ölçülecek yüzeyin tamamını inceleyerek alana ilişkin tahminlerini tabloya yazarlar. Öğrencilerin bu tahminleri yazarken cevaplamaları beklenen soru, *"Bu birimden kaç tanesi bu yüzeyi kapatır?"* biçimindedir. (**Tahmin et**)

Sonrasında gruplar standart olmayan ölçü birimlerini üst üste getirmeden ve aralarında boşluk bırakmadan yüzeye dizerler. (**Ölçüm Yap**)

Kullanılan birim sayısını sayarak ölçüm sonucunu tablodaki ilgili yere yazarlar.

Rulman tekniği uygulaması başlatılır.

Şekil 1 Rulman tekniği aşamaları



Kaynak: URL-2

Rulman tekniği uygulamasında öğrenciler, “Tahminimiz ile gerçek ölçüm sonucu arasındaki fark kaç birim? “Tahminimiz gerçek sonuçtan çok mu uzaktı, yakın mıydı, Neden?” ve “Yüzeyi kaplarken birimler arasında boşluk bıraksaydık ölçüm sonucumuz nasıl değişirdi?” sorularına yanıt ararlar. (**Karşılaştır**)

Alana ilişkin tahminler ile gerçek ölçüm karşılaştırılır ve öğrenciler tahminine ilişkin yargıda bulunur. (**Yargıda Bulun**)

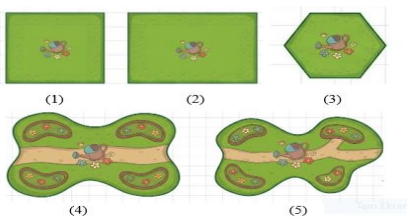
Bu etkinliğe dair tartışmalar sona erdiğinde diğer etkinliğin uygulamasına geçilerek öğrencilerden bir bahçe tasarlamaları istenir. Düzenli ya da düzensiz şekle sahip bu bahçenin alanını belirledikleri uygun bir birimle kaplayarak bahçenin kaç birim ile kaplandığını bulmaları sağlanır. Bu bağlamda aşağıda adımları verilen etkinliğin uygulaması yapılır. Bu etkinlik ile öğrenciler, çizdikleri bahçenin iç bölgesinin kaplandıkça oluşan büyüklüğün “alan” olduğunu somut olarak görürler. Ayrıca, alanı kaplamada kullandıkları her bir parçanın (taş, çim karosu vb.) alanı ölçmek için kullanılan “birim” olduğunu fark ederler.

Etkinlik 2: Bahçemi Tasarlarım, Kaplarım, Alanını Hesaplarım, Yargılarım

Öğrencilerden, alanını hesaplamak üzere bir bahçe tasarlamaları istenir.

Öğrencilerin tasarladıkları öngörülen bahçe biçimlerine aşağıda örnekler sunulmuştur.

Resim 4 Bahçe çeşitleri

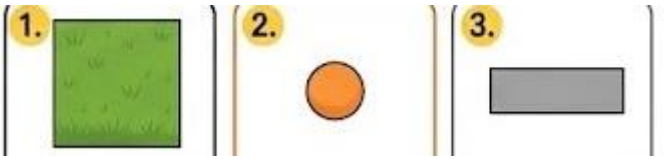


1. Kare Bahçe
2. Dikdörtgen Bahçe
3. Düzgün Altıgen Bahçe
4. Kıvrımlı Bahçe
5. Serbest Biçimli Bahçe

Kaynak: Görsel yapay zekâ ile oluşturulmuştur.

Öğrencilere, tasarladıkları bahçelerin alanını hesaplamak üzere standart olmayan ölçü birimleri bağlamında aşağıdaki birimler verilir. Bu birimler, eva kartonları kullanılarak somut materyal biçiminde önceden öğretmen tarafından hazırlanmıştır.

Resim 5 Bahçeleri kaplayacak birimler



Çim Karosu (1 Birim)	Taş (1 Birim)	Kayak Taşı (1 Birim)

Kaynak: Görsel yapay zekâ ile oluşturulmuştur.

Öğrencilerin verilen bahçeleri istedikleri birimlerle kaplamaları istenir. Bunun için öncelikle öğrenciler seçtikleri birimlerden sadece bir tanesini bahçenin bir köşesine koyarlar. Bahçenin tamamının bu birimden kaç tanesiyle tamamen kapanacağını öğrencilerin tahmin ederek düşüncelerini paylaşmaları istenir.

Öğrenciler seçtikleri birimle bahçenin zeminini hiç boşluk kalmayacak ve üst üste gelmeyecek biçimde kaplarlar. Öğretmen öğrencilerden, tahminleri ile gerçek ölçümü karşılaştırmalarını ve yargıda bulunmalarını ister, Etkinlik 2 sonlandırılır.

Öğretmene Not: Etkinlik 2'de düzensiz şekilli bahçelere yer verilmesi, öğrencilerin kenarlarda yarım kalan yerler olduğunu fark etmelerini sağlayacaktır. Bu durum öğrencilerin, birimi iki eş parçaya bölüp yarım kullansak da toplam alanın hesaplanabileceği vurgusunu geliştirmelerine imkân verecektir.

Ölçme ve Değerlendirme:

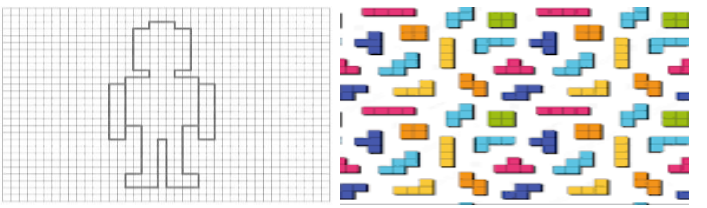
Bu bölümde öğrencilerin bireysel olarak çalışmaları planlanmıştır.

Ölçme ve değerlendirme aşamasında, alan ölçme çalışmalarının kareli kâğıda çizilen şekillerle tekrar edilmesi sağlanarak öğrencilerin süreçte öğrenmiş olduklarını pekiştirmeleri sağlanır. Örneğin kareli kâğıda çizilen geometrik şekillerin alanı hesaplanırken renkli kalemler kullanılır ve her birim kare renkli kalemle taranır.

Taranan birim kareler birlikte sayılır ve kaç birim kare olduğunun yazılması istenir.

Her bir kenarının uzunluğu bir birim olan kareye birim kare denildiğine göre, bu süreçte farklı büyüklüklerde birim karelere yer verilir. Bu bağlamda öğrencilere, kareli kâğıt üzerinde sınırları belirlenmiş bir robot figürü verilir. Öğrencilerden bu figürün içini, boşluk kalmayacak biçimde Tetris parçalarına benzer bloklarla farklı renk kalemler kullanarak doldurmaları istenir.

Resim 6 Robot figürü ve tetris parçaları



Kaynak: Google-Görseller

Öğrenciler robot figürünü doldurmaya başlamadan önce *"Bu robotu kaplamak için kaç birim kare gerekir?"* sorusuna ilişkin tahminlerini yazarlar.

Tahminler sırayla alındıktan sonra öğrenciler şeklin içini renkli bloklar halinde tarayarak kaplarlar.

Taranan bloklardaki birim kareleri toplayarak toplam birim kare sayısı bulunarak alan hesabı tamamlanmış olur.

Öğrenciler tahminleri ile gerçek sonucu karşılaştırır ve etkinlik sonlandırılır.

4. Sonuç ve Öneriler

Öğretmenlerin tahmin etme durumlarını ele aldıkları sınıf içi pratiklerinde, başlangıçta standart olmayan ölçme araçlarını işe koşarak şekillerin çevre uzunluğunu ve birim cinsinden alanlarını tahmin etmeye, ardından standart ölçme araçları yardımıyla tahminlerini ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak yargıda bulunmaya dikkat çeken etkinliklerin işe koşulması amacıyla bu çalışma ortaya çıkmıştır.

Mevcut çalışmada, öğretmenlerin şekillerin çevre uzunluğu ve birim cinsinden alanlarını tahmin etme süreçlerini ele aldıkları sınıf içi uygulamalarında; başlangıçta standart olmayan ölçme araçlarıyla bu büyüklükleri tahmin etmeye, sonrasında ise standart ölçme araçları yardımıyla tahminleri ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak bunlara ilişkin yargılarda bulunmaya odaklanan etkinliklerin tanıtılması amaçlanmıştır. Bu bağlamda öğretmenlere yol göstermek amacıyla hazırlanan; öğretim uygulamalarında matematiksel araçları ile somut ve sanal manipülatifleri rahatlıkla kullanabilecekleri bu etkinlikler, öğrencilerin yaparak-yaşayarak-anlamlı öğrenmelerine fırsat tanıyacaktır. Öğrencilerin şekillerin çevre uzunluğunu ve ölçü birimleri cinsinden alanlarını tahmin etmede yaşadığı zorlukların temelinde, öğretim sürecindeki yöntemsel eksiklikler ile öğretmenlerin bu konuları sınıfa yansıtma biçimleri yatmaktadır. Bütün bunlar, öğretmenlerin bu kavramları genellikle ezbere dayalı yaklaşımlarla ele aldığını ve bu durumun öğrencilerin konuyu kavramsal düzeyde öğrenmelerini engellediğini ortaya koymaktadır (Kidman & Cooper, 1997). Dolayısıyla bu engellerin ortadan kaldırılması; geleneksel anlayıştan uzaklaşıp tahmine dayalı ölçme etkinliklerini içeren öğretim yaklaşımlarının benimsenmesine bağlıdır.

TYMM anlayışı, bilgiyi doğrudan ezberlemek veya formülleri kalıp olarak kullanmak yerine; bilgiyi sorgulama, mantıksal çıkarım yapma, verileri analiz etme ve farklı stratejileri değerlendirme süreçleri üzerine inşa edilmiştir (MEB, 2024). Dolayısıyla öğrencilerin basmakalıp kural ve formül kullanma eğiliminde olmaları; matematiksel kavramları anlama ve ilişkileri kurmada zorlanmalarına, bilgiyi kavramsal düzeyde öğrenmek yerine işlemsel düzeyde öğrenmelerine ve bilgilerini günlük hayatla ilişkilendirmede zorlanmalarına yol açmaktadır (Çekirdekçi & Çekirdekçi, 2020; Dağlı & Peker, 2012). Buna karşılık öğrencilerin ölçüm yapma, somut materyaller kullanma ve keşfetme yoluyla formül kullanmak (Van de Walle, et al., 2014) yerine kuralı yapılandırmasını destekleyen yaklaşımlar, kavramsal anlamayı güçlendirerek kavramsal öğrenmeye, dolayısıyla anlamlı öğrenmeye katkı sunar.

Öğretmen ve öğretmen adaylarının süreçte çevre ve alan kavramlarının öğretiminde kavramsal açıklama yapmaktan ziyade çoğunlukla kural verme veya formül kullanma yoluyla işlemsel bilgiye dayalı çözümler gösterme eğiliminde oldukları belirlenmiştir (Çekirdekçi & Çekirdekçi, 2020; Wanner, 2019). Oysa matematik öğretiminin ezberci kural ve formül merkezli yaklaşımlarla yürütülmesinin, öğrencilerin anlamlı öğrenmesini olumsuz etkilediği sıkça vurgulanmaktadır (Baykul, 2009; Olkun & Uçar, 2014). Diğer taraftan (Türk, et al., 2022) çalışmasında, sınıf öğretmenlerinin çevre ve alan öğretiminde somut ve sanal manipülatiflere yer verip ardından alışılagelmiş bir durum olan "formülle" ifade ettiklerini tespit etmişlerdir. Aynı çalışmada öğretmenlerin çevre öğretiminde; birimkare, cetvel, çivili tahta, ip, kitap, defter, izometrik kâğıt kullanma, masa, oda, sınıf ve okuldan yararlanma), alan ölçme öğretiminde de tangram, yaprak ve renkli kâğıt ile kaplama, sıra, pano, birimkare ve dijital araç kullandıkları sonra formülden yararlandıkları belirlenmiştir. Süreçte yapılan bu

uygulamalar, öğrencilerin kavramları ezberlemek yerine deneyimleyerek içselleştirmesini ve çevre ile alan kavramlarını karıştırmamasını sağlayabilir.

Bu bağlamda bu çalışmada, Nesnelerin Geometrisi temasının öğretimi sürecinde, öğrencilerin geleneksel anlayışta olduğu gibi yalnızca formül ya da kuralları ezberlemesi yerine, aktif öğrenme yaklaşımını benimseyerek kavramsal anlayışı geliştirmeye yönelik yöntem/teknikler ve bunlar doğrultusunda yaparak-yaşayarak öğrenmeye uygun hazırlanan etkinlikler kullanılması önerilmektedir. Bu tür bir yaklaşım, öğrencilere yüzeysel bilgi sunmak yerine, çeşitli yöntem/teknikleri, matematiksel araçları, somut/sanal manipülatiflerle zenginleştirilmiş etkinliklerle öğrencinin yaparak-yaşayarak kavramların anlamını derinlemesine anlayabilecekleri öğrenme ortamları oluşturmayı amaçlamaktadır. Bu sayede şekillerin çevre uzunluğu ve alan arasındaki ilişkiler, öğrencilerin iş birliği içerisinde grup içinde aktif rol aldığı etkinliklerle sürdürülebilir.

Yeo (2008) çalışmasında, öğretmenlerin çevre ve alan konularını somutlaştıran ve öğrencilerin aktif katılımını destekleyen çeşitli etkinlikler geliştirdiğini belirtmiştir. Bu etkinliklerin, öğretim sürecini daha verimli ve etkili bir şekilde yapılandırmada öğretmenlere önemli katkılar sağladığı ifade edilmekte ve bunların kullanılabileceği farklı öğretim yaklaşımları önerilmektedir. Matematik öğretiminde ön öğrenmelerin bir sonraki öğrenme eşiğine geçişi neredeyse zorunlu kıldığı düşüncesinden yola çıkılarak öğretmenlerin; derslerin planlanması ve yürütülmesi sürecinde öğrenciyi merkeze alan, yaparak-yaşayarak öğrenmeye uygun araç, gereç ve materyaller kullanarak hazırladıkları etkinlikleri uygulayarak süreçte etkili roller üstlenmeleri sağlanabilir.

Öğrencilerin tahmin becerilerindeki düşük performansının nedenlerinden birinin öğretmen yeterliliklerinden kaynaklandığı

gerçeğinden yola çıkılarak (Desli & Giakoumi, 2017; Sayın, et al., 2022; Türk, et al., 2022), mevcut çalışmanın öğretmenlere hizmet içi eğitim bağlamında katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Öğretmenlere yönelik bu çabalar sayesinde öğrencilerin şekillerin çevre uzunluğu ve ölçü birimleri cinsinden alanlarını tahmin etme, bu tahminleri ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırma ve bunlara ilişkin yargılarda bulunma becerilerinin gelişmesi sağlanabilir. Bu durum, öğrencilerin konuya ilişkin eksik öğrenmelerinin ve yaşadıkları zorlukların giderilmesini ya da kavram yanılgısı oluşumunun önlenmesini sağlayarak matematik başarısını artırabilir. Ayrıca bu çalışmadaki etkinliklerin öğretmenlere; standart olmayan ölçü birimlerini kullanarak şekillerin çevre uzunluğu ve alanlarını ölçme konusunda tahminde bulunabilme, tahminleri ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak bunlara ilişkin yargıda bulunabilme becerilerini kazandıracak benzer etkinlikler hazırlamada yol gösterici olması umulmaktadır.

Öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarda tahmine dayalı ölçme etkinliklerine başvurmadığı görülmektedir (Boz-Yaman & Bulut, 2017; Sayın, et al., 2022; Türk, et al., 2022). Öğretim sürecinde tahmin etkinliklerinin kullanılması, öğrencilerin nitelik, sınıflandırma (bölümleme), yineleme ve kaplama ilkelerine dikkatini çekmekte (Joram, et al., 2005) ve öğrenme ortamını eğlenceli bir deneyime dönüştürmektedir (Van de Walle, et al., 2014). Dolayısıyla mevcut çalışma; aktif öğrenme yaklaşımı benimsenerek çeşitli öğretim yöntem ve teknikleriyle zenginleştirilmiş ölçmeye dayalı tahmin etkinliklerini; ölçme araçları ile somut ve sanal manipülatiflerin kullanımına vurgu yaparak okuyucuya sunmaktadır. Bu kapsamda etkinliklerin hazırlanmasında işbirlikli öğrenme, sunuş yoluyla öğrenme, aktif öğrenme, anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, tartışma ve keşfederek öğrenme strateji/yöntemleri ile grup çalışması, Philips 66, Rulman ve kart gösterme tekniklerine yer verilmiştir.

Öğretmenin, öğretim sürecini planlarken bu yöntem ve teknikleri kullanırken yararlanacağı matematiksel araç/teknolojileri ve somut/sanal manipülatifleri de özenle seçmesi gerekmektedir. Sonuç olarak; şekillerin çevre uzunluğu ve birim cinsinden alanlarını tahmin etmeye ve bu tahminleri ölçüm sonuçlarıyla karşılaştırarak yargıda bulunmaya dair hazırlanan bu ve benzeri etkinliklerle eğitim ortamlarının zenginleştirilip dikkat çekici hâle getirilmesi amaçlanmış olup, bu çalışmanın öğretmenlere, öğretmen adaylarına ve öğrencilere katkı sunması beklenmektedir.

Son söz olarak; TYMM vizyonu, öğrencilerin yalnızca bilgiye ulaşan edilgen ögeler değil; bilgiyi aktif olarak yapılandıran, sorgulayan ve yaşamla ilişkilendiren özneler olmasını hedeflemektedir (MEB, 2025). Bu bağlamda öğrencilerin bireysel farklılıklarını merkeze alan, öğrenmeyi kalıcı ve anlamlı kılan bu güncel yaklaşım benimsenerek hazırlanan bu çalışmanın öğretmenlere ve öğretmen adaylarına bu vizyon doğrultusunda yol göstermesi umulmaktadır.

Kaynakça

Akkuşçi, H. (2019). *Altı ve yedinci sınıf öğrencilerinin uzunluk ölçümsel tahmin becerilerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Aydın Karaca, Ö. (2014). *8. sınıf öğrencilerin uzunluk, alan ve hacim ölçme kavramlarını anlamaya ilişkin yeterliliklerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Aydoğdu, İ. (2020). *6. sınıf öğrencilerinin ölçmeye dayalı tahmin becerilerinin ve bu beceriye ilişkin görüşlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Baki, A. (2020). *Matematik tarihi ve felsefesi* (2. baskı). Pegem Akademi.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235-268.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi (1-5. sınıflar)* (Geliştirilmiş 9. baskı). Pegem Akademi.

Baykul, Y. (2020). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. sınıflar)* (4. baskı). Pegem Akademi.

Boz-Yaman, B., & Bulut, S. (2017). Ortaokul matematik öğretmenlerinin tahmin hakkındaki görüşleri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *11*(1), 48-80.

Budak, E. B. (2019). *Senaryolaştırılmış kavram karikatürlerinin 5. ve 6. sınıf öğrencilerinin ölçüsel tahmin ve yansıtıcı düşünme*

becerilerine etkisinin incelenmesi [Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Cathcart, G., Pothier, Y. M., Vance, J. H. ve Bezuk, N. S. (2011). *Learning mathematics in elementary and middle schools: A learner-centered approach* (5. baskı). Pearson.

Chappell, M. F., & Thompson, D. R. (1999). Perimeter or area? Which measure is it? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *5*(1), 20-23.

Çekirdekçi, S., & Çekirdekçi, N. (2020). Sınıf öğretmeni adaylarının paralelkenar ile dikdörtgenin çevre ve alanını bulmaya ilişkin düşüncelerinin incelenmesi. *Journal of Education, Theory and Practical Research*, *6*(1), 53-66.

Çınar, F., & Biber, A. Ç. (2024). İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin çevre ve alan konularında yaptıkları hataların incelenmesi. *Medeniyet Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *8*(2), 35-51.

Dağlı, H., & Peker, M. (2012). İlköğretim 5. sınıf öğrencileri geometrik şekillerin çevre uzunluğunu hesaplamaya ilişkin ne biliyor? *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, *5*(3), 330-351.

Davis, A., Goulding, M. ve Suggate, J. (2017). *Mathematical knowledge for primary teachers* (5. baskı). Routledge.

Desli, D., & Giakoumi, M. (2017). Children's length estimation performance and strategies in standard and non-standard units of measurement. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *7*(3), 61-84.

Dorko, A., & Speer, N. (2015). Calculus students' understanding of area and volume units. *Investigations in Mathematics Learning*, *8*(1), 23-46.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Enloe, C. L., Garnett, E., Miles, J., & Swanson, S. (2000). *Physical science: What the technology professional needs to know* (Cilt 7). John Wiley & Sons.

Geliçi, O. (2022). *Ortaokul öğrencilerinin çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarının ve kanıt şemalarının araştırılması* [Yüksek lisans tezi, Anadolu Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.

Huang, H. M., & Li, Y. (2015). The effect of contextualized learning on students' understanding of area and perimeter. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(4), 823-844.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 4-23.

Kaya, Ç., Başay, F., Yeşilova, K., Göndük, S., & Kalkan, S. (2026). *İlkokul matematik 3. sınıf ders kitabı* (2. Kitap). Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Kidman, G., & Cooper, T. J. (1997). Area integration rules for grades 4, 6 and 8 students. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 136-143). University of Helsinki, Lahti Research and Training Centre.

Kumandaş, H., & Gündüz, Y. (2014). İlkokul, ortaokul, lise ve üniversitede öğrenim gören öğrencilerin ölçüsel tahmin becerilerinin doğruluğunun incelenmesi. *Kalem Eğitim ve İnsan Bilimleri Dergisi*, *4*(1), 165-187.

Küçük-Demir, S. (2022). Sınıf öğretmenlerinin çevre ve alan ölçme öğretimine ilişkin görüşleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *10*(1), 45-67.

Martin, W., & Strutchens, M. E. (2000). Geometry and measurement. In E. A. Silver (Ed.), *Results of the 1996 NAEP mathematics assessment* (pp. 193-234). National Council of Teachers of Mathematics.

Micklo, S. J. (1999). Estimation: It's more than a guess. *Childhood Education*, *75*(3), 142-145.

Millî Eğitim Bakanlığı. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*.

Millî Eğitim Bakanlığı. (2024). *İlkokul matematik dersi öğretim programı (1-4. sınıflar)*.

Millî Eğitim Bakanlığı. (2025). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli: Öğretim programları ortak metni*.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*.

Olkun, S., & Uçar, Z. T. (2014). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Eğiten Kitap.

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 144-167.

Outhred, L., Mitchelmore, M., McPhail, D., & Gould, P. (2003). Count me into measurement: A program for the early elementary school. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching*

measurement: 2003 yearbook (pp. 81-99). National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E., & Bestgen, B. J. (1981). Teaching and assessing computational estimation skills. *The Elementary School Journal*, *82*(2), 116-127.

Rickard, A. (2005). Constant perimeter, varying area: A case study of teaching and learning mathematics to design a fish rack. *Journal of American Indian Education*, *44*(3), 80–100.

Runnalls, C., & Hong, D. S. (2017). Well, they understand the concept of area: Pre-service teachers' responses to student area misconceptions. In E. Galindo & J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 881-884). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Satan, N. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin ölçmede tahmin performanslarının ve tahmin stratejilerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Hacettepe Üniversitesi.

Sayın, S., Özdemir, Ü., & Öner, A. T. (2022). Matematik öğretmenlerinin alan ölçme konusuna ilişkin öğretimsel açıklamaları ve tahmin becerileri. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(Özel Sayı), 84-127.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: Curriculum foundations and research carried out at the University of Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 499-536.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). Macmillan.

Şimşek, N., & Boz, N. (2015). Sınıf öğretmeni adaylarının uzunluk ölçme konusunda pedagojik alan bilgilerinin öğrenci kavrayışları bağlamında incelenmesi. *Cumhuriyet International Journal of Education*, *4*(3), 10-30.

Şişman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(7), 1293-1319.

Tan-Şişman, G. & Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online*, *8*(1), 243-253.

Türk, H., Arlı, Y., Soylu, Z. S., Gülmen, Ö., Fener, N. İ. & Kesten, A. (2022). Sınıf öğretmenlerinin çevre ve alan ölçme öğretimine ilişkin görüşleri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (53), 287-312.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim* (S. Durmuş, Çev. Ed.). Nobel Akademik Yayıncılık.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM*, *43*(5), 621-635.

Wanner, S. C. A. (2019). Mitigating misconceptions of preservice teachers: The relationship between area and perimeter. *Ohio Journal of School Mathematics*, *82*, 30-37.

Winarti, D. W., Amin, S. M., Lukito, A. ve Van Galen, F. (2012). Learning the concept of area and perimeter by exploring their relation. *Journal on Mathematics Education*, *3*(1), 41–54.

Yeo, K. K. J. (2008, 28 Haziran-2 Temmuz). *Teaching area and perimeter mathematics-pedagogical content knowledge in action* [Bildiri sunumu]. 31st Annual Conference of the Mathematics

Education Research Group of Australasia, Melbourne, VIC, Avustralya.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 224-239.

URL-1. https://seyitahmetuzun.com/standart-olmayan-olcme-araclari/ 19.10.2026 tarihinde erişilmiştir.

URL-2. https://www.protopars.com/tag/rulman-teknigi/ 19.10.2026 tarihinde erişilmiştir.

BÖLÜM 4

İSTEMDEN MATEMATİKSEL MUHAKEMEYE: ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ DESTEKLİ GÖREV TASARIMINDA BİLİŞSEL TALEP

Gizem Ünsal[1]

Giriş

Matematiksel bir görevin öğretimsel değeri, sonucun doğruluğu kadar öğrencinin bu sonuca ulaşırken kullandığı düşünme süreçlerine bağlıdır. Bir formülü uygulamak, aynı ilişkiyi ifade eden iki gösterim arasındaki bağlantıyı açıklamak ya da çözüm için yeni bir strateji geliştirmek, birbirinden farklı matematiksel çalışmalar gerektirir (Lithner, 2008; Stein ve diğerleri, 1996). Doyle (1983), sınıftaki görevlerin öğrencileri hangi bilişsel işlemlere yönelttiğini "akademik çalışma" kavramıyla açıklamıştır. Bu bakış açısında öğrencilerin ne öğrendiği, büyük ölçüde kendilerinden beklenen çalışmanın niteliğiyle ilişkilidir. Bu yaklaşımı matematik eğitimine taşıyan araştırmalar, bir görevin bilişsel talebinin tasarımda öngörülen düzeyde kalmayabileceğini göstermiştir. Talep, öğretmenin görevi sunuşu ya da öğrencilerin görev üzerinde çalışması sırasında düşebilir (Henningsen ve Stein, 1997; Stein ve

[1] Arş. Gör., Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı. ORCID: 0000-0002-4379-423X.

diğerleri, 1996). Tekkumru-Kisa ve diğerleri (2020), bu araştırma geleneğini yeniden ele alarak görevi öğrencilerin düşünmesi için bir bağlam olarak tanımlamıştır. Bu nedenle bir görevi değerlendirmek, öğrenciden beklenen düşünme süreçleri ile bu süreçlerin sınıfta nasıl gerçekleştiğinin birlikte incelenmesini gerektirir.

Üretken yapay zekâ (ÜYZ), öğretmenlerin matematiksel görev hazırlarken yararlanabileceği kaynaklardan biridir. Büyük dil modellerinin eğitimdeki olanakları ve sınırlılıkları, genel eğitim literatüründe birlikte tartışılmaktadır (Kasneci ve diğerleri, 2023; Yan ve diğerleri, 2024). Matematiksel görev üretimini inceleyen çalışmalar ise verilen isteme göre problem metinleri ve çözüm önerileri üretilebildiğini, ancak matematiksel içerik ile pedagojik niteliğin ayrıca değerlendirilmesi gerektiğini göstermektedir (Aqazade ve diğerleri, 2026; Sapkota ve Bondurant, 2024). Uzun ve zengin görünen bir problem, yalnızca bilinen bir algoritmanın uygulanmasını gerektiriyorsa muhakeme için sınırlı bir olanak sunmaktadır. Smith ve Stein'in (1998) görev analiz rehberinde bu tür çalışma, kavramsal bağlantı kurmadan işlem yapma üzerinden açıklanır. Dolayısıyla ÜYZ çıktısının değerlendirilmesinde dilin akıcılığına ek olarak öğrenciden beklenen matematiksel çalışma da incelenmelidir.

Pepin ve diğerleri (2025), matematik eğitiminde ChatGPT kullanımına ilişkin derlemelerinde tasarım olanaklarını doğruluk sorunları ve insan denetimi gereksinimiyle birlikte değerlendirmektedir. Öğretmen adaylarıyla yürütülen araştırmalar, bu denetimin neden gerekli olduğunu somutlaştırmaktadır. Sawyer (2024), yüksek bilişsel talep taşıyabilen görevlerin dilinin hedeflenen ilköğretim düzeyine uygun olmayabildiğini ve adayların çıktılara yönelik eleştirel uyarlamalarının sınırlı kalabildiğini bildirmiştir. Aşırı güven, bu dilsel uygunsuzlukların adaylar tarafından yeterince sorgulanmamasında görünür hâle gelmektedir. Noster ve diğerleri (2024) ise 11 öğretmen adayının dört

matematiksel görevi ChatGPT 3.5 ile çözme yaklaşımlarını incelemiş ve yanlış fakat inandırıcı görünen yanıtlarla karşılaşılabildiğini bildirmiştir. Noster ve diğerlerinin çalışması, görev üretimini değil, araçla problem çözme sürecini incelemektedir. Bu araştırmalar birlikte, farklı kullanım biçimlerinde çıktının doğruluğunu ve öğrenciye bıraktığı çalışmayı ayrı ayrı incelemek gerektiğine işaret etmektedir.

Bu bölümün amacı, ÜYZ destekli görev tasarımını bilişsel talep açısından incelemek ve öğretmenin öğrenme hedefini, görevde aranabilecek matematiksel gerekliliklere dönüştürmektir. Önce bilişsel talep, matematiksel muhakeme ve problem çözme arasındaki ilişkiler açıklanmakta, ardından ÜYZ araştırmaları incelenmektedir. Bu tartışmaya dayanarak altı boyutlu bir tasarım çerçevesi önerilmekte; alan–çevre örneğinde istem yazımı, temsili çıktının incelenmesi, öğretmen revizyonu ve sınıf uygulaması aynı tasarım döngüsü içinde gösterilmektedir. Diğer içeriklerdeki kısa örnekler, bu kararların farklı matematiksel yapılara nasıl aktarılabileceğini açıklamaktadır. Bölüm, öğretmenlere ve öğretmen eğitimcilerine bir ÜYZ çıktısını matematiksel doğruluk, öğrenciye bırakılan sorumluluk ve uygulamada aranacak muhakeme kanıtları açısından inceleme soruları sunmaktadır.

Bölüm, görev tasarımı, matematiksel muhakeme ve ÜYZ kullanımına ilişkin seçilmiş kuramsal ve ampirik yayınların eleştirel sentezine dayanmaktadır. Çalışmalar, bilişsel talebin tanımlanması, görev üretimi ve sınıflandırmasının incelenmesi ya da uygulamada talebin korunmasının açıklanması bakımından seçilmiştir; bu seçim sistematik bir tarama veya bütün yayınları kapsama iddiası taşımamaktadır. Sunulan görevler, istemler ve temsili çıktılar, kuramsal ilkeleri somutlaştırmak amacıyla hazırlanmış tasarım örnekleridir; gerçek bir ÜYZ oturumundan veya sınıf uygulamasından elde edilmiş veri değildir. Önerilen çerçeve,

öğretmenin inceleme ve revizyon kararlarını desteklemeyi amaçlayan bir sentezdir.

Matematiksel görev ve bilişsel talep

Matematiksel görev, öğrencinin dikkatini belirli bir kavrama, ilişkiye ya da yönteme yöneltmek amacıyla sunulan soru, problem, araştırma ya da etkinlik olarak tanımlanabilir (Stein ve diğerleri, 1996; Watson ve Ohtani, 2015). Görev tasarımı, bu çalışmanın öğrenme amacı ve öğrenci özellikleriyle uyumlu biçimde seçilmesini, yazılmasını, uyarlanmasını ve öğretim dizisi içinde konumlandırılmasını kapsar (Watson ve Ohtani, 2015). Bu süreçte aynı matematiksel içerik, farklı bilişsel taleplere sahip görevlere dönüşebilir. Çözüm yolu önceden verildiğinde görev bir işlem uygulamasına indirgenebilir; öğrencinin bir yaklaşım geliştirmesi ve bunu matematiksel ilişkilerle savunması beklendiğinde ise araştırma olanağı genişlemektedir (Lithner, 2008; Stein ve diğerleri, 2000).

Bilişsel talep, bir matematiksel görevi tamamlamak için gerekli düşünme ve akıl yürütmenin niteliği ile karmaşıklığını ifade eder (Smith ve Stein, 1998; Stein ve diğerleri, 1996). Belirleyici olan, işlemlerin uzunluğu veya harcanan süre değil, görevin hangi matematiksel ilişkileri kurmayı ve incelemeyi gerektirdiğidir. Smith ve Stein (1998), görevleri dört kategoride ele alır: ezberleme (memorization), bağlantısız işlemler (procedures without connections), bağlantılı işlemler (procedures with connections) ve matematik yapma (doing mathematics). İlk iki kategori düşük, son iki kategori yüksek bilişsel talep içeren çalışmayı temsil eder. Büyük sayılarla yürütülen uzun bir hesaplama zahmetli olsa da bilinen bir algoritmayla tamamlanabildiği için düşük talep taşıyabilir. Şekil 1, bilişsel talep düzeylerini alan–çevre örnekleriyle göstermektedir.

Ezberleme görevlerinde daha önce öğrenilmiş olgular, kurallar, formüller veya tanımlar yeniden üretilir; bu bilgilerin anlamlarıyla bağlantı kurulması beklenmez (Smith ve Stein, 1998).

Bağlantısız işlemlerde kullanılacak yöntem açıkça verilir ya da öğrencinin önceki deneyimleri nedeniyle belirgindir; doğru işlem sonucu öne çıkar. Bağlantılı işlemlerde bir yöntem kullanılabilse de yöntemin kavramlar ve gösterimlerle ilişkisini anlamak gerekir. Bu nedenle yalnızca birden çok gösterimin bulunması yeterli değildir; aralarındaki matematiksel bağ öğrencinin çalışmasının parçası olmalıdır. Matematik yapmada ise hazır verilmemiş bir yaklaşımı geliştirme, ilişkileri ve koşulları inceleme, ilerlemeyi izleme ve gerekçeleri denetleme öne çıkar (Smith ve Stein, 1998). Bu ölçütler görevdeki çalışma beklentisini açıklarken öğrencinin önceki deneyimleri de yorumda dikkate alınır.

Benedicto ve diğerleri (2017), matematiksel açıdan yetenekli öğrencilerin problem çözümlerini incelerken kategori ölçütlerinin bağlama göre ayrıntılandırılmasının gerekebildiğini göstermiştir. Bu bölüm, onların uyarlanmış modelini bütünüyle benimsememekte; dört kategorinin temel tanımları için Smith ve Stein'ın (1998) görev analiz rehberini kullanmaktadır. Bu seçim, kategori ölçütleri ile altı boyutlu tasarım sentezinin birbirinden ayırt edilmesini sağlar.

Bilişsel talep ile bilişsel yük farklı sorulara yanıt verir. Bilişsel talep, görevde ve onun uygulanışında hangi tür matematiksel düşünmenin gerekli olduğunu; bilişsel yük ise görev, sunum biçimi ve öğrencinin mevcut bilgisiyle birlikte çalışma belleğine yönelen talepleri ele alır (Smith ve Stein, 1998; Sweller, 1988). Çalışma belleğinin öğrenmedeki rolü, öğrencinin ön bilgileri ve işleme olanaklarıyla ilişkilidir (Cowan, 2014). Dolayısıyla ayrım, yalnızca bir kavramın göreve, diğerinin öğrenciye ait olması üzerinden kurulamaz. Gereksiz yönerge karmaşıklığını azaltmak erişimi kolaylaştırabilir; bunun yük üzerindeki etkisi öğrenci ve görev koşullarına bağlıdır. Dil sadeleştirilirken matematiksel ilişkiyi bulma ve gerekçelendirme sorumluluğu öğrenciye bırakılırsa erişilebilirlik ile yüksek bilişsel talep birlikte gözetilebilir. Çözüm yolunun hazır verilmesi ise hedeflenen düşünme gerekliliğini değiştirebilir.

Şekil 1. Matematiksel görevlerin dört bilişsel talep düzeyi



Kaynak: Kategori açıklamaları Smith ve Stein'ın (1998) görev analiz rehberine dayanır; alan–çevre örnekleri ve şekil yazar tarafından düzenlenmiştir. Kategoriler, öğrencinin izlemesi gereken gelişim basamakları değildir.

Bilişsel talep düzeyine ilişkin dört kategori, her öğrencinin sırayla geçmesi gereken gelişim basamakları veya her görevin en üst düzeye ulaşmasını gerektiren bir başarı merdiveni olarak yorumlanmamalıdır. Hangi görevin seçileceği; öğrenme amacına, öğrencilerin ön bilgilerine ve görevin öğretim sürecinde nerede kullanılacağına bağlıdır (Smith ve Stein, 1998; Stein ve diğerleri, 2000). Düşük talepli görevler belirli bilgilerin hatırlanması veya işlemsel akıcılığın geliştirilmesi için kullanılabilir. Kavramsal ilişkileri inceleme ve muhakeme geliştirme hedeflendiğinde ise öğrencinin bu çalışmayı üstlenmesine olanak veren görevler gerekir (Lithner, 2017). Bir öğretim sürecinin niteliği, tek bir görevin

kategorisi yerine görevlerin amaçları ve birlikte oluşturdukları öğrenme olanakları üzerinden değerlendirilmelidir.

Genelleme hedeflendiğinde, öğrencilerin örneklerden hareketle bir ilişki geliştirmesine, bu ilişkinin hangi durumlar için geçerli olduğunu belirlemesine ve onu gerekçelendirmesine alan açılmalıdır (Ellis, 2007; Lannin, 2005). Muhakemeye yönelik bu olanaklar, öğretmenin görevi sınıfta nasıl ele aldığıyla birlikte düşünülmelidir. Martins ve diğerleri (2023), bir öğretmen adayının ardışık ders imecelerindeki deneyimini inceleyerek görevler, öğretmen eylemleri ve öğrenci çalışmalarına yönelik yansıtmanın birlikte önem taşıdığını göstermiştir. Bu bulgu bütün görevlerin aynı özellikleri taşıması gerektiğini değil, tasarım ve uygulama kararlarının öğrenci düşünmesi üzerinden yeniden incelenmesini desteklemektedir.

Muhakeme, problem çözme ve bilişsel talep arasındaki ilişki

Bu bölümde matematiksel muhakeme, bir çözüm yolunu ve ulaşılan sonucu matematiksel ilişkilere dayanarak geliştirme, gerekçelendirme ve sorgulama süreci olarak ele alınmaktadır. Lithner (2008), muhakemeyi taklitçi ve yaratıcı biçimleriyle inceleyen bir çerçeve sunar. Bu çerçevedeki yaratıcı matematiksel muhakemenin üç özelliği, çözüm yaklaşımının öğrenci için yeni olması veya yeniden kurulması, yaklaşım ve sonucunun inandırıcı gerekçelerle desteklenmesi ve bu gerekçelerin ilgili matematiksel özelliklere dayanmasıdır. Buradaki "yenilik", matematik dünyası için yeni bir sonuç üretmek anlamına gelmez; öğrenci, hazır bir çözümü taklit etmenin ötesinde bir yaklaşım geliştirir. Öğrencinin doğru sonuca ulaşması tek başına bu tür bir muhakeme yaptığını göstermez; ezberlenmiş bir yolu uygulayarak da doğru sonuca ulaşılabilir.

Problem çözme, öğrencinin çözüm yöntemini önceden bilmediği bir görev üzerinde çalışmasını ifade eder (National

Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bir görevin problem niteliği, görevdeki gereklilikler ile öğrencinin bilgi ve deneyiminin ilişkisine bağlıdır. Bir öğrenci için problem olan görev, çözüm yolunu önceden öğrenmiş başka bir öğrenci için rutin bir alıştırma olabilir (Lithner, 2017; Schoenfeld, 1985). Bu bölümde bilişsel talep ve muhakeme kavramları, görevleri ve öğrenci çalışmasını tamamlayıcı açılardan incelemek için kullanılmaktadır. Bilişsel talep, görevin öğrenciden ne tür bir düşünme beklediğini ve bu beklentinin uygulama sırasında korunup korunmadığını incelemeye yardımcı olur (Henningsen ve Stein, 1997; Stein ve diğerleri, 1996). Muhakeme analizi ise çözüm sırasında üretilen düşünce ve gerekçeleri görünür kılar (Lithner, 2008). Lithner'ın taklitçi ve yaratıcı muhakeme ayrımı, dört bilişsel talep kategorisiyle bire bir örtüşen bir sınıflama değildir. Nitekim görevin gerektirdiği muhakeme ile öğrencilerin fiilen kullandığı muhakeme her zaman aynı olmayabilir (Boesen ve diğerleri, 2010). Bu nedenle talep kategorisi belirlenirken görev çözümü ve öğrencinin ürettiği gerekçeler birlikte incelenmelidir.

Görevin sunulması ve uygulanmasında bilişsel talep

Matematiksel Görevler Çerçevesi (Mathematical Tasks Framework), görevin öğretim materyalinde yer aldığı biçim, öğretmen tarafından sınıfta sunulan biçim ve öğrencilerin üzerinde çalıştığı uygulama biçimi arasında ayrım yapar (Stein ve Smith, 1998; Stein ve diğerleri, 2000). Materyaldeki yüksek talep potansiyeli, öğretmenin açıklamalarıyla değişebilir; sunulan görev de öğrenci çalışması sırasında aynı düzeyde gerçekleşmeyebilir. Bu nedenle başlangıçtaki talep ile uygulamada gerçekleşen talep ayrı kanıtlarla değerlendirilmelidir. Bir ÜYZ çıktısına verilen kategori etiketi, yalnızca çıktının belirli öğrenci ön bilgileri altında gerektirdiği çalışmaya ilişkin bir değerlendirmedir.

Henningsen ve Stein (1997), yüksek düzeyli düşünmenin sürdürülmesinde öğretmenin öğrencinin düşünmesini destekleyen müdahaleleri, uygun zaman ve ön bilgilerle bağlantının önemini ele almaktadır. Öğretmenin temel matematiksel kararları devralması veya çalışmanın yalnızca doğru cevap elde etmeye yönelmesi talebi düşürebilir. Buna karşılık, açıklama isteme, öğrencinin yaklaşımını izleme ve çözümün temel ilişkisini hazır vermeden erişimi destekleme, yüksek talebin korunmasına yardımcı olabilir (Henningsen ve Stein, 1997; Parrish ve Bryd, 2022). Destek miktarı tek başına yeterli bir ölçüt değildir; desteğin hedeflenen muhakemeyi kime bıraktığı incelenmelidir.

Bu ayrım ÜYZ kullanımı için üç inceleme noktasına karşılık gelir: üretilen görevde hangi matematiksel gerekliliklerin bulunduğu, öğretmenin hangi bilgi ve destekleri sunmayı planladığı ve öğrencinin hangi kararları gerçekten verdiği. Görev metni, öğretmen açıklamaları ve öğrenci gerekçeleri bu noktalar için farklı veri kaynaklarıdır. Aşağıdaki tasarım çerçevesi ilk iki noktadaki kararları düzenlemeye; sınıf uygulaması bölümü ise üçüncü noktada aranacak kanıtları açıklamaya yöneliktir.

Üretken yapay zekânın görev tasarımındaki rolü

ÜYZ, matematiksel görev tasarımında problem metinleri, örnekler, çözüm taslakları ve destek soruları üretebilir. Bununla birlikte, akıcı bir çıktı matematiksel doğruluğu veya pedagojik uygunluğu garanti etmez. Ji ve diğerleri (2023), doğal dil üretiminde kaynağa ya da olgusal bilgiye dayanmayan fakat inandırıcı görünen çıktı sorununu halüsinasyon kapsamında tartışmaktadır. Bu genel derleme, belirli bir matematiksel görevin niteliğine ilişkin doğrudan etki kanıtı olarak değil, çıktıyı doğrulama gereğinin arka planı olarak kullanılmalıdır. Matematiksel görevlerde öğretmen hem çözümü hem de öğrenciden beklenen düşünmenin öğrenme amacıyla ilişkisini incelemelidir.

Bu literatürü değerlendirirken görev üretimi, görev sınıflandırması, çözüm üretimi ve öğrencinin araçla çalışması ayrı araştırma nesneleri olarak ele alınmalıdır. Mevcut bir görevi doğru çözme, uygun bir görev tasarlama ve bir görevin talep düzeyini sınıflandırma ayrı yeterliklerdir. Ayrıca doğru bir kategori etiketi, öğrencinin sınıfta o düzeyde çalıştığının kanıtı değildir. Aşağıdaki araştırmalar, bu ayrımlar korunarak karşılaştırılmaktadır.

ÜYZ ile doğrudan görev üretimini inceleyen araştırmalar, sonuçların matematiksel içeriğe, kullanılan modele ve isteme göre değişebildiğini göstermektedir. Sapkota ve Bondurant (2024), kesirlerde çarpma konusunda yürüttükleri öz-çalışmada, istemi on farklı biçimde düzenlemelerine rağmen ChatGPT'den alan modelini kullanan bir görev elde edememiştir. Üretilen görevlerin çoğu işlemsel olmuş; bazı görevlerde kavramsal veya işlemsel yanlışlıklar ve belirsizlikler görülmüştür. Sawyer ve Aga (2026) ise anaokulundan beşinci sınıfa kadar uzanan Common Core matematik standartları için ChatGPT 3.5'in ürettiği 191 görevi incelemiştir. Bu araştırmada yüksek bilişsel talep kategorilerinin ağırlığına karşın içerik tekrarı ve sınıf düzeyine uygunluk sorunları bildirilmiş; yüksek talepli görevlerin çoğu bağlantılı işlemler kategorisinde kalmıştır. İki çalışma farklı içerik ve inceleme ölçütleri kullanmaktadır. Bu nedenle bulguların yan yana getirilmesi, tüm güncel ÜYZ araçları veya matematik konuları için tek bir yeterlik düzeyi belirlemeye olanak vermez; çıktı doğruluğu, temsil uygunluğu ve bilişsel talep ayrı ayrı denetlenmelidir.

ÜYZ ile görev tasarlarken öğretmenin bilgisinin nasıl bir rol oynadığını inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır. Aqazade ve diğerleri (2026), üç matematik öğretmen eğitimcisiyle yürüttükleri öz-çalışmada, pedagojik bilginin ve pedagojik alan bilgisinin ÜYZ'ye verilen istemlerin geliştirilmesindeki rolünü incelemiştir. Bu çalışma tasarım sürecine odaklandığı için öğretmenlerin ya da öğrencilerin öğrenmesi üzerindeki etkiye dair doğrudan bir kanıt

sunmaz. Bununla birlikte, ÜYZ ile etkileşim boyunca öğrenme amacının sürekli göz önünde tutulmasının önemini ortaya koyar. Öğretmen, görevde korunması gereken matematiksel fikri ve öğrencinin kendi başına vermesi gereken kararları önceden belirlediğinde, ÜYZ'nin ürettiği çıktıyı daha anlamlı ölçütlerle değerlendirebilir. Pepin ve diğerleri (2017) tarafından tartışılan "öğretmen tasarım kapasitesi" kavramı da benzer bir noktaya işaret eder: Öğretmenin dijital kaynakları seçme ve uyarlama süreci, onun bilgisine ve verdiği kararlara dayanır. Bu çalışmalar birlikte, içerik üretiminin öğretmenin seçim, uyarlama ve doğrulama kararlarıyla tamamlanması gerektiğini göstermektedir.

Bilişsel talebin düşmesine yol açabilecek tasarım kararları

Aşırı yapılandırma ve çözüm yolunun açıklanması

Bir görevin bütün adımlarını önceden sıralamak, öğrencinin strateji seçmesini gereksiz hâle getirebilir. Görev analiz rehberi, bu durumu öğrenciden beklenen düşünme türü üzerinden ele alır (Smith ve Stein, 1998). Uygulama araştırmaları ise başlangıçta yüksek talepli olan bir görevin, öğrencinin vermesi beklenen kararlar öğretmen ya da materyal tarafından üstlenildiğinde düşük talepli bir çalışmaya dönüşebileceğini göstermektedir (Henningsen ve Stein, 1997; Stein ve diğerleri, 1996).

Literatürde, öğrenciyi öğretmenin önceden belirlediği bir yönteme yönelten "huni" (funneling) etkileşimleri ile öğrencinin düşüncesini açıklamasını ve geliştirmesini sağlayan "odaklayıcı" (focusing) etkileşimler arasında ayrım yapılır (Herbel-Eisenmann ve Breyfogle, 2005; Wood, 1998). Bu ayrım, tek bir sorunun sözcüklerinden çok, soru–yanıt dizisinin öğrenci düşünmesine nasıl karşılık verdiğiyle ilgilidir. Örneğin bir tablodaki sütunların hangi büyüklükleri gösterdiğini sormak, öğrencinin açıklamasıyla bağlantılı kullanıldığında anlamlandırmayı destekleyebilir. Buna karşılık "her girdiyi üçle çarpıp yedi ekle" yönergesi, kuralın

keşfedilmesini amaçlayan bir görevde temel ilişkiyi hazır verir. ÜYZ'den görev ya da destek sorusu istenirken öğrencinin geliştirmesi beklenen yöntem ve ilişkiler isteme açıkça yazılmalı; desteğin hangi aşamada sunulacağı belirtilmelidir.

Yüzeysel görev özelliklerine göre talep düzeyini yanlış değerlendirme

Bir görevin bilişsel talebi, görevin uzunluğuna ya da yönergede kullanılan fiillere bakılarak belirlenemez. Çok adımlı bir görev, aynı algoritmanın art arda uygulanmasını gerektiriyorsa uzun ama rutin bir hesaplamadan öteye geçmeyebilir. Benzer şekilde "hesaplayınız" fiili her zaman düşük talebe işaret etmez; bir toplamı bulmak, öğrencinin yeni bir strateji geliştirmesini gerektirebilir. "Açıklayınız" fiili de ezberlenmiş bir kuralın tekrar edilmesini isteyebilir. Smith ve Stein'in (1998) kategori ölçütlerine göre asıl sorulması gereken, öğrencinin görevi çözmek için hangi matematiksel ilişkileri kullanmak ve hangi kararları kendisi vermek zorunda olduğudur. Aynı sorun ÜYZ araçları için de geçerlidir. Fox ve diğerleri (2026a), on bir aracı karşılaştırdıkları ön baskı çalışmada, araçların sınıflamalarında altta yatan matematiksel süreçlerden çok yüzeysel metin özelliklerine ağırlık verebildiğini bildirmiştir. Aynı araştırmacıların görev dönüştürmeye yönelik ikinci ön baskısında, bazı çıktılar düşük talebi korumuş, bazıları ise hedeflenen kategorinin üzerine çıkmıştır; araçların sınıflama ve dönüştürme başarıları arasında küçük negatif bir ilişki raporlanmıştır ($r = -0{,}35$; Fox ve diğerleri, 2026b). Bu sonuçlar incelenen araçlar, görevler ve istemler için geçerlidir. Sınıflama ve dönüştürmenin ayrı değerlendirilmesi gerektiğine işaret etmekle birlikte, sınıfta talebin korunmasına veya öğrenci öğrenmesine ilişkin doğrudan kanıt sunmamaktadır.

Temsil çeşitliliğini bilişsel talep olarak yorumlama

Temsillerin sayısını artırmak, öğrencinin bu temsiller arasındaki ilişkiyi kendiliğinden kurmasını sağlamaz. Duval (2006), aynı temsil kaydı içinde yapılan işlemler (treatment) ile bir temsil kaydından diğerine geçişler (dönüşüm; conversion) arasında ayrım yapar. Örneğin bir cebirsel ifadeyi eşdeğer biçimlerde yeniden yazmak bir kayıt içi işlemdir; sözel olarak verilen bir durumu cebirsel bir ifadeyle göstermek ise iki kayıt arasında bir dönüşümdür ve bilişsel olarak farklı bir süreçtir. Bu nedenle ÜYZ'den görevi tablo, şekil ve sembolik ifadeyle zenginleştirmesini istemek yeterli değildir; öğrencinin bu gösterimlerdeki ortak matematiksel ilişkiyi nasıl açıklayacağı da istemde belirtilmelidir. Ayrıca bir görevde temsil dönüşümü bulunması, o görevin otomatik olarak yüksek bilişsel talepli olduğu anlamına gelmez; dönüşüm de hazır bir kalıba göre rutin biçimde yapılabilir.

Temsil ve bilişsel talebi birlikte değerlendiren ÜYZ uygulamaları da bulunmaktadır. Ünsal ve Sezen Yüksel (2026), yedinci sınıf cebir görevlerini incelemek için ChatGPT tabanlı TRSR–Cognitive Demand Analyzer aracını geliştirmiş ve aracın değerlendirmelerini uzman görüşleri ve bir öğrencinin sesli düşünme verileriyle karşılaştırmıştır. Araç, görevlerdeki temsil süreçlerini tutarlı biçimde belirleyebilmiş; ancak dönüşüm ağırlıklı görevlerde gerekçelerini ayrıntılı ve sistematik biçimde yapılandırmakta zorlanmıştır. Bu sonuçlar, incelenen görevlerle ve tek öğrencinin deneyimiyle sınırlıdır; genel sınıflama geçerliği ya da öğrenme etkisi olarak yorumlanmamalıdır. Puraivan ve diğerleri (2025) de kuadratik fonksiyon görevlerinin bilişsel talebini semiyotik temsil süreçleri üzerinden değerlendiren bir yöntemi ChatGPT ile uygulamıştır. İncelenen üç görevden ikisinde uzmanlar modelin değerlendirmesini uygun bulmuş, birinde ise uzman ve model değerlendirmeleri uyuşmamıştır. Her iki çalışma, sınıflama etiketinin görev çözümü ve gerekçeleriyle birlikte denetlenmesi için

bir dayanak sunmaktadır. Bilişsel talep çerçevelerinin robotik ve kodlama görevlerine uyarlanması da ölçütlerin içerik ve amaçla ilişkisini açıklama gereğini göstermektedir (Bloodworth ve diğerleri, 2023).

Açıklama sorumluluğunun araçta kalması

ÜYZ'nin doğru bir çözüm veya gerekçe sunması, öğrencinin aynı muhakemeyi geliştirdiğini göstermez. Bastani ve diğerleri (2025), lise matematiğinde yürüttükleri saha deneyinde, araçla çalışma sırasındaki performans ile araç kaldırıldıktan sonraki bağımsız performansın yardımın tasarımına göre farklılaşabildiğini göstermiştir. Araştırma, öğretmenin görev hazırlamasının etkisini doğrudan ölçmemektedir. Bununla birlikte, öğrenciye sunulan yardımın çözüm sorumluluğunu ne ölçüde devraldığını incelemek için bir gerekçe sağlamaktadır. Öğretmen için hazırlanan ayrıntılı çözümün öğrenci yönergesine aktarılması bu açıdan özellikle değerlendirilmelidir.

Muhakemeyi destekleyen tasarım seçenekleri

Muhakemeyi destekleyen bir görevde öğrenciden beklenen matematiksel karar açıkça tanımlanmalıdır. Birden çok çözüm yolu istemek, aynı algoritmanın farklı sözcüklerle yinelenmesinin ötesine geçmelidir. Görev tasarımı literatürü, farklı matematiksel yaklaşımların karşılaştırılmasını öğrenme olanaklarıyla birlikte ele almaktadır (Sullivan ve diğerleri, 2013; Watson ve Ohtani, 2015). Örneğin bir şekil örüntüsünü hem tablodaki değişimden hem de şeklin parçalarını sayarak açıklamak, yaklaşımların dayandığı ilişkileri karşılaştırmaya alan açar. Aynı şeklin aynı nesneleri sayıldığında doğru yaklaşımların aynı sayısal sonucu vermesi gerekir. Sonuçlar farklıysa tanımlar, sayma birimi ve işlemler incelenmelidir; çözüm yollarının çeşitliliği matematiksel yanlışlığı geçerli kılmaz. Hatisaru'nun (2020) öğrenci çizimleri üzerinden

incelediği görev ve temsil deneyimleri de görevin hangi matematiksel çalışmayı görünür kıldığına dikkat çekmektedir.

Öğrenciden yolların neden aynı sonucu verdiğini açıklaması istendiğinde çözüm çeşitliliği matematiksel bir incelemeye dönüşür. Bu beklenti, gerekçenin matematiksel özelliklere dayanmasını öne çıkaran muhakeme yaklaşımıyla ilişkilidir (Lithner, 2017). Hata analizi görevlerinde yanlış satırı bulmanın ardından, hatayı üreten düşüncenin açıklanması ve çözümün gerekçelendirilmesi istenebilir (Rushton, 2018). Genellemede ise birkaç örneğin denenmesi, bütün uygun durumları kapsayan gerekçeden ayrılmalıdır. Şimşek ve Kılıçoğlu (2025), sekiz özel yetenekli öğrenciyle yürüttükleri çalışmada, doğrulayan ve çelişen örnekler karşısında üretilen örneklerin, genellemelerin ve gerekçelerin farklılaşabildiğini göstermiştir. Bu sınırlı örneklem, bütün öğrencilerin hangi güçlüğü ne sıklıkta yaşadığına ilişkin bir oran vermez.

Karşıt örnek, bütün uygun durumlar için ileri sürülen bir iddiayı, koşullarını karşılayan tek bir başarısız durumla çürütebilir. Ancak birkaç doğrulayan örnek aynı evrensel iddiayı kanıtlamaz. Mariotti'nin (2006) ispat ve gerekçelendirme tartışması, örneklerin işlevi ile genel bir iddianın matematiksel dayanağının birlikte ele alınmasına katkı sağlar. Görevde incelenecek iddia ve geçerlilik koşulları açık olduğunda, öğrencinin örnek seçimi de muhakemenin değerlendirilebilir bir parçasına dönüşür.

Açık uçluluk, öğrenciye yöntem, veri, varsayım veya değerlendirme ölçütü seçme alanı açtığında işlevseldir. Ospanov ve diğerleri (2023), başlangıç verileri veya hedefi bütünüyle belirlenmemiş açık görevlerde öğrencinin ek parametreler ve çözüm yaklaşımı belirlemesini ele almaktadır. Plunger ve Yenokyan (2023) da açık görevleri farklı yaklaşım ve ürünlerin tartışılabildiği öğrenme ortamlarıyla ilişkilendirmektedir. Bu açıklık, aynı matematiksel iddia için çelişen cevapların kendiliğinden eşdeğer sayılması anlamına gelmez. Seçimler, görevin sonucunu ya da

yorumunu etkilemeli ve matematiksel olarak savunulmalıdır. Sullivan ve diğerleri (2013) ile Watson ve Ohtani (2015), görevlerle öğretimi uygulama ve uyarlama kararlarıyla birlikte ele almaktadır. Glegola ve diğerleri (2026), 31 öğretmenin problem çözme görevlerini kullanışını inceleyerek pedagojik alan bilgisi ve inançların birlikte değerlendirilmesinin önemini göstermiştir. Bu bulgu, tek bir öğretmen özelliğine veya yalnızca görev metnine bakılarak bütün uygulamaların açıklanamayacağına işaret eder. Öğrencinin nereden başlayacağını anlayabilmesi ile temel matematiksel kararları kendisinin vermesi birlikte gözetilmelidir. Aşağıdaki altı boyut, bu kararları inceleme ve somut revizyon gerekçeleri oluşturma amacıyla düzenlenmiştir.

İstem tasarımından bilişsel talep tasarımına

İstem (prompt), ÜYZ sistemine verilen, beklenen çıktıyı ve bu çıktının karşılaması gereken koşulları açıklayan yönlendirmedir. Örneğin "Yedinci sınıf için beş cebir sorusu oluştur" isteği, konuyu ve sınıf düzeyini belirtir; ancak öğrencinin bu sorularla nasıl bir düşünme süreci yürütmesi beklendiğini açıklamaz. Daha işlevsel bir istem ise öğrenme hedefini, öğrencilerin ön bilgilerini ve öğrencinin görevde ne yapacağını açıkça tanımlar.

Bu bölümde önerilen ÜYZ ve Bilişsel Talep Tasarım Çerçevesi, görev analizi, temsil ve muhakeme literatürünün altı boyutlu bir sentezidir. Boyutlar, kaynaklarda birlikte sunulmuş bir modelin aktarımı değildir. Öğrenciye bırakılan matematiksel sorumluluk, alternatif yaklaşım olanakları, gerekçelerin dayanakları, temsil ilişkileri, kavramsal bağlantılar ve sonuçların kapsamı ayrı inceleme soruları olarak düzenlenmiştir. Tablo 1, her boyutun kuramsal dayanağını ve istemde açıklanacak gereklilikleri göstermektedir. Tablo 2 ise görev metnindeki tasarım göstergelerini, öğrenci çalışmasında aranacak kanıtlardan ayırmaktadır. Bu boyutlar ÜYZ kullanılmadan tasarlanan görevler için de anlamlıdır. Bölümün

katkısı, mevcut görev tasarımı bilgisini istem yazımı, çıktı denetimi ve öğretmen revizyonuyla ilişkilendirmesidir.

Tablo 1. Altı boyutun kuramsal dayanakları ve istemde açıklanacak gereklilikler

Boyut	**Kuramsal dayanak ve işlev**	**İstemde açıklanacak gereklilik**
Öğrenci kararı	Smith ve Stein (1998); Lithner (2017): yöntem ve matematiksel ilişkinin öğrenci tarafından geliştirilmesi.	Yöntem, veri veya ölçüt seçiminin hangi kısmını öğrenci yapacak? Seçim sonucu nasıl etkileyecek?
Çözüm yollarına açıklık	Watson ve Ohtani (2015); Sullivan ve diğerleri (2013): farklı yaklaşım ve ürünlere alan açılması.	Hangi farklı matematiksel yaklaşım veya ürünler kabul edilecek? Tek cevap varsa farklı yollar nasıl incelenecek?
Gerekçelendirme	Lithner (2008); Smith ve Stein (1998): iddianın matematiksel özelliklere dayandırılması.	Hangi iddia, hangi ilişkilerle savunulacak? Hazır gerekçe yerine öğrenci ne geliştirecek?
Temsil	Duval (2006): bir kayıt içindeki işlemler ile kayıtlar arası dönüşümün ayrılması.	Tablo, şekil, söz veya sembol arasındaki hangi anlam ilişkisi açıklanacak?
Bağlantı	Smith ve Stein (1998): işlemlerin kavramsal anlamlarla ilişkilendirilmesi.	Hangi kavram ve işlemler birlikte incelenecek? İlişki hesaplamanın ötesinde nasıl açıklanacak?
Genelleme	Ellis (2007); Lannin (2005): örneklerin ötesine geçen ilişkinin geliştirilmesi, kapsamının belirlenmesi ve gerekçelendirilmesi.	Sonuç hangi durumlara taşınacak? Geçerlilik koşulları ve sınırlar nasıl incelenecek?

Kaynak: Tabloda belirtilen yayınlardan hareketle yazar tarafından sentezlenmiştir. Boyutların bu yayınlarda birlikte önerildiği veya birbirinden bağımsız olduğu ileri sürülmemektedir. Çerçeve, bilişsel talep kategorilerinin yerine geçen bir sınıflama ya da geçerliği sınanmış bir ölçek değildir.

Çerçevede öğrenci kararı, matematiksel seçimin kim tarafından yapıldığını; çözüm yollarına açıklık ise hangi farklı yaklaşım veya ürünlere izin verildiğini sorgular. Tek doğru cevabı

olan bir görev de farklı çözüm yollarına açık olabilir. Temsil boyutu, gösterimler arasındaki anlam ilişkisini; bağlantı boyutu, kavram ve işlemler arasındaki ilişkiyi inceler. Bu iki boyut aynı öğrenci açıklamasında birlikte görünebilir. Gerekçelendirme, bir iddianın dayanağını; genelleme ise ilişkinin hangi durumlara uzandığını ve sınırlarını ele alır. Boyutlar, örtüşebilen inceleme alanlarıdır; birbirinden bağımsız ölçme alt ölçekleri olarak yorumlanmamalıdır.

Tablo 2. Tasarım göstergeleri ve sınıf uygulamasında aranacak kanıtlar

Boyut	**Görev metninde tasarım göstergesi**	**Öğrenci çalışmasında aranacak kanıt**
Öğrenci kararı	Sonucu veya yorumu etkileyen bir seçim öğrenciye bırakılır.	Öğrenci seçimini açıklar; alternatifle karşılaştırıp matematiksel gerekçe sunar.
Çözüm yollarına açıklık	Aynı algoritmanın yazım çeşitlerini aşan yaklaşımlara izin verilir.	Farklı stratejiler kurulur veya karşılaştırılır; neden aynı ya da farklı sonuç verdiği açıklanır.
Gerekçelendirme	İddiayı dayanaklarla savunma veya geçersizliğini inceleme istenir.	İddia ile matematiksel ilişki arasında bağ kurulur; karşıt örneğin işlevi açıklanır.
Temsil	Gösterim üretme veya gösterimler arasındaki ilişkiyi açıklama gerekliliği vardır.	Tablo, şekil, söz veya sembolün aynı ilişkiyi nasıl ifade ettiği açıklanır.
Bağlantı	Kavram ve işlemler arasındaki ilişkiyi kullanmak veya açıklamak gerekir.	Örneğin sabit alanın neden sabit çevre gerektirmediği matematiksel olarak açıklanır.
Genelleme	Örneklerin ötesine geçme, kapsamı ve sınırları belirtme istenir.	Öğrenci genel ilişkiyi savunur, koşulları belirtir; örnekle genel gerekçeyi ayırır.

Kaynak: Yazar tarafından geliştirilmiştir. Tasarım göstergeleri, öğrenme veya uygulamada gerçekleşen talep kanıtı değildir; öğrenci açıklamaları ve öğretmen desteği birlikte incelenmelidir.

Cebirsel bir örüntü görevi için kullanılabilecek istem örneği aşağıdadır. Uygulamada öğretmen, köşeli ayraçlarla belirtilen öğrenci bilgilerini doldurmalıdır.

[Sınıf düzeyi, öğrencilerin ön bilgileri ve öğrenme hedefi] bilgilerini dikkate alarak, ortak kenarları paylaşan yan yana karelerden oluşan bir örüntü görevi hazırla. Öğrenciler kibrit çöpü sayısının nasıl değiştiğini incelesin, genel bir ilişki geliştirsin ve bu ilişkinin bütün uygun şekillerde neden geçerli olduğunu açıklasın. Farklı sayma veya temsil yaklaşımlarını karşılaştırabilecekleri bir soru ekle. Öğrenci metninde genel formülü, tamamlanmış tabloyu veya çözüm adımlarını verme. Öğrenci görevi ile öğretmen için doğrulanacak çözüm taslağını ayrı sun. Öğretmen bölümünde olası stratejiler ve temel ilişkiyi açıklamayan destek soruları öner. Düzey kararını, öğrencilerin ön bilgileri ve üstlenmeleri gereken çalışma üzerinden gerekçelendir.

Takip istemi, yani ÜYZ'nin ilk çıktısından sonra verilen ek yönlendirme, genel bir "daha iyi yap" talebi yerine çıktıda belirlenen somut bir soruna yönelmelidir. Örneğin önerilen ikinci çözüm, ilk çözümün yalnızca farklı sözcüklerle ifade edilmiş hâliyse şeklin yapısına dayanan başka bir sayma yaklaşımı istenebilir. ÜYZ, öğrencinin kendisinin bulması gereken genel kuralı görev metnine eklemişse bu ifadenin çıkarılması istenebilir. Her düzeltmeden sonra öğretmen görevi yeniden çözmeli ve öğrencinin üstleneceği çalışmanın değişip değişmediğini incelemelidir. Schorcht ve diğerleri (2026), dört büyük dil modeli, altı görev ve dört istem tekniğiyle üretilen çözümlerin matematik eğitimi açısından niteliğini karşılaştırmıştır. Çalışmada içerikle ilgili nitelik daha çok model ve görev özellikleriyle; çözüm süreci ve pedagojik bağlamla ilgili nitelikler ise istem tasarımıyla ilişkili bulunmuştur. Araştırma, çözüm üretimini incelemektedir; bu bölümdeki takip istemlerinin görev tasarımına veya öğrenci öğrenmesine etkisini doğrudan sınamamaktadır.

Bu bölümde önerilen tasarım döngüsünde öğretmen önce öğrenme amacını ve ön bilgileri belirler, görevi üretir ve matematiksel olarak inceler. Sonra talep düzeyini gerekçelendirerek altı boyut üzerinden revizyon yapar; destek soruları ve değerlendirme beklentilerini planlar. Sınıftan elde edilen öğrenci ürünleri, sonraki tasarımın yeniden ele alınmasına dayanak oluşturur. Çerçevenin işlevi, kategori etiketinin yanında hangi matematiksel gerekliliğin değiştirilmesi gerektiğini belirlemektir. Aşağıdaki alan–çevre örneği, istemden öğrenci çalışmasının değerlendirilmesine uzanan bu kararları aynı içerik üzerinde birleştirmektedir.

Alan ve çevre görevinin muhakemeye dönüştürülmesi

Öğrenme hedefi, istem ve çıktının incelenmesi

Alan ve çevre içeriği, aynı matematiksel konunun farklı düşünme gerekliliklerıyle nasıl tasarlanabileceğini göstermeye uygundur. Bu örnek, alan ve çevre hesaplama ile pozitif tam sayı çarpanlarını belirleme ön bilgilerine sahip yedinci sınıf öğrencileri için tasarlanmıştır. Hedef, sabit alanlı dikdörtgenleri sistematik araştırmak, listenin eksiksizliğini savunmak ve alan ile çevre arasındaki ilişkiyi açıklamaktır. Başlangıç görevi, kenar uzunlukları 12 cm ve 8 cm olan bir dikdörtgenin alanını bulmayı istemektedir. Alan formülünü bilen öğrenci için 12 ile 8'i çarparak 96 cm^2 sonucuna ulaşmak yeterlidir. Buna karşılık alanı birim kareler üzerinden ilk kez geliştiren öğrenci farklı bir çalışma yürütür. Bu nedenle başlangıç görevinin bağlantısız işlemler düzeyinde yorumlanması, formülün bilindiği ön bilgi koşuluna bağlıdır.

Bu hedefi isteme taşımak için aşağıdaki örnek kullanılabilir. İstemde öğretmen için çözüm planı istenirken öğrencinin araştırması korunmakta; çıktı biçimi ile matematiksel çalışma beklentisi birlikte belirtilmektedir.

Alan ve çevreyi hesaplamayı ve tam sayı çarpanlarını belirlemeyi bilen yedinci sınıf öğrencileri için bir görev hazırla. Alanı 96 cm² olan, kenarları santimetre cinsinden pozitif tam sayı olan bütün farklı dikdörtgenleri araştırmalarını iste. Döndürülmüş hâlleri aynı kabul et. Öğrenciler en küçük çevreyi seçsin, seçenekleri tükettiğini gerekçelendirsin ve sabit alan ile değişen çevre arasındaki ilişkiyi açıklasın. Bir çizimle veya seçtikleri başka bir gösterimle açıklamalarını ilişkilendirmelerini iste. Öğrenci metninde çarpan çiftlerinin listesini, en küçük çevreyi, bir listeleme algoritmasını veya çözüm adımlarını verme. Öğrenci görevini; doğrulanacak öğretmen çözümü, olası stratejiler ve temel kararı vermeyen destek sorularından ayrı sun.

Temsili çıktıdaki sorun ve öğretmen revizyonu

İstemdeki koşulların çıktıda nasıl denetleneceğini göstermek için aşağıdaki sorunlu taslak yazar tarafından oluşturulmuştur. Bu metin, gerçek bir model yanıtı değil, öğretmenin incelemesini somutlaştıran temsili bir çıktıdır. Taslak öğrenci yönergesi şöyle olsun:

Alanı 96 cm² olan dikdörtgenler için 1 × 96, 2 × 48, 3 × 32, 4 × 24, 6 × 16 ve 8 × 12 kenar çiftlerini kullanın. P = 2(a + b) formülüyle çevreleri hesaplayın. En küçük çevreyi veren 8 cm × 12 cm dikdörtgenini işaretleyin ve alan aynıyken çevrenin değiştiğini açıklayın.

Bu taslakta matematiksel veriler doğrudur; ancak bütün çiftler ve son karar hazır verildiğinden öğrenci kararı ve araştırma sorumluluğu daralmıştır. “Açıklayın” ifadesi, alan ile çevrenin değişimini gerekçelendirmeye alan açabilse de seçeneklerin eksiksizliğini araştırmayı gerektirmez. Öğretmen, Tablo 1 ve Tablo 2’deki sorularla öğrenciye hazır sunulan yaklaşımı ve sonucu, ayrıca eksik kalan gerekçelendirme beklentisini saptayabilir. Ardından çarpan çiftlerini ve son kararı öğrenci metninden çıkarır; eksiksizlik

gerekçesini ve gösterimle ilişki kurma beklentisini ekler. Takip istemi de bu somut sorunlara yöneltilebilir:

Öğrenci metnindeki kenar çiftlerini, hazır çevre sonucunu ve adım adım çözüm yönlendirmesini çıkar. Bunları öğretmen bölümüne taşı. Öğrencinin kendi listesini oluşturmasını, başka seçenek kalmadığını savunmasını ve alan–çevre ilişkisini açıklamasını gerektiren yönerge yaz. Destek soruları görevin koşullarını anlamaya yardım etsin; listeleme yöntemini veya son kararı açıklamasın.

İnceleme sonrasında öğrenciye sunulacak görev şu biçimde düzenlenebilir: "Alanı 96 cm² olan ve kenar uzunlukları santimetre cinsinden pozitif tam sayı olan bütün farklı dikdörtgenleri oluşturunuz. Döndürülmüş hâlleri aynı kabul ediniz. Çevresi en küçük olanı belirleyiniz; başka bir dikdörtgen kalmadığından nasıl emin olduğunuzu ve seçiminizi gerekçelendiriniz. Alan aynı kaldığı hâlde çevre neden değişmektedir? Açıklamanızı bir çizim veya seçtiğiniz başka bir gösterimle ilişkilendiriniz." Burada öğrenci çarpan çiftlerini düzenlemeli, listeyi tamamladığını savunmalı ve alan–çevre ilişkisini açıklamalıdır. İlerleme sırası başlangıçta verilmemiştir. Kare, matematiksel olarak dikdörtgenler ailesine dahildir; ancak bu örnekte 96'nın tam sayı kenarlı bir kare oluşturmaması nedeniyle listede bulunmaz.

Öğretmen için çözüm ve matematiksel denetim

Revize edilmiş yönerge, doğru bir görev üretildiğinin son kontrolüyle birlikte kullanılmalıdır. Tablo 3 öğretmen çözümünün bir parçasıdır; öğrencinin sistematik liste geliştirmesi beklendiği için başlangıçta verilmez. Öğretmenin amacı, hazır çözümü aktarmak yerine öğrencinin kendi yaklaşımını oluşturup oluşturmadığını izlemektir.

Tablo 3. Pozitif tam sayı kenar koşulunda 96 cm² alanlı dikdörtgenler

Kenar uzunlukları (cm)	Çevre (cm)	Alan (cm²)
1 ve 96	194	96
2 ve 48	100	96
3 ve 32	70	96
4 ve 24	56	96
6 ve 16	44	96
8 ve 12	40	96

Kaynak: Görevin matematiksel çözümüne dayanılarak yazar tarafından hazırlanmıştır. Kenarlar pozitif tam sayıdır; döndürülmüş dikdörtgenler aynı kabul edilmiştir.

Kenarların pozitif tam sayı olması koşulunda 96'nın sırasız çarpan çiftleri, 1 × 96, 2 × 48, 3 × 32, 4 × 24, 6 × 16 ve 8 × 12'dir. Alanlar 96 cm² olarak kalırken çevreler sırasıyla 194, 100, 70, 56, 44 ve 40 cm'dir. Dolayısıyla bu koşul altında en küçük çevre 8 cm ve 12 cm kenarlı dikdörtgende 40 cm'dir. Listenin eksiksizliği şöyle gerekçelendirilebilir: Küçük kenar a, büyük kenar b olmak üzere ab = 96 ve a ≤ b'dir. Küçük kenar 10 cm veya daha fazla olsaydı alan en az 100 cm² olurdu. Bu nedenle 1'den 9'a kadar olan tam sayılar taranır; 96'yı bölen 1, 2, 3, 4, 6 ve 8 değerleri bütün sırasız çiftleri verir. Kenarların yer değiştirmesi yeni bir dikdörtgen oluşturmaz. Kenar uzunluklarına ilişkin bu koşul, sonucun kapsamının bir parçasıdır; 40 cm sonucunu bütün pozitif gerçek uzunluklar için geçerli bir minimum gibi sunmak doğru olmaz.

Bu görevde en küçük çevreyi bulma yöntemi öğrenciler için önceden verilmemişse, olasılıkları oluşturma, araştırmayı eksiksiz yürütme ve sonucu savunma beklentisi matematik yapma kategorisi için bir potansiyel sunar. Öğretmen çarpan çiftlerini ve karşılaştırma yöntemini hazır verip yalnızca çevrelerin hesaplanmasını isterse

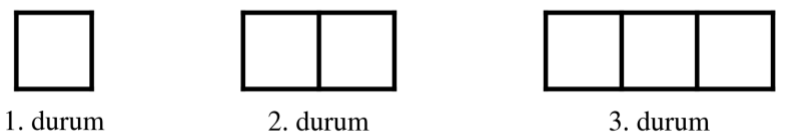
çalışma bağlantısız işlemler düzeyinde kalabilir. Aynı hazır tablo üzerinden alanın sabit kalmasına rağmen çevrenin neden değiştiğinin şekil ve kenar ilişkileriyle açıklanması istenirse bağlantılı işlemler için bir olanak oluşur (Smith ve Stein, 1998). Bu kararlar öğrenci ön bilgilerine ve sınıftaki desteğe bağlıdır; görevde "en küçük" ifadesinin bulunması tek başına yüksek talep kanıtı değildir.

Farklı içeriklerde muhakemeye alan açma

Cebirsel ilişkiyi iki yoldan açıklama

Muhakemeyi destekleyen tasarım ilkeleri, başka içeriklere de uygulanabilir. Yedinci sınıf düzeyinde bir örüntü görevi için öğrencilerin doğal sayılarla işlem yapabilmesi ve sözel ilişkileri sembolik biçimde ifade etmeye hazırlıklı olması beklenir. Ortak kenarları paylaşan yan yana karelerde bir, iki ve üç kare için sırasıyla dört, yedi ve on kibrit çöpü gerekir (Şekil 2). Öğrenci, kare sayısı arttığında çöp sayısının nasıl değiştiğini ve genel ilişkinin neden geçerli olduğunu araştırabilir. İlk kareye her yeni kare için üç çöp eklemek ile yatay ve düşey parçaları ayrı saymak, aynı yapıyı farklı biçimlerde inceleyen iki yaklaşımdır.

Şekil 2. Ortak kenarları paylaşan yan yana karelerin ilk üç durumu



Kaynak: Yazar tarafından hazırlanmıştır. Öğrencinin sayma yaklaşımını ve genel ilişkiyi geliştirmesi bekleniyorsa formül başlangıçta verilmemelidir.

Öğretmen için doğrulama, pozitif tam sayı n ile gösterilen kare sayısına göre aşağıdaki biçimde yazılabilir. Öğrencinin genel

ilişkiyi geliştirmesi bekleniyorsa bu ifadeler başlangıç yönergesine eklenmemelidir:

$$4 + 3(n - 1) = 2n + (n + 1) = 3n + 1$$

İlk ifade, başlangıçtaki dört çöpe her yeni kare için üç çöp eklenmesini; ikinci ifade, yatay parçalar ile düşey sınırların ayrı sayılmasını gösterir. Öğrenciden iki yaklaşımın ortak kenarları nasıl dikkate aldığını ve neden aynı sonucu verdiğini açıklaması istenebilir. Temsili bir öğrenci açıklaması şöyle kurulabilir: "Her kare için dört çöp saysaydım ortak kenarları iki kez sayardım. n karede n − 1 ortak kenar bulunduğundan 4n'den n − 1'i çıkarırım." Bu açıklama da 3n + 1 sonucuna ulaşır ve ortak kenarın rolünü görünür kılar; gerçek öğrenci verisi değildir. Görevin talep yorumu, öğrencinin yöntemi geliştirme ve gerekçelendirme gerekliliğine dayanmalıdır. Yalnızca hazır ifadeleri eşitlemek aynı çalışmayı gerektirmez.

Hata analizi ve iddianın kapsamı

Yüzde konusundaki hata analizi, referans bütün ve yüzde hesaplama ön bilgilerine sahip öğrenciler için şu soruyla başlatılabilir: "Bir öğrenci, 'Bir ürüne yüzde 20 zam yapılıp sonra yüzde 20 indirim uygulanırsa başlangıç fiyatına dönülür' diyor. Bu iddia doğru mudur? Kararınızı hesaplama ve açıklamayla savununuz." Öğretmen için doğrulamada 100 birimlik başlangıç fiyatı zamdan sonra 120, indirimden sonra 96 birimdir. Bu tek karşıt örnek, 'her zaman başlangıç fiyatına dönülür' iddiasını çürütür. Öğrenciden iki yüzde işleminin neden farklı bütünlere uygulandığını açıklaması beklenmelidir. Böylece hesaplama, referans bütünün incelenmesine bağlanır; yalnızca 96 sonucunu bulmak görevin muhakeme beklentisini tamamlamaz.

ÜYZ'ye hatalı düşünceyi içeren fakat düzeltmeyi açıklamayan temsili bir öğrenci diyaloğu hazırlatılabilir; diyalog gerçek öğrenci verisi gibi sunulmamalıdır. Bir genişletme sorusu,

yüzde 20 zamdan sonra başlangıç fiyatına dönmek için gereken indirimi araştırmaktır. Örnekte 120'den 100'e düşüş, 20/120 = 1/6 oranında, yani yaklaşık yüzde 16,67 indirim gerektirir. Cebirsel ön bilgisi olan öğrenciler için daha genel doğrulamada, başlangıç fiyatı $x > 0$ ve artış–azalış oranı $0 < r < 1$ olmak üzere son fiyat $x(1 + r)(1 - r) = x(1 - r^2)$ olur. Bu ifade, aynı oranlı artış ve azalışın başlangıç fiyatını neden azaltacağını bütün belirtilen oranlar için açıklar. Tek bir karşıt örnekle iddia çürütme ile genel bir ilişkiyi gerekçelendirme farklı işlerdir; genişletme öğrencilerin ön bilgilerine göre seçilmelidir.

Veriyle karar verme ve işlevsel belirsizlik

Dokuz öğrencinin bir haftada matematik çalışmaya ayırdığı sürelerin 15, 18, 18, 20, 20, 20, 22, 24 ve 160 dakika olduğu bir görevde, "tipik çalışma süresini" açıklamak için hangi ölçünün seçileceği tartışılabilir. Aritmetik ortalama 317/9 ≈ 35,22 dakika, ortanca 20 dakikadır. 160 dakikalık değer, ortalamayı yükseltir; ancak yüksek olması tek başına verinin yanlış olduğu anlamına gelmez. Öğrenciler, ortancanın neden daha az etkilendiğini ve seçtikleri ölçünün hangi amaçla uygun olduğunu açıklamalıdır. Amaç bütün sürelerin eşit paylaşılmasıyla elde edilecek değeri bulmaksa aritmetik ortalama anlamlıdır; gruptaki merkezî konumu betimlemekse ortanca tercih edilebilir. ÜYZ, bu karşılaştırma için alternatif sorular önerebilir; öğrencinin ölçütü belirleme ve savunma sorumluluğu görevde korunmalıdır. Ortanca her bağlamda en iyi özet ölçü olarak sunulmamalıdır.

Bu örnekler, tasarımın sunduğu düşünme olanaklarını göstermektedir. Bu olanakların öğrencilerin çalışmasına dönüşmesi ise görevin sunuluşuna, desteklerin zamanlamasına ve sınıf tartışmasının düzenlenmesine bağlıdır. Alan–çevre döngüsünün son aşaması, aşağıda bu uygulama kararları ve öğrenci ürünleriyle tamamlanmaktadır.

Bilişsel talebin sınıfta korunması ve değerlendirilmesi

Sınıfta talebin korunması, olası öğrenci yaklaşımlarını öngörme ve gözlenen gereksinime göre destek sunma kararlarıyla ilişkilidir (Henningsen ve Stein, 1997). ÜYZ bu planlama için temsili yanıtlar önerebilir; ancak bunlar gerçek öğrenci düşünmesinin kanıtı değildir. Alan–çevre örneğinin tasarım döngüsü burada tamamlanır: öğretmen, revize edilmiş görevde hedeflediği sistematik araştırma ve gerekçelendirmeyi öğrenci ürünlerinde izler. Bir grubun yalnızca altı çevreyi hesaplaması ile çarpan çiftlerinin neden bütün seçenekleri kapsadığını savunması ayrı çalışmalar olarak kaydedilir. Bu ayrım, altı boyutun tasarım göstergeleriyle uygulama kanıtlarını birlikte fakat ayrı değerlendirmesini sağlar.

Stein ve diğerleri (2008) tarafından önerilen öngörme, izleme, seçme, sıralama ve ilişkilendirme uygulamaları, öğrenci çözümlerinin tartışılmasını planlamak için kullanılabilir. Dikdörtgen görevinde öğretmen önce farklı listeleme stratejilerini öngörür, ardından öğrencilerin çalışmalarını izler. Sınıf tartışmasına, gelişigüzel denemeler ile sistematik çarpan arayışını karşılaştırmaya olanak veren çözümler seçilebilir. Sunumların sırası, bu yaklaşımlar arasındaki ilişkiyi açıklamayı kolaylaştıracak biçimde düzenlenir. Öğrencilerin bir yöntemin neden eksiksiz olduğunu açıklaması, tartışmanın matematiksel amacını oluşturur.

Gerekçelendirme, sınıfta yalnızca öğretmenin istediği bir son ürün değil, akranların birbirinin fikirlerini inceleyebildiği bir çalışma normu olarak planlanmalıdır. Thanheiser ve diğerleri (2021), gerekçelendirmeye odaklanan sınıf kültürünü bilişsel talep, öğrenci katkısı ve kolektif argümantasyon dâhil birden fazla çerçeveyle inceleyerek bu ilişkilerin birlikte ele alınmasının önemini göstermiştir. Alan–çevre tartışmasında bu yaklaşım, “cevabı kim buldu?” sorusundan “bu yöntem neden bütün seçenekleri kapsıyor?” sorusuna yönelmeyi destekler.

Destek sorularının etkisi, öğrenciye bıraktığı karar üzerinden değerlendirilebilir. “Başka bir kenar çifti kalmadığından nasıl emin olabilirsin?” sorusu sistematikliğin incelenmesini destekler. Öğrenci görevi anlayamadığında “Hangi büyüklük sabit kalacak?” veya “Oluşturduğun dikdörtgenin alanını nasıl kontrol edebilirsin?” soruları başlangıç için kullanılabilir. En küçük çevrenin 8 cm ve 12 cm kenarlarda elde edildiğini açıklamak ise temel kararı verir. Böyle bir açıklamanın zamanı, öğrenme amacı ve o ana kadar yürütülen çalışmaya göre belirlenmelidir. Talebi koruyan öğretim, göreve erişimi sağlayan destek ile araştırma sorumluluğunu devralan desteğin ayırt edilmesini gerektirir (Henningsen ve Stein, 1997; Parrish ve Bryd, 2022).

Bu bölümde önerilen değerlendirmede doğru cevapla birlikte öğrencinin seçimi, temsil ilişkileri ve gerekçesi incelenir. Çözüm kâğıtları, kısa bireysel açıklamalar ve sınıf tartışması kesitleri bu çalışmayı görünür kılabilir. Örneğin 40 cm sonucunu bulmak, listenin eksiksizliğini açıklamakla aynı kanıtı sunmaz. Başlangıçta yanlış bir çift kullanıp alan koşulunu fark ederek çözümünü düzelten öğrenci ise matematiksel bir denetim süreci gösterebilir. Öğretmenin yöntemi açıkladığı an ve öğrencinin bundan sonra yaptığı çalışma da kaydedilmelidir. Böylece cevap doğruluğu, gerçekleşen talep ve öğretmen desteği ilişkili fakat ayrı göstergeler olarak değerlendirilir; bir çalışma kâğıdına bütünüyle tek etiket vermek yerine çözüm sürecindeki değişimler açıklanabilir.

ÜYZ’nin öğrenmeye katkısını araştırmak için öğrencilerin araçsız çözebileceği yeni görevler kullanılabilir; araştırma amacına uygunsa gecikmeli değerlendirmeler de eklenebilir. Tasarım kaydında araç adı, erişilebilen model veya sürüm bilgisi, tarih, ilk ve takip istemleri ile öğretmenin yaptığı değişiklikler bulunmalıdır. Bu kayıtlar aynı çıktının yeniden üretileceğini garanti etmez; kararların hangi koşullarda alındığını incelemeye olanak tanır. Görev niteliği, öğretim desteği ve öğrenci performansı için ayrı kanıtlar toplanması,

tasarımın gelişmesi ile öğrenmenin gelişmesinin birbirine karıştırılmasını önler. Burada verilen temsili tasarım döngüsü bir etki araştırmasının bulgusu olarak yorumlanmamalıdır.

Öğretmen eğitimi ve sorumlu tasarım

Öğretmen eğitiminde aynı görevin farklı sürümlerini çözme ve karşılaştırma etkinlikleri kullanılabilir. Markle ve McGarvey'nin (2025) kapsam derlemesi, öğretmen adaylarının görevleri değiştirme, değerlendirme, geliştirme, seçme ve sıralama eylemlerini birlikte ele almaktadır. Girit Yıldız ve Durmaz'ın (2023) beş adayla yürüttüğü durum çalışması, adayların matematiksel özelliklere yönlendirildikçe görevlerin matematiksel ve pedagojik olanaklarını daha ayrıntılı betimleyebildiğini göstermiştir. Bu bölümde önerilen uygulamada adaylar, her sürümün öğrenciden hangi kararları istediğini belirler ve saptadıkları soruna yönelik bir istem yazar. Örneğin, örüntünün kuralı öğrenci metninde hazır verilmişse bu kuralın çıkarılmasını ve öğrencinin kendi gerekçesini geliştireceği bir sorunun eklenmesini isteyebilirler. Karşılaştırma, yalnızca metindeki değişiklikler üzerinden değil, öğrencinin üstleneceği matematiksel çalışma üzerinden yapılmalıdır.

Nicol ve diğerleri (2013), görev uyarlarken öğretmen adaylarının nelere dikkat ettiğini; Lee ve diğerleri (2016) ise görev değişiklikleri ile kullanılan matematiksel bilginin ilişkisini incelemektedir. Kang ve Choi (2021), 24 adayla yürüttükleri çalışmada bağlantısız ve bağlantılı işlemleri ayırt etmedeki güçlükleri, yüzeysel görev özelliklerine odaklanmayı ve öğrenme amacının gözden kaçırılmasını belirlemiştir. Bu çalışmalar, karşılaştırmanın değişen matematiksel gereklilikler ve öğrenme amacı üzerinden yapılmasına dayanak sunar. ÜYZ'nin görev tasarımına katılması, öğretmenin içerik, pedagojik ve teknolojik bilgisini birlikte kullanmasını gerektirir (Mishra ve diğerleri, 2023).

Cao ve diğerleri (2026) de öğretmen–ÜYZ iş birliğini görev tasarımı ve mesleki gelişim gereksinimleri üzerinden ele almaktadır.

İstem yazımının mesleki yansıtma olarak ele alınması, bu bölümde bir öğretmen eğitimi önerisidir. Dourvas ve diğerleri (2026), benzer bir yaklaşımı öğretmen gelişimi için kavramsal bir çerçeve olarak tartışmaktadır; bu çerçeve doğrulanmış bir öğrenme etkisi sunmamaktadır. Burada da adayların istemlerinin uzaması başarı ölçütü olarak alınmamalıdır. Görevi matematiksel olarak çözme, değişen öğrenci sorumluluğunu açıklama ve farklı bir görev üzerinde aynı incelemeyi bağımsız yapabilme, önerinin sınanmasında kullanılabilecek daha uygun göstergelerdir.

Sorumlu tasarım, öğrencinin düşünme olanakları kadar göreve erişimini de gözetir. CAST (2024), öğrenmeye katılım, gösterim ve ifade için farklı olanaklar sunulmasını önerir. Bu olanaklar, öğrencinin ilişki kurma ve gerekçe geliştirme hedefi korunarak düzenlenmelidir. Görev bağlamı bütün öğrencilerin aynı dilsel ve kültürel deneyimleri paylaştığını varsaymamalı; öğretmen, bağlamın matematiksel fikre erişimi nasıl etkilediğini incelemelidir (Aguirre ve del Rosario Zavala, 2013).

ÜYZ ile etkileşimde öğrenciyi tanımlayan kişisel veriler yerine anonim ve gerekli öğrenme bilgileri kullanılmalı; üretilen matematiksel iddialar ve kaynak künyeleri öğretmen tarafından doğrulanmalıdır. Öğrencinin araca erişemediği durumda da göreve ve açıklama üretmeye katılabileceği bir yol planlanmalıdır. ÜYZ'nin hangi tasarım kararında kullanıldığının belirtilmesi, araç desteği ile öğretmenin değerlendirmesini görünür kılar. Bu öneriler UNESCO rehberindeki insan sorumluluğu, veri korunması ve erişim ilkeleriyle ilişkilidir (Miao ve Holmes, 2023); görevlerin öğrenme üzerindeki etkisi ise ayrı olarak araştırılmalıdır.

Çerçevenin sınırları ve araştırma yönelimleri

Önerilen çerçevenin boyutları arasındaki ilişkiler, farklı görevlerde kullanım kolaylığı ve değerlendirme kararlarının tutarlılığı henüz ampirik olarak sınanmamıştır. Boyutların örtüşmesi ve kullanıcının yorumuna açıklığı, özellikle uzman kararları ve öğretmen deneyimleriyle araştırılmalıdır. Bölümdeki görevler sınıfta denenmiş etkililik örnekleri değildir; alan–çevre döngüsü ve öğrenci açıklamaları temsili tasarım araçlarıdır. ÜYZ araştırmalarının içerik, araç, model ve istem farklılıkları da sonuçların başka durumlara aktarılmasını sınırlar. Bu nedenle çerçevenin öğrenme üzerindeki etkisi varsayılamaz; hangi görev ve öğretmen koşullarında yararlı bir inceleme desteği sağladığı araştırılmalıdır.

Sınıf uygulamasında tasarım kayıtları, öğretmen müdahaleleri ve öğrenci ürünleri birlikte incelenerek talebin hangi noktalarda korunduğu veya değiştiği açıklanabilir. Öğrenme karşılaştırmaları, öğrencilerin başlangıç düzeylerini, çalışma süresini ve verilen desteği dikkate almalıdır. Görev niteliğinin gelişmesi, öğretmenin tasarım kapasitesinin gelişmesi ve öğrencinin öğrenmesi farklı sonuçlardır. Bunların ilişkisini araştırmak, her biri için uygun veri ve analiz kullanılmasını gerektirir.

Sonuç ve öneriler

ÜYZ destekli matematiksel görev tasarımında bilişsel talep, görevde beklenen düşünmenin niteliği ve bu beklentinin sınıfta nasıl gerçekleştiği üzerinden ele alınmalıdır. Altı boyutlu sentez, öğretmenin öğrenme amacını istem koşullarına dönüştürmesine, çıktıda revizyon gerektiren matematiksel gereklilikleri belirlemesine ve uygulamada aranacak kanıtları planlamasına yardımcı olacak bir inceleme desteği olarak önerilmiştir. Görevde bir gerekliliğin bulunması, öğrencinin onu gerçekleştirdiği; öğrencinin araçla doğru cevap bulması da bağımsız olarak öğrendiği anlamına gelmez. Bu

ayrımlar, tasarım ve değerlendirme kararlarının temelini oluşturmaktadır.

Alan–çevre örneği, hazır çözümün öğrenci metninden çıkarılması ve eksiksizlik gerekçesinin istenmesiyle görevdeki çalışma beklentisinin nasıl değişebileceğini göstermektedir. Kenar uzunlukları için belirlenen sayı koşulu sonucun kapsamını, yardımın içeriği ve zamanı ise öğrenciye kalan sorumluluğu etkiler. Örüntü, yüzde değişimi ve veri örnekleri de sırasıyla yapısal genellemenin, karşıt örneğin ve ölçüt seçiminin görevde nasıl görünür kılınabileceğini açıklamaktadır. Öğretmen bu kararları ÜYZ'nin önerileri, matematiksel doğrulama ve öğrenci ürünleri arasında ilişki kurarak yürütür. Böylece istem yazımı, öğretmenin matematiksel ve pedagojik bilgisini görünür kılan bir tasarım aracına dönüşebilir. Bu olanağın öğretmen gelişimine ve öğrenci öğrenmesine katkısı, ayrı araştırma soruları ve uygun kanıtlarla incelenmelidir.

Kaynakça

Aguirre, J. M., & del Rosario Zavala, M. (2013). Making culturally responsive mathematics teaching explicit: A lesson analysis tool. *Pedagogies: An International Journal, 8*(2), 163–190. https://doi.org/10.1080/1554480X.2013.768518

Aqazade, M., Mauntel, M., & Atabas, S. (2026). Empowering mathematics teacher educators: Exploring artificial intelligence-driven mathematical tasks. *School Science and Mathematics, 126*(1), 24–43. https://doi.org/10.1111/ssm.18339

Bastani, H., Bastani, O., Sungu, A., Ge, H., Kabakcı, Ö., & Mariman, R. (2025). Generative AI without guardrails can harm learning: Evidence from high school mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 122*(26), Article e2422633122. https://doi.org/10.1073/pnas.2422633122

Benedicto, C., Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2017). When the theoretical model does not fit our data: A process of adaptation of the cognitive demand model. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2791–2798). ERME. https://hal.science/hal-01948854

Bloodworth, A., Conner, A., Miller, C., Franco, L., Foutz, T., & Hill, R. B. (2023). Robotics and coding: A framework for examining cognitive demand. *Journal of Technology Education, 35*(1), 7–31. https://doi.org/10.21061/jte.631

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89–105. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9242-9

Cao, J., Wang, S., Chen, X., & Schunn, C. (2026). Codevelop learning tasks with generative AI: Mapping challenges, gains, and professional development needs. *IEEE Transactions on Learning Technologies, 19*, 215–228. https://doi.org/10.1109/TLT.2026.3675467

CAST. (2024). *Universal design for learning guidelines version 3.0*. https://udlguidelines.cast.org

Cowan, N. (2014). Working memory underpins cognitive development, learning, and education. *Educational Psychology Review, 26*(2), 197–223. https://doi.org/10.1007/s10648-013-9246-y

Dourvas, I., Kokkonis, G., & Kontogiannis, S. (2026). Reconceptualizing prompt engineering as reflective professional practice: A framework for teacher development. *Electronics, 15*(5), Article 930. https://doi.org/10.3390/electronics15050930

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research, 53*(2), 159–199. https://doi.org/10.3102/00346543053002159

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194–229. https://doi.org/10.2307/30034866

Fox, D. S., Robles, B. L., DiPietro Brovey, E., & Schunn, C. D. (2026a). *Baseline performance of AI tools in classifying cognitive demand of mathematical tasks* [Preprint]. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2603.03512

Fox, D. S., Robles, B. L., DiPietro Brovey, E., & Schunn, C. D. (2026b). *Can AI tools transform low-demand math tasks? An evaluation of task modification capabilities* [Preprint]. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2604.12743

Girit Yıldız, D., & Durmaz, B. (2023). Pre-service mathematics teachers' attention to tasks' affordances while analyzing and designing tasks. *Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 5*(3), 1228–1244. https://doi.org/10.38151/akef.2023.109

Glegola, A.-K., Jentsch, A., Ross, N., König, J., & Kaiser, G. (2026). The influence of teachers' dispositions on their use of mathematical problem-solving tasks: A qualitative comparative analysis based on teachers' pedagogical content knowledge and beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Advance online publication. https://doi.org/10.1007/s10857-026-09761-2

Hatisaru, V. (2020). Exploring evidence of mathematical tasks and representations in the drawings of middle school students. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), Article em0609. https://doi.org/10.29333/iejme/8482

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524–549. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.5.0524

Herbel-Eisenmann, B. A., & Breyfogle, M. L. (2005). Questioning our patterns of questioning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(9), 484–489. https://doi.org/10.5951/mtms.10.9.0484

Ji, Z., Lee, N., Frieske, R., Yu, T., Su, D., Xu, Y., Ishii, E., Bang, Y. J., Madotto, A., & Fung, P. (2023). Survey of hallucination in natural language generation. *ACM Computing Surveys, 55*(12), Article 248. https://doi.org/10.1145/3571730

Kang, H., & Choi, E. (2021). Pre-service teachers' errors and difficulties in task modification focusing on cognitive demand. *The Mathematical Education, 60*(1), 61–76. https://doi.org/10.63311/mathedu.2021.60.1.61

Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Gasser, U., Groh, G., Günnemann, S., Hüllermeier, E., Krusche, S., Kutyniok, G., Michaeli, T., Nerdel, C., Pfeffer, J., Poquet, O., Sailer, M., Schmidt, A., Seidel, T., . . . Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences, 103*, Article 102274. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities.

Mathematical Thinking and Learning, 7(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lee, K.-H., Lee, E.-J., & Park, M.-S. (2016). Task modification and knowledge utilization by Korean prospective mathematics teachers. *Pedagogical Research, 1*(2), Article 54. https://doi.org/10.20897/lectito.201654

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM – Mathematics Education, 49*(6), 937–949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173–204). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_008

Markle, J., & McGarvey, L. M. (2025). Research on task design in pre-service mathematics teacher education: A scoping review. *Frontiers in Education, 10*, Article 1467482. https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1467482

Martins, M., da Ponte, J. P., & Mata-Pereira, J. (2023). Learning to promote students' mathematical reasoning: Lesson study contributions in initial teacher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(5), Article em2255. https://doi.org/10.29333/ejmste/13127

Miao, F., & Holmes, W. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. UNESCO. https://doi.org/10.54675/EWZM9535

Mishra, P., Warr, M., & Islam, R. (2023). TPACK in the age of ChatGPT and generative AI. *Journal of Digital Learning in Teacher Education, 39*(4), 235–251. https://doi.org/10.1080/21532974.2023.2247480

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Nicol, C., Bragg, L., & Jamshid Nejad, M. (2013). Adapting the task: What preservice teachers notice when adapting mathematical tasks. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 369–376). PME.

Noster, N., Gerber, S., & Siller, H.-S. (2024). Pre-service teachers' approaches in solving mathematics tasks with ChatGPT. *Digital Experiences in Mathematics Education, 10*(3), 543–567. https://doi.org/10.1007/s40751-024-00155-8

Ospanov, Y., Kadirbaeva, R., Seitova, T., & Ospanova, N. (2023). Plausible reasoning by solving open mathematical problems. *Trudy Universiteta*, (1), 299–303. https://doi.org/10.52209/1609-1825_2023_1_299

Parrish, C. W., & Bryd, K. O. (2022). Cognitively demanding tasks: Supporting students and teachers during engagement and implementation. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(1), Article em0671. https://doi.org/10.29333/iejme/11475

Pepin, B., Buchholtz, N., & Salinas-Hernández, U. (2025). A scoping survey of ChatGPT in mathematics education. *Digital Experiences*

in Mathematics Education, 11(1), 9–41. https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM – Mathematics Education, 49*(5), 799–812. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Plunger, C., & Yenokyan, A. (2023). Conveying different types of values via mathematical tasks. *Prometeica – Revista de Filosofía y Ciencias*, (27), 336–346. https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15310

Puraivan, E., Cofré-Morales, C., Rodríguez, M., Lasnibat-Godoy, T., Tapia, J., Hervás-Gómez, C., & Díaz-Noguera, M. D. (2025). ChatGPT and semiotic representation theory: Innovating the measurement of cognitive demand in mathematical tasks. In R. Chinthaginjala, P. Sitek, N. Min-Allah, K. Matsui, S. Ossowski, & S. Rodríguez (Eds.), *Distributed computing and artificial intelligence, 21st international conference* (pp. 230–240). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82073-1_23

Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3*, Article 4. https://doi.org/10.1186/s40928-018-0009-y

Sapkota, B., & Bondurant, L. (2024). Assessing concepts, procedures, and cognitive demand of ChatGPT-generated mathematical tasks. *International Journal of Technology in Education, 7*(2), 218–238. https://doi.org/10.46328/ijte.677

Sawyer, A. G. (2024). Artificial intelligence chatbot as a mathematics curriculum developer: Discovering preservice teachers' overconfidence in ChatGPT. *International Journal on Responsibility, 7*(1), Article 1. https://doi.org/10.62365/2576-0955.1106

Sawyer, A. G., & Aga, Z. G. (2026). A mile high and an inch deep: Exploring ChatGPT as a mathematics curriculum development tool. *School Science and Mathematics, 126*(1), 60–74. https://doi.org/10.1111/ssm.18348

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schorcht, S., Müller, F. A., & Buchholtz, N. (2026). No one-size-fits-all: A study of prompt techniques and large language models to enhance AI's mathematics educational quality. *ZDM – Mathematics Education, 58*(5), 1057–1071. https://doi.org/10.1007/s11858-026-01784-6

Şimşek, Z. Z., & Kılıçoğlu, E. (2025). Investigating student reasoning when faced with a mathematical statement that contains both confirming and contradicting examples. *Education and Science, 50*(222), 45–66. https://doi.org/10.15390/EB.2025.12962

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344–350. https://doi.org/10.5951/mtms.3.5.0344

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455–488. https://doi.org/10.3102/00028312033002455

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268–275. https://doi.org/10.5951/mtms.3.4.0268

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*(2), 257–285. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K., & Doyle, W. (2020). Theory and research on tasks revisited: Task as a context for students' thinking in the era of ambitious reforms in mathematics and science. *Educational Researcher, 49*(8), 606–617. https://doi.org/10.3102/0013189X20932480

Thanheiser, E., Melhuish, K., Sugimoto, A., Rosencrans, B., & Heaton, R. (2021). Networking frameworks: A method for analyzing the complexities of classroom cultures focusing on justifying. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 285–314. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10026-3

Ünsal, G., & Sezen Yüksel, N. (2026). Matematiksel görevlerde bilişsel talep ve semiyotik temsiller: ChatGPT tabanlı TRSR analiz aracının geliştirilmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 27*(3), 1248–1285. https://doi.org/10.29299/kefad.1898498

Watson, A., & Ohtani, M. (Eds.). (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing? In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167–178). National Council of Teachers of Mathematics.

Yan, L., Sha, L., Zhao, L., Li, Y., Martinez-Maldonado, R., Chen, G., Li, X., Jin, Y., & Gašević, D. (2024). Practical and ethical challenges of large language models in education: A systematic scoping review. *British Journal of Educational Technology, 55*(1), 90–112. https://doi.org/10.1111/bjet.13370

BÖLÜM 5

HUKUKTA MATEMATİKSEL MODELLEME

ALATTİN URAL[1]

Giriş

Hukukun temel hedefi, toplumsal adaleti ve düzeni sağlamaktır. Bu amacın daha etkili, nesnel ve şeffaf bir şekilde yerine getirilebilmesi için modern analitik araçlardan faydalanmak giderek daha da önem kazanmaktadır. Matematiksel modelleme ve özellikle optimizasyon, karmaşık hukuki süreçlerin analizini ve iyileştirilmesini mümkün kılar. Bu yöntemler, ceza belirlemeden kaynak tahsisine, yasa etkilerinin ölçülmesinden karar destek sistemlerinin oluşturulmasına kadar pek çok alanda uygulanabilir. Bu çalışma, hukuktaki bu potansiyel uygulama alanlarını destekleyen teorik ve pratik bilgileri ele almaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı, hukukun normatif ve nitel yapısının, matematiksel modelleme ve özellikle optimizasyon temelli yaklaşımlar aracılığıyla nasıl formel, analitik ve ölçülebilir bir çerçevede ele alınabileceğini ortaya koymaktır. Çalışma, hukuki

[1] Prof. Dr., Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi,Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Orcid: 0000-0003-1884-9339

süreçlerin ve karar mekanizmalarının doğrudan matematiksel formüllere indirgenmesini değil; hukuksal metinlerin ve işleyişin matematiksel düşünme, modelleme ve optimizasyon ilkeleriyle nasıl temsil edilebileceğini göstermeyi de hedeflemektedir.

Bu kapsamda, mantıksal ve cebirsel yaklaşımlar, istatistiksel ve olasılıksal modeller (Bayesçi çıkarım ve regresyon analizleri), oyun teorisi, graf teorisi, algoritmik yöntemler ve makine öğrenimi gibi matematiksel araçların hukuk alanındaki kuramsal temelleri ve uygulama potansiyelleri sistematik bir biçimde incelenmiştir. Ceza belirleme, delil değerlendirmesi, yargı kararlarının modellenmesi, yasa etki analizi, kaynak tahsisi, içtihat ağlarının analizi ve hukuki süreçlerin optimizasyonu gibi alanlar, örnek modellemeler ve literatür destekli açıklamalarla ele alınmıştır.

Hukukta matematiksel ve hesaplamalı yaklaşımlar, özellikle 2015 sonrası dönemde hızla gelişen ve son yıllarda yapay zekâ, makine öğrenimi, ağ teorisi ve optimizasyon teknikleriyle daha da ivme kazanan güncel bir araştırma alanıdır. Nitekim literatürde 2020–2025 yılları arasında yayımlanan çok sayıda çalışma; yargı kararlarının nicel analizi, hukuki süreçlerin optimizasyonu, içtihat ağlarının matematiksel modellenmesi ve normatif dengelerin formel temsili gibi konulara odaklanmaktadır (Örn. Wang, 2025; Zufall et al., 2023). Mevcut literatürün önemli bir kısmı (i) yargı kararlarını ve dava sonuçlarını öngörmeye odaklanan istatistiksel modeller (örn. (Katz et al., 2017), (ii) delil değerlendirmesinde Bayesçi modeller (Fenton & Neil, 2011, Taroni et al., 2006), (iii) içtihat ağlarının analizi (Fowler et al., 2007, Leibon et al., 2018) ve hukuki metinlerin doğal dil işleme teknikleriyle analiz edilmesi (Ashley, 2017, Surden, 2019) konularına ayrılmıştır.

Hukukun Matematiksel Modellenmesindeki Kuramsal Yaklaşımlar

Bu bölümde hukukun mantıksal ve cebirsel gösterimlerine örnekler, ağ teorisi ve içtihat modellemesi, algoritmik yaklaşımlar ve makine öğrenimi, oyun teorisi ve ekonomi yaklaşımları, istatistiksel ve olasılıksal yaklaşımlar (Bayes ve Regresyon) konularıyla kesişimleri üzerinde durulmuştur.

Mantıksal ve Cebirsel Yaklaşımlar

Hukuki akıl yürütme ideal olarak büyük ölçüde mantıksal çıkarım üzerine kuruludur. Bu nedenle, önermeler mantığı, yüklem mantığı ve modal mantık gibi formel mantık sistemleri, hukuki normların yapısını ve aralarındaki ilişkileri modellemek için kullanılabilir. Prakken (1997), hukuki argümantasyonun modellenmesinde diyalektik ve mantıksal çerçeveleri öncü bir şekilde kullanmıştır. Emiroğlu ve Görgülü (2013), "Hukukun Matematiksel Olarak İfade Edilmesi" adlı makalelerinde, kanunların matematiksel olarak, özellikle fonksiyon terminolojisiyle, nasıl ifade edilebileceğine dair birkaç örnek sunmuşlardır.

Aşağıda bazı hukuksal ifadelerin önermeler mantığıyla nasıl ifade edilebileceğine ilişkin birkaç yalın ifade yer almaktadır:

- "Bir kişi 18 yaşından büyükse (p) ve ehliyeti varsa (q), araç kullanabilir (r)" ifadesi "$p \wedge q \Rightarrow r \equiv 1$" şeklinde modellenebilir.
- "Bir kişi bir başkasının malını izinsiz alırsa, hırsızlık suçunu işlemiş olur."

  p: x, y'nin malını almıştır.

  q: y, x'e herhangi bir malını alma izni vermemiştir.

  r: x hırsızlık suçu işlemiştir.

  $\forall x, \forall y, p \wedge q \Rightarrow r \equiv 1$

- "Eğer alıcı 30 gün içinde ödeme yapmazsa veya ürün hasarlıysa, satıcının sözleşmeyi feshetme hakkı vardır."

  p: Alıcı 30 gün içinde ödeme yapmamıştır.

  q: Ürün hasarlıdır.

  r: Satıcının sözleşmeyi feshetme hakkı vardır.

  $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv 1$

"Bir kişi yıllık 500.000 TL'den fazla gelir elde ederse ve bu geliri beyan etmezse, vergi kaçakçılığı suçu işlemiş olur," "Eğer bir kişi ruhsatsız silah taşıyorsa, bu yasaya aykırıdır", "Eğer trafik ışığı kırmızı yanıyorsa, sürücü durmak zorundadır" gibi çoğu hukuksal ifade, klasik mantıkla (önermeler mantığı ve özel olarak yüklem mantığı) veya klasik olmayan mantıklarla (modal mantık, bulanık mantık) ifade edilebilir ve önermenin hükmü iki değerli (0 ve 1) ya da kesir olarak sayısallaştırılabilir.

Örnek (Hırsızlık suçunun cezasının matematiksel modellemesi): Türk Ceza Kanunu'na (TCK) göre hırsızlık suçu, bir başkasına ait taşınır malın, sahibinin rızası olmadan, zilyetliğinden alınarak, kendisine veya bir başkasına yarar sağlamak maksadıyla alınması olarak tanımlanır. Bu suç, TCK'nın 141 ila 147. Maddeleri arasında düzenlenmiştir. Özetle şöyledir:

- Bir kimsenin başkasına ait taşınır bir malı rızası olmadan alması
- Bu eylemin amacı kendisine veya başkasına yarar sağlamaktır
- Cezası: 1 yıldan 3 yıla kadar hapis cezası
- Hırsızlık suçunun bazı şekilleri ise kanunda açıkça nitelikli hâl olarak düzenlenmiş olup, bu durumlarda daha ağır

cezalar öngörülmüştür. TCK'nın 142. Maddesinde nitelikli hırsızlık hâlleri ayrıntılı biçimde sayılmıştır. Buna göre: TCK 142/1 kapsamında, kamu kurum ve kuruluşlarına ait mallar hakkında, ibadethanelerde, sosyal tesislerde, konut veya işyerlerinde, gece vakti veya kişinin malını taşıma ya da muhafaza etme sırasında işlenen hırsızlık fiilleri bakımından üç yıldan yedi yıla kadar hapis cezası öngörülmektedir. TCK 142/2 kapsamında ise, bilişim sistemlerinin kullanılması suretiyle, banka veya kredi kartlarının kötüye kullanılması yoluyla ya da enerji nakil hatları (elektrik, doğal gaz, su gibi) üzerinden gerçekleştirilen hırsızlık fiilleri bakımından beş yıldan on yıla kadar hapis cezası düzenlenmiştir.

- Etkin pişmanlık: Türk Ceza Kanunu'nda hırsızlık suçu bakımından etkin pişmanlık, TCK'nın 168. Maddesinde düzenlenmiştir. Buna göre, failin suçtan sonra pişmanlık göstermesi ve mağdurun zararını gidermesi hâlinde cezada indirim yapılabilir. TCK 168/1 uyarınca, failin çaldığı malı veya mağdurun uğradığı zararı soruşturma başlamadan önce aynen iade etmesi veya tamamen tazmin etmesi durumunda, verilecek cezada üçte ikisine kadar indirim yapılabilir. TCK 168/2 uyarınca, etkin pişmanlığın kovuşturma aşamasında ancak hüküm verilmeden önce gerçekleşmesi hâlinde fail hakkında verilecek cezanın yarısına kadar indirim yapılması öngörülmüştür.

Bu suçların cezası için bir başlangıç yılı olup hâkim suç durumdaki kanunda açıkça belirtilmemiş faktörleri göz önüne alarak bu başlangıç yılını belirtilen en fazla yıla kadar artırabilmektedir. Bu artırmanın mantığına matematiksel modelde "hâkim kanaatini" ifade eden bir sembol konulabilir ama bu durumda bu çalışmanın temel amacı olan hukukun nesnelleştirilmesine bu ölçüde aykırı

davranılmış olur. Bunun yerine, daha nesnel bir model için bugüne kadar hâkimlerin bu üç farklı suç durumunun başlangıç yılını artırma gerekçeleri üzerinden ortak madde oluşturulabilir ve her bir maddenin suçun başlangıç yılını ne oranda artıracağına yönelik oranlar belirlenebilir.

TCK 142/1 kapsamındaki nitelikli hırsızlık suçunun matematiksel modellemesi

Suçun cezası 3 yıldan başlayıp 7 yıla kadar çıkabilmektedir.

Bu suça ait tüm olası artırma gerekçeleri: A_i *(j=1,2,3,…,n)*

A_i gerekçesinin gerçekleşip gerçekleşmediğini A(i) ile sembolize edelim. Gerekçe suç durumunda ortaya çıkmışsa "1", çıkmamışsa "0" değerini alsın.

$$A(i) = \begin{cases} 1; & A_i \; varsa \\ 0; & A_i \; yoksa \end{cases}$$

A_i gerekçesinin suçun başlangıç yılını artırma oranı (katsayısı): k_i ($0<k_i<1$)

Ham ceza süresi:

$$C_H = 3 + 3.A(1).k_1 + 3.A(2).k_2 + 3.A(3).k_3 + \cdots + 3.A(n).k_n$$

$$C_H = 3 + 3.\sum_{i=1}^{n} A(i).k_i \quad (3 \leq C_H \leq 7)$$

Yukarıdaki kanunda belirtilen etkin pişmanlık indirim oranları en fazla olarak ifade edilmiş olup yine belirsiz, nesnel olmayan bir durum söz konusudur. Bu durumu daha nesnel hale getirmek için yukarıdaki gibi bir yönteme başvurularak, indirime neden olabilecek durumlar içtihatlara göre belirlenebilir.

Tüm olası indirim gerekçeleri: $İ_j$ *(j=1,2,3,…,m)*

$İ_j$ gerekçesinin gerçekleşip gerçekleşmediğini İ(j) ile sembolize edelim. İndirim gerekçesi ortaya çıkmışsa "1", çıkmamışsa "0" değerini alsın.

$$İ(j) = \begin{cases} 1; & İ_j \; varsa \\ 0; & İ_j \; yoksa \end{cases}$$

$İ_j$ gerekçesinin C_H süresini azaltma oranı (katsayısı): p_j ($0<p_j<1$)

Toplam ceza süresi:

$$C_T = C_H - (C_H.İ(1).p_1 + C_H.İ(2).p_2 + C_H.İ(3).p_3 + \cdots + C_H.İ(m).p_m)$$

$$C_T = C_H - C_H.\sum_{j=1}^{m} İ(j).p_j$$

$$C_T = \begin{cases} \min(1/3)C_H; & \text{Soruşturma öncesi iade veya tazmin} \\ \min(1/2)C_H; & \text{Hükümden önce kovuşturma aşamasında} \\ C_H; & \text{Hükümden sonra} \end{cases}$$

Modelin Genellenmesi: Yukarıda sunulan model herhangi bir suçun sayısal cezası için genellenebilir. Bu durumda suçun başlangıç cezasına, maksimum cezasına, sayısal oranlara vs semboller atamak gerekir.

İstatistiksel ve Olasılıksal Yaklaşımlar (Bayes ve Regresyon)

Hukuki süreçlerin modellenmesinde kullanılan matematiksel yaklaşımlar, hem normatif düzenin soyut yapısını analiz etmek hem de yargısal kararları istatistiksel olarak değerlendirmek amacıyla çeşitlenmektedir. Bu gibi konularda olasılık teorisi ve istatistiksel yöntemler önemli bir rol oynar. Bu yaklaşımlar, özellikle kanıt değerlendirmesi, risk analizi ve sonuç tahmini gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Bayes Teoremi

$$P(A\backslash B) = \frac{P(B\backslash A).P(A)}{P(B)}$$

- P(A\B): B durumunda A'nın olma olasılığı
- P(B\A): A doğru ise B'nin olma olasılığı
- P(A) ve P(B) ise A ve B olaylarının gerçekleşme ihtimalleri

Bir olayın olasılığının yeni durumlara (örn. yeni eklenen bir delil) dayanarak güncellenmesidir. Bir başka deyişle, bir şeyin meydana gelme olasılığını, meydana gelmeyi etkileyebilecek başka bir koşulun varlığı göz önüne alındığında belirlemek gerekiyorsa, Bayes teoremi kullanılır.

Hukukta kullanımına örnek vermeden önce, Bayes teoreminin kullanılışını daha iyi anlamak için nadir bir hastalığın tıbbi testi konulu şu örneği incelemek faydalı olacaktır. Farz edelim ki bir şehirdeki yetişkinlerin yalnızca %1'inin nadir bir hastalığı olduğunu biliyoruz. Bu hastalığı tespit etmek için kullanılan bir testin güvenilirliği şöyledir: "test, hasta bir kişiyi %99 oranında pozitif gösteriyor" ve "test, sağlıklı bir kişiyi %95 oranında negatif gösteriyor." Şimdi bir kişi bu testi yaptırıyor ve test pozitif çıkıyor. Testi pozitif çıkan bu kişinin gerçekten hasta olma olasılığı nedir?

- A olayı: Kişinin hasta olması.
- B olayı: Testin pozitif çıkması.

P(A\B): Test pozitif çıktığı bilindiğine göre kişinin hasta olma olasılığı

P(B\A): Kişi hastaysa testin pozitif çıkma olasılığı

Hem hasta kişilerde hem de sağlıklı olan kişilerde test belli oranda pozitif çıkabilmektedir. Bu nedenle;

P(B)=P(hasta ve pozitif)+P(sağlıklı ve pozitif)
=(0,01x0.99)+(0.99x0.05)=0.0594

$$P(A\backslash B) = \frac{P(B\backslash A).P(A)}{P(B)} = \frac{0,99.0,01}{0,0594} = 0,17$$

Bayesçi yaklaşımın hukukta, özellikle delil değerlendirmesi ve olasılıksal akıl yürütme alanlarında kullanımı üzerine kapsamlı bir literatür bulunmaktadır (Kadane & Schum, 1996; Taroni et al., 2006; Fenton & Neil, 2011).

Örnek:

- A olayı: Sanığın suçlu olduğu hipotezi
- B olayı: Olay yerinde parmak izinin bulunması (yeni eklenen bir kanıt)
- P(A\B): Olay yerinde parmak izi bulunan kişinin suçlu olma olasılığı

P(B\A): Sanığın suçlu olduğu varsayımı altında, parmak izinin olay yerinde bulunma olasılığı

Bayes Teoremi, bir delil ortaya çıktığında bu kanıtın, birbirinden farklı hipotezleri (sanık suçlu veya sanık masum) ne oranda destekleyeceğinin anlaşılmasına yardımcı olur. Yani, P(B\A) bir sonuçtan yola çıkarak nedenini sorgulayan bir olasılık değil, bir nedenden yola çıkarak sonucun ne olabileceğini değerlendiren bir olasılıktır. Bu durum, delilin gücünü anlamaya fırsat verir.

$$P(\text{Suçlu}\backslash\text{Delil}) = \frac{P(\text{Delil}\backslash\text{Suçlu}).P(\text{Suçlu})}{P(\text{Delil})} \qquad (4)$$

- P(Delil): Bir delilin suçluluğu güçlendirme derecesidir. Delil olarak sunulan normal, olağan, çok önemli görülmeyecek bir

şeyse, suçluluğu önemli ölçüde artırmaz. Örneğin kişinin olay yerinde görülmesi, bulunması delili güçlü değildir; birçok kişi olay yeri civarında bulunmuş olabilir; dolayısıyla bunun olasılığı 1'e yakındır ve paydada olduğundan bu delil altında suçlunun suçlu olma ihtimalini çok fazla artırmaz. Ancak olay yerinde parmak izi bulunmuşsa, bu güçlü bir delildir; pek normal karşılanabilecek bir durum değildir, daha nadir görülür; dolayısıyla bunun olasılığı 1'den daha uzak, 0'a daha yakındır ve paydada olduğundan suçlu görülen kişinin suçlu olma ihtimalini artırır. Yani P(Delil), "normallik" veya "rastgelelik" ölçüsüdür.

- P(Suçlu): Şüphelinin mevcut durumda (yeni delil elde edilmeden önce) suçlu olma olasılığı. Bu değer sıfıra yakındır.
- P(Delil\Suçlu): Bu ifade, "Kişinin suçlu olduğu bilgisi mevcutsa, bu delilin bulunma olasılığı nedir?" sorusunun cevabıdır. Yukarıdaki örnek açısından, bu kişinin olay yerinde parmak izi bırakmış olma olasılığı yüksektir; bu da kişinin suçlu olma ihtimalini artırır (Pay kısmında olduğundan).

Yukarıdaki olasılıkların değerleri teorik olarak doğrudan hesaplanamaz; bunun yerine, çeşitli istatistiksel yöntemler, uzman görüşleri veya tarihsel veriler kullanılarak tahmin edilir.

Regresyon

Yargı kararlarının belirli ölçüde oluşturulması veya öngörülebilmesi sürecinde regresyon modelleri kullanılmaktadır. Ceza süreleri için lineer regresyon, beraat/mahkûmiyet olasılıkları için ise lojistik regresyon modeli kullanılmaktadır (Sumalla et al., 2024). Özellikle ABD Yüksek Mahkemesi kararlarının tahminine

yönelik çalışmalar (Katz et al., 2017), makine öğrenimi ve istatistiksel modellerin bu alandaki potansiyelini göstermiştir.

- Amaç: Sanık hakkında verilecek kararı makul ölçüde tahmin etmek.
- Varsayım: Yargıçlar kararlarında makul ölçüde tutarlı davranır.
- Değişkenler: Sanığın yaşı, suçun türü, sabıka geçmişi, mağdur sayısı gibi etkenler
- Bilinenler: Yargıcın ilgili/benzer suçlara ilişkin geçmiş kararları incelenir ve değişkenler açısından sanıkların bilgileri toplanır.

  Matematiksel model:

  Ceza Süresi için lineer regresyon modeli:

$$y = k + a.x + b.w + c.z + \cdots$$

  Mahkûmiyet olasılığı için lojistik regresyon modeli:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-(k+a.x+b.w+c.z+\cdots)}}$$

Sanık bilgileri sayısal olarak SPSS gibi bir istatistik programına aktarılıp, hâkimin kararıyla bu değişkenler arasındaki fonksiyonun belirlenmesi için regresyon analizi yapılabilir

Oyun Teorisi Yaklaşımı

Hukuki ilişkilerde taraflar arasında stratejik etkileşimler de görülebilmektedir. Oyun teorisi; davacı ve davalı arasındaki müzakereler, pazarlıklar, miras paylaşımı, tazminat anlaşmaları veya uluslararası anlaşmalar gibi durumları analiz etmek için

kullanılmaktadır. Her tarafın çıkarlarını en üst düzeye çıkarma çabası, Nash dengesi ile modellenebilmektedir. Cooter & Ulen (1988), hukuki sorumluluk kurallarını ekonomik analiz çerçevesinde inceleyerek, bireylerin optimal olmayan özen düzeyleri (inefficient care) karşısında nasıl teşvik edildiğini ve sorumluluk kurallarının davranışları nasıl şekillendirdiğini oyun teorisi ve ekonomik modelleme yaklaşımıyla açıklamaktadır. Baird, Gertner ve Picker (1998), davacı ve davalı arasındaki etkileşime odaklanır. Dava açma, uzlaşma teklifleri ve mahkemeye gitme kararlarının stratejik bir oyun olarak nasıl analiz edilebileceğini detaylandırır; ayrıca "rahatsızlık davaları, haksız ve kötü niyetli davalar" (Nuisance Suits) gibi spesifik durumları da ele alır.

Fayda = Kazanç - (Ceza × Yakalanma olasılığı)

Bu model, bir kişinin veya tarafın, hukuki bir kararı (örneğin, bir suçu işlemek ya da bir sözleşmeye uymamak gibi) alırken elde edeceği beklenen faydayı hesaplar. Oyun teorisinde taraflar, bu faydayı en üst düzeye çıkarmaya çalışır.

- Fayda: Bir tarafın belirli bir eylemi seçerek elde etmeyi umduğu net sonuç. Fayda, sadece maddi kazanç değil, aynı zamanda itibar, zaman kazanma veya cezadan kaçınma gibi soyut değerleri de içerir. Bir kişinin beklenen faydası pozitifse, bu eylemi yapma olasılığı artar.
- Kazanç: Bir tarafın yasa dışı veya etik olmayan bir eylemden doğrudan elde etmeyi umduğu maddi veya manevi fayda. Örneğin, hırsızlık durumunda çalınan malın değeri veya vergi kaçakçılığında ödenmeyen vergi miktarı.

- Ceza: Eğer kişi yakalanırsa karşılaşacağı yaptırımın maliyeti. Bu, hapis cezası, para cezası, tazminat ödemesi veya itibar kaybı gibi çeşitli şekillerde ortaya çıkabilir.
- Yakalanma Olasılığı: Yapılan eylem sonucunda yakalanma olasılığı. Bu olasılık, 0 ile 1 arasında bir değer alır. Ceza bu olasılıkla çarpılarak, yakalanmanın beklenen maliyeti hesaplanır. Bu, matematiksel beklenti kavramının bir uygulamasıdır.

Örnek: Bir kişi vergi kaçırmayı düşünüyor.

Kazanç: 1.000.000 TL vergi kaçırmak.

Ceza: Yakalanırsa 2.000.000 TL para cezası ve 2 yıl hapis cezası (para cezası + hapis cezasının parasal değeri = 3.000.000 TL olduğunu varsayalım).

Yakalanma Olasılığı: %10 öngörelim

Fayda = 1.000.000 TL - (3.000.000 TL × 0.10) = 700.000 TL

Bu pozitif fayda değeri, kişinin bu suçu işlemek için bir motivasyonunun olduğunu gösterir. Nash dengesi ile ilişkisi, hukuki süreçte taraflar arasında söz konusu olabilir.

Örnek: Hukuk davalarında uzlaşma modellemeleri (pazarlık oyunu): Bir hukuk davasında, davacı ve davalı uzlaşmaya gidip gitmemeye karar verirler. Her iki tarafın da dava maliyetleri ve davanın olası sonucuna ilişkin beklentileri vardır. Oyun teorisi, tarafların uzlaşma tekliflerini ve stratejilerini analiz ederek, bir uzlaşmanın ne zaman rasyonel olacağını veya hangi uzlaşma miktarının beklenebileceğini öngörebilir. Baird et al. (1998) tarafından yazılan "Game Theory and the Law" (Oyun Teorisi ve Hukuk) kitabı, bu yaklaşımların hukuka uygulanışını detaylıca incelemektedir.

Algoritmik Yaklaşımlar ve Makine Öğrenimi

Makine öğrenimi, büyük veri kümelerinden örüntüler öğrenerek belirli görevlerin otomatikleştirilmesini sağlayan algoritmik yaklaşımları ifade etmektedir. Hukuk alanında bu teknikler; hukuki belgelerin sınıflandırılması, bilgi çıkarımı, belge inceleme, elektronik keşif (e-discovery) ve hukuki kararların tahmin edilmesi gibi çeşitli görevlerde kullanılmaktadır. Surden (2014), makine öğreniminin hukuk alanındaki olası kullanım alanlarını inceleyerek, veri içerisindeki örüntülerden yararlanan algoritmaların bazı hukuki görevlerin kısmen otomatikleştirilmesini sağlayabileceğini ortaya koymuştur. Bununla birlikte, bu tür yöntemlerin hukukçuların muhakeme ve yorumlama yeteneklerinin yerini tamamen almadığını ve önemli sınırlılıkları bulunduğunu da vurgulamıştır.

Dava sonucu tahmini: Makine öğreniminin hukuk alanındaki dikkat çekici uygulamalarından biri, geçmiş dava verilerinden yararlanarak mahkeme kararlarının veya yargıç oylarının tahmin edilmesidir. Katz et al. (2017), ABD Yüksek Mahkemesi'nin 1816–2015 yılları arasındaki kararlarını kullanarak zamanla değişen bir rastgele orman (random forest) sınıflandırıcısı geliştirmiştir. Model, yaklaşık 28.000 dava sonucunu ve 240.000'den fazla yargıç oyunu incelemiş; dava sonucu düzeyinde %70,2, bireysel yargıç oyu düzeyinde ise %71,9 doğruluk elde etmiştir. Bu sonuçlar, makine öğrenimi yöntemlerinin belirli koşullar altında hukuki kararların tahmininde kullanılabileceğini göstermektedir.

Belge inceleme ve elektronik keşif: Hukuki uyuşmazlıklarda çok sayıda elektronik belgenin incelenmesi gerektiğinde, makine öğrenimi ve doğal dil işleme teknikleri belgelerin içeriklerine göre sınıflandırılması, ilgili belgelerin belirlenmesi ve inceleme

sürecinin önceliklendirilmesi amacıyla kullanılabilmektedir (Cormack & Grossman, 2014). Bu yaklaşım, özellikle elektronik keşif süreçlerinde insan tarafından incelenmesi gereken belge sayısının azaltılması ve belge inceleme sürecinin daha sistematik hâle getirilmesi açısından önem taşımaktadır. Makine öğrenimi tabanlı teknoloji destekli inceleme (technology-assisted review) yöntemleri, elektronik keşif alanında uzun süredir araştırılmaktadır.

Doğal dil işleme ve büyük dil modelleri: Doğal dil işleme ve büyük dil modellerindeki gelişmeler, hukuki metinlerin sınıflandırılması, özetlenmesi, bilgi çıkarımı, soru-cevap ve hukuki karar tahmini gibi görevlerin kapsamını genişletmiştir. 2025 tarihli kapsamlı bir literatür taraması, hukuk alanındaki NLP çalışmalarının özellikle hukuki metin sınıflandırması, belge özetleme, adlandırılmış varlık tanıma, hukuki soru-cevap ve karar tahmini gibi görevlerde yoğunlaştığını göstermektedir (Ariai et al., 2025).

Graf Teorisinin Hukukta Uygulanabilirliği

Temeli 1736 yılında Leonhard Euler tarafından atılan ve matematiğin bir çalışma alanı olan Graf Teorisi (Çizge Kuramı), kısaca, nesneler arasındaki ilişkileri bir ağ (network) ile matematiksel olarak modelleyip incelemek için kullanılır. Bu nesneler düğümler (tepe, vertex), aralarındaki ilişkiler ise kenarlar (edge) ile temsil edilir. Bu kuramın hukuka uygulanabilmesi noktasında, yasa metinleri (kanunlar, tüzükler, yönetmelikler), yargı kararları (içtihatlar, mahkeme kararları), hukuki kavramlar veya ilkeler bir "düğüm", aralarındaki atıflar, etkileşim, hiyerarşik ilişki ise "kenar" olarak modellenebilir.

Hukukta Graf Teorisi'nin kullanımıyla;

- Kararların ve yasa metinlerinin birbirlerine yaptığı atıflar analiz edilebilir; böylece hangi kararların merkezi olduğu, uygulamada sınırlı etkiye sahip zayıf bağlantıların neler olduğu ve farklı hukuk alanlarının fiilî olarak nasıl kümelendiği, merkezilik, yoğunluk, bağlanırlık gibi nicel ölçütlerle değerlendirilebilir ve daha nesnel hale getirilebilir (Fowler et al., 2007).
- Mahkeme kararları arasındaki atıf ilişkilerinden oluşturulan içtihat ağları, hukuk sisteminin yapısal özelliklerinin incelenmesinde önemli bir analiz aracı sunmaktadır. Ağ analizi yöntemleri kullanılarak içtihatların tutarlılığı, kararlar arasındaki etkileşimler, farklı yargı mercilerinin aynı hukuk normunu nasıl yorumladığı ve zaman içinde oluşan yorum farklılıkları analiz edilebilmektedir. Ayrıca bu ağlar, yargı kademeleri arasındaki atıf örüntülerinin, yüksek yargı kararlarının hukuk sistemi üzerindeki etkisinin ve fiilî bağlayıcılığının merkezilik, bağlantısallık ve ağ yoğunluğu gibi ölçütler aracılığıyla değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır (Fowler et al., 2007; Dadgostari et al., 2021).
- Hukuki kavramlar, normlar ve aktörler arasındaki ilişkilerin semantik düzeyde modellendiği hukuki bilgi grafikleri, yapay zekâ destekli karar destek sistemleri ve otomatik içtihat analizleri için bir altyapı oluşturarak, metin tabanlı arama yerine “belirli bir normun hangi kararları etkilediği” ya da “belirli bir karara giden en güçlü içtihat yolunun hangisi olduğu” gibi soruların yanıtlanabilmesini kolaylaştırabilir.

Özetle, Graf Teorisi'nin hukukta kullanımı, hukukun statik bir metinler bütünü olmanın ötesinde, dinamik, ilişkisel, ölçülebilir,

analiz edilebilir, optimize edilebilir ve öngörülebilir bir sistem hâline dönüşmesine bir ölçüde katkı sağlayabilir.

Sichelman & Smith (2024), hukuki ilişkileri bir ağ (network) modeliyle formel olarak yapılandıran bir yaklaşım geliştirmiştir. Özellikle emlak hakkı ilişkilerinin düğümler ve kenarlar üzerinden modellenmesi ve ağ içerisindeki modülerlik/topluluk yapısının incelenmesi, graf teorisinin hukuki normatif sistemlerin analizine uygulanabileceğini göstermektedir.

Fowler et al. (2007), ABD Yüksek Mahkemesi kararlarını aralarındaki atıf ilişkileri üzerinden bir ağ olarak modelleyerek, içtihatların ağ içerisindeki hukuki önemini ve merkeziliğini ölçmeye yönelik bir yöntem geliştirmiştir. Çalışmada, kararlar arasındaki atıf örüntülerinden elde edilen önem skorlarının, yalnızca ham atıf sayılarına bakılarak görülemeyen bazı özellikleri ortaya koyabildiği ve gelecekteki atıf davranışıyla ilişkili olduğu gösterilmiştir. Böylece ağ analizi, merkezi ve hukuken önemli kararların belirlenmesinde nicel bir araç olarak kullanılmıştır (Fowler et al., 2007).

Van Dijck et al. (2023), Avrupa İnsan Hakları Mahkemesi kararlarından oluşturulan atıf ağlarında farklı merkezilik ölçütlerinin kararların emsal değeriyle ilişkisini incelemiştir. Çalışmada, ağ merkeziliğinin belirli ölçülerde bir kararın emsal değerini yansıtabildiği ve özellikle derece merkeziliğinin (degree centrality) farklı ağlarda istikrarlı bir gösterge olarak kullanılabileceği ortaya konmuştur. Bu bulgular, içtihatların yalnızca aldıkları atıf sayısıyla değil, atıf ağı içerisindeki konumları ve bağlantı örüntüleri üzerinden de değerlendirilebileceğini göstermektedir (van Dijck et al., 2023)

Hukukta Matematiksel Modellemeye İlişkin Örnekler

Yargı Süreçleri ve Karar verme: Yargı kararlarının matematiksel olarak modellenmesi, tutarlılığı artırma ve öngörülebilirliği sağlama potansiyeline sahiptir.

Ceza puan sistemleri ve rehber ilkeleri: ABD'de yargıçların ceza verirken uyması gereken "Ceza Rehber İlkeleri" vardır. Bu ilkeler, suçun türü, ağırlığı, sanığın sabıkası gibi faktörlere matematiksel olarak ağırlık vererek bir "puan" sistemi oluşturur. Bu puan, yargıcın vermesi beklenen ceza aralığını belirler. Birleşik Devletler Ceza Komisyonu (United States Sentencing Commission) bu sistemin geliştiricisi ve uygulayıcısıdır (Stith & Cabranes, 1997).

Yargıç davranışının nicel analizi: Özellikle ABD'de federal yargıçların ve Yüksek Mahkeme yargıçlarının ideolojik eğilimlerinin ve karar verme kalıplarının istatistiksel olarak modellenmesi yaygındır. Alschuler (1991), ceza rehber ilkelerinin başarısızlığını ve yargıç takdir yetkisinin önemini vurgulayan bir analiz sunmaktadır.

Kanun Yapımı ve Politika Analizi: Hukukun matematiksel modellemesi, yeni yasaların potansiyel etkilerini değerlendirmede ve mevcut yasal düzenlemelerin etkinliğini analiz etmede kullanılabilir. Avrupa Birliği ve ABD gibi ülkelerde çevre politikalarının ekonomik ve çevresel etkilerini değerlendirmek amacıyla matematiksel ve ekonomik modellerden yararlanılmaktadır. Özellikle hesaplanabilir genel denge (Computable General Equilibrium—CGE) modelleri, çevre politikalarının üretim, tüketim, istihdam, refah ve emisyonlar üzerindeki etkilerini farklı senaryolar altında incelemek için kullanılmaktadır. Bu modeller, çevre politikalarının olası maliyet ve faydalarının nicel olarak değerlendirilmesine ve politika seçeneklerinin karşılaştırılmasına olanak sağlamaktadır (Böhringer & Löschel, 2006; Carbone et al., 2022).

Hukukta Optimizasyon

Hukuki karar alma ve hukuk politikalarının oluşturulması, belirli amaçların mevcut hukuki ve toplumsal kısıtlar altında gerçekleştirilmesini gerektirdiğinden optimizasyon problemleriyle benzerlik göstermektedir. Bu bağlamda matematiksel optimizasyondaki temel kavramların hukuk alanında karşılıkları kurulabilir. "Amaç fonksiyonu", adaletin, toplumsal faydanın veya caydırıcılığın artırılması ya da zarar, maliyet ve risklerin azaltılması gibi hedefleri; "kısıtlar", Anayasa, kanunlar, içtihatlar ve etik ilkeler gibi karar alanını sınırlandıran unsurları; "karar değişkenleri" ise ceza miktarı, tazminat tutarı, kaynak tahsisi veya belirli bir hukuki seçeneğin tercih edilmesi gibi karar unsurlarını temsil edebilir. Bununla birlikte, hukukta amaçların çoğu zaman çok boyutlu ve bazen birbiriyle çatışabilir olması nedeniyle, hukuki problemlerin matematiksel optimizasyon modellerine aktarılması doğrudan bir eşleştirmeden ziyade belirli varsayımlar ve ölçütler üzerinden gerçekleştirilen bir modelleme sürecidir.

Optimizasyon, aşağıdaki gibi farklı senaryolarda kullanılabilir:

Ceza ve hukuk politikaları: Ceza politikalarının oluşturulmasında suçun azaltılması, caydırıcılığın artırılması ve adalet sisteminin maliyetlerinin kontrol edilmesi gibi birden fazla hedef bulunmaktadır. Bu hedefler, belirli hukuki ve ekonomik kısıtlar altında bir optimizasyon problemi olarak ele alınabilir. Örneğin, sınırlı bir bütçe altında cezaevi kapasitesi, denetimli serbestlik veya rehabilitasyon programlarına ayrılacak kaynakların belirlenmesi optimizasyon modelleriyle incelenebilir. Suç ve cezanın ekonomik sonuçlarını inceleyen Becker (1968), bu tür yaklaşımların teorik temellerinden birini oluşturmaktadır.

Kaynak ve süreç optimizasyonu: Yargı sistemlerinde hâkim sayısı, mahkeme süresi ve bütçe gibi sınırlı kaynakların etkin biçimde dağıtılması bir optimizasyon problemi olarak modellenebilir. Hangi delillerin inceleneceği, hangi tanıkların önceliklendirileceği veya hukuki araştırmaya ne kadar kaynak ayrılacağı gibi kararlar, belirli kısıtlar altında faydanın en üst düzeye çıkarılması amacıyla optimizasyon modelleri kullanılarak analiz edilebilir. Dava yükünün dengelenmesi, duruşma tarihlerinin planlanması ve hâkimlerin iş yüklerinin dengelenmesi gibi problemler, doğrusal programlama veya çok amaçlı optimizasyon yöntemleriyle ele alınabilir. Büyük dil modelleri ve nöro-sembolik yapay zekâ yaklaşımları kullanılarak medeni davalarda hukuki hükümlerin tahmin edilmesine yönelik modeller geliştirilmektedir. Bu tür tahmin sistemleri, gelecekte hukuki karar destek mekanizmalarına veri sağlayabilecek önemli matematiksel modelleme araçları olarak değerlendirilmektedir (Wei et al., 2025).

Ticari hukuk ve sözleşmeler: Ticari sözleşmelerde tarafların yükümlülüklerinin, risklerinin ve olası mali sonuçlarının dengelenmesi bir optimizasyon problemi olarak ele alınabilir. Sözleşme koşullarının belirlenmesi, risklerin taraflar arasında dağıtılması ve olası maliyetlerin azaltılması gibi kararlar, hukuki kısıtlar altında belirli amaçların en uygun şekilde gerçekleştirilmesine yönelik matematiksel modellerle incelenebilir.

Finansal suç ve kara para aklama riski: Finansal suçlardan elde edilen gelirlerin yasallaştırılması riskinin değerlendirilmesinde matematiksel modelleme ve doğrusal olmayan optimizasyon yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Ekonomik ve finansal göstergeler kullanılarak oluşturulan modeller aracılığıyla risk

düzeyinin belirlenmesi ve minimum risk koşullarının analiz edilmesi amaçlanmaktadır (Vagaská et al., 2022).

Anlaşmazlık çözümü kapsamında oyun teorisinin kullanımı: Arabuluculuk ve uzlaştırma süreçlerinde tarafların kararları karşılıklı stratejilerden etkilendiğinden, bu tür uyuşmazlıklar oyun teorisi çerçevesinde modellenebilir. Özellikle tarafların farklı stratejiler altında elde edecekleri kazanımların analiz edilmesi, arabuluculuk sürecindeki karar verme mekanizmalarının matematiksel olarak incelenmesine olanak tanır. Faghih & Akhavian (2019), bu yaklaşımı inşaat uyuşmazlıklarının arabuluculuk yoluyla çözümü bağlamında uygulamıştır.

Hukuksal bilgi arama sürecinin optimizasyon olarak modellenmesi: Dadgostari et al. (2021) hukuk araştırmasını matematiksel olarak sıralı bir karar verme süreci şeklinde modellemiş ve yaklaşımı ABD Yüksek Mahkemesi kararlarından oluşan bir veri kümesi üzerinde uygulamışlardır. Çalışmada hukuki bilgi alanı, atıf ilişkileri ile belgeler arasındaki anlamsal ilişkileri birlikte içeren, birbirine geçmiş farklı ağlardan oluşan bir "multi-network" yapı olarak ele alınmıştır. Bu arama uzayı üzerinde proximity (yakınlık), covering (kapsama) ve adaptive (uyarlanabilir) olmak üzere üç arama algoritması geliştirilmiştir. Proximity algoritması temel bir yaklaşım olarak kullanılırken, covering algoritması arama sürecinde kapsam ile derinlik arasındaki dengeyi gözetmektedir. Adaptive algoritma ise Markov Karar Süreci (MDP) ile pekiştirmeli öğrenmeyi birleştirerek arama sürecindeki parametreleri veriden öğrenmekte ve böylece arama politikasını geliştirmektedir. Modeller, bir yargı kararının anlamsal içeriğinden o kararda atıf yapılan diğer kararların tahmin edilmesi ve hukuk öğrencisi araştırma görevlilerinin oluşturduğu arama sonuçlarının tahmin edilmesi olmak üzere iki görev üzerinden değerlendirilmiştir.

Her iki değerlendirmede de arama modelleri temel null modelden daha başarılı olmuştur; öğrenmeye dayalı adaptive model ise diğer arama yaklaşımlarına kıyasla daha iyi performans göstermiştir. Yazarlar, daha ileri çalışmalar ve iyileştirmelerle makine tabanlı hukuk arama sistemlerinin insan veya insana yakın performans düzeylerine ulaşma potansiyeline sahip olduğunu belirtmektedir.

Zorluklar ve Gelecek Perspektifleri

Hukukun matematiksel modellenmesindeki en temel zorluklardan biri, hukuki problemlerin yalnızca ölçülebilir ve rasyonel unsurlardan oluşmamasıdır. Adalet, hakkaniyet, etik, toplumsal değerler ve hukuki takdir gibi kavramların önemli bir bölümü doğrudan sayısal değişkenlere dönüştürülememektedir. Bu nedenle bir hukuki problemin matematiksel modele aktarılması, yalnızca matematiksel bir işlem değil, aynı zamanda hangi unsurların modele dâhil edileceğine, bunların nasıl ölçüleceğine ve hangi amaçların önceliklendirileceğine ilişkin varsayımlar içeren bir modelleme sürecidir. Dolayısıyla matematiksel modelin ürettiği sonuç, hukuki gerçeğin kendisi değil, belirli varsayımlar ve kısıtlar altında oluşturulan bir temsil olarak değerlendirilmelidir.

Bir diğer önemli sorun, hukuki verilerin niteliği ve erişilebilirliğidir. Hukuki kararların, mevzuatın ve diğer hukuki belgelerin standartlaştırılmış, yapılandırılmış ve makine tarafından işlenebilir biçimde erişilebilir olması, matematiksel modellerin geliştirilmesi ve karşılaştırılabilir sonuçlar elde edilmesi açısından önem taşımaktadır. Bu bağlamda açık veri girişimleri ve hukuki verilerin ortak standartlar doğrultusunda yapılandırılması, gelecekte daha kapsamlı modellerin geliştirilmesine katkı sağlayabilir.

Gelecekte hukuk, matematik, istatistik, bilgisayar bilimi ve sosyal bilimler arasındaki disiplinlerarası çalışmaların artması,

hukuki problemlerin daha gelişmiş matematiksel modellerle incelenmesine olanak sağlayabilir. Bu modeller aracılığıyla hukuki normlar arasındaki olası tutarsızlıkların belirlenmesi, farklı hukuki düzenlemelerin sonuçlarının karşılaştırılması, yargı süreçlerindeki kaynakların daha etkin biçimde dağıtılması ve alternatif politika seçeneklerinin değerlendirilmesi mümkün olabilir. Özellikle çok amaçlı optimizasyon, karar teorisi, oyun teorisi ve simülasyon gibi yöntemler, birden fazla hukuki ve toplumsal hedefin aynı anda dikkate alındığı problemlerin analizinde kullanılabilir.

Bununla birlikte, matematiksel modellerin hukuki karar verme süreçlerinde kullanılması yeni sorumlulukları da beraberinde getirmektedir. Modelin dayandığı verilerin yanlılığı, kullanılan varsayımlar, amaç fonksiyonlarının belirlenmesi ve elde edilen sonuçların yorumlanabilirliği dikkatle değerlendirilmelidir. Bu nedenle gelecekte hukukun matematiksel modellenmesindeki temel amaç, hukuki kararları matematiksel sonuçlara indirgemek değil; hukuki problemlerin yapısını daha açık biçimde ortaya koymak, farklı seçeneklerin olası sonuçlarını karşılaştırmak ve karar vericilere şeffaf ve denetlenebilir bir karar destek mekanizması sunmak olmalıdır.

Kaynakça

Alschuler, A. (1991). The failure of sentencing guidelines: A plea for less aggregation. *The University of Chicago Law Review, 58*(1). https://doi.org/10.2307/20639434

Ariai, F., Mackenzie, J., & Demartini, G. (2025). Natural language processing for the legal domain: A survey of tasks, datasets, models, and challenges. *ACM Computing Surveys, 58*(6). https://doi.org/10.1145/3777009

Ashley, K. (2017). *Artificial intelligence and legal analytics*. Cambridge University Press.

Baird, D. G., Gertner, R. H., & Picker, R. C. (1998). *Game theory and the law*. Harvard University Press.

Böhringer, C., & Löschel, A. (2006). Computable general equilibrium models for sustainability impact assessment: Status quo and prospects. *Ecological Economics, 60*(1).

Carbone, J. C., Bui, L. T., Fullerton, D., Paltsev, S., & Sue Wing, I. (2022). When and how to use economy-wide models for environmental policy analysis. *Annual Review of Resource Economics, 14*, 447–465. https://doi.org/10.1146/annurev-resource-111820-015737

Cooter, R., & Ulen, T. (1988). *Law and economics*. Scott, Foresman and Company.

Cormack, G. V., & Grossman, M. R. (2014). Evaluation of machine-learning protocols for technology-assisted review in electronic discovery. In *Proceedings of the 37th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval* (pp. 153–162). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/2600428.2609601

Dadgostari, F., Guim, M., Beling, P. A., et al. (2021). Modeling law search as prediction. *Artificial Intelligence and Law, 29*, 3–34. https://doi.org/10.1007/s10506-020-09261-5

Emiroğlu, H., & Görgülü, N. (2013). Hukukun matematiksel olarak ifade edilmesi. *Ankara Üniversitesi Hukuk Fakültesi Dergisi, 62*(1).

Faghih, A., & Akhavian, R. (2019). A game-theory approach to construction dispute resolution through mediation. *Journal of Legal*

Affairs and Dispute Resolution in Engineering and Construction, 11(4). https://doi.org/10.1061/(ASCE)LA.1943-4170.0000325

Fenton, N. E., & Neil, M. (2011). Avoiding probabilistic reasoning fallacies in legal practice using Bayesian networks. *Australian Journal of Legal Philosophy, 36*, 114–151.

Fowler, J. H., Johnson, T. R., Spriggs, J. F., Jeon, S., & Wahlbeck, P. J. (2007). Network analysis and the law: Measuring the legal importance of precedents at the U.S. Supreme Court. *Political Analysis, 15*(3). https://doi.org/10.1093/pan/mpm011

Kadane, J. B., & Schum, D. A. (1996). *A probabilistic analysis of the Sacco and Vanzetti evidence*. John Wiley & Sons.

Katz, D. M., Bommarito, M. J., & Blackman, J. (2017). A general approach for predicting the behavior of the Supreme Court of the United States. *PLOS ONE, 12*(4), Article e0174698. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0174698

Leibon, G., Livermore, M., & Harder, R. (2018). Bending the law: Geometric tools for quantifying influence in the multinetwork of legal opinions. *Artificial Intelligence and Law, 26*, 145–167. https://doi.org/10.1007/s10506-018-9224-2

Prakken, H. (1997). *Logical tools for modelling legal argument: A study of defeasible reasoning in law*. Kluwer Academic Publishers.

Sichelman, T. M., & Smith, H. E. (2024). A network model of legal relations. *Philosophical Transactions of the Royal Society A, 382*.

Stith, K., & Cabranes, J. A. (1997). *Judging under the federal sentencing guidelines*. Northwestern University Law Review, 91.

Sumalla, J. M. T., Romero-Seseña, P., Arràez, L. A., & Aizpitarte, A. (2024). How criminal is it to rape a partner according to the justice

system? Analysis of sentences in Spain (2015–2022). *European Journal on Criminal Policy and Research, 30*, 567–587. https://doi.org/10.1007/s10610-023-09537-x

Surden, H. (2014). Machine learning and law. *Washington Law Review, 89*(1), 87–115.

Surden, H. (2019). Artificial intelligence and law: An overview. *Georgia State University Law Review, 35*, 1305.

Taroni, F., Aitken, C. G. G., Garbolino, P., & Biedermann, A. (2006). *Bayesian networks and probabilistic inference in forensic science*. John Wiley & Sons.

Vagaská, A., Gombár, M., & Korauš, A. (2022). Mathematical modeling and nonlinear optimization in determining the minimum risk of legalization of income from criminal activities in the context of EU member countries. *Mathematics, 10*(24), Article 4681. https://doi.org/10.3390/math10244681

Van Dijck, G., Rodrigues de Miranda, B., & Crombach, C. (2023). Centrality scores and precedent value in legal network analysis. In G. Sileno, J. Spanakis, & G. van Dijck (Eds.), *Legal knowledge and information systems: JURIX 2023: The thirty-sixth annual conference* (Vol. 379, pp. 247–256). IOS Press. https://doi.org/10.3233/FAIA230970

Wang, X. (2025). The role and optimization of multi-task learning models in legal decision prediction. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 127A*, 3141–3159. https://doi.org/10.61091/jcmcc127a-178

Wei, B., Yu, Y., Gan, L., & Wu, F. (2025). An LLMs-based neuro-symbolic legal judgment prediction framework for civil cases.

Artificial Intelligence and Law, 1–35. https://doi.org/10.1007/s10506-025-09433-1

Zufall, F., Kimura, R., & Peng, L. (2023). Towards a simple mathematical model for the legal concept of balancing of interests. *Artificial Intelligence and Law, 31*(3). https://doi.org/10.1007/s10506-022-09338-3


BİDGE