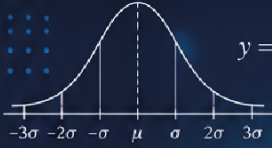


YAPAY ZEKÂ, İSTATİSTİK VE MATEMATİKSEL MODELLEMEDE GÜNCEL YAKLAŞIMLAR



$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

EDITÖR

Prof. Dr.

ZELİHA KAYGISIZ ERTUĞ

BİDGE Yayınları

Yapay Zekâ, İstatistik ve Matematiksel Modellemede Güncel Yaklaşımlar

Editör: ZELİHA KAYGISIZ ERTUĞ

ISBN: 978-625-8821-03-1

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 2026-06-25

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltpe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /
Ankara



İÇİNDEKİLER

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZDE ORTAK VARYASYONUN GEOMETRİSİ: KANONİK KORELASYON ANALİZİNİN TEORİK TEMELLERİ VE MODERN GENİŞLEMELERİ	1
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

TUBA ŞEKERCİ, MEHMET GÜRCAN

KIRILGAN GÜVEN ZAR OYUNLARINDAN İNANÇ MANTIĞINA	62
----------------------------------------------------------	----

MİNE DOĞAN, MD AWWAL ISLAM KHAN, MEHMET GÜRCAN

MAKİNE ÖĞRENMESİNDE YORUMLANABİLİRLİK: LİME VE SHAP YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI	126
-------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

HAMZA YALÇIN

BÖLÜM 1

Çok Değişkenli İstatistiksel Analizde Ortak Varyasyonun Geometrisi: Kanonik Korelasyon Analizinin Teorik Temelleri ve Modern Genişlemeleri

TUBA ŞEKERCİ¹
MEHMET GÜRÇAN²

GİRİŞ

Çok Değişkenli İlişki Analizinin Evrimi

Bilimsel araştırmalarda incelenen olguların giderek daha karmaşık ve çok boyutlu hâle gelmesi, araştırmacıları sadece tekil değişkenler arasındaki ilişkileri incelemenin ötesinde daha kapsamlı analitik yaklaşımlar geliştirmeye yöneltmiştir. Özellikle bilgi toplumuna geçişle birlikte ekonomik büyüme, toplumsal gelişme, eğitim performansı, sağlık düzeyi, teknolojik ilerleme ve çevresel sürdürülebilirlik gibi kavramların tek bir göstergeyle açıklanamayacağı anlaşılmış; bunun yerine birbirleriyle etkileşim hâlinde olan çok sayıda göstergenin birlikte değerlendirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır (Yılmaz ve Okursoy, 2014). Bu

¹ Dr.Öğretim Görevlisi Tuba Şekerci, Fırat Üniversitesi, Muhasebe ve Vergi Uygulamaları, Orcid: 0000-0002-0398-4477

² Prof.Dr.Mehmet Gürçan, Fırat Üniversitesi, İstatistik, Orcid: 0000-0002-3641-8113

dönüşüm, istatistiksel analizlerde de tek değişkenli ve ikili ilişki modellerinden çok değişkenli veri yapılarının analizine doğru önemli bir yönelim oluşturmıştır.

İstatistik biliminin erken dönemlerinde değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesinde en yaygın kullanılan yöntem Pearson korelasyon katsayısı olmuştur. Pearson korelasyonu; iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin yönü ve gücü hakkında önemli bilgiler sunmasına rağmen, günümüz araştırma problemlerinin önemli bir kısmı yalnızca iki değişken arasındaki ilişkiyle sınırlı değildir. Eğitim bilimlerinde öğrencilerin bilişsel özellikleri ile öğrenme davranışları, sağlık araştırmalarında klinik göstergeler ile yaşam kalitesi değişkenleri, ekonomi alanında finansal gelişmişlik göstergeleri ile gelir dağılımı ölçütleri veya teknoloji göstergeleri ile işgücü piyasası değişkenleri arasındaki ilişkiler çoğu zaman birden fazla değişkenden oluşan kümeler aracılığıyla tanımlanmaktadır. Bu tür problemlerde değişkenlerin ikili korelasyonlarına odaklanmak, sistemin bütüncül yapısını açıklamada yetersiz kalabilmektedir (Özsoy, 2023; Nurdoğan, 2022). Bu ihtiyaç, yirminci yüzyılın ilk yarısından itibaren çok değişkenli istatistik alanında önemli kuramsal gelişmelerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Faktör analizi, temel bileşenler analizi, diskriminant analizi ve çok değişkenli varyans analizi gibi yöntemler yüksek boyutlu veri yapılarında yer alan örüntülerin ortaya çıkarılmasını amaçlarken, araştırmacılar aynı zamanda iki ayrı değişken kümesi arasındaki ilişkinin nasıl tanımlanacağı sorusuyla da karşı karşıya kalmışlardır. Çünkü birçok araştırma probleminde değişken kümeleri arasında açık bir bağımlı–bağımsız değişken ayrımı bulunmamaktadır. Araştırmacının temel amacı, iki veri bloğunun hangi boyutlarda birlikte değiştiğini ve ortak varyasyonun hangi doğrultularda ortaya çıktığını belirlemektir.

Bu bağlamda kanonik korelasyon analizi, çok değişkenli istatistiğin en önemli ilişki analizlerinden biri olarak ortaya

çıkılmaktadır. Kanonik korelasyon analizi, her biri birden fazla değişkenden oluşan iki değişken kümesi arasındaki ilişki yapısını incelemek amacıyla geliştirilmiş bir yöntemdir (Yavuz ve Karabulut, 2016). Yöntemin temel amacı, her iki değişken kümesinden elde edilen doğrusal birleşimler arasındaki korelasyonu maksimum düzeye çıkararak boyutları belirlemek ve böylece veri kümeleri arasındaki ortak varyasyon yapısını ortaya koymaktır. Kanonik korelasyon analizini diğer çok değişkenli yöntemlerden ayıran en önemli özelliklerden biri, değişken kümeleri arasında katı bir bağımlı ve bağımsız değişken ayrımı gerektirmemesidir. Regresyon modellerinde açıklayıcı ve açıklanan değişkenler arasında yönlü bir ilişki varsayılırken, kanonik korelasyon analizinde her iki değişken kümesi eşit statüde değerlendirilmekte ve analiz, kümeler arasındaki ortak bilgi yapısını belirlemeye odaklanmaktadır (Demirci, 2018). Bu nedenle yöntem, yalnızca açıklama amacı taşıyan çalışmalarda değil; veri entegrasyonu, örüntü keşfi ve çok boyutlu ilişkilerin modellenmesi gibi daha karmaşık araştırma problemlerinde de yaygın olarak kullanılmaktadır.

Nitekim son yıllarda kanonik korelasyon analizinin ekonomi ve finans alanında finansal gelişmişlik ile gelir eşitsizliği arasındaki ilişkilerin incelenmesinde (Özsoy, 2023), teknoloji ve işgücü piyasası arasındaki etkileşimlerin araştırılmasında (Nurdoğan, 2022), sürdürülebilirlik ve refah göstergeleri arasındaki bağlantıların değerlendirilmesinde (Veysikarani ve Akdağ, 2024), eğitim araştırmalarında sınıf ortamı ve öğrenme çıktıları arasındaki ilişkilerin belirlenmesinde (Buldur ve Baygül, 2023) ve sağlık göstergeleri ile ekonomik değişkenler arasındaki etkileşimlerin analizinde kullanıldığı görülmektedir. Bu durum, yöntemin yalnızca klasik çok değişkenli istatistik literatürünün bir parçası olmadığını, aynı zamanda farklı disiplinlerde karmaşık veri

yapılarının analizinde yaygın biçimde kullanılan genel bir metodolojik çerçeveye dönüştüğünü göstermektedir.

Dolayısıyla kanonik korelasyon analizinin gelişimi, yalnızca yeni bir istatistiksel yöntemin ortaya çıkışını değil, aynı zamanda değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesinden veri uzayları arasındaki ortak varyasyonun araştırılmasına doğru gerçekleşen daha geniş bir metodolojik dönüşümü temsil etmektedir. Günümüzde yüksek boyutlu veri kümeleri, çok modlu veri kaynakları ve yapay zekâ uygulamalarıyla birlikte bu dönüşüm daha da belirgin hâle gelmiş; kanonik korelasyon analizi klasik doğrusal yapısından uzaklaşarak düzenlenmiştir, seyrek, çekirdek tabanlı ve derin öğrenme temelli yeni yaklaşımların gelişimine zemin hazırlamıştır.

Ortak Varyasyon Problemi ve Kanonik Korelasyon Analizinin Ortaya Çıkışı

Çok değişkenli veri analizinde karşılaşılan en temel problemlerden biri, birbirleriyle ilişkili çok sayıda değişkenden oluşan veri kümeleri arasındaki ortak yapının nasıl tanımlanacağıdır. Tek değişkenli korelasyon analizi iki değişken arasındaki ilişkinin incelenmesine imkan sağlarken, araştırma problemlerinin önemli bir bölümü değişken çiftlerinden ziyade değişken kümeleri arasındaki ilişkilerin değerlendirilmesini gerektirmektedir. Bu durum, çok sayıda korelasyon katsayısının ayrı ayrı yorumlanmasının ötesine geçen ve veri kümeleri arasındaki ortak varyasyonu ortaya çıkarabilecek yöntemlere olan ihtiyacı ortaya çıkarmıştır (Johnson & Wichern, 2007).

İki değişken kümesi arasındaki ilişkinin değerlendirilmesinde temel sorun, bu kümelerin hangi boyutlarda birlikte değiştiğinin belirlenmesidir. Başka bir ifadeyle araştırmacının ilgisi çoğu zaman tek tek değişkenler arasındaki korelasyonlara değil de, veri kümeleri arasında ortak olarak taşınan

bilginin ortaya çıkarılmasına yönelmektedir. Bu yaklaşım, çok değişkenli istatistikte "ortak varyasyon problemi" olarak ifade edilen kuramsal çerçevenin temelini oluşturmaktadır (Thompson, 1984).

Bu probleme yönelik sistematik çözüm arayışları, çok değişkenli istatistiğin gelişim sürecinde yeni yöntemlerin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Özellikle veri kümeleri arasındaki ilişkinin yalnızca değişken çiftleri üzerinden değil, veri kümelerinin tamamını temsil eden daha üst düzey yapılar üzerinden incelenmesi gerektiği düşüncesi, kanonik korelasyon analizinin kuramsal temelini oluşturmuştur. Bu yaklaşım daha sonra Harold Hotelling tarafından matematiksel bir çerçeveye dönüştürülmüş ve iki veri kümesi arasındaki ortak varyasyonun araştırılmasına yönelik yeni bir paradigma ortaya çıkmıştır.

Hotelling'in geliştirdiği bu yaklaşım yalnızca klasik çok değişkenli istatistiğin gelişiminde değil, aynı zamanda günümüzde yüksek boyutlu veri analizi, veri entegrasyonu ve çok modlu öğrenme çalışmalarında kullanılan birçok modern yöntemin de çıkış noktasını oluşturmuştur. Bu nedenle kanonik korelasyon analizi, iki veri kümesi arasındaki ilişkinin incelenmesine yönelik bir teknik olmanın ötesinde, farklı veri uzayları arasında ortak varyasyonun araştırılmasına dayanan genel bir metodolojik çerçeve olarak değerlendirilmektedir.

Kanonik Korelasyon Analizinin Tarihsel ve Kavramsal Gelişimi

Hotelling'in Kanonik Korelasyon Problemi

Problemin Ortaya Çıkışı

Yirminci yüzyılın ilk yarısında istatistiksel araştırmaların kapsamı giderek genişlemiş ve araştırmacılar birden fazla değişkenin eş zamanlı olarak incelenmesini gerektiren problemlerle karşı karşıya kalmıştır. Özellikle psikoloji, eğitim, biyoloji ve

sosyal bilimler alanlarında yürütülen çalışmalar, araştırma problemlerinin çoğu zaman tek değişkenler arasındaki ilişkilerden ziyade değişken kümeleri arasındaki ilişkilerin anlaşılmasını gerektirdiğini ortaya koymuştur. Bu dönemde korelasyon ve regresyon gibi yöntemler değişken çiftleri arasındaki ilişkileri incelemek için etkili araçlar sunmasına rağmen, her biri çok sayıda değişkenden oluşan iki veri kümesi arasındaki ilişkinin bütüncül biçimde değerlendirilmesi mümkün değildi. Bu durum, araştırmacıları iki değişken kümesi arasındaki ortak yapıyı ortaya çıkarabilecek yeni yöntemler geliştirmeye yöneltmiştir. Temel problem, iki veri kümesi arasındaki ilişkinin çok sayıda ikili korelasyon katsayısı aracılığıyla mı yoksa veri kümelerinin tamamını temsil eden daha üst düzey bileşenler aracılığıyla mı incelenmesi gerektiği sorusudur. Kanonik korelasyon analizinin ortaya çıkışı da bu kuramsal arayışın bir sonucu olarak değerlendirilebilir (Hotelling, 1936; Johnson & Wichern, 2007).

Hotelling'in çözmeye çalıştığı temel problem, her biri birden fazla değişkenden oluşan iki veri kümesi arasındaki ilişkinin en güçlü biçimde nasıl temsil edilebileceğidir. Yani burada amaç, birinci veri kümesindeki değişkenlerin doğrusal birleşimi ile ikinci veri kümesindeki değişkenlerin doğrusal birleşimi arasında mümkün olan en yüksek korelasyonu elde etmektir. Bu yaklaşım, çok sayıdaki ikili korelasyon katsayısının ayrı ayrı incelenmesi yerine, veri kümeleri arasındaki ortak yapının daha az sayıda özet değişken aracılığıyla değerlendirilmesine olanak sağlamıştır. Hotelling (1936), bu problemi optimizasyon temelli bir çerçevede ele almış ve günümüzde kanonik korelasyon analizi olarak bilinen yöntemin teorik temelini oluşturmuştur.

İki Rastgele Vektör Arasındaki Maksimum İlişki Arayışı

Harold Hotelling, 1936 yılında yayımladığı *Relations Between Two Sets of Variates* adlı çalışmasında, her biri çok sayıda

değişkenden oluşan iki rastgele vektör arasındaki ilişkinin nasıl en iyi şekilde temsil edilebileceği sorusuna odaklanmıştır. Hotelling'in temel amacı, iki değişken kümesi arasındaki ortak bilgi yapısını ortaya çıkaracak doğrusal bileşimleri belirlemek ve bu doğrusal bileşimler arasındaki korelasyonu maksimum düzeye çıkarmaktır (Hotelling, 1936). Bu yaklaşımın temelinde, veri kümelerini oluşturan değişkenlerin tek tek incelenmesi yerine, her kümenin içerdiği bilgiyi temsil eden yeni bileşik değişkenlerin oluşturulması fikri bulunmaktadır. Böylece araştırmacı, çok sayıda değişken arasında dağılmış bulunan ilişki yapısını daha az sayıda boyut aracılığıyla özetleyebilmekte ve veri kümeleri arasındaki ortak varyasyonu ortaya çıkarabilmektedir. Günümüzde yaygın olarak kullanılan çok görünüşlü öğrenme (multi-view learning) ve temsil öğrenme (representation learning) yaklaşımlarının temelinde de benzer bir düşünce bulunmaktadır.

Hotelling'in geliştirdiği yöntem, daha sonra kanonik korelasyon analizi (Canonical Correlation Analysis, CCA) olarak adlandırılmış ve iki değişken kümesinden elde edilen doğrusal birleşimler arasındaki maksimum korelasyonun belirlenmesine dayanan temel bir çok değişkenli yöntem haline gelmiştir. Modern literatürde CCA, iki veri görünümü arasındaki ortak yapının belirlenmesine yönelik en temel istatistiksel araçlardan biri olarak kabul edilmektedir. Özellikle makine öğrenmesi literatüründe CCA'nın iki farklı veri kaynağından elde edilen temsilleri ortak bir alt uzayda ilişkilendirmeyi amaçlayan temel bir yöntem olduğu vurgulanmaktadır (Chen et al., 2024; Karami & Schuurmans, 2021).

Hotelling'in Katkısının Çok Değişkenli İstatistikteki Önemi

Hotelling'in çalışmasının önemi yalnızca yeni bir istatistiksel yöntem önermesinden kaynaklanmamaktadır. Asıl önemli olan nokta, ilişkinin değişken çiftleri üzerinden değil, veri

kümelerinin ortak varyasyon yapısı üzerinden tanımlanabileceğini göstermesidir. Bu bakış açısı, çok değişkenli istatistikte ilişki kavramının kapsamını genişletmiş ve veri uzayları arasındaki ortak bilginin araştırılmasına yönelik yeni bir paradigma oluşturmuştur.

Kanonik korelasyon analizi daha sonraki yıllarda psikometri, eğitim bilimleri, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda yaygın biçimde kullanılmaya başlanmış, ardından bilgisayar bilimleri ve yapay zekâ araştırmalarında yeniden önem kazanmıştır. Özellikle yüksek boyutlu ve çok kaynaklı verilerin yaygınlaşmasıyla birlikte CCA, çoklu veri entegrasyonu problemlerinin çözümünde temel yöntemlerden biri haline gelmiştir.

Klasik kanonik korelasyon analizinin doğrusal yapısı ve iki veri kümesiyle sınırlı olması, zaman içerisinde yeni metodolojik genişlemelerin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu kapsamda çoklu küme kanonik korelasyon analizi (MCCA), düzenlenmiş kanonik korelasyon analizi (RCCA), çekirdek tabanlı kanonik korelasyon analizi (KCCA), derin kanonik korelasyon analizi (DCCA) ve olasılıksal kanonik korelasyon analizi (PCCA) gibi yaklaşımlar geliştirilmiştir (Hardoon et al., 2004; Karami & Schuurmans, 2021; Chen et al., 2024). Bu yöntemlerin tamamı, Hotelling'in iki veri kümesi arasındaki maksimum ilişkiyi belirlemeye yönelik özgün problem formülasyonunun farklı veri yapıları ve analiz ihtiyaçları doğrultusunda genişletilmiş biçimleri olarak değerlendirilmektedir. Bu nedenle kanonik korelasyon analizi sadece klasik çok değişkenli istatistik yöntemlerinden biri olarak değil, aynı zamanda farklı veri uzayları arasında ortak bilgi yapısının araştırılmasına yönelik genel bir metodolojik çerçeve olarak da değerlendirilmektedir. Yaklaşık doksan yıl önce ortaya konulan bu problem, günümüzde genomik verilerden nöro-görüntüleme çalışmalarına, çok modlu yapay zekâ sistemlerinden

derin öğrenme tabanlı temsil öğrenme yaklaşımlarına kadar uzanan geniş bir araştırma alanında güncelliğini korumaktadır.

Hotelling'in yaklaşımının ayırt edici yönlerinden biri, değişken kümeleri arasındaki ilişkinin yalnızca istatistiksel bir korelasyon problemi olarak değil, aynı zamanda çok boyutlu veri uzayları arasındaki geometrik bir yakınlık problemi olarak ele alınabilmesidir. Bu nedenle kanonik korelasyon analizinin matematiksel temelleri, çok değişkenli uzayların geometrik yapısının incelenmesiyle yakından ilişkilidir. Bir sonraki bölümde yöntemin bu geometrik ve cebirsel temelleri ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Klasik Kanonik Korelasyon Analizinden Modern Genişlemelere

Hotelling'in (1936) ortaya koyduğu kanonik korelasyon analizi, uzun yıllar boyunca iki değişken kümesi arasındaki doğrusal ilişkilerin incelenmesinde temel yöntemlerden biri olarak kullanılmıştır. Bununla birlikte veri yapılarının giderek karmaşıklaşması ve yüksek boyutlu veri kümelerinin yaygınlaşması, klasik kanonik korelasyon analizinin bazı sınırlılıklarını ortaya çıkarmıştır. Özellikle değişken sayısının gözlem sayısını aşması, veri kümeleri arasındaki ilişkilerin doğrusal olmaması ve ikiden fazla veri bloğunun eş zamanlı olarak analiz edilmesi gereksinimi, yöntemin yeni biçimlerde geliştirilmesine zemin hazırlamıştır.

Klasik kanonik korelasyon analizinin ilk önemli genişlemelerinden biri, ikiden fazla veri kümesinin birlikte analiz edilmesine olanak sağlayan çoklu küme kanonik korelasyon analizi (Multiple Canonical Correlation Analysis, MCCA) olmuştur. Bu yaklaşımda amaç, yalnızca iki veri kümesi arasındaki ilişkiyi değil, birden fazla veri kaynağı arasında paylaşılan ortak varyasyon yapısını ortaya çıkarmaktır. Böylece yöntem, çok görünüşlü veri

analizi (multi-view data analysis) problemlerine uygulanabilir hale gelmiştir.

Kanonik korelasyon analizinin bir diğer önemli sınırlılığı, yüksek boyutlu veri yapılarında ortaya çıkan aşırı uyum (overfitting) problemidir. Özellikle genomik veriler, görüntü verileri ve diğer yüksek boyutlu veri kümelerinde klasik çözümün kararsız hale gelmesi, düzenlenleştirilmiş kanonik korelasyon analizinin (Regularized Canonical Correlation Analysis, RCCA) geliştirilmesine yol açmıştır. RCCA yaklaşımında modele ceza terimleri eklenerek daha kararlı ve genellenebilir çözümler elde edilmektedir (Haroon et al., 2004).

Klasik kanonik korelasyon analizinin doğrusal ilişki varsayımı da zamanla önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir. Gerçek veri yapılarında değişken kümeleri arasındaki ilişkiler çoğu zaman doğrusal değildir. Bu nedenle çekirdek tabanlı kanonik korelasyon analizi (Kernel Canonical Correlation Analysis, KCCA) geliştirilmiş ve değişkenler arasındaki doğrusal olmayan ilişkilerin yüksek boyutlu özellik uzaylarında modellenmesi mümkün hale gelmiştir. KCCA, özellikle örüntü tanıma, görüntü işleme ve biyoinformatik uygulamalarında yaygın kullanım alanı bulmuştur (Haroon et al., 2004).

Makine öğrenmesi ve derin öğrenme alanlarındaki gelişmeler, kanonik korelasyon analizinin yeni bir dönüşüm geçirmesine neden olmuştur. Andrew ve arkadaşları (2013) tarafından önerilen Derin Kanonik Korelasyon Analizi (Deep Canonical Correlation Analysis, DCCA), doğrusal dönüşümler yerine derin sinir ağları kullanarak veri kümeleri arasındaki ortak temsilleri öğrenmeyi amaçlamaktadır. Böylece yöntem, karmaşık ve doğrusal olmayan ilişki yapılarının modellenmesinde önemli avantajlar sağlamaktadır (Chen et al., 2024).

Kanonik korelasyon analizinin modern genişlemeleri arasında olasılıksal kanonik korelasyon analizi (Probabilistic Canonical Correlation Analysis, PCCA) de önemli bir yere sahiptir. Bu yaklaşım, kanonik korelasyon analizini olasılıksal bir model çerçevesinde yeniden yorumlamakta ve ortak varyasyonu gizil (latent) değişkenler aracılığıyla açıklamaktadır. Son yıllarda geliştirilen derin olasılıksal kanonik korelasyon modelleri, ortak ve görünümüne özgü bilgi bileşenlerini aynı anda modelleyebilmekte ve çok modlu veri entegrasyonu problemlerinde başarılı sonuçlar vermektedir (Karami & Schuurmans, 2021).

Bu gelişmeler göstermektedir ki kanonik korelasyon analizi, Hotelling'in ortaya koyduğu özgün formülasyonun çok daha ötesine geçerek günümüzde geniş bir yöntem ailesine dönüşmüştür. Ancak söz konusu yöntemlerin tamamının temel fikri, farklı veri kümeleri arasında ortak olarak taşınan bilgi yapısının belirlenmesidir. Bu nedenle modern genişlemeler, klasik kanonik korelasyon analizinin alternatifini değil, onun farklı veri yapıları ve araştırma problemleri için geliştirilmiş devamı niteliğindedir.

Kanonik korelasyon analizinin tarihsel gelişim süreci incelendiğinde, yöntemin merkezinde her zaman veri kümeleri arasındaki ortak varyasyonun araştırılması fikrinin yer aldığı görülmektedir. Bu ortak varyasyonun nasıl tanımlandığı ve matematiksel olarak nasıl elde edildiği ise yöntemin geometrik ve cebirsel temelleriyle yakından ilişkilidir. Bu nedenle bir sonraki bölümde kanonik korelasyon analizinin çok değişkenli uzaylardaki geometrik yorumu ve matematiksel yapısı ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Kanonik Korelasyon Analizinin Geometrik ve Cebirsel Temelleri

Kanonik Değişkenler ve Doğrusal Birleşimler

Hotelling'in (1936) özgün formülasyonunda iki değişken kümesi sırasıyla

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$$

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_q)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Burada p , birinci veri kümesindeki; q ise ikinci veri kümesindeki değişken sayısını göstermektedir. Kanonik korelasyon analizinde amaç, bu değişken kümelerinin doğrusal birleşimlerinden oluşan yeni değişkenler elde etmektir. Bu doğrusal birleşimler kanonik değişkenler olarak adlandırılmaktadır (Hotelling, 1936; Thompson, 1984).

Birinci veri kümesinden elde edilen kanonik değişken,

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p$$

ikinci veri kümesinden elde edilen kanonik değişken ise,

$$V = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \dots + b_qY_q$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Burada $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)'$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_q)'$ vektörleri kanonik katsayılar ya da kanonik ağırlıklar olarak adlandırılmaktadır. Bu katsayılar, ilgili değişkenlerin oluşturulan kanonik değişken üzerindeki görece katkılarını belirlemektedir.

Kanonik korelasyon analizinin temel optimizasyon problemi, U ve V doğrusal birleşimleri arasındaki korelasyonu maksimum yapan katsayı vektörlerinin belirlenmesidir. Başka bir ifadeyle amaç,

$$\max_{a,b} \text{Corr}(a'X, b'Y)$$

problemini çözmektir.

Bu optimizasyon sonucunda elde edilen ilk kanonik değişken çifti, iki veri kümesi arasında mümkün olan en yüksek korelasyonu temsil etmektedir. Ancak analiz yalnızca bir kanonik değişken çifti üretmekle sınırlı değildir. İlk kanonik çift elde edildikten sonra, ondan bağımsız yeni doğrusal birleşimler oluşturularak ikinci, üçüncü ve sonraki kanonik değişken çiftleri elde edilmektedir. Her yeni kanonik çift, önceki çiftler tarafından açıklanmayan ortak varyasyon bileşenlerini temsil etmektedir (Johnson & Wichern, 2007).

Kanonik değişkenlerin oluşturulması süreci, temel bileşenler analizine belirli yönlerden benzemekle birlikte amaç bakımından farklılık göstermektedir. Temel bileşenler analizinde amaç tek bir veri kümesindeki toplam varyansı açıklamak iken, kanonik korelasyon analizinde amaç iki ayrı veri kümesi arasındaki ortak varyasyonu maksimum düzeyde temsil eden doğrultuların belirlenmesidir. Bu nedenle kanonik değişkenler, veri kümelerinin iç yapısından çok kümeler arasındaki ilişki yapısını yansıtmaktadır (Hair et al., 2019). Bu noktada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, kanonik değişkenlerin doğrudan gözlenen değişkenler olmamasıdır. Bunlar, veri kümelerindeki değişkenlerin belirli ağırlıklarla bir araya getirilmesi sonucunda elde edilen yapay değişkenlerdir. Analizin gücü de tam olarak burada ortaya çıkmaktadır. Çok sayıda değişken arasına dağılmış bulunan ortak bilgi, daha az sayıda kanonik boyut aracılığıyla özetlenebilmekte ve veri kümeleri arasındaki temel ilişki örüntüleri daha anlaşılır hale gelmektedir.

Modern istatistik ve makine öğrenmesi literatüründe kanonik değişkenler, veri kümeleri arasındaki ortak bilgi yapısını temsil eden gizil bileşenler olarak değerlendirilmektedir. Bu

nedence kanonik korelasyon analizi günümüzde temsil öğrenme, çok görünüşlü öğrenme ve çok modlu veri entegrasyonu çalışmalarının kuramsal öncüllerinden biri olarak kabul edilmektedir (Uurtio et al., 2017; Yang et al., 2019).

Kanonik Korelasyonun Geometrik Yorumu

Kanonik korelasyon analizinin en dikkat çekici özelliklerinden biri, değişken kümeleri arasındaki ilişkinin yalnızca istatistiksel bir korelasyon problemi olarak değil, aynı zamanda geometrik bir problem olarak da yorumlanabilmesidir. Hotelling'in (1936) yaklaşımının temelinde, iki veri kümesi arasındaki ortak varyasyonu en iyi temsil eden doğrultuların belirlenmesi fikri bulunmaktadır. Bu nedenle kanonik korelasyon analizi, çok değişkenli uzaylarda tanımlanan iki alt uzay arasındaki ilişkinin araştırılması şeklinde de değerlendirilebilir. Birinci değişken kümesini oluşturan değişkenleri ile ikinci değişken kümesini oluşturan değişkenleri, çok boyutlu bir uzayda tanımlanan iki ayrı veri uzayı olarak düşünülebilir. Bu durumda kanonik korelasyon analizinin amacı, söz konusu iki uzay içerisinde birbirine en yakın doğrultuları belirlemektir (Thompson, 1984).

Geometrik açıdan bakıldığında korelasyon katsayısı iki vektör arasındaki aının kosinüsü olarak yorumlanabilmektedir. İki vektör arasındaki açı kldke korelasyon katsayısı büyümekte, aı sıfıra yaklaştığında ise korelasyon değeri bire yaklaşmaktadır. Buna karşılık vektörler birbirine dik olduğunda korelasyon sıfır olmakta ve değişkenler arasında doğrusal ilişki bulunmamaktadır. Bu nedenle kanonik korelasyon analizinde maksimum korelasyonun aranması, aynı zamanda iki veri uzayı arasındaki en kk açıyı oluşturan doğrultuların araştırılması anlamına gelmektedir (Johnson & Wichern, 2007).

$$\rho = \cos(\theta)$$

Burada (θ), iki kanonik değişken arasındaki açıyı göstermektedir. Kanonik korelasyon katsayısı ise bu açının kosinüsüne karşılık gelmektedir. Dolayısıyla ilk kanonik korelasyon, iki veri kümesi arasında geometrik olarak en yüksek benzerliği temsil eden doğrultuların ilişki düzeyini ifade etmektedir.

Bu geometrik yorum, kanonik korelasyon analizinin neden doğrusal birleşimler kullandığını da açıklamaktadır. Veri kümelerindeki gözlenen değişkenler çoğu zaman ortak varyasyonu doğrudan temsil etmemektedir. Ancak uygun ağırlıklarla oluşturulan doğrusal birleşimler, veri uzayları içerisinde yeni yönler tanımlamakta ve ortak varyasyonun daha belirgin biçimde ortaya çıkarılmasını sağlamaktadır. Kanonik değişkenler de bu doğrultuların cebirsel temsilinden başka bir şey değildir (Hair et al., 2019).

Kanonik korelasyon analizine ilişkin modern geometrik yorumlar, yöntemi iki değişken kümesi arasındaki korelasyonların incelenmesinden daha geniş bir çerçevede ele almaktadır. Bu yaklaşıma göre her bir veri kümesi, çok boyutlu bir uzay içerisinde tanımlanan bir alt uzay olarak düşünülebilir. Kanonik korelasyon analizi ise bu iki alt uzay arasındaki geometrik ilişkinin araştırılmasına dayanmaktadır. Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalar, kanonik korelasyon katsayılarının iki alt uzay arasındaki asal açıların kosinüsleri olarak yorumlanabileceğini göstermektedir (Ma & Li, 2018; Sørensen et al., 2021). Bu çerçevede ilk kanonik korelasyon katsayısı, iki alt uzay arasındaki en küçük asal açının kosinüsüne karşılık gelmektedir. Benzer şekilde ikinci ve sonraki kanonik korelasyonlar, daha önce belirlenen doğrultulardan bağımsız olmak koşuluyla elde edilen diğer asal açılarla ilişkilidir. Böylece kanonik korelasyon analizi, yalnızca değişken kümeleri arasındaki korelasyonları inceleyen bir yöntem olmaktan çıkmakta; iki veri uzayı arasındaki ortak

geometrik yapıyı ortaya çıkaran bir boyut indirgeme ve alt uzay eşleştirme yöntemi haline gelmektedir (Ma & Li, 2018).

Kanonik korelasyon analizinde ilk kanonik değişken çifti, iki veri uzayı arasındaki en yakın doğrultuları temsil etmektedir. Daha sonra elde edilen ikinci ve sonraki kanonik değişken çiftleri ise ilk doğrultulara dik olacak biçimde oluşturulmaktadır. Böylece her yeni kanonik boyut, önceki boyutlar tarafından açıklanmayan ek ortak varyasyon bileşenlerini temsil etmektedir. Bu özellik, kanonik korelasyon analizini yalnızca bir ilişki ölçüm yöntemi olmaktan çıkararak çok boyutlu veri yapılarının geometrik organizasyonunu inceleyen bir yöntem haline getirmektedir.

Modern makine öğrenmesi literatüründe kanonik korelasyon analizinin yeniden önem kazanmasının temel nedenlerinden biri de bu geometrik bakış açısıdır. Özellikle çok görünüşlü öğrenme (multi-view learning), temsil öğrenme (representation learning) ve çok modlu veri entegrasyonu (multimodal data integration) çalışmalarında amaç, farklı veri kaynaklarından elde edilen bilgilerin ortak bir temsil uzayında bir araya getirilmesidir. Bu bağlamda CCA, farklı veri görünümlerini ortak bir alt uzayda temsil eden ilk yöntemlerden biri olarak kabul edilmektedir. Günümüzde geliştirilen Kernel CCA, Deep CCA ve Generalized CCA gibi yöntemler de esasen bu ortak alt uzay fikrinin farklı veri yapıları için genişletilmiş biçimleridir (Hardoon et al., 2004; Yang et al., 2021; Chen et al., 2024).

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizi, iki değişken kümesi arasındaki ilişkinin yalnızca korelasyon katsayıları aracılığıyla ölçülmesine değil, aynı zamanda bu ilişkinin çok boyutlu uzaylardaki geometrik yapısının anlaşılmasına olanak sağlamaktadır. Bu geometrik yapı, yöntemin matematiksel çözümünün temelini oluşturmakta ve kanonik değişkenlerin elde edilmesinde kullanılan özdeğer probleminin ortaya çıkmasına yol açmaktadır. Bu nedenle bir sonraki bölümde kanonik korelasyon

analizinin cebirsel yapısı ve özdeğer temelli çözüm mekanizması ele alınacaktır.

Özdeğer Problemi ve Kanonik Çözümler

Kanonik korelasyon analizinin geometrik yorumu, yöntemin iki veri kümesi arasındaki en yakın doğrultuların belirlenmesine dayandığını göstermektedir. Ancak bu doğrultuların nasıl elde edildiği sorusu, yöntemin cebirsel yapısının incelenmesini gerektirmektedir. Kanonik değişkenlerin belirlenmesi problemi özünde bir optimizasyon problemidir ve çözümü doğrusal cebirde önemli bir yere sahip olan özdeğer-özvektör teorisine dayanmaktadır (Hotelling, 1936; Johnson & Wichern, 2007). Bununla birlikte, burada amaç yalnızca yüksek korelasyona sahip doğrusal birleşimler elde etmek değildir. Asıl amaç, iki veri kümesi arasında paylaşılan ortak varyasyon yapısını en iyi temsil eden doğrultuların belirlenmesidir. Bu nedenle kanonik korelasyon analizi, maksimum korelasyon arayışını ortak bilgi yapısının ortaya çıkarılmasıyla birleştiren bir yöntem olarak değerlendirilmektedir (Bykhovskaya & Gorin, 2025).

Kanonik korelasyon analizinde iki değişken kümesi sırasıyla

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$$

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_q)'$$

şeklinde tanımlansın. Bu iki değişken kümesine ait kovaryans yapısı aşağıdaki blok matris biçiminde gösterilebilir:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}$$

Burada Σ_{XX} ve Σ_{YY} ilgili değişken kümelerinin kovaryans matrislerini, Σ_{XY} ve Σ_{YX} ise kümeler arasındaki çapraz kovaryans matrislerini göstermektedir (Thompson, 1984; Sajesh, 2026).

Kanonik korelasyon analizinin amacı, $U = a'X$ ve $V = b'Y$ doğrusal birleşimleri arasındaki korelasyonu maksimum yapan ağırlık vektörlerini bulmaktır. Bu amaç aşağıdaki optimizasyon problemi ile ifade edilmektedir:

$$\max_{a,b} \frac{a' \Sigma_{XY} b}{\sqrt{a' \Sigma_{XX} a} \sqrt{b' \Sigma_{YY} b}}$$

Bu ifade, iki kanonik değişken arasındaki korelasyon katsayısının matematiksel tanımıdır. Problemin çözümünde öncelikle kanonik değişkenlerin varyansları bir olacak şekilde standartlaştırılmaktadır:

$$a' \Sigma_{XX} a = 1$$

$$b' \Sigma_{YY} b = 1$$

Bu kısıtlar altında optimizasyon problemi aşağıdaki biçime dönüşmektedir:

$$\max a' \Sigma_{XY} b$$

Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak elde edilen birinci mertebe koşullar sonucunda problem genelleştirilmiş özdeğer problemine indirgenmektedir (Hotelling, 1936).

Birinci değişken kümesine ilişkin çözüm,

$$\Sigma'_{XX} \Sigma_{XY} \Sigma'_{YY} \Sigma_{YX} a = \lambda a$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Benzer biçimde ikinci değişken kümesi için,

$$\Sigma'_{YY} \Sigma_{YX} \Sigma'_{XX} \Sigma_{XY} b = \lambda b$$

eşitliği elde edilmektedir.

Bu denklemlerde yer alan özdeğerler (λ), kanonik korelasyonların karelerine karşılık gelmektedir:

$$\rho_i^2 = \lambda_i$$

Dolayısıyla kanonik korelasyon katsayıları, ilgili özdeğerlerin karekökleri alınarak elde edilmektedir:

$$\rho_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Her özdeğere karşılık gelen özvektörler ise kanonik ağırlık katsayılarını oluşturmaktadır. Böylece kanonik değişkenler doğrudan özvektörler yardımıyla hesaplanabilmektedir. İlk özdeğer en büyük kanonik korelasyonu vermekte, sonraki özdeğerler ise sırasıyla daha düşük düzeyde ortak varyasyon bileşenlerini temsil etmektedir (Hair et al., 2019).

Modern literatürde kanonik korelasyon analizinin çözümü yalnızca özdeğer ayrışımı (eigenvalue decomposition, EVD) aracılığıyla değil, aynı zamanda tekil değer ayrışımı (singular value decomposition, SVD) kullanılarak da ifade edilmektedir. Özellikle yüksek boyutlu veri yapılarında, değişken sayısının gözlem sayısından fazla olduğu durumlarda ve çoklu veri kaynaklarının birlikte analiz edildiği problemlerde SVD tabanlı çözümler daha kararlı ve hesaplama açısından daha verimli sonuçlar sağlayabilmektedir (Yang et al., 2021; Uurtio et al., 2017). Nitekim son yıllarda geliştirilen yüksek boyutlu, boylamsal ve çok modlu veri analiz yöntemlerinin önemli bir bölümü, klasik CCA'nın özdeğer temelli yapısını korumakla birlikte hesaplama sürecini SVD ve çapraz kovaryans ayrıştırmaları üzerinden yeniden formüle etmektedir (Tan & Shi, 2026).

Günümüzde kullanılan Sparse CCA, Kernel CCA, Bayesian CCA, Deep CCA ve Generalized CCA gibi yöntemler farklı optimizasyon stratejileri ve farklı varsayımlar altında geliştirilmiş

olsalar da temelde aynı kanonik korelasyon probleminin uzantıları olarak değerlendirilmektedir (Uurtio et al., 2017; Yang et al., 2021). Bu durum, Hotelling tarafından ortaya konulan özdeğer probleminin yalnızca klasik çok değişkenli istatistik içerisinde değil, aynı zamanda modern veri bilimi, makine öğrenmesi ve çoklu veri entegrasyonu çalışmalarında da kuramsal temel oluşturmaya devam ettiğini göstermektedir.

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizinin matematiksel çözümü, iki veri kümesi arasındaki maksimum korelasyonun araştırılmasını bir özdeğer problemine dönüştürmektedir. Bu dönüşüm sayesinde karmaşık çok değişkenli ilişki yapıları daha düşük boyutlu kanonik uzaylarda temsil edilebilmekte ve veri kümeleri arasındaki ortak varyasyon sistematik biçimde ortaya çıkarılabilmektedir. Modern yaklaşımlar farklı veri yapılarına uyum sağlayacak biçimde yöntemi genişletmiş olsa da özdeğer ve tekil değer ayrıştırmalarına dayanan bu temel matematiksel yapı güncelliğini korumaktadır (Bykhovskaya & Gorin, 2025; Sajesh, 2026; Tan & Shi, 2026).

Kanonik Fonksiyonların Yorumlanması ve İstatistiksel Anlamlılık

Kanonik korelasyon analizinin matematiksel çözümü sonucunda elde edilen kanonik korelasyon katsayıları ve kanonik değişkenler, veri kümeleri arasındaki ilişkinin yapısına ilişkin önemli bilgiler sunmaktadır. Ancak analiz sürecinin asıl amacı yalnızca kanonik korelasyon katsayılarını hesaplamak değil, bu katsayıların temsil ettiği ilişki örüntülerini anlamlandırmaktır. Bu nedenle kanonik korelasyon analizinde yorumlama süreci, yöntemin en kritik aşamalarından biri olarak kabul edilmektedir (Thompson, 1984; Hair et al., 2019).

Kanonik korelasyon analizinde elde edilen her kanonik değişken çifti bir kanonik fonksiyon olarak adlandırılmaktadır. İlk

kanonik fonksiyon, iki veri kümesi arasındaki en yüksek korelasyonu temsil eden doğrusal birleşimlerden oluşmaktadır. İkinci ve sonraki kanonik fonksiyonlar ise önceki fonksiyonlardan bağımsız olmak koşuluyla kalan ortak varyasyon bileşenlerini açıklamaktadır. Bu nedenle kanonik fonksiyonlar, veri kümeleri arasındaki ilişkinin farklı boyutlarını temsil eden ardışık yapılar olarak değerlendirilmektedir (Johnson & Wichern, 2007).

Kanonik korelasyon katsayısının büyüklüğü, ilgili fonksiyonun iki veri kümesi arasındaki ilişkiyi ne ölçüde temsil ettiğini göstermektedir. Bununla birlikte yüksek bir kanonik korelasyon katsayısı tek başına yeterli değildir. Çünkü kanonik korelasyon yalnızca kanonik değişkenler arasındaki ilişkinin gücünü göstermekte, gözlenen değişkenlerin bu ilişkiye ne ölçüde katkı sağladığı hakkında doğrudan bilgi vermemektedir. Bu nedenle yorumlama sürecinde yalnızca kanonik korelasyon katsayılarının değil, kanonik ağırlıkların, yapı katsayılarının ve açıklanan varyans ölçülerinin birlikte değerlendirilmesi gerekmektedir (Sherry & Henson, 2005).

Kanonik fonksiyonların yorumlanmasında ilk olarak kanonik ağırlıklar incelenmektedir. Kanonik ağırlıklar, gözlenen değişkenlerin kanonik değişkenlerin oluşturulmasına katkısını gösteren katsayılardır. Ancak çoklu doğrusal bağlantının bulunduğu veri yapılarında bu katsayılar kararsız olabilmekte ve yorum gücü yaratabilmektedir. Bu nedenle uygulamalı çalışmalarda yalnızca kanonik ağırlıklara dayalı yorum yapılması önerilmemektedir (Hair et al., 2019). Bu noktada yapı katsayıları (canonical loadings or structure coefficients) daha güvenilir yorum araçları olarak öne çıkmaktadır. Yapı katsayıları, her bir gözlenen değişken ile ilgili olduğu kanonik değişken arasındaki korelasyonu göstermektedir. Böylece hangi değişkenlerin ilgili kanonik fonksiyonun oluşumunda daha etkili olduğu daha açık biçimde belirlenebilmektedir. Literatürde, kanonik fonksiyonların

yorumlanmasında yapı katsayılarının kanonik ağırlıklardan daha kararlı ve daha anlamlı sonuçlar verdiği sıklıkla vurgulanmaktadır (Thompson, 1984; Sherry & Henson, 2005).

Kanonik korelasyon analizinde yorumlama sürecinin bir diğer önemli bileşeni fazlalık (redundancy) analizidir. Kanonik korelasyon katsayısı iki kanonik değişken arasındaki ilişkinin gücünü göstermesine rağmen, bu ilişki aracılığıyla bir veri kümesinin diğer veri kümesindeki varyansın ne kadarını açıkladığını doğrudan ortaya koymamaktadır. Redundancy analizi ise bir veri kümesinden elde edilen kanonik değişkenlerin diğer veri kümesindeki değişkenleri açıklama gücünü değerlendirmektedir. Bu nedenle birçok araştırmacı, uygulamalı çalışmalarda kanonik korelasyon katsayılarının yanı sıra redundancy indekslerinin de raporlanmasını önermektedir (Stewart & Love, 1968).

Kanonik fonksiyonların yorumlanabilmesi için istatistiksel anlamlılıklarının da değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla en yaygın kullanılan yöntem Wilks Lambda testidir. Wilks Lambda değeri küçüldükçe veri kümeleri arasındaki ilişkinin daha güçlü olduğu kabul edilmektedir. Kanonik fonksiyonların anlamlılığı genellikle sıralı hipotez testleri aracılığıyla değerlendirilmekte ve anlamlı bulunmayan fonksiyonlar yorumlama sürecine dahil edilmemektedir (Johnson & Wichern, 2007).

Wilks Lambda'nın yanı sıra Pillai's Trace, Hotelling's Trace ve Roy's Largest Root gibi çok değişkenli test istatistikleri de kullanılabilir. Ancak uygulamada en yaygın tercih edilen yaklaşım Wilks Lambda testidir. Bu testler aracılığıyla araştırmacı, elde edilen kanonik fonksiyonların istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını değerlendirebilmekte ve yorumlarını yalnızca anlamlı fonksiyonlar üzerinde yoğunlaştırabilmektedir (Hair et al., 2019).

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizinde yorumlama süreci, yalnızca kanonik korelasyon katsayılarının incelenmesinden ibaret değildir. Kanonik ağırlıklar, yapı katsayıları, redundancy indeksleri ve anlamlılık testleri birlikte değerlendirilerek veri kümeleri arasındaki ilişkinin yapısı kapsamlı biçimde ortaya konulabilmektedir. Bu yaklaşım, kanonik korelasyon analizinin yalnızca matematiksel bir yöntem değil, aynı zamanda çok değişkenli veri yapılarının yorumlanmasına yönelik güçlü bir analitik çerçeve olduğunu göstermektedir.

Kanonik Korelasyon Analizinin Varsayımları ve Uygulama Süreci

Kanonik korelasyon analizi, iki değişken kümesi arasındaki doğrusal ilişki yapısını inceleyen güçlü bir çok değişkenli istatistiksel yöntemdir. Ancak elde edilen sonuçların güvenilir ve yorumlanabilir olabilmesi, belirli istatistiksel varsayımların sağlanmasına bağlıdır. Bu varsayımlar, yöntemin matematiksel temellerini oluşturan kovaryans yapılarının doğru biçimde tahmin edilmesini ve kanonik fonksiyonların anlamlı sonuçlar üretmesini sağlamaktadır. Her ne kadar kanonik korelasyon analizi belirli ölçüde varsayım ihlallerine karşı dayanıklı kabul edilse de, ciddi ihlaller sonuçların yorumlanmasını güçleştirebilmekte ve istatistiksel çıkarımların geçerliliğini azaltabilmektedir (Hair et al., 2019; Sherry & Henson, 2005).

Çok Değişkenli Normallik Varsayımı

Kanonik korelasyon analizinin temel varsayımlarından biri, analizde yer alan değişkenlerin birlikte çok değişkenli normal dağılım göstermesidir. Özellikle Wilks Lambda, Pillai's Trace, Hotelling's Trace ve Roy's Largest Root gibi anlamlılık testlerinin teorik geçerliliği büyük ölçüde bu varsayıma dayanmaktadır. Çok değişkenli normallik varsayımı, her bir değişkenin tek başına normal dağılmasından daha güçlü bir koşul olup, değişkenlerin

ortak dağılım yapısının çok değişkenli normal dağılıma uygun olmasını gerektirmektedir (Johnson & Wichern, 2007).

Uygulamada sosyal bilimler, eğitim ve sağlık araştırmalarında bu varsayımın tam olarak sağlanması her zaman mümkün olmayabilmektedir. Bununla birlikte örneklem büyüklüğünün yeterli olduğu durumlarda kanonik korelasyon analizinin normallik ihlallerine karşı belirli ölçüde dayanıklı olduğu belirtilmektedir (Hair et al., 2019).

Doğrusallık Varsayımı

Kanonik korelasyon analizi, değişken kümeleri arasındaki ilişkileri doğrusal birleşimler aracılığıyla modellemektedir. Bu nedenle yöntem, değişkenler arasındaki temel ilişkinin doğrusal olduğu varsayımına dayanmaktadır. Eğer değişkenler arasındaki ilişki yapısı doğrusal değilse, klasik kanonik korelasyon analizi gerçek ilişkiyi yeterince temsil edemeyebilir ve ilişki gücünü olduğundan düşük gösterebilir (Thompson, 1984). Bu varsayımın değerlendirilmesinde saçılım diyagramları, matris grafikler ve doğrusal olmayan örüntüleri ortaya koyabilecek görsel incelemeler sıklıkla kullanılmaktadır. Son yıllarda geliştirilen Kernel CCA ve Deep CCA gibi yöntemler ise doğrusal olmayan ilişki yapılarının modellenmesine yönelik önemli genişlemeler sunmaktadır (Uurtio et al., 2017).

Çoklu Doğrusal Bağlantının Kontrolü

Kanonik korelasyon analizinde aynı veri kümesi içerisinde yer alan değişkenler arasında belirli düzeyde korelasyon bulunması beklenen bir durumdur. Ancak değişkenler arasında aşırı derecede yüksek korelasyonların bulunması, çoklu doğrusal bağlantı (multicollinearity) sorununa yol açabilmektedir. Bu durumda kovaryans matrislerinin tersinin alınması güçleşmekte ve kanonik ağırlık katsayıları kararsız hale gelebilmektedir (Hair et al., 2019).

Özellikle değişken çiftleri arasında çok yüksek korelasyonların bulunması veya bazı değişkenlerin diğerlerinin doğrusal birleşimi şeklinde ifade edilebilmesi durumunda analiz sonuçlarının güvenilirliği azalabilmektedir. Bu nedenle analiz öncesinde korelasyon matrislerinin incelenmesi ve gerekli durumlarda değişken seçimi ya da boyut indirgeme yöntemlerinden yararlanılması önerilmektedir (Johnson & Wichern, 2007).

Aykırı Gözlemler

Çok değişkenli analiz yöntemlerinin büyük bölümünde olduğu gibi kanonik korelasyon analizi de aykırı gözlemlerden etkilenebilmektedir. Aykırı gözlemler, kovaryans matrislerinin yapısını değiştirebilmekte ve kanonik korelasyon katsayılarının olduğundan yüksek ya da düşük tahmin edilmesine neden olabilmektedir. Bu nedenle analiz öncesinde veri setinin aykırı gözlemler açısından incelenmesi önem taşımaktadır (Tabachnick & Fidell, 2019).

Tek değişkenli aykırı değerlerin belirlenmesinde standartlaştırılmış z puanları kullanılabilirken, çok değişkenli aykırı gözlemlerin belirlenmesinde Mahalanobis uzaklığı yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle yüksek boyutlu veri yapılarında aykırı gözlemlerin etkisi daha belirgin hale gelebildiğinden, son yıllarda robust kanonik korelasyon analizine yönelik yöntemler geliştirilmiştir (Sajesh, 2026).

Yeterli Örneklem Büyüklüğü

Kanonik korelasyon analizinin güvenilir sonuçlar üretebilmesi için yeterli örneklem büyüklüğüne sahip olunması gerekmektedir. Çünkü yöntemin temelini oluşturan kovaryans ve korelasyon matrislerinin kararlı biçimde tahmin edilmesi, yeterli sayıda gözlem bulunmasına bağlıdır. Küçük örneklerde kanonik korelasyon katsayıları aşırı iyimser tahmin edilebilmekte ve elde

edilen fonksiyonların genellenebilirliği azalabilmektedir (Sherry & Henson, 2005).

Literatürde kesin bir örneklem büyüklüğü konusunda görüş birliği bulunmamakla birlikte, yaygın önerilerden biri her değişken için en az 10–20 gözlem bulunmasıdır. Bununla birlikte son yıllarda yüksek boyutlu veri analizlerinde değişken sayısının gözlem sayısını aştığı durumlar için düzenlenileştirilmiş ve yüksek boyutlu kanonik korelasyon yöntemleri geliştirilmiştir (Uurtio et al., 2017; Tan & Shi, 2026).

Kovaryans Matrislerinin Pozitif Tanımlılığı

Kanonik korelasyon analizinin matematiksel çözümü, değişken kümelerine ait kovaryans matrislerinin terslerinin alınmasını gerektirmektedir. Bu nedenle özellikle ve kovaryans matrislerinin pozitif tanımlı ve terslenebilir olması beklenmektedir. Eğer değişkenler arasında tam doğrusal bağımlılık bulunuyorsa kovaryans matrisleri tekil (singular) hale gelmekte ve klasik özdeğer çözümü uygulanamamaktadır (Johnson & Wichern, 2007). Bu durum özellikle yüksek boyutlu veri setlerinde sık karşılaşılan bir problem olup, modern CCA yaklaşımlarının geliştirilmesindeki temel motivasyonlardan birini oluşturmaktadır. Düzenlenileştirilmiş CCA, seyrek CCA ve yüksek boyutlu CCA yöntemleri büyük ölçüde bu problemin üstesinden gelmek amacıyla geliştirilmiştir (Yang et al., 2019; Bykhovskaya & Gorin, 2025).

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizinin başarılı biçimde uygulanabilmesi, çok değişkenli normallik, doğrusallık, uygun örneklem büyüklüğü, aykırı gözlemlerin kontrolü ve kovaryans yapısının kararlılığı gibi temel varsayımların değerlendirilmesini gerektirmektedir. Bu varsayımların sağlanması yalnızca istatistiksel anlamlılık testlerinin geçerliliğini artırmakla kalmamakta, aynı zamanda elde edilen kanonik fonksiyonların yorumlanabilirliğini ve genellenebilirliğini de güçlendirmektedir.

Kanonik Korelasyon Analizinin Uygulama Süreci

Kanonik korelasyon analizi, iki değişken kümesi arasındaki ilişkinin bütüncül biçimde incelenmesine olanak sağlayan sistematik bir analiz sürecine sahiptir. Her ne kadar yöntemin matematiksel temeli özdeğer problemlerine dayansa da uygulama aşamasında araştırmacının izlemesi gereken belirli adımlar bulunmaktadır. Bu adımların dikkatli biçimde yürütülmesi, elde edilen kanonik fonksiyonların güvenilirliğini ve yorumlanabilirliğini artırmaktadır (Hair et al., 2019; Sherry & Henson, 2005).

Değişken Kümelerinin Belirlenmesi

Kanonik korelasyon analizinin ilk aşaması, araştırma problemine uygun iki değişken kümesinin tanımlanmasıdır. Bu aşamada araştırmacı, kuramsal gerekçelere dayanarak birbirleriyle ilişkili olduğu düşünölen iki değişken grubunu belirlemektedir. Kanonik korelasyon analizinin temel amacı tek tek değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek değil, değişken kümeleri arasındaki ortak ilişki yapısını ortaya koymaktır. Bu nedenle değişken kümelerinin oluşturulması süreci istatistiksel olduğu kadar kuramsal bir karar sürecidir (Thompson, 1984).

Ön Analizler ve Veri İncelemesi

Kanonik korelasyon analizine geçilmeden önce veri setinin çeşitli açılardan değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu aşamada eksik veriler, aykırı gözlemler, dağılım özellikleri ve değişkenler arasındaki korelasyon yapıları incelenmektedir. Ayrıca çoklu doğrusal bağlantı problemi oluşturabilecek yüksek korelasyonlu değişkenlerin belirlenmesi de önem taşımaktadır (Tabachnick & Fidell, 2019). Ön analizler yalnızca istatistiksel varsayımların kontrol edilmesini sağlamamakta, aynı zamanda elde edilecek kanonik fonksiyonların kararlılığını artırmaktadır. Özellikle aykırı

gözlemler ve aşırı yüksek korelasyonlar, kanonik katsayıların yorumlanmasını güçleştirebilmektedir.

Kanonik Fonksiyonların Elde Edilmesi

Veri setinin analize uygun olduğu belirlendikten sonra kanonik korelasyon fonksiyonları hesaplanmaktadır. Bu aşamada iki değişken kümesi arasındaki ilişkiyi en yüksek düzeyde temsil eden doğrusal birleşimler oluşturulmaktadır. İlk kanonik fonksiyon, veri kümeleri arasındaki maksimum korelasyonu temsil ederken sonraki fonksiyonlar önceki fonksiyonlardan bağımsız olacak biçimde elde edilmektedir (Johnson & Wichern, 2007). Elde edilen kanonik fonksiyon sayısı, değişken kümelerinden daha az değişken içeren kümedeki değişken sayısını aşmamaktadır. Örneğin bir veri kümesinde beş, diğerinde üç değişken bulunuyorsa en fazla üç kanonik fonksiyon elde edilebilmektedir.

Kanonik Fonksiyonların Anlamlılığının Test Edilmesi

Kanonik fonksiyonların elde edilmesinden sonra hangi fonksiyonların istatistiksel olarak anlamlı olduğunun belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla en yaygın kullanılan yaklaşım Wilks Lambda testidir. Test sürecinde tüm fonksiyonların birlikte anlamlılığı değerlendirilmekte, daha sonra sıralı testler aracılığıyla her bir fonksiyonun katkısı incelenmektedir (Hair et al., 2019). Anlamlı bulunmayan kanonik fonksiyonlar genellikle yorumlama sürecine dahil edilmemektedir. Böylece araştırmacı yalnızca veri kümeleri arasındaki anlamlı ilişki boyutlarına odaklanabilmektedir.

Kanonik Fonksiyonların Yorumlanması

Anlamlı bulunan kanonik fonksiyonların yorumlanması analiz sürecinin en önemli aşamalarından biridir. Bu aşamada yalnızca kanonik korelasyon katsayıları değil, kanonik ağırlıklar, yapı katsayıları ve redundancy indeksleri birlikte değerlendirilmektedir. Özellikle yapı katsayıları, ilgili kanonik

fonksiyonun hangi değişkenler tarafından oluşturulduğunu göstermesi bakımından önemli bilgiler sağlamaktadır (Sherry & Henson, 2005). Yorumlama sürecinde araştırmacının temel amacı, veri kümeleri arasında ortaya çıkan ortak ilişki örüntülerini kuramsal çerçeve içerisinde açıklayabilmektir. Bu nedenle istatistiksel sonuçların araştırma problemiyle ilişkilendirilmesi büyük önem taşımaktadır.

Sonuçların Raporlanması

Kanonik korelasyon analizinin son aşaması elde edilen sonuçların sistematik biçimde raporlanmasıdır. İyi bir raporlamada kanonik korelasyon katsayıları, açıklanan varyans oranları, Wilks Lambda değerleri, yapı katsayıları ve redundancy indeksleri birlikte sunulmalıdır. Ayrıca hangi kanonik fonksiyonların yorumlandığı ve bu fonksiyonların hangi değişkenler tarafından temsil edildiği açık biçimde belirtilmelidir (Sherry & Henson, 2005).

Son yıllarda yayımlanan metodolojik çalışmalar, yalnızca kanonik korelasyon katsayılarının raporlanmasının yeterli olmadığını, özellikle yapı katsayıları ve redundancy ölçülerinin de verilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bu yaklaşım, elde edilen sonuçların daha şeffaf ve yorumlanabilir olmasına katkı sağlamaktadır.

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizi, değişken kümelerinin belirlenmesinden sonuçların raporlanmasına kadar uzanan çok aşamalı bir süreçtir. Analizin her aşamasında kuramsal gerekçelerin ve istatistiksel ölçütlerin birlikte dikkate alınması, elde edilen bulguların geçerliliğini ve bilimsel değerini artırmaktadır.

Kanonik Korelasyon Analizi Sonuçlarının Raporlanması ve Yorumlanmasında Dikkat Edilmesi Gereken Hususlar

Kanonik korelasyon analizi, çok değişkenli veri yapıları arasındaki karmaşık ilişkilerin incelenmesine olanak sağlayan

güçlü bir yöntem olmakla birlikte, sonuçlarının yorumlanması ve raporlanması diğer çok değişkenli analiz tekniklerine göre daha fazla dikkat gerektirmektedir. Uygulamada karşılaşılan önemli sorunlardan biri, araştırmacıların yalnızca kanonik korelasyon katsayılarına odaklanmaları ve analizin sunduğu diğer bilgileri göz ardı etmeleridir. Oysa kanonik korelasyon analizinin doğru yorumlanabilmesi için kanonik fonksiyonların bütüncül olarak değerlendirilmesi gerekmektedir (Sherry & Henson, 2005).

Kanonik Korelasyon Katsayılarına Aşırı Odaklanma

Uygulamalı araştırmalarda sıklıkla karşılaşılan hatalardan biri, sadece kanonik korelasyon katsayılarının büyüklüğüne bakılarak sonuçların yorumlanmasıdır. Kanonik korelasyon katsayısı iki kanonik değişken arasındaki ilişkinin gücünü göstermesine rağmen, gözlenen değişkenlerin bu ilişkiye nasıl katkı sağladığı hakkında doğrudan bilgi vermemektedir. Bu nedenle yüksek bir kanonik korelasyon katsayısı elde edilmesi tek başına anlamlı ve yorumlanabilir bir model elde edildiği anlamına gelmemektedir (Thompson, 1984).

Kanonik Ağırlıklar ile Yapı Katsayılarının Karıştırılması

Kanonik korelasyon analizinde yorumlama sürecinde sıklıkla karşılaşılan bir diğer sorun, kanonik ağırlıklar ile yapı katsayılarının aynı kavramlar gibi değerlendirilmesidir. Kanonik ağırlıklar, değişkenlerin kanonik değişkenlerin oluşturulmasına katkısını gösterirken; yapı katsayıları, gözlenen değişkenler ile ilgili kanonik değişken arasındaki korelasyonu ifade etmektedir. Çoklu doğrusal bağlantının bulunduğu durumlarda kanonik ağırlıklar önemli ölçüde değişkenlik gösterebilirken, yapı katsayıları daha kararlı sonuçlar vermektedir. Bu nedenle literatürde yorumlama sürecinde yapı katsayılarının öncelikli olarak incelenmesi önerilmektedir (Sherry & Henson, 2005).

Redundancy Ölçülerinin İhmal Edilmesi

Kanonik korelasyon analizine ilişkin raporlarda sıklıkla göz ardı edilen bir diğer unsur redundancy indeksleridir. Kanonik korelasyon katsayısı iki veri kümesi arasındaki ilişkinin gücünü göstermesine rağmen, bu ilişkinin pratik açıdan ne kadar bilgi taşıdığını ortaya koymamaktadır. Redundancy analizi ise bir değişken kümesinden elde edilen kanonik değişkenlerin diğer değişken kümesindeki varyansın ne kadarını açıkladığını göstermektedir. Bu nedenle birçok araştırmacı, kanonik korelasyon katsayılarının yanı sıra redundancy ölçülerinin de raporlanmasını önermektedir (Stewart & Love, 1968).

İstatistiksel ve Pratik Anlamlılığın Birlikte Değerlendirilmesi

Kanonik fonksiyonların istatistiksel olarak anlamlı bulunması, her zaman araştırma açısından önemli sonuçlar elde edildiği anlamına gelmemektedir. Özellikle büyük örneklerde düşük düzeydeki ilişkiler dahi istatistiksel olarak anlamlı hale gelebilmektedir. Bu nedenle yorumlama sürecinde yalnızca anlamlılık testlerine değil, kanonik korelasyon katsayılarının büyüklüğüne, açıklanan varyans oranlarına ve redundancy değerlerine de dikkat edilmesi gerekmektedir (Hair et al., 2019).

Sonuçların Şeffaf ve Sistemik Biçimde Sunulması

Kanonik korelasyon analizinin bilimsel değerinin artırılabilmesi için sonuçların ayrıntılı ve sistemik biçimde raporlanması gerekmektedir. İyi bir raporda aşağıdaki unsurların yer alması önerilmektedir:

- Kanonik korelasyon katsayıları,
- Wilks Lambda ve diğer anlamlılık testleri,
- Kanonik ağırlıklar,
- Yapı katsayıları,

- Çapraz yükler,
- Redundancy indeksleri,
- Yorumlanan kanonik fonksiyonların sayısı ve gerekeçesi.

Bu bilgilerin birlikte sunulması, araştırma sonuçlarının yeniden değerlendirilebilmesine ve farklı çalışmalarla karşılaştırılabilmesine olanak sağlamaktadır (Sherry & Henson, 2005).

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizinin başarısı yalnızca doğru matematiksel çözümün elde edilmesine değil, aynı zamanda sonuçların doğru yorumlanmasına ve eksiksiz raporlanmasına bağlıdır. Kanonik korelasyon katsayıları, yapı katsayıları, redundancy ölçüleri ve anlamlılık testleri birlikte değerlendirildiğinde, veri kümeleri arasındaki ilişkinin hem istatistiksel hem de kuramsal boyutları daha sağlıklı biçimde ortaya konulabilmektedir. Bu nedenle araştırmacıların yorumlama sürecinde tek bir ölçüte odaklanmak yerine, kanonik fonksiyonları çok boyutlu bir bakış açısıyla değerlendirmeleri önerilmektedir.

Kanonik Korelasyon Analizinde Modern Yaklaşımlar ve Uygulamalar

Klasik Kanonik Korelasyon Analizinin Sınırlılıkları

Kanonik korelasyon analizi, iki değişken kümesi arasındaki ortak varyasyon yapısının incelenmesinde uzun yıllardır kullanılan temel çok değişkenli istatistiksel yöntemlerden biri olmasına rağmen, modern veri yapılarının ortaya çıkmasıyla birlikte bazı önemli sınırlılıkları daha belirgin hale gelmiştir. Özellikle yüksek boyutlu veri kümeleri, doğrusal olmayan ilişki yapıları ve çoklu veri kaynaklarının birlikte analiz edilmesini gerektiren araştırma problemleri, klasik kanonik korelasyon analizinin kapsamını zorlamaya başlamıştır (Uurtio et al., 2017; Yang et al., 2021).

Klasik kanonik korelasyon analizinin en temel sınırlılıklarından biri doğrusal ilişki varsayımına dayanmasıdır. Yöntem, iki veri kümesi arasındaki ilişkiyi doğrusal birleşimler aracılığıyla modellemekte ve bu nedenle doğrusal olmayan ilişki örüntülerini yeterince temsil edememektedir. Oysa biyolojik sistemler, sosyal ağlar, finansal piyasalar ve görüntü verileri gibi birçok modern veri yapısında değişkenler arasındaki ilişkiler doğrusal olmayan özellikler göstermektedir. Bu durum, doğrusal olmayan yapıları modelleyebilen Kernel CCA ve derin öğrenme tabanlı yaklaşımların geliştirilmesine zemin hazırlamıştır (Hardoon et al., 2004; Uurtio et al., 2017).

Bir diğer önemli sınırlılık, klasik yöntemin kovaryans matrislerinin terslenebilir olmasını gerektirmesidir. Değişken sayısının gözlem sayısını aştığı yüksek boyutlu veri kümelerinde kovaryans matrisleri çoğu zaman tekil hale gelmekte ve klasik özdeğer çözümü uygulanamamaktadır. Özellikle genomik, proteomik ve çoklu omik araştırmalarında karşılaşılan bu problem, düzenlenmiştir (regularized) ve seyrek (sparse) kanonik korelasyon yöntemlerinin geliştirilmesinde temel motivasyonlardan biri olmuştur (Bykhovskaya & Gorin, 2025; Tan & Shi, 2026).

Klasik kanonik korelasyon analizinin bir diğer kısıtı, yalnızca iki veri kümesinin birlikte analiz edilmesine olanak sağlamasıdır. Günümüzde birçok araştırma problemi aynı olguya ilişkin birden fazla veri kaynağının birlikte değerlendirilmesini gerektirmektedir. Örneğin biyoinformatik çalışmalarında genomik, transkriptomik ve metabolomik verilerin birlikte incelenmesi; makine öğrenmesinde ise görüntü, metin ve ses verilerinin eş zamanlı analiz edilmesi gerekebilmektedir. Bu tür problemler, Generalized Canonical Correlation Analysis (GCCA) ve Multiset CCA gibi çoklu veri kümesi yaklaşımlarının ortaya çıkmasına yol açmıştır (Sørensen et al., 2021; Uurtio et al., 2017).

Son yıllarda makine öğrenmesi ve yapay zekâ alanlarında yaşanan gelişmeler, kanonik korelasyon analizinin yeniden yorumlanmasına da neden olmuştur. Geleneksel istatistik literatüründe iki veri kümesi arasındaki ortak varyasyonu belirleme yöntemi olarak görülen CCA, günümüzde temsil öğrenme (representation learning), çok görünüşlü öğrenme (multi-view learning) ve çok modlu veri entegrasyonu (multimodal data integration) çalışmalarında ortak temsil uzaylarının öğrenilmesine yönelik temel yöntemlerden biri olarak değerlendirilmektedir (Yang et al., 2021; Chen et al., 2024).

Bu sınırlılıklar, kanonik korelasyon analizinin temel matematiksel yapısını koruyan ancak farklı veri yapılarına uyum sağlayan yeni yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Düzenleştirilmiş ve seyrek kanonik korelasyon analizleri, çekirdek tabanlı yaklaşımlar (Kernel CCA), çoklu veri kümesi yöntemleri (GCCA ve MCCA) ile derin öğrenme temelli modeller bu gelişimin başlıca örneklerini oluşturmaktadır. Söz konusu yöntemler, klasik CCA'nın yüksek boyutluluk, doğrusal olmayan ilişki yapıları ve çoklu veri entegrasyonu gibi alanlardaki sınırlılıklarını aşmayı amaçlamakta ve yöntemin uygulama alanlarını önemli ölçüde genişletmektedir.

Bu nedenle günümüzde CCA yalnızca çok değişkenli istatistiğin bir parçası olarak değil, aynı zamanda modern veri bilimi, yapay zekâ ve çoklu veri entegrasyonu çalışmalarının temel bileşenlerinden biri olarak görülmektedir. Takip eden bölümlerde, klasik yöntemin bu sınırlılıklarını aşmak amacıyla geliştirilen modern kanonik korelasyon yaklaşımları ayrıntılı olarak ele alınacaktır (Bykhovskaya & Gorin, 2025).

Düzenleştirilmiş ve Seyrek Kanonik Korelasyon Analizi

Klasik kanonik korelasyon analizinin en önemli sınırlılıklarından biri, değişken sayısının gözlem sayısına yaklaştığı

veya gözlem sayısını aştığı durumlarda ortaya çıkan kararsız tahmin problemidir. Özellikle genomik, proteomik, nörogörüntüleme ve diğer yüksek boyutlu veri yapılarında kovaryans matrislerinin güvenilir biçimde tahmin edilmesi güçleşmekte ve klasik CCA çözümünün temelini oluşturan matris tersleme işlemleri sayısal sorunlara yol açabilmektedir. Bu durum, kanonik korelasyon katsayılarının aşırı tahmin edilmesine ve modelin yeni veri kümelerine genellenebilirliğinin azalmasına neden olmaktadır (Uurtio et al., 2017; Yang et al., 2021).

Bu problemlerin üstesinden gelmek amacıyla geliştirilen ilk yöntemlerden biri Düzenleştirilmiş Kanonik Korelasyon Analizidir (Regularized Canonical Correlation Analysis; RCCA). Düzenleştirilmiş CCA yaklaşımında, klasik kanonik korelasyon analizinde kullanılan kovaryans matrislerine belirli ceza terimleri eklenerek tahmin sürecinin daha kararlı hale getirilmesi amaçlanmaktadır. Böylece yüksek boyutlu veri yapılarında ortaya çıkan tekillik ve aşırı uyum problemleri azaltılabilmektedir. Düzenleştirme yaklaşımı ilk kez Vinod (1976) tarafından önerilmiş ve daha sonraki yıllarda farklı veri yapıları için çeşitli biçimlerde geliştirilmiştir.

RCCA'nın temel avantajı, değişken sayısının gözlem sayısından fazla olduğu durumlarda dahi uygulanabilmesidir. Özellikle nörogörüntüleme ve davranış bilimleri alanlarında gerçekleştirilen son çalışmalar, düzenleştirilmiş yöntemlerin klasik CCA'ya göre daha kararlı sonuçlar ürettiğini göstermektedir. Örneğin Milecki ve arkadaşları (2025), ergen bireylerden elde edilen yüksek boyutlu beyin bağlantısallığı verileri ile psikopatoloji göstergeleri arasındaki ilişkileri incelemek amacıyla düzenleştirilmiş CCA kullanmış ve yöntemin aşırı uyumu azaltarak daha güvenilir beyin-davranış ilişkileri ortaya koyduğunu göstermiştir.

Düzenleştirilmiş yöntemlerin önemli bir uzantısı ise Seyrek Kanonik Korelasyon Analizidir (Sparse Canonical Correlation Analysis; SCCA). Klasik CCA'da elde edilen kanonik değişkenler genellikle veri setindeki tüm değişkenlerin doğrusal birleşimlerinden oluşmaktadır. Bu durum özellikle binlerce değişken içeren veri yapılarında yorumlama gücüne neden olmaktadır. SCCA yaklaşımı ise yalnızca ilişkiye anlamlı katkı sağlayan değişkenleri modelde tutarak daha sade ve yorumlanabilir kanonik fonksiyonlar elde etmeyi amaçlamaktadır. Seyrek CCA yöntemleri çoğunlukla LASSO ve benzeri ceza fonksiyonlarına dayanmaktadır. Bu yaklaşımlarda bazı kanonik katsayılar sıfıra zorlanmakta ve böylece değişken seçimi ile ilişki modellenmesi aynı anda gerçekleştirilmektedir. Witten ve Tibshirani (2009) tarafından geliştirilen yöntem, seyrek CCA literatürünün en etkili çalışmalarından biri olarak kabul edilmekte ve günümüzde çok sayıda uygulamanın temelini oluşturmaktadır.

Seyrekleştirme yaklaşımının önemi özellikle biyoinformatik ve görüntüleme genetiği araştırmalarında ortaya çıkmaktadır. Bu alanlarda araştırmacılar yalnızca iki veri kümesi arasındaki ilişkinin gücünü belirlemek istememekte, aynı zamanda bu ilişkiyi oluşturan değişkenleri de tanımlamayı amaçlamaktadır. Bu nedenle SCCA, hem boyut indirgeme hem de değişken seçimi işlevlerini birlikte yerine getiren bir yöntem olarak değerlendirilmektedir.

Literatürde seyrek CCA'nın farklı genişletmeleri de geliştirilmiştir. Bunlardan biri Joint Sparse Canonical Correlation Analysis (JSCCA) yaklaşımıdır. Fang ve arkadaşları (2016), farklı gruplarda gözlenen ortak ve gruba özgü ilişki örüntülerini eş zamanlı olarak belirleyebilmek amacıyla JSCCA yöntemini önermiştir. Yöntem, özellikle görüntüleme genetiği çalışmalarında genetik belirteçler ile beyin görüntüleme verileri arasındaki ortak ve farklı ilişki yapılarını ortaya koymada başarılı sonuçlar vermiştir.

Bir diğerk genişletme ise Group Sparse Canonical Correlation Analysis (GSCCA) yaklaşımıdır. Bu yöntemde değışkenler bireysel olarak değıl, anlamlı gruplar halinde değılendirilmektedir. Özellikle biyolojik ağılar, sensör sistemleri ve elektroensefalografi verileri gibi doğıal grup yapısına sahip veri kümelerinde grup seyrekliğı yaklaşımı daha etkili sonuçlar sağılayabilmektedir. Zheng (2017), GSCCA yöntemini EEG tabanlı duygu tanıma problemine uygulamış ve yöntemin hem değışken seçimi hem de sınıflandırma başarısını artırdığıını göstermiştir.

Son yıllarda geliştirilen düzenlileştirilmiş ve seyrek kanonik korelasyon yöntemleri, klasik CCA'nın yüksek boyutlu veri yapılarında karşılaştığı temel sınırlılıkları önemli ölçüde azaltmıştır. Bu yöntemler yalnızca daha kararlı tahminler üretmekle kalmamakta, aynı zamanda araştırmacılara değışken seçimi ve yorumlanabilirlik açısından da önemli avantajlar sağlamaktadır. Bu nedenle günümüzde genomik, nörobilim, biyomedikal mühendislik ve veri bilimi uygulamalarında klasik CCA'nın yerini giderek daha fazla düzenlileştirilmiş ve seyrekleştirilmiş versiyonları almaktadır (Uurtio et al., 2017; Yang et al., 2021).

Düzenlileştirilmiş ve seyrek yaklaşımlar yüksek boyutlu doğrusal ilişkilerin modellenmesinde önemli başarılar sağılamış olmakla birlikte, veri kümeleri arasındaki doğrusal olmayan ilişki yapılarının açıklanmasında yetersiz kalabilmektedir. Bu durum, kanonik korelasyon analizinin doğrusal olmayan uzantıları olan çekirdek tabanlı yöntemlerin geliştirilmesine zemin hazırlamıştır. Bir sonraki bölümde, doğrusal olmayan ilişki örüntülerini modellemek amacıyla geliştirilen Kernel Kanonik Korelasyon Analizi ele alınacaktır.

Doğrusal Olmayan İlişkiler ve Kernel Kanonik Korelasyon Analizi

Klasik kanonik korelasyon analizi ve onun düzenlenileştirilmiş ya da seyrekleştirilmiş türevleri, değişken kümeleri arasındaki ilişkileri doğrusal birleşimler aracılığıyla modellemektedir. Ancak birçok bilimsel problemde veri kümeleri arasındaki ilişkiler doğrusal bir yapıya sahip değildir. Özellikle biyolojik sistemler, nörogörüntüleme verileri, sosyal ağlar, finansal zaman serileri ve karmaşık davranışsal süreçler gibi alanlarda değişkenler arasındaki etkileşimler çoğu zaman doğrusal olmayan örüntüler göstermektedir. Bu durum, klasik CCA'nın ilişki yapısını tam olarak temsil edememesine ve veri kümeleri arasındaki ortak bilginin bir kısmının gözden kaçırılmasına neden olabilmektedir (Hardoon et al., 2004; Uurtio et al., 2017). Bu sınırlılığı aşmak amacıyla geliştirilen en önemli yaklaşımlardan biri Kernel Kanonik Korelasyon Analizidir (Kernel Canonical Correlation Analysis; KCCA). Kernel CCA'nın temel fikri, orijinal veri uzayında doğrusal olmayan ilişkileri doğrudan modellemek yerine, verileri çekirdek (kernel) fonksiyonları aracılığıyla daha yüksek boyutlu bir özellik uzayına dönüştürmek ve kanonik korelasyon analizini bu yeni uzayda gerçekleştirmektir. Böylece orijinal veri uzayında doğrusal olmayan görünen ilişkiler, dönüştürülmüş özellik uzayında doğrusal hale getirilebilmektedir (Hardoon et al., 2004).

Kernel yöntemlerinin temel avantajı, yüksek boyutlu dönüşümlerin açık biçimde hesaplanmasını gerektirmemesidir. Çekirdek hilesi olarak bilinen yaklaşım sayesinde gözlemler arasındaki benzerlikler çekirdek fonksiyonları yardımıyla doğrudan hesaplanabilmekte ve çok yüksek boyutlu özellik uzaylarında işlem yapılabilir. Bu durum Kernel CCA'nın karmaşık veri yapılarında uygulanabilirliğini önemli ölçüde artırmaktadır (Hardoon et al., 2004).

Literatürde doğrusal olmayan ilişkilerin modellenmesi amacıyla çeşitli çekirdek fonksiyonları kullanılmaktadır. Bunlar arasında doğrusal çekirdek, polinom çekirdeği ve radyal tabanlı fonksiyon çekirdeği en yaygın kullanılan yaklaşımlar arasında yer almaktadır. Kullanılan çekirdek fonksiyonu, veri kümeleri arasındaki ilişkinin hangi biçimde temsil edileceğini belirlemekte ve model performansı üzerinde doğrudan etkili olmaktadır (Uurtio et al., 2017).

Kernel CCA özellikle biyoinformatik, bilgisayarlı görü, görüntü işleme ve çok görünüşlü öğrenme uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Görüntü ve metin gibi farklı veri türlerinin birlikte analiz edilmesi, genetik veriler ile fenotipik özelliklerin ilişkilendirilmesi ve karmaşık biyolojik süreçlerin modellenmesi gibi alanlarda doğrusal olmayan ilişki yapılarının ortaya çıkarılmasında başarılı sonuçlar vermektedir. Bu nedenle KCCA, klasik CCA'nın en etkili genişlemelerinden biri olarak kabul edilmektedir (Hardoon et al., 2004). Bununla birlikte Kernel CCA'nın da bazı sınırlılıkları bulunmaktadır. Özellikle büyük veri kümelerinde çekirdek matrislerinin boyutunun hızla artması hesaplama maliyetlerini yükseltebilmektedir. Ayrıca uygun çekirdek fonksiyonunun ve ilgili hiperparametrelerin seçimi önemli bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Yanlış çekirdek seçimi, model performansının önemli ölçüde düşmesine neden olabilmektedir (Uurtio et al., 2017).

Son yıllarda makine öğrenmesi alanında yaşanan gelişmeler, doğrusal olmayan ilişki yapılarının modellenmesinde yalnızca önceden tanımlanmış çekirdek fonksiyonlarının kullanılmasının yeterli olmayabileceğini göstermiştir. Özellikle derin öğrenme yaklaşımları, veriden doğrudan temsil öğrenebilme yetenekleri sayesinde daha karmaşık ilişki örüntülerinin ortaya çıkarılmasına olanak sağlamaktadır. Bu gelişmeler doğrultusunda, Kernel

CCA'nın ötesine geçen ve derin sinir ağlarını kullanan yeni kanonik korelasyon modelleri geliştirilmiştir.

Bu nedenle günümüzde doğrusal olmayan ilişkilerin modellenmesinde araştırmacılar giderek daha fazla Deep Canonical Correlation Analysis (DCCA), Deep Generalized Canonical Correlation Analysis (DGCCA) ve Variational Canonical Correlation Analysis (VCCA) gibi derin öğrenme temelli yöntemlere yönelmektedir. Bu yöntemler, kanonik korelasyon analizinin temel amacını korurken doğrusal olmayan ve yüksek karmaşıklığa sahip veri yapılarının öğrenilmesinde daha esnek çözümler sunmaktadır. Bir sonraki bölümde, kanonik korelasyon analizinin derin öğrenme temelli genişlemeleri ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Derin Öğrenme Temelli Kanonik Korelasyon Analizi

Son yıllarda yapay zekâ ve makine öğrenmesi alanlarında yaşanan gelişmeler, çoklu veri kaynaklarının birlikte analiz edilmesine yönelik yöntemlere olan ilgiyi önemli ölçüde artırmıştır. Özellikle görüntü, metin, ses, biyolojik veriler ve sensör verileri gibi farklı kaynaklardan elde edilen büyük ölçekli veri kümelerinin analizinde, doğrusal olmayan ilişki yapılarının modellenmesi kritik bir gereklilik haline gelmiştir. Her ne kadar Kernel Kanonik Korelasyon Analizi doğrusal olmayan ilişkilerin modellenmesinde önemli bir ilerleme sağlamış olsa da, önceden belirlenmiş çekirdek fonksiyonlarına bağımlı olması ve büyük veri kümelerinde ortaya çıkan hesaplama maliyetleri yeni yöntemlerin geliştirilmesini teşvik etmiştir.

Bu gelişmeler doğrultusunda ortaya çıkan Deep Canonical Correlation Analysis (DCCA), kanonik korelasyon analizinin derin öğrenme ile bütünleştirilmiş ilk önemli örneklerinden biri olarak kabul edilmektedir. DCCA yaklaşımında amaç, iki veri kümesinin doğrusal dönüşümlerini bulmak yerine, derin sinir ağları

aracılığıyla öğrenilen doğrusal olmayan temsiller arasında maksimum korelasyon elde etmektir. Böylece veri kümeleri arasındaki karmaşık ilişki yapıları daha esnek ve güçlü biçimde modellenabilmektedir. DCCA'nın temel fikri, her veri kümesi için ayrı bir sinir ağı oluşturmak ve bu ağlar tarafından öğrenilen latent temsiller arasındaki korelasyonu en üst düzeye çıkarmaktır. Bu yaklaşım sayesinde veri kümeleri arasındaki doğrusal olmayan ortak bilgi yapıları ortaya çıkarılabilmekte ve geleneksel yöntemlerin yakalayamadığı ilişki örüntüleri öğrenilebilmektedir. Özellikle görüntü işleme, konuşma tanıma ve çok modlu öğrenme uygulamalarında DCCA'nın başarılı sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Derin öğrenme tabanlı yaklaşımların gelişimi yalnızca DCCA ile sınırlı kalmamıştır. Klasik CCA'nın çoklu veri kümelerine yönelik genişletilmiş biçimi olan Generalized Canonical Correlation Analysis (GCCA), derin öğrenme çerçevesi ile birleştirilerek Deep Generalized Canonical Correlation Analysis (DGCCA) yöntemine dönüştürülmüştür. DGCCA, ikiden fazla veri kaynağının ortak bir temsil uzayında bütünleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Benton ve arkadaşları (2019), DGCCA yaklaşımının çok görünüşlü öğrenme problemlerinde farklı veri kaynaklarından gelen bilgilerin ortak temsillerinin öğrenilmesinde etkili sonuçlar ürettiğini göstermiştir.

Derin öğrenme tabanlı CCA yöntemlerinin bir diğer önemli uzantısı Variational Canonical Correlation Analysis (VCCA) yaklaşımıdır. VCCA, varyasyonel çıkarım ve olasılıksal modelleme ilkelerini kanonik korelasyon analizine entegre etmektedir. Bu yaklaşımda amaç yalnızca veri kümeleri arasındaki korelasyonu artırmak değil, aynı zamanda veri kaynaklarının ortak ve kaynaklara özgü bileşenlerini olasılıksal bir çerçevede modellemektir. Böylece eksik veri problemleri, belirsizlik modellemesi ve karmaşık veri üretim süreçleri daha etkili biçimde ele alınabilmektedir.

Son yıllarda geliştirilen bir diğer yaklaşım ise Discriminative Deep Canonical Correlation Analysis (D²CCA) yöntemidir. Bu yaklaşım, klasik korelasyon maksimizasyonuna ek olarak sınıflandırma performansını artırmaya yönelik ayrıştırıcı (discriminative) bilgileri de öğrenme sürecine dahil etmektedir. Böylece öğrenilen ortak temsil uzayları yalnızca veri kümeleri arasındaki ilişkiyi değil, aynı zamanda sınıf ayrımlarını da koruyabilmektedir. Özellikle çok modlu sınıflandırma problemlerinde bu yaklaşımın önemli avantajlar sağladığı gösterilmiştir.

Derin öğrenme temelli kanonik korelasyon yöntemlerinin ortak özelliği, veri kümeleri arasındaki ilişkilerin önceden belirlenmiş doğrusal dönüşümler ya da çekirdek fonksiyonları aracılığıyla değil, doğrudan veriden öğrenilen temsil uzayları üzerinden modellenmesidir. Bu durum, yöntemlerin karmaşık ve yüksek boyutlu veri yapılarında daha başarılı sonuçlar vermesini sağlamaktadır. Ayrıca bu yaklaşımlar, temsil öğrenme, çok görünüşlü öğrenme ve çok modlu veri entegrasyonu gibi günümüz makine öğrenmesi araştırmalarının merkezinde yer alan problemlere doğrudan katkı sunmaktadır. Bununla birlikte derin öğrenme tabanlı yöntemlerin önemli dezavantajları da bulunmaktadır. Bu yöntemler yüksek hesaplama gücü gerektirmekte, büyük veri kümelerine ihtiyaç duymakta ve çoğu zaman yorumlanabilirlik açısından klasik CCA yöntemlerine göre daha sınırlı kalmaktadır. Buna rağmen son yıllarda elde edilen başarılı sonuçlar, derin öğrenme tabanlı kanonik korelasyon yaklaşımlarının modern veri biliminin en hızlı gelişen araştırma alanlarından biri haline geldiğini göstermektedir.

Sonuç olarak Deep CCA, DGCCA, VCCA ve D²CCA gibi yöntemler, klasik kanonik korelasyon analizinin temel amacını korurken doğrusal olmayan ve yüksek boyutlu veri yapılarına uyum sağlayacak biçimde genişletilmiş modern yaklaşımlardır. Bu

yöntemler, kanonik korelasyon analizini geleneksel çok değişkenli istatistik sınırlarının ötesine taşıyarak yapay zekâ ve makine öğrenmesi araştırmalarının önemli bileşenlerinden biri haline getirmiştir.

Çoklu Veri Kaynaklarının Entegrasyonu: GCCA, MCCA ve Multi-View Yaklaşımlar

Klasik kanonik korelasyon analizi ve onun çeşitli genişletmeleri temel olarak iki veri kümesi arasındaki ortak varyasyon yapısının incelenmesine odaklanmaktadır. Ancak günümüzde araştırma problemlerinin önemli bir bölümü yalnızca iki veri kaynağından oluşmamaktadır. Özellikle biyoinformatik, nörobilim, sosyal medya analitiği ve yapay zekâ uygulamalarında aynı olguya ilişkin birden fazla veri kaynağının birlikte değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu durum, kanonik korelasyon analizinin iki veri kümesi ile sınırlı yapısının ötesine geçilmesini zorunlu hale getirmiştir.

Modern veri bilimi uygulamalarında araştırmacılar sıklıkla genomik, transkriptomik ve metabolomik verileri birlikte analiz etmekte; ya da görüntü, metin ve ses gibi farklı veri türlerinden elde edilen bilgileri ortak bir model içerisinde değerlendirmektedir. Bu tür problemler, çoklu veri kaynaklarının aynı anda analiz edilmesini sağlayan yeni kanonik korelasyon yaklaşımlarının geliştirilmesine yol açmıştır (Uurtio et al., 2017).

Bu doğrultuda geliştirilen ilk önemli genişletmelerden biri Çoklu Küme Kanonik Korelasyon Analizidir (Multiset Canonical Correlation Analysis; MCCA). MCCA'nın temel amacı, ikiden fazla veri kümesi arasındaki ortak varyasyon yapısını eş zamanlı olarak incelemektir. Klasik CCA'da yalnızca iki veri kümesi arasındaki korelasyon maksimize edilirken, MCCA'da birden fazla veri kümesinden elde edilen temsiller arasındaki toplam ilişki yapısının optimize edilmesi amaçlanmaktadır. Böylece farklı veri

kaynaklarında ortak olarak bulunan bilgi bileşenleri belirlenebilmektedir.

MCCA yaklaşımının daha genel bir biçimi olan Generalized Canonical Correlation Analysis (GCCA), çoklu veri kümelerinin ortak bir temsil uzayında birleştirilmesini amaçlamaktadır. GCCA'da her veri kümesi, ortak bir gizil temsil uzayına projekte edilmekte ve bu ortak uzay ile veri kümeleri arasındaki uyum en üst düzeye çıkarılmaktadır. Bu yaklaşım, çok görünüşlü öğrenme literatüründe yaygın olarak kullanılmakta ve farklı veri kaynaklarından gelen bilgilerin bütünleştirilmesinde etkili sonuçlar sağlamaktadır (Benton et al., 2019).

Son yıllarda GCCA yaklaşımı yalnızca doğrusal modellerle sınırlı kalmamış, derin öğrenme yöntemleri ile de bütünleştirilmiştir. Deep Generalized Canonical Correlation Analysis (DGCCA), her veri görünümü için ayrı sinir ağları kullanarak doğrusal olmayan temsiller öğrenmekte ve bu temsilleri ortak bir temsil uzayında bir araya getirmektedir. Benton ve arkadaşları (2019), DGCCA yaklaşımının çok görünüşlü öğrenme problemlerinde klasik GCCA'ya göre daha başarılı sonuçlar ürettiğini göstermiştir. Özellikle doğal dil işleme, görüntü analizi ve çok modlu öğrenme uygulamalarında DGCCA önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir.

Çoklu veri entegrasyonuna yönelik daha yeni yaklaşımlardan biri de Graph Multiview Canonical Correlation Analysis (GMCCA) yöntemidir. GMCCA, klasik çoklu görünüşlü öğrenme çerçevesine grafik tabanlı düzenleme mekanizmalarını eklemektedir. Bu yaklaşımda yalnızca veri kümeleri arasındaki korelasyon yapısı değil, aynı zamanda gözlemler arasındaki yapısal ilişkiler de dikkate alınmaktadır. Özellikle sosyal ağ verileri, biyolojik ağlar ve karmaşık ilişkisel veri yapılarında GMCCA'nın önemli avantajlar sağladığı gösterilmiştir.

Çoklu veri kaynaklarının entegrasyonu, günümüzde yalnızca istatistiksel bir problem olarak değil, aynı zamanda yapay zekâ ve veri biliminin temel problemlerinden biri olarak değerlendirilmektedir. Özellikle temsil öğrenme yaklaşımlarında amaç, farklı veri kaynaklarından elde edilen bilgileri ortak bir uzayda birleştirerek daha zengin ve daha anlamlı veri temsilleri oluşturmaktır. Bu bağlamda GCCA, DGCCA ve benzeri yöntemler, çok modlu veri entegrasyonu çalışmalarının kuramsal temelini oluşturmaktadır.

Biyomedikal araştırmalar bu yöntemlerin en yoğun kullanıldığı alanlardan biridir. Günümüzde genomik, proteomik, metabolomik ve klinik verilerin birlikte değerlendirilmesi, karmaşık hastalık mekanizmalarının anlaşılmasında önemli rol oynamaktadır. Benzer şekilde yapay zekâ uygulamalarında görüntü, metin ve ses verilerinin birlikte kullanılması, daha güçlü tahmin modellerinin geliştirilmesine katkı sağlamaktadır. Bu tür uygulamalar, kanonik korelasyon analizinin yalnızca iki değişken kümesi arasındaki ilişkileri inceleyen klasik bir yöntem olmaktan çıkıp, çok kaynaklı veri entegrasyonunun temel araçlarından biri haline geldiğini göstermektedir.

Sonuç olarak GCCA, MCCA, DGCCA ve GMCCA gibi yöntemler, klasik kanonik korelasyon analizinin çoklu veri kaynaklarına uyarlanmış modern genişletmeleri olarak değerlendirilebilir. Bu yaklaşımlar, farklı veri türleri arasındaki ortak bilgi yapılarının ortaya çıkarılmasını sağlayarak günümüz veri bilimi ve yapay zekâ araştırmalarında önemli bir rol üstlenmektedir. Böylece kanonik korelasyon analizi, yalnızca iki veri kümesi arasındaki ilişkileri inceleyen geleneksel bir yöntem olmaktan çıkarak çoklu veri entegrasyonu ve temsil öğrenme problemlerinin merkezinde yer alan bir kuramsal çerçeveye dönüşmüştür.

Güncel Uygulama Alanları ve Gelecek Araştırma Yönelimleri

Kanonik korelasyon analizi, geliştirilmesinin üzerinden yaklaşık bir yüzyıl geçmiş olmasına rağmen güncelliğini koruyan ve sürekli olarak yeni araştırma alanlarına uyarlanan yöntemlerden biridir. Özellikle son yıllarda yüksek boyutlu veri yapılarının yaygınlaşması, çoklu veri kaynaklarının birlikte analiz edilmesine duyulan gereksinim ve yapay zekâ uygulamalarındaki gelişmeler, yöntemin kullanım alanlarını önemli ölçüde genişletmiştir. Klasik kanonik korelasyon analizinden düzenlenilmiş, seyrek, çekirdek tabanlı ve derin öğrenme temelli yaklaşımlara uzanan dönüşüm, yöntemin yalnızca istatistiksel bir analiz aracı olmaktan çıkarak veri bilimi ve yapay zekâ araştırmalarının temel bileşenlerinden biri haline gelmesini sağlamıştır.

Günümüzde kanonik korelasyon analizinin en yoğun kullanıldığı alanlardan biri biyomedikal araştırmalardır. Özellikle genomik, transkriptomik, proteomik ve metabolomik verilerin birlikte değerlendirilmesini gerektiren çoklu omik çalışmalarda CCA tabanlı yöntemler yaygın biçimde kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra görüntüleme genetiği araştırmalarında genetik belirteçler ile beyin görüntüleme verileri arasındaki karmaşık ilişki yapılarının ortaya çıkarılmasında seyrek ve düzenlenilmiş CCA yöntemleri önemli katkılar sağlamaktadır. Bu tür çalışmalar, karmaşık hastalıkların biyolojik temellerinin anlaşılmasına ve kişiselleştirilmiş tıp uygulamalarının geliştirilmesine destek olmaktadır (Fang et al., 2016).

Nörobilim ve psikiyatri araştırmaları da kanonik korelasyon analizinin önemli uygulama alanlarından biridir. Son yıllarda gerçekleştirilen çalışmalar, beyin bağlantısalılığı örüntüleri ile psikolojik, bilişsel ve davranışsal göstergeler arasındaki ilişkilerin belirlenmesinde düzenlenilmiş CCA yöntemlerinin etkili sonuçlar verdiğini göstermektedir. Benzer şekilde elektroensefalografi verileri üzerinde geliştirilen Group Sparse

CCA yaklaşımları, duygu tanıma ve beyin-bilgisayar arayüzleri gibi alanlarda başarılı uygulamalara sahip olmuştur (Zheng, 2017).

Makine öğrenmesi ve yapay zekâ uygulamaları ise CCA'nın son yıllarda en hızlı büyüyen kullanım alanlarından birini oluşturmaktadır. Özellikle çok görünüşlü öğrenme, temsil öğrenme ve çok modlu veri entegrasyonu çalışmalarında farklı veri kaynaklarından elde edilen bilgilerin ortak bir temsil uzayında birleştirilmesi temel bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Görüntü, metin ve ses gibi farklı veri türlerinin birlikte kullanıldığı sistemlerde Deep CCA, DGCCA ve benzeri yöntemler yaygın biçimde kullanılmakta; bu yöntemler modern yapay zekâ modellerinin öğrenme kapasitesini artırmaktadır (Benton et al., 2019).

Kanonik korelasyon analizinin uygulama alanları yalnızca biyomedikal bilimler ve yapay zekâ ile sınırlı değildir. Eğitim araştırmalarında öğrenme çıktıları ile öğrenci özellikleri arasındaki ilişkilerin belirlenmesinde, ekonomi ve finans çalışmalarında ekonomik göstergeler arasındaki karmaşık etkileşimlerin incelenmesinde, sürdürülebilirlik araştırmalarında sosyal, ekonomik ve çevresel göstergelerin birlikte değerlendirilmesinde ve tarım bilimlerinde farklı üretim göstergeleri arasındaki ilişkilerin araştırılmasında da yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çeşitlilik, yöntemin farklı disiplinlerde ortak bir metodolojik çerçeve sunduğunu göstermektedir.

Gelecek araştırma yönelimleri incelendiğinde, kanonik korelasyon analizinin gelişiminin büyük ölçüde veri bilimi ve yapay zekâ alanlarındaki ilerlemeler tarafından şekillendirildiği görülmektedir. Özellikle yüksek boyutlu veri yapıları, eksik veri problemleri, zaman bağımlı veri kümeleri ve çok modlu öğrenme problemleri gelecekteki araştırmaların temel odak noktaları arasında yer almaktadır. Ayrıca grafik tabanlı öğrenme, olasılıksal

modelleme ve derin üretici modeller ile bütünleşen yeni CCA yaklaşımlarının giderek daha fazla önem kazandığı gözlenmektedir.

Bir diğer dikkat çekici eğilim ise açıklanabilir yapay zekâ çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Derin öğrenme tabanlı modeller yüksek tahmin performansı sunmalarına rağmen yorumlanabilirlik açısından çeşitli sınırlılıklara sahiptir. Kanonik korelasyon analizinin değişkenler arasındaki ortak yapıları ortaya çıkarma yeteneği, bu modellerin daha açıklanabilir hale getirilmesinde önemli fırsatlar sunmaktadır. Bu nedenle gelecekte CCA tabanlı yöntemlerin açıklanabilir yapay zekâ araştırmalarında daha yaygın biçimde kullanılması beklenmektedir.

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizi, Hotelling'in 1936 yılında ortaya koyduğu temel çerçevenin çok ötesine geçmiş ve günümüzün karmaşık veri analiz problemlerine uyarlanmış çok yönlü bir metodolojik aileye dönüşmüştür. Düzenleştirilmiş, seyrek, çekirdek tabanlı, çoklu görünüşlü ve derin öğrenme temelli yaklaşımlar sayesinde yöntem, modern veri biliminin ihtiyaçlarına cevap verebilecek biçimde gelişimini sürdürmektedir. Bu durum, kanonik korelasyon analizinin yalnızca tarihsel öneme sahip bir çok değişkenli istatistik yöntemi olmadığını, aynı zamanda geleceğin veri analitiği ve yapay zekâ uygulamalarında da önemli bir rol oynamaya devam edeceğini göstermektedir.

Sonuç ve Değerlendirme

Kanonik korelasyon analizi, iki değişken kümesi arasındaki ilişki yapısının bütüncül biçimde incelenmesine olanak sağlayan önemli çok değişkenli istatistiksel yöntemlerden biridir. Yöntem, değişkenler arasındaki ilişkileri tek tek incelemek yerine veri kümeleri arasındaki ortak varyasyon yapısını ortaya çıkarmayı amaçlamakta ve bu yönüyle korelasyon ve regresyon gibi klasik yaklaşımlardan ayrılmaktadır. Bu bölümde kanonik korelasyon analizinin tarihsel gelişimi, kuramsal temelleri ve matematiksel

yapısı ele alınmıştır. Kanonik değişkenlerin oluşturulması, yöntemin geometrik yorumu, özdeğer temelli çözüm yapısı ve sonuçların yorumlanmasına ilişkin temel ilkeler ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Ayrıca yöntemin güçlü yönleri, sınırlılıkları ve uygulama alanları değerlendirilerek kanonik korelasyon analizinin çok değişkenli veri yapılarının incelenmesindeki önemi ortaya konulmuştur.

Klasik kanonik korelasyon analizinin doğrusal ilişki varsayımı, yüksek boyutlu veri yapılarında ortaya çıkan kararsızlık problemleri ve yalnızca iki veri kümesini birlikte değerlendirebilmesi gibi bazı sınırlılıkları bulunmaktadır. Ancak son yıllarda geliştirilen düzenleştirilmiş, seyrek, çekirdek tabanlı ve derin öğrenme temelli yaklaşımlar sayesinde bu sınırlılıkların önemli ölçüde aşılabildiği görülmektedir. Bu gelişmeler, yöntemin modern veri analizi problemlerine uyarlanmasını ve farklı disiplinlerde daha etkin biçimde kullanılmasını sağlamıştır.

Sonuç olarak kanonik korelasyon analizi, yaklaşık bir asırlık geçmişine rağmen güncelliğini koruyan ve sürekli gelişen bir yöntemdir. Günümüzde yalnızca klasik çok değişkenli istatistik yöntemlerinden biri olarak değil, aynı zamanda veri bilimi, yapay zekâ, çok görünüşlü öğrenme ve çoklu veri entegrasyonu çalışmalarında da önemli bir kuramsal ve uygulamalı çerçeve sunmaktadır. Bu durum, yöntemin gelecekte de farklı disiplinlerdeki karmaşık veri yapılarının analizinde önemli bir rol oynamaya devam edeceğini göstermektedir.

Yapay Zekâ Tabanlı Yatırımcı Duyarlılığı ile Finansal Piyasa Performansı Arasındaki İlişkinin Simülasyon Yoluyla İncelenmesi

Uygulamanın Amacı

Bu uygulamada, kanonik korelasyon analizinin finans alanındaki kullanımını göstermek amacıyla bir simülasyon

çalışması gerçekleştirilmiştir. Günümüzde finansal piyasalarda yatırımcı davranışları yalnızca geleneksel ekonomik göstergelerle değil, haber metinleri, sosyal medya içerikleri, internet arama eğilimleri ve belirsizlik göstergeleri gibi yapay zekâ destekli veri kaynaklarıyla da izlenebilmektedir. Bu kapsamda birinci değişken kümesi yapay zekâ tabanlı yatırımcı duyarlılığı göstergelerini, ikinci değişken kümesi ise finansal piyasa performansı göstergelerini temsil edecek biçimde oluşturulmuştur. Amaç, iki değişken kümesi arasında ortak varyasyon bulunup bulunmadığını kanonik korelasyon analizi aracılığıyla incelemektir.

Simülasyon Tasarımı ve Değişkenler

Son yıllarda yapay zekâ ve doğal dil işleme (Natural Language Processing, NLP) tekniklerinin gelişmesiyle birlikte yatırımcı duyarlılığının ölçülmesinde geleneksel anket ve beklenti göstergelerinin yanı sıra dijital veri kaynakları da yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Finans haberlerinden elde edilen duygu skorları, sosyal medya platformlarında paylaşılan içeriklerin duygu analizleri ve internet arama davranışlarını yansıtan Google Trends verileri, yatırımcıların piyasalara ilişkin beklenti ve algılarını gerçek zamanlı olarak ölçebilme imkânı sunmaktadır. Özellikle büyük dil modelleri, makine öğrenmesi algoritmaları ve metin madenciliği teknikleri kullanılarak üretilen bu göstergeler, finansal piyasalardaki fiyat hareketleri, işlem hacmi ve volatilité gibi değişkenlerle ilişkili önemli bilgi kaynakları olarak değerlendirilmektedir. Bu nedenle simülasyon çalışmasında yatırımcı duyarlılığını temsil etmek amacıyla yapay zekâ destekli duygu ve ilgi göstergelerinden yararlanılmıştır.

Çalışmada 240 gözlemden oluşan yapay bir veri seti üretilmiştir. Veri üretim sürecinde iki latent yapı dikkate alınmıştır. Bunlardan ilki yatırımcı duyarlılığı, ikincisi ise piyasa riski ve belirsizlik düzeyidir. Değişkenler bu iki latent yapıdan farklı

katsayılarla etkilenmiş ve her değişkene rassal hata terimi eklenmiştir.

Birinci değişken kümesi olan yapay zekâ tabanlı yatırımcı duyarlılığı göstergeleri şu değişkenlerden oluşmaktadır:

Tablo 1. X değişken kümesi: Yapay zekâ tabanlı yatırımcı duyarlılığı göstergeleri

Değişken	Açıklama
Finans haber duygu skoru	Finans haberlerinden elde edilen pozitif/negatif duygu düzeyi
Google Trends yatırımcı ilgisi	Piyasa ve yatırım aramalarındaki yoğunluk
Sosyal medya duygu endeksi	Sosyal medya içeriklerinden elde edilen duygu göstergesi
Ekonomi-politika belirsizliği	Belirsizlik algısını temsil eden gösterge

İkinci değişken kümesi olan finansal piyasa performansı göstergeleri ise şu değişkenlerden oluşmaktadır:

Tablo 2. Y değişken kümesi: Finansal piyasa performansı göstergeleri

Değişken	Açıklama
BIST100 getirisi	Borsa performans göstergesi
Piyasa volatilitesi	Finansal oynaklık düzeyi
İşlem hacmi değişimi	Piyasadaki işlem yoğunluğu
Kur riski göstergesi	Döviz kuru kaynaklı risk algısı

Çalışmada kullanılan finans haber duygu skoru ve sosyal medya duygu endeksi, doğal dil işleme teknikleri kullanılarak metinlerden elde edilen pozitif veya negatif yatırımcı algısını temsil etmektedir. Google Trends yatırımcı ilgisi ise yatırımcıların piyasalara yönelik bilgi arama davranışlarını yansıtmaktadır.

Ekonomi-politika belirsizliği göstergesi ise yatırım kararlarını etkileyebilecek makro düzeydeki risk ve belirsizlik ortamını temsil etmektedir.

Kanonik Korelasyon Bulguları

Analiz sonucunda elde edilen kanonik korelasyon katsayıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 3. Kanonik Korelasyon Katsayıları ve Açıklanan Ortak Varyasyon

Kanonik Fonksiyon	r	r^2
1. Fonksiyon	0.823	0.677
2. Fonksiyon	0.569	0.324
3. Fonksiyon	0.083	0.007
4.Fonksiyon	0.049	0.002

Birinci kanonik korelasyon katsayısının 0.823 olması, yapay zekâ tabanlı yatırımcı duyarlılığı göstergeleri ile finansal piyasa performansı göstergeleri arasında güçlü düzeyde bir ilişki bulunduğunu göstermektedir. Bu katsayının karesi alındığında elde edilen %67,7'lik ortak varyasyon oranı, iki değişken kümesi arasında önemli ölçüde ortak bilgi yapısı bulunduğunu ortaya koymaktadır. İkinci kanonik korelasyon katsayısı ise 0.569 olarak elde edilmiş olup orta düzeyde ikinci bir ilişki boyutuna işaret etmektedir. Bu fonksiyona ilişkin ortak varyasyon oranı %32,4'tür. Buna karşılık üçüncü ve dördüncü kanonik fonksiyonlara ait ortak varyasyon oranları sırasıyla %0,7 ve %0,2 düzeyinde kalmıştır. Wilks Lambda sonuçlarıyla birlikte değerlendirildiğinde, iki değişken kümesi arasındaki ilişkinin büyük ölçüde ilk iki kanonik fonksiyon tarafından temsil edildiği söylenebilir.

Wilks Lambda Anlamlılık Testi

Kanonik fonksiyonların anlamlılığını değerlendirmek amacıyla Wilks Lambda testi uygulanmıştır. Elde edilen Wilks Lambda sonuçları aşağıda sunulmuştur.

Tablo 4. Kanonik Fonksiyonlara İlişkin Wilks Lambda Test Sonuçları

Test edilen fonksiyon	Wilks Lambda	Ki-kare	sd	p
1.fonksiyondan itibaren	0.216	359.107	16	<0.001
2.fonksiyondan itibaren	0.670	94.037	9	<0.001
3.fonksiyondan itibaren	0.991	2.181	4	0.702
4.fonksiyondan itibaren	0.998	0.554	1	0.457

Simülasyon sonucunda birinci kanonik korelasyon katsayısı 0.823 olarak elde edilmiştir. Bu değer, yapay zekâ tabanlı yatırımcı duyarlılığı göstergeleri ile finansal piyasa performansı göstergeleri arasında güçlü düzeyde ortak varyasyon bulunduğunu göstermektedir. İkinci kanonik korelasyon katsayısı ise 0.569 olup orta düzeyde ikinci bir ilişki boyutuna işaret etmektedir. Wilks Lambda sonuçlarına göre birinci ve ikinci kanonik fonksiyonlar istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Üçüncü ve dördüncü fonksiyonlar ise anlamlı değildir. Bu nedenle yorumlama sürecinde yalnızca ilk iki kanonik fonksiyon dikkate alınmıştır.

Birinci kanonik fonksiyon genel olarak yatırımcı duyarlılığı ve piyasa performansı arasındaki temel ilişkiyi temsil etmektedir. Finans haber duygu skoru, sosyal medya duygu endeksi ve Google

Trends yatırımcı ilgisi gibi göstergelerin piyasa getirisi ve işlem hacmiyle aynı ortak yapı içinde yer aldığı görülmektedir. Buna karşılık ekonomi-politika belirsizliği, piyasa volatilitesi ve kur riski göstergeleri bu yapının risk ve belirsizlik boyutunu temsil etmektedir. Bu bulgu, finansal piyasalarda yatırımcı duyarlılığına ilişkin yapay zekâ destekli göstergelerin yalnızca psikolojik ya da davranışsal sinyaller olmadığını; aynı zamanda piyasa getirisi, volatilité, işlem hacmi ve kur riski gibi finansal göstergelerle birlikte değişen çok boyutlu bir yapı oluşturduğunu göstermektedir.

Yapı Katsayıları

Kanonik fonksiyonların yorumlanmasında yapı katsayıları kullanılmıştır. Yapı katsayıları, her bir gözlenen değişkenin ilgili kanonik değişkenle olan korelasyonunu göstermektedir.

X değişken kümesine ilişkin yapı katsayıları aşağıdaki gibidir.

Tablo 5. Yatırımcı Duyarlılığı Değişken Kümesine Ait Yapı Katsayıları (X Kümesi)

Değişken	1.Fonksiyon	2.Fonksiyon
Finans haber duygu skoru	-0.856	0.235
Google Trends yatırımcı ilgisi	-0.527	0.725
Sosyal medya duygu endeksi	-0.773	0.420
Ekonomi-politika belirsizliği	0.820	0.461

Y değişken kümesine ilişkin yapı katsayıları ise aşağıdaki gibidir.

Tablo 6. Finansal Piyasa Performansı Değişken Kümesine Ait Yapı Katsayıları (Y Kümesi)

Değişken	1.Fonksiyon	2.Fonksiyon
BIST100 getirisi	-0.867	0.182
Piyasa volatilitesi	0.877	0.417
İşlem hacmi değişimi	-0.469	0.780
Kur riski göstergesi	0.667	0.420

Redundancy Analizi

Tablo 7. Redundancy Analizi Sonuçları

Fonksiyon	X Kümesi Açıklanan Varyans	Y Kümesi Açıklanan Varyans	X Redundancy	Y Redundancy
1	0.570	0.546	0.386	0.370
2	0.242	0.248	0.079	0.080
3	0.101	0.107	0.001	0.001
4	0.083	0.100	0.000	0.000

Redundancy analizi sonuçları, birinci kanonik fonksiyonun iki değişken kümesi arasındaki ortak bilgi yapısını açıklamada en yüksek katkıyı sağladığını göstermektedir. Birinci fonksiyona ilişkin redundancy değerleri X ve Y kümeleri için sırasıyla %38,6 ve %37,0 olarak elde edilmiştir. İkinci kanonik fonksiyonda bu değerler yaklaşık %8 düzeyine düşmektedir. Üçüncü ve dördüncü fonksiyonlara ait redundancy değerlerinin sıfıra yakın olması, bu

fonksiyonların değişken kümeleri arasındaki ilişkinin açıklanmasına anlamlı bir katkı sağlamadığını göstermektedir. Bu bulgular, Wilks Lambda sonuçları ve kanonik korelasyon katsayıları ile birlikte değerlendirildiğinde, uygulamanın yorumlanmasında ilk iki kanonik fonksiyonun dikkate alınmasının yeterli olduğunu ortaya koymaktadır.

Bulguların Yorumlanması

Birinci kanonik fonksiyon, yatırımcı duyarlılığı ile finansal piyasa performansı arasındaki temel ilişki boyutunu temsil etmektedir. X değişken kümesinde finans haber duygu skoru (-0.856), sosyal medya duygu endeksi (-0.773) ve Google Trends yatırımcı ilgisi (-0.527) negatif yönde; ekonomi-politika belirsizliği ise pozitif yönde yüksek bir yapı katsayısına (0.820) sahiptir. Y değişken kümesinde ise BIST100 getirisi negatif yönde (-0.867), piyasa volatilitesi pozitif yönde (0.877), kur riski göstergesi pozitif yönde (0.667) ve işlem hacmi değişimi negatif yönde (-0.469) yüklenmiştir. Bu yapı, birinci kanonik fonksiyonun genel olarak “iyimser yatırımcı duyarlılığına karşı risk ve belirsizlik” boyutunu temsil ettiğini göstermektedir. Finans haberleri ve sosyal medya duyarlılığı olumlu yönde seyrettiğinde BIST100 getirisi ve işlem hacmi artma eğilimi göstermekte; buna karşılık ekonomi-politika belirsizliği, piyasa volatilitesi ve kur riski aynı ortak yapının karşıt yönünde konumlanmaktadır. Kanonik katsayıların işaretleri mutlak olarak değil, değişkenlerin aynı ya da zıt yönde kümelenmesi açısından değerlendirilmelidir.

İkinci kanonik fonksiyon ise daha çok yatırımcı ilgisi ve işlem hacmi boyutunu temsil etmektedir. Google Trends yatırımcı ilgisi değişkeninin ikinci fonksiyondaki yapı katsayısı 0.725, işlem hacmi değişiminin yapı katsayısı ise 0.780 olarak elde edilmiştir. Bu bulgu, yatırımcı ilgisini yansıtan arama davranışları ile

piyasadaki işlem aktivitesi arasında ikinci bir ilişki boyutu bulunduğunu göstermektedir.

Genel Değerlendirme

Bu simülasyon çalışması, kanonik korelasyon analizinin yapay zekâ tabanlı yatırımcı duyarlılığı göstergeleri ile finansal piyasa performansı göstergeleri arasındaki ortak ilişki yapısını ortaya koymada etkili bir yöntem olduğunu göstermiştir. Analiz sonucunda elde edilen kanonik korelasyon katsayıları, Wilks Lambda testleri, yapı katsayıları ve redundancy değerleri, iki değişken kümesi arasındaki ilişkinin büyük ölçüde ilk iki kanonik fonksiyon tarafından temsil edildiğini ortaya koymuştur.

Bulgular, yatırımcı duyarlılığı, belirsizlik, volatilité ve işlem hacmi gibi finansal göstergelerin birlikte değerlendirilmesinde kanonik korelasyon analizinin yararlı bilgiler sağlayabildiğini göstermektedir. Bu yönüyle uygulama, yöntemin güncel finans araştırmalarında ve farklı veri kaynaklarının birlikte analiz edilmesini gerektiren çalışmalarda kullanılabilir güçlü bir çok değişkenli analiz yaklaşımı olduğunu ortaya koymaktadır.

KAYNAKÇA

Andrew, G., Arora, R., Bilmes, J., & Livescu, K. (2013, May). Deep canonical correlation analysis. In International conference on machine learning (pp. 1247-1255). PMLR.

Benton, A., Khayrallah, H., Gujral, B., Reisinger, D. A., Zhang, S., & Arora, R. (2019, August). Deep generalized canonical correlation analysis. In Proceedings of the 4th Workshop on Representation Learning for NLP (RepL4NLP-2019) (pp. 1-6).

Buldur, S., & Baygöl, A. (2023). Fen Sınıflarında Ölçme Değerlendirme Uygulamalarına ve Üst Biliş Yönelik Algıların İncelenmesi: Bir Kanonik Korelasyon Analizi İncelemesi. *Bogazici University Journal of Education*, 40(2), 173-194.

Bykhovskaya, A., & Gorin, V. (2024). Canonical Correlation Analysis. arXiv preprint arXiv:2411.15625.

Chen, Z., Mo, S., Ke, H., Ding, S. X., Jiang, Z., Yang, C., & Gui, W. (2024). Canonical correlation guided deep neural network. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2409.19396>,

Fang, J., Lin, D., Schulz, S. C., Xu, Z., Calhoun, V. D., & Wang, Y.-P. (2016). Joint sparse canonical correlation analysis for detecting differential imaging genetics modules. *Bioinformatics*, 32(22), 3480–3488. <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btw485>

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2019). *Multivariate data analysis*.

Hardoon, D. R., Szedmak, S., & Shawe-Taylor, J. (2004). Canonical correlation analysis: An overview with application to learning methods. *Neural Computation*, 16(12), 2639–2664. <https://doi.org/10.1162/0899766042321814>

Hotelling, H. (1936). Relations between two sets of variates. *Biometrika*, 28(3–4), 321–377. <https://doi.org/10.1093/biomet/28.3-4.321>

Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2002). *Applied multivariate statistical analysis*.

Karami, M., & Schuurmans, D. (2021). Deep probabilistic canonical correlation analysis. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence* (Vol. 35, No. 9, pp. 8055–8063).

Ma, Z., & Li, X. (2018). Subspace perspective on canonical correlation analysis: Dimension reduction and minimax rates. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1605.03662>

Milecki, L., Gonzalez, C., Adeli, E., Nooner, K. B., Sabuncu, M. R., Kuceyeski, A., & Zhao, Q. (2025). Regularized CCA identifies sex-specific brain-behavior associations in adolescent psychopathology. *Translational Psychiatry*, 15(1), 405.

Nurdoğan, A. K. (2021). Teknoloji ve işgücü piyasası ilişkisinin kanonik korelasyon analizi ile incelenmesi. *Çalışma ve Toplum*, 1(68), 97-118.

Özsoy, Ç. Y. (2023). Investigating the Relationship Between Financial Development and Income Inequality in Developed and Developing Countries: An Application of Canonical Correlation Analysis. *Wos*, 38(2023), 35-52.

Sherry, A., & Henson, R. K. (2005). Conducting and interpreting canonical correlation analysis in personality research: A user-friendly primer. *Journal of personality assessment*, 84(1), 37-48.

Sørensen, M., Kanatsoulis, C. I., & Sidiropoulos, N. D. (2021). Generalized canonical correlation analysis: A subspace

intersection approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 69, 2452-2467.

Stewart, D., & Love, W. (1968). A general canonical correlation index. *Psychological bulletin*, 70(3p1), 160.

T. A, S. (2026). A robust method for canonical correlation analysis. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 55(3), 877-890.

Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2019). *Using multivariate statistics* (7th ed.). Pearson.

Tan, J., & Shi, P. (2026). Associating High-Dimensional Longitudinal Datasets through an Efficient Cross-Covariance Decomposition. *arXiv preprint arXiv:2601.13405*.

Thompson, B. (1984). *Canonical correlation analysis: Uses and interpretation*. Sage Publications.

Uurtio, V., Monteiro, J. M., Kandola, J., Shawe-Taylor, J., Fernandez-Reyes, D., & Rousu, J. (2017). A tutorial on canonical correlation methods. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 50(6), 1-33.

Veysikarani, D., & Akdağ, N. (2024). Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemler ile Yeşil Gelecek ve Refah Arasındaki İlişkinin İncelenmesi. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, (79), 207-221.

Vinod, H. D. (1976). Canonical ridge and econometrics of joint production. *Journal of Econometrics*, 4(2), 147-166. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(76\)90010-5](https://doi.org/10.1016/0304-4076(76)90010-5)

Wang, W., Arora, R., Livescu, K., & Bilmes, J. (2015, June). On deep multi-view representation learning. In *International conference on machine learning* (pp. 1083-1092). PMLR.

Witten, D. M., Tibshirani, R., & Hastie, T. (2009). A penalized matrix decomposition, with applications to sparse principal components and canonical correlation analysis. *Biostatistics*, 10(3), 515–534. <https://doi.org/10.1093/biostatistics/kxp008>

Yang, X., Liu, W., Liu, W., & Tao, D. (2019). A survey on canonical correlation analysis. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 33(6), 2349-2368.

Yavuz, S., & Karabulut, T. (2016). Kanonik korelasyon analizi metodu ile birbirinin devamı olan dersler arasındaki ilişkinin incelenmesi: İşletme bölümü örneği. *Kafkas Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 18, 459–476.

Yılmaz, A., & Okursoy, A. Kanonik Korelasyon Analizi İle Asya Ülkelerinin Sosyal Ve Ekonomik Göstergeleri Arasındaki İlişkinin Araştırılması.

Zheng, W. (2017). Multichannel EEG-based emotion recognition via group sparse canonical correlation analysis. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*, 9(3), 281–290. <https://doi.org/10.1109/TCDS.2016.2587290>

BÖLÜM 2

Kırılğan Güven Zar Oyunlarından İnanç Mantığına

Mine DOĞAN¹

Md Awwal Islam KHAN²

Mehmet GÜRÇAN³

Giriş

Epistemik Bir Teknoloji Olarak Olasılık

Geleneksel olarak Cicero ile ilişkilendirilen tamdık İngilizce deyişle “Olasılık hayatın rehberidir,” kelimesi kelimesine matematiksel bir düsturdan ziyade modern bir yorumdur. Bu ifadenin önemi daha temel bir gerçeğe dayanır: eylem genellikle kesinlikten önce gelir. Olasılık, eksik bilgiyi derecelendirilmiş bir güvene ve eyleme dönüştürmenin disiplinli bir yolu olarak ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, olasılık yalnızca matematiğin bir dalı değil, aynı zamanda bilgi tarihinde epistemik bir teknolojidir (Hald 1998; Daston 2021; Hacking 2006).

¹ Arş. Gör. Dr. Mine Doğan, Fırat Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Orcid: 0000-0002-2745-9909

² Md Awwal Islam Khan, Fırat Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Orcid: 0000-0003-4621-3450

³ Prof. Dr. Mehmet Gürcan, Fırat Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Orcid: 0000-0002-3641-8113

Bu perspektif, yalnızca on yedinci yüzyıl kumar oyunlarıyla başlayan dar bir köken hikayesini düzeltmektedir. Şans oyunları, resmileştirme için temiz bir laboratuvar sağlamıştır; ancak temelindeki sorun daha eskidir. Olasılık resmi notasyonunu kazanmadan çok önce; mahkemeler ifadeleri tartıyor, tüccarlar riski fiyatlandırıyor, hekimler prognozu değerlendiriyor, generaller düşman niyetini tahmin ediyor ve ilahiyatçılar belirsizlik altındaki kanıtları tartışıyor (Hacking 2006; Daston 2021). Olasılık, bir insan problemi olarak belirsizliği yaratmadı; belirsizliğin karşılaştırılabileceği, eleştirilebileceği ve işlevsel hale getirilebileceği ortak bir dil yarattı.

Belirleyici dönüşüm, yalnızca belirsizliğin ölçülebilir hale gelmesi değil, inanç derecelerinin biçimsel analizin meşru nesnelere haline gelmesiydi. Güven dereceli bir formda temsil edilebilir hale geldiğinde, güncellenebilir ve karara bağlanabilir hale de geldi. Böylece olasılık, geometri ve mantığın yanında, kendine özgü bir alana sahip olan muhakemenin ana biçimsel araçlarından biri olarak yerini aldı: eksik bilgi altında çıkarım (Hacking 2006; Daston 2021).

Dolayısıyla olasılık rastlantısallıktan daha fazlasıyla ilgilidir. Aynı zamanda cehalet, kanıt ve yargının yasaya uygun şekilde revizyonu ile de ilgilidir. Bir zar atışı belirsizdir çünkü süreç insan ölçeğinde kontrol edilemez; bir teşhis belirsizdir çünkü altta yatan durum gizlidir; bilimsel bir teori belirsizdir çünkü mevcut kanıtlar açıklamayı yetersiz belirler; bir makine öğrenimi sistemi belirsizdir çünkü gözlemleri sonlu, gürültülü ve kısmidir. Tüm bu durumlarda olasılık, eksik bilgi üzerine bir yapı inşa eder.

Bu geniş rol, olasılığın frekans mı, mantıksal ilişki mi, inanç derecesi mi yoksa fiziksel eğilim mi olduğu konusundaki kalıcı felsefi tartışmaları açıklamaktadır (Hájek 2002; Joyce 2003). Bunlar sadece anlamsal tartışmalar değildir. Belirsizliğin dünyaya mı, veriye mi, zihne mi yoksa kanıt ile hipotez arasındaki ilişkiye mi ait

olduğuyla ilgilidirler. Olasılık; matematik, ampirik bilim ve epistemoloji arasında verimli bir sınır işgal eder.

Aynı mantık, olasılığın neden kumardan demografiye, sigortacılığa, astronomiye, hukuk bilimine, fiziğe, iktisada, sinyal işlemeye, makine öğrenimine ve yapay zekaya göç ettiğini de açıklar. Belirsizlik altında öğrenmesi, tahmin etmesi veya karar vermesi gereken herhangi bir sistem, sonunda belirsiz inanç için biçimsel bir dile ihtiyaç duyar (Stigler 1990; Hald 1998).

Kırılğan Güven başlığı ikinci bir temayı vurgulamaktadır. Olasılık belirsizliği ortadan kaldırmaz; onu disipline eder. Olasılıksal bir yargı geçicidir, revize edilebilir ve hataya açıktır. Bu kırılğanlık bir kusur değil, bir erdemdir: olasılıksal muhakeme varsayımları açığa çıkarır, kanıt gücünü derecelendirir ve sorgulamayı bir mülkiyet değil bir revizyon olarak ele alır.

Bu nokta özellikle Bayesyen gelenekte çok açıktır. Bayesyen çıkarım genellikle önselin olabilirlikle çarpımının uygun şekilde normalize edilerek sonsalı vermesi kuralı olarak tanıtılır. Tarihsel olarak, daha derin önemi öğrenmeyi matematiksel olarak açık hale getirmesidir. Sadece belirsizliği atamak için değil, onu kanıtlar ışığında dönüştürmek için de bir kural sunmuştur (Howson and Urbach 2006). Rasyonel aktörler kesinliğe sahip olanlar değil, inançlarını tutarlı bir şekilde revize edenlerdir.

Bu şekilde okunduğunda, tarihsel dizi bir bütünlük kazanır. Cardano belirsizliği sayılabilir hale getirdi. Pascal ve Fermat, şimdiki adaletin olası gelecekler üzerine temellendirilebileceğini gösterdi. Bernoulli, matematiksel şansı ampirik düzenlilikle ilişkilendirdi. Bayes ve Price, gözlemlenen etkilerden gizli nedenlere geçişi resmileştirdi. Laplace, bu mantığı geniş bir çıkarım programına genelleştirdi. Kolmogorov, rakip yorumları sürdürebilecek kadar geniş ve titiz bir temel sağladı. Modern makine öğrenimi bu düşünce alışkanlıklarını devraldı ve ölçeklendirdi. Bu

anlamda olasılık, çıkarımın işletim sistemi haline geldi (Hald 1998; Stigler 1990; Kolmogorov 2018).

Bu nedenle bölüm, formüllerden önce başlar. Temel soru öncelikle “Bir olayın olasılığı nedir?” değil, aksine: kesinlik mevcut olmadığında rasyonel bir aktör ne yapmalıdır? Klasik olasılık, ters çıkarım, sıklıkçı yöntem, Bayesyen güncelleme, aksiyomatik resmileştirme ve hesaplamalı yaklaşımlar bu soruya verilen giderek güçlenen yanıtlardır. Olasılık, belirsizliği ortadan kaldırmış gibi yapmadan hesaplanabilir kıldığı için kalıcı olmuştur.

Belirsizliğin Derin Tarihöncesi (Antik Çağ–Rönesans)

Ritüel, Numaralandırma ve Belirsizliğin En Erken Yapıları

Olasılık matematiksel bir disiplin haline gelmeden çok önce, belirsizlik insan hayatının merkezi bir sorundu. Antik ve ortaçağ dünyalarında belirsizlik; sayısal düzenlilikten ziyade kozmoloji, kehanet, takdir-i ilahi veya kader yoluyla yorumlanıyordu. Sonraki çağların rastlantısallık olarak adlandıracağı şey, genellikle daha derin bir düzenin görünür yüzeyi olarak ele alınıyordu (Hacking 2006; Daston 2021).

Antik Akdeniz’de aşık kemiği atılması hem eğlence hem de ritüel amaçlıydı. Atış genellikle istatistiksel değil, sembolik olarak okunurdu. Benzer bir mantık, civanperçemi sapları veya madeni paralarla oluşturulan heksagramların frekans analizi nesnelere değil, ifşa araçları olarak işlev gördüğü Çin klasiği *I Ching*’de de görülür. Amaç ölçüm değil, yorumdu. Yine de bu uygulamalar temel bir gerçeği zaten tanımıştı: sonuçlar tam olarak kontrol edilemez ve yine de kararlar verilmelidir.

Aynı zamanda, çeşitli gelenekler sayı, düzenleme ve kombinatorial formları inceleyerek belirsizliğin yapısal yönünü ayırttı. Antik Hindistan’da Pingala’nın Sanskritçe aruz incelemesi, uzun ve kısa hece desenlerini numaralandırmak için

prosedürler geliştirdi; bunlar tarihsel olarak önemli, daha sonra ikili temsil ve *meru-prastāra* ile ilişkilendirilen kombinatoryal araçlardır (Plofker 2008). Ortaçağ İslam matematiği de benzer şekilde cebir, miras hukuku ve ilgili alanlarda kombinatoryal muhakemeyi geliştirdi (Katz 1998). Bu çalışmalar henüz olasılıksal değildi, ancak çok önemli bir ilkeyi ileri taşıdı: belirsizlik ölçülmeden önce, olasılıklar uzayı belirlenmelidir.

Bu belirleyici bir tohumdu. Olasılık daha sonra bunu örneklem uzayı yoluyla resmileştirecektir. Dolayısıyla olasılığın tarihöncesi, sadece matematiksel düzeltmeyi bekleyen batıl inançlardan ibaret değildi. Alternatiflerin sayılabilir yapılar olarak ele alındığı her yerde gerçek analitik ilerlemeler de içeriyordu.

İnsan Sezgisini, Cardano ve İlk Nicel Dönüş

Olasılığın matematiksel önkoşulları yavaşça ortaya çıktıysa da, psikolojik problem anındaydı. İnsanlar sezgisel istatistikçi olarak zayıftır. Gürültüde desen algılar, kısa dizilerden sonra tersine dönüşler bekler ve yargılarının güvenilirliğini abartırlar. Olasılık kuramı, kısmen bu eğilimlere bir düzeltme olarak ortaya çıktı.

Bu gerilim, **Girolamo Cardano'nun (1501–1576)** çalışmalarında şimdiden görülebilir. Cardano bir hekim, astrolog, matematikçi ve kumardı. Kumar onun düşünce dünyasında tesadüfi değildi; belirsizliği yanlış değerlendirmenin maliyetini ona defalarca göstermişti. On altıncı yüzyılda kaleme alınan ve ölümünden sonra 1663'te yayınlanan *Liber de ludo aleae* adlı eserinde, zar ve oyun problemlerini sıra dışı bir netlikle analiz etti (Ore 2017; Hald 1998). Modern bir aksiyomatik kuram üretmemiş olsa da, olasılığın lehine olan durumların tüm eşit derecede olası durumlara oranına bağlı olduğu şeklindeki klasik fikri dile getirdi. Modern notasyonla,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

burada $A \subseteq \Omega$, $|A|$ lehine olan sonuçları sayar ve $|\Omega|$ tüm olası sonuçları sayar.

Bu ilke üç varsayıma dayanır: sonuçlar sayılabilir, eşolasılığı meşrulaştıracak kadar simetrik ve olasılığın bir önsizden ziyade düzeneğin bir özelliği olarak ele alınmasına izin verecek kadar iyi bilinmektedir. Cardano ayrıca, adil bir oyunun bahisler ve şanslar arasında bir ilişki gerektirdiğini fark ederek beklentiyi de öngördü (Ore 2017). Yine de başarısı tarihsel olarak izole kaldı. Bu içgörülerini bir araştırma programına dönüştürecek kurumsal ortamdan yoksundu ve kumarın entelektüel prestiji düşüktü. Dolayısıyla Cardano geçiş dönemi bir figürdü: olasılığın tam anlamıyla kurucusu değil, şansın ilk büyük nicel analizcisiydi.

Simetrimin Sınırları ve Yeni Bir Kuram İçin Baskı

Erken klasik yaklaşım büyük bir zarafete sahipti. Sonuçların sonlu, belirgin ve simetrik olduğu durumlarda net sonuçlar üretiyordu. Adil bir zar için,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad P(\text{çift}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Bu tür durumlar olasılığın nesnel ve kesin görünmesini sağlıyordu.

Ancak bu bariz nesnellik kısıtlayıcı varsayımlara bağlıydı. Sonuç uzayı sonlu veya sayılabilir olmalı, alternatifler eşolasılıklı olmalı ve olasılıklar önceden bilinmeliydi. Hava durumu, hastalık, ticaret, tanıklık ve siyasi yargı bu koşulları karşılamıyordu. Bu tür ortamlarda klasik kural, belirsizliği çözmekten ziyade erteliyordu.

Dolayısıyla erken dönem olasılık, henüz belirsiz muhakemenin genel bir kuramı değildi. Simetri altındaki yapılandırılmış cehaletin bir matematiği idi. Geç Rönesans ve erken modern dönemde, ticari genişleme, sigorta ve sözleşme sorunlarının büyümesi, ölçüm ve hata konusundaki bilimsel kaygılar ve

Avrupa'daki canlı kumar kültürü gibi çeşitli faktörler bu sınırlamayı giderek daha görünür kıldı (Hacking 2006; Hald 1998). Temel soru, kaç sonucun olası olduğundan, kısmi bilgi altında neye inanılması gerektiğine kaydı.

Bu eşikte, **Blaise Pascal (1623–1662)** ve **Pierre de Fermat (1607–1665)** oyun sorularını beklenti, adil paylaşım ve gelecekteki olumsuzlukların daha genel bir analizine dönüştürdü.

Pascal–Fermat Atılımı: Nicelikselleşmenin Doğuşu (1654)

Puan Problemi ve Geleceğe Yönelik Adaletin Keşfi

On yedinci yüzyıl ortası Fransa'sında kumar, seçkin yaşamın tanıdık bir parçasıydı. Bu kültür içerisinde, özellikle **Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–1684)** ile ilişkilendirilen *puan problemi* ortaya çıktı: Eğer bir oyun tamamlanmadan kesilirse, bahisler adil bir şekilde nasıl paylaşılmalıdır? Daha önceki versiyonlar Luca Pacioli ve Niccolò Tartaglia tarafından tartışılmıştı, ancak 1654'teki yazışmalar probleme belirleyici formunu verdi (Hacking 2006; Hald 1998).

Cevaplamaya çalışana kadar soru basit görünür. Bir oyuncunun bir galibiyete, diğerinin ise üçe ihtiyacı varsa, sadece mevcut skora dayalı orantılı bir bölüştürme yetersizdir. 1654'ün temel içgörüsü, adaletin oyunun geçmiş durumuyla değil, geriye kalan olası geleceklerin yapısıyla belirlendiğiydi. Geçmişe dönük skordan geleceğe yönelik beklentiye olan bu kaymada, matematiksel olasılık genel bir ilke kazandı.

Problem 1654'te **Blaise Pascal** ve **Pierre de Fermat**'ya ulaştı ve aralarındaki yazışmalar haklı olarak temel kabul edilir (Hald 1998). Henüz yerleşmiş bir notasyon veya disiplin yoktu. Sadece pratik bir problem ve iki farklı ama yakınsak muhakeme tarzı vardı. Pascal yinelemeli ayrıştırma ve adil beklentiye vurguladı. Fermat, gelecekteki devam yollarının sistematik

numaralandırılmasını vurguladı. Birlikte, belirsizliği rasyonel bir hesaba dönüştürdüler.

Pascal, Fermat ve Beklenti Matematiği

Pascal daha sonra dini ve karar teorik düşünceleriyle ünlendi, ancak puan problemindeki temel katkısı, adil bir mevcut değerlemenin beklenen gelecekteki getirisine bağlı olduğu ilkesiydi. Bir yargıç ve matematikçi olan Fermat, aynı problemi gelecekteki kazanma-kaybetme dizilerini sayarak kombinatoriyal olarak ele aldı.

Standart durumu ele alalım: oyuncu A 'nın bir galibiyete daha ihtiyacı var ve oyuncu B 'nin üç galibiyete ihtiyacı var. Daha sonraki *condition feinte* kullanılarak, oyunun bir kazananı garanti etmek için gereken maksimum tur sayısı kadar devam ettiği hayal edilir. En fazla üç tur kalmıştır, bu nedenle bağımsızlık ve eşit tur kazanma olasılıkları altında,

$$2^3 = 8$$

eşolasılıklı devam yolu mevcuttur.

Bu devam yolları şunlardır:

AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA,
BBB.

A 'nın sadece bir galibiyete ihtiyacı olduğu için, BBB dışındaki her devam yolu A 'nın zaferiyle sonuçlanır. Standart kesilen oyun normalleştirilmesi altında,

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{4}.$$

Eşdeğer olarak, açık sekiz durumlu numaralandırmada, altı devam yolu A 'yı, iki tanesi B 'yi destekler:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Toplam bahis S ise, adil bölüşüm şöyledir:

$$A \text{ alır } \frac{3}{4} S, \quad B \text{ alır } \frac{1}{4} S.$$

Bu sonucun önemi ilkesinde yatar. Kesilen oyun, olası tamamlanmalarının ağırlıklı yapısıyla değerlendirilir. Adalet olasılıksal hale gelir.

Daha sonraki teorinin beklenen değer olarak adlandırdığı şey zaten örtüktür. Eğer bir rassal değişken X , $P(x_i)$ olasılıklarıyla x_i değerlerini alıyorsa, o zaman

$$E[X] = \sum_i x_i P(x_i).$$

Puan probleminde getiri ikilidir: bir oyuncu sonunda tüm bahsi alır veya almaz. Mevcut adil pay, devam eden oyun altındaki beklenen getiridir. Değer, belirsiz gelecek sonuçlar temelinde rasyonel olarak atanabilen bir şey haline geldi.

Kombinatoryal Yapı, Karşılgusal Muhakeme ve Tarihsel Önem

Dizilim daha önceki Çin ve İslam geleneklerinde bilinmesine rağmen, binom katsayılarının aritmetik üçgenine Pascal'ın adı verilmiştir (Plofker 2009; Katz 1998). Bunun olasılıksal önemi Bernoulli modelinde açıktır:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Bu, uygun şekilde yapılandırılmış belirsizliğin cebirsel düzenlilik sergilediğini gösterir.

Pascal–Fermat atılımı, bir kumar problemini çözmekten fazlasını yaptı. Cardano'nun kombinatoryal temelini korudu ancak olasılığı dinamik hale getirdi. Belirsizlik, eksik bilgi altında rasyonel eylem için bir araç haline geldi. Temel adım karşılgusal muhakemeydi: süreç devam etseydi ne olacağı analiz edilir ve bu

hipotezsel gelecekler uzayı mevcut yargıyı düzenlemek için kullanılır.

Bu çerçeve hala sonlu numaralandırmaya ve simetriye dayanıyordu. Henüz verilerden bilinmeyen olasılıkları çıkaramaz veya doğal hayatın asimetrisini barındıramazdı. Ancak belirsiz geleceklerin karşılaştırılabileceğini, ağırlıklandırılabileceğini ve mevcut eyleme rehberlik etmek için kullanılabilceğini ortaya koydu. Olasılık artık dağınık bir hileler seti değildi. Belirsizliğin matematiksel dili haline gelmişti.

Bir sonraki soru doğal olarak geldi: Eğer olasılık oyunlarda adil kararları düzenleyebiliyorsa, ampirik dünya hakkında da güvenilir yargıları destekleyebilir mi? **Christiaan Huygens (1629–1695)** ve **Jacob Bernoulli (1655–1705)** ile konu, adil oyundan deneyimden öğrenmeye geçti.

Oyunculardan Yasalara: Bernoulli Genişlemesi (1657–1713)

Adil Paylaşımın Ampirik Düzenliliğe

Pascal ve Fermat, belirsiz geleceklerin mevcut kararları nasıl düzenleyebileceğini göstermişlerdi, ancak alanları dar kalmıştı. Şans oyunları sabit kurallar, sonlu sonuçlar ve makul simetri sunuyordu. Gerçek dünya ise sunmuyordu. Bir sonraki büyük soru, olasılığın oyunların ötesinde ampirik düzenlilik hakkında bir şey söyleyip söyleyemeyeceğiydi.

Bu, tutkuda büyük bir değişikliğe işaret ediyordu. Olasılık, bir adalet hesabından bir kanıt hesabına doğru hareket etti. İlk kilit figür, 1657 tarihli *De ratiociniis in ludo aleae* adlı eseri genel olarak özellikle olasılığa adanmış ilk basılı inceleme olarak kabul edilen **Christiaan Huygens (1629–1695)** idi (Huygens 1980; Hald 1998). Huygens, beklentiği genel bir rasyonel değerlendirme ilkesine yükseltti. Modern notasyonla, eğer bir bahis p_1, \dots, p_n olasılıklarıyla x_1, \dots, x_n sonuçlarını veriyorsa,

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Olasılık böylece artık sadece kesilen oyunlara bağılı değildi. Belirsizlik altında rasyonel seçim için bir rehber haline geldi.

Ancak beklenti, bilinen olasılıkları varsayıyordu. Ampirik hayatta olasılıklar genellikle bilinmez. Dolayısıyla daha derin problem tersine döndü: tekrarlanan gözlem, gizli olasılığı açığa çıkarabilir mi? Bu problem bizi **Jacob Bernoulli (1655–1705)**'ye götürdü.

Jacob Bernoulli ve Şans ile Gözlem Arasındaki Köprü

Ünlü ve rekabetçi Bernoulli ailesi içinde çalışan Jacob Bernoulli, teorik olasılığı gözlemlenen gerçekle ilişkilendirmeye çalıştı. Bu tutku, 1713'te ölümünden sonra yayınlanan *Ars Conjectandi* ile doruk noktasına ulaştı (Hald 1998; Stigler 1990). Başlık açıklayıcıdır: Bernoulli kesinliği değil, disiplinli varsayımı (conjecture) hedefliyordu.

Merkezi sonuç, büyük sayılar yasasıdır. X_1, \dots, X_n bağımsız Bernoulli denemeleri olsun, her biri p olasılığıyla 1'e ve $1 - p$ olasılığıyla 0'a eşit olsun. Şunu tanımlayalım:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

O zaman, modern formda,

$$\bar{X}_n \rightarrow p \quad n \rightarrow \infty \text{ giderken olasılıkta.}$$

Bernoulli'nin orijinal kanıtı kombinatoryal ve uzundu. Modern bir taslak şunu kullanır:

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n},$$

ve Çebişev eşitsizliği:

$$P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2},$$

bu da $n \rightarrow \infty$ giderken 0'a yaklaşır. Bu modern kanıt Bernoulli'ye atfedilmemelidir, ancak teoremin mantığını yakalar (Hald 1998).

Büyük Sayılar Yasasının Epistemolojik Sonuçları

Büyük sayılar yasası yeni bir epistemik mimari yarattı. Gözlemlenmeyen bir olasılık p , gözlemlenen sonuçlar akışı ve gizli parametreyi giderek daha fazla izleyen ampirik bir frekans arasında ayırım yaptı:

olasılık \rightarrow veri üretim süreci \rightarrow tahmin edici olarak frekans.

Olasılık ampirik olarak hesap verebilir hale geldi. Sonuçlar muazzamdı. Olasılıksal muhakeme artık ölümlülük, sigorta, astronomi, hukuk bilimi ve nüfus düzenliliklerine uygulanabiliyordu. Teorem verimli bir paradoksu ortaya çıkardı: tekil olaylar tahmin edilemez kalır, ancak toplamlar kararlı hale gelir. Vakalar düzeyindeki düzensizlik, popülasyonlar düzeyinde düzen üretir.

İlgili gelişmeler başka yerlerde de sürüyordu. **John Graunt (1620–1674)** ölüm kayıtlarını analiz etti ve **Edmond Halley (1656–1742)** erken bir hayat tablosu oluşturmak için Breslau verilerini kullandı (Graunt 1977; Halley 1977). Başka yerlerdeki idari sayımlar da benzer şekilde toplam düzenliliğe yönelik artan ilgiyi yansıtıyordu. Bernoulli, bu tür uygulamaları matematiksel olarak anlaşılır kılan teoremi sağladı.

Büyük sayılar yasası olmasaydı, olasılık rafine bir oyun kuramı olarak kalabilirdi. Onunla birlikte olasılık, dünya hakkında konuşabilir hale geldi.

Bernoulli Başarısının Sınırları ve İleriye Giden Yol

Bernoulli teoreminin hala sınırları vardı. Yakınsamayı ortaya koyuyordu ancak her zaman pratik yakınsama hızlarını değil; bağımsızlık varsayıyordu; ve sadece ileri yönde çalışıyordu. Olasılıklar sabit olduğunda frekansların nasıl davrandığını açıklıyordu. Ters soruyu cevaplamıyordu: gözlemlenen veriler verildiğinde, altta yatan olasılık hakkında ne çıkarım yapılmalıdır?

Bu ters problem bir sonraki büyük ilerlemeyi tanımladı. **Thomas Bayes (1701/2–1761)** ve **Richard Price (1723–1791)** ile olasılık yalnızca ölçülebilir değil, aynı zamanda güncellenebilir hale geldi.

Bayesyen Evirme: Etkilerden Nedenlere (1740'lar–1764)

Çözölememiş Tersine Çevirme

On sekizinci yüzyılın başlarında olasılık, bilinen şans mekanizmalarından beklenen sonuçlara ve sabit olasılıklardan uzun vadeli frekanslara rahatça geçebiliyordu. Ancak bilim, tıp ve sıradan yargı ters yöne ihtiyaç duyuyordu: gözlemlenen etkilerden gizli nedenlere doğru nasıl muhakeme yapılmalıydı? Bernoulli teoremi hala şans parametresini önceden sabit olarak ele alıyordu. Daha zor soru, verileri gözlemledikten sonra bilinmeyen bir süreç hakkında neye inanmaya hakkımız olduğuydu.

Bayesyen muhakemenin özü budur. Doğrudan problem, bir hipotez verildiğinde kanıtın olasılığıyla ilgilidir. Ters problem ise, kanıt verildiğinde hipotezin olasılığıyla ilgilidir. Bunlar aynı nicelikler değildir. Bayes'in katkısı, aralarındaki ilişkiyi resmileştirmek ve böylece kanıtın önsel güveni değiştirebileceği bir kural sağlamaktı (Bayes 1763; Howson and Urbach 2006; Joyce 2003).

Thomas Bayes ve Richard Price

Thomas Bayes (1701/2–1761) bir İngiliz Presbiteryen bakanı ve Royal Society üyesiydi ancak halka açık bir matematik dehası değildi. Sonraki şöhreti büyük ölçüde ölümünden sonra yayınlanan bir makaleye dayanır (Bayes 1763). Bayes 1761’de öldü; adıyla anılan deneme 1763’te okundu ve 1764’te *Philosophical Transactions* dergisinde yayınlandı.

Eserin hayatta kalması, Bayes’in el yazmasını bulan, yayına hazırlayan ve Royal Society için çerçeveleyen **Richard Price (1723–1791)**’a bağlıydı (Price 1764) Price olmasaydı, Bayes’in çalışması bilinmeyebilirdi. Bayes ve Price ayrıca ilahiyat, felsefe ve matematiğin keskin bir şekilde ayrılmadığı entelektüel bir ortamda çalışıyorlardı. Olasılık, eksik kanıtlar altında rasyonel onay için giderek genel bir çerçeve haline geliyordu.

Bayes Teoreminin Türetilmesi

Teorem matematiksel olarak basit ancak kavramsal olarak derindir. A bir hipotez ve B gözlemlenen kanıt olsun, $P(B) > 0$. Koşullu olasılık gereği,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Benzer şekilde,

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

$P(A) > 0$ olması koşuluyla. Düzenlersek:

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A).$$

Yerine koyarsak:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}.$$

Bu, iki olaylı formdaki Bayes teoremidir. B 'yi öğrendikten sonra A 'nın sonsal olasılığını; önsel $P(A)$, olabilirlik $P(B | A)$ ve marjinal kanıt $P(B)$ cinsinden ifade eder.

Eğer A ve $\neg A$ uzayı bölüştürüyorsa, o zaman

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \neg A)P(\neg A),$$

yani

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | \neg A)P(\neg A)}.$$

Dolayısıyla kanıt, bir hipotezi ancak alternatiflerine kıyasla doğrular.

Karşılıklı olarak dışlayıcı ve kapsayıcı H_1, \dots, H_k hipotezleri için,

$$P(H_i | B) = \frac{P(B | H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^k P(B | H_j)P(H_j)}.$$

Bu, öğrenme için genel bir kuraldır: önsel ağırlıklar kanıt uyumuyla yeniden ağırlıklandırılır.

Oranlar, Önseller ve Cehaletin Temsili

Açıklayıcı bir eşdeğer form şöyledir:

$$\frac{P(H_1 | B)}{P(H_2 | B)} = \frac{P(H_1)}{P(H_2)} \times \frac{P(B | H_1)}{P(B | H_2)}.$$

Sonsal oranlar (odds), önsel oranlar çarpı olabilirlik oranına eşittir. Bu nedenle Bayesyen çıkarım, ne salt öznelcilik ne de veriye körü körüne teslimiyettir. Önseller önemlidir, ancak veriler onları çarparak etkiler.

Hipotez bilinmeyen bir parametre olduğunda felsefi adım daha keskinleşir. Eğer p tura gelme olasılığı ise, klasik teori p 'yi sabit ama bilinmeyen olarak ele alır. Bayesyen teori, p hakkındaki

belirsizliği bir önsel dağılım yoluyla temsil eder. Cehaletin kendisi biçimsel olarak temsil edilebilir hale gelir.

Sürekli durumda, parametre θ ve veri x ile:

$$\pi(\theta | x) = \frac{f(x | \theta)\pi(\theta)}{\int f(x | \theta)\pi(\theta) d\theta}.$$

Burada $f(x | \theta)$ olabilirlik, $\pi(\theta)$ önsel ve payda bir normalleştirme sabitidir. Kelimelerle: sonsal, olabilirlik çarpı önsel ile orantılıdır.

Önsel hemen felsefi bir zorluk çıkardı. Eğer önseller veri öncesi inancı kodluyorsa, sonuçlar öznel midir? Bayesyenler, açıkça kişisel önsellerden bilgilendirici olmayan ve referans önsellere kadar farklı şekillerde yanıt verdiler. Daha derin nokta, her çıkarımsal yöntemin bir yerden başladığıdır. Bayesyenlik bu başlangıç noktasını görünür kılar (Howson and Urbach 2006; Joyce 2003).

Erken Bayesyen Öğrenme ve Tarihsel Önemi

Temel Bayesyen örnek, bilinmeyen bir Bernoulli başarı olasılığı p üzerine çıkarımla ilgilidir. Eğer s başarı ve f başarısızlık gözlemlenirse, olabilirlik şöyledir:

$$L(p) = p^s(1 - p)^f, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Üniform bir önsel ile,

$$\pi(p) = 1 \quad 0 \leq p \leq 1 \text{ için,}$$

sonsal şöyledir:

$$\pi(p | \text{veri}) \propto p^s(1 - p)^f,$$

yani

$$p | \text{veri} \sim \text{Beta}(s + 1, f + 1).$$

Sonsal ortalama şöyledir:

$$\mathbb{E}[p \mid \text{veri}] = \frac{s + 1}{s + f + 2}.$$

Bu, öğrenme mekaniğini şeffaf bir şekilde gösterir: kanıt önseli kademeli olarak yeniden şekillendirir. Güven, ikili bir hükümle değiştirilmek yerine sürekli olarak rafine edilir.

Modern bir teşhis örneği, ters olasılığın neden önemli olduğunu gösterir. Varsayalım ki $P(D) = 0.01$, $P(+ \mid D) = 0.95$ ve $P(+ \mid \neg D) = 0.05$. O zaman:

$$P(D \mid +) = \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+ \mid D)P(D) + P(+ \mid \neg D)P(\neg D)}.$$

Yerine koyarsak:

$$P(D \mid +) = \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} = \frac{0.0095}{0.059} \approx 0.161.$$

Prevalans (yaygınlık) düşük olduğunda, oldukça doğru bir test bile yalnızca yaklaşık %16.1'lik bir sonsal hastalık olasılığı verebilir. Örnek moderndir ancak mantık tam olarak Bayes'inkidir: klinik olarak ilgili yargı ters olasılık gerektirir.

Bernoulli yasası, uzun vadede frekansların nasıl kararlı hale geldiğini tanımladı. Bayes kuralı, her gözlemden sonra güvenin nasıl hareket etmesi gerektiğini tanımladı. İlki kolektif ve asimptotiktir; ikincisi yerel ve ardışıktır. Bayes, kanıtsal öğrenmenin resmi kuralını sağladı. Laplace daha sonra bu kuralı geniş bir bilimsel programa dönüştürecektir.

Laplaceyen Sentez ve Tartışma (1774–1812)

Bayes Kuralından Laplace Sistemine

Bayes bir kural sağlamıştı, ancak tam bir çıkarım sistemi değil. Ters olasılığın geniş bir bilimsel yöntemle dönüşmesi **Pierre-Simon Laplace (1749–1827)**'ın eseri idi (Hald 1998; Daston 2021). Laplace, Aydınlanma biliminin büyük sistem kurucularından biriydi.

Olasılıkta, dağınık sonuçları belirsiz bilgi üzerine genel bir hesaba dönüştürmeyi amaçladı.

Laplace genellikle daha sonra “Laplace’ın Şeytani” olarak adlandırılan deterministik düşünce deneyi ile ilişkilendirilir. Buradaki nokta doğanın kendisinin olasılık gerektirmesi değil, insan cehaletinin gerektirmesiydi (Gigerenzer et al. 1990). Olasılık, sonlu gözlemciler için eksik bilginin matematiği haline geldi.

Modern notasyonda Laplace, Bayes’in yoğunluk formunu genelleştirdi:

$$\pi(\theta | x) = \frac{f(x | \theta)\pi(\theta)}{\int f(x | \theta)\pi(\theta) d\theta}.$$

Onun önemi, bu özdeşliği esnek bir çıkarımsal prosedüre dönüştürmesinde yatıyordu.

Yetersiz Neden, Ardılık Kuralı ve Uygulamanın Genişlemesi

Merkezi bir Laplaceyen ilke, yetersiz neden ilkesiydi: bir olasılığı diğerine tercih etmek için hiçbir temel bulunmadığında, eşit olasılıklar atar. En basit sürekli durumda:

$$\pi(\theta) = 1 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ için.}$$

Bu ilke Bayesyen analizi yaygın olarak kullanılabilir kıldı ancak aynı zamanda felsefi olarak savunmasız bıraktı: bir parametreleştirme altındaki eşolasılık, diğeri altında başarısız olabilir (Keynes 1921; Zabell 1989).

Laplace’ın en ünlü uygulaması ardılık kuralıdır (rule of succession). Bir olay n denemede n kez meydana gelmişse ve başarı olasılığı p üzerine üniform bir önsel yerleştirilirse, o zaman:

$$P(\text{sonraki denemede başarı} | n \text{ denemede } n \text{ başarı}) = \frac{n + 1}{n + 2}.$$

Eşdeğer olarak, eğer

$$p \mid \text{veri} \sim \text{Beta}(n + 1, 1)$$

ise, o zaman

$$\mathbb{E}[p \mid \text{veri}] = \frac{n + 1}{n + 2}.$$

Laplace bunu meşhur bir şekilde gün doğumu problemine uyguladı. Matematiksel olarak sonuç varsayımlardan çıkar; felsefi olarak ise problemlidir çünkü Bernoulli modeli ve üniform önsel astronomik bilgiyi görmezden gelir (Zabell 1989). Örnek tarihsel olarak önemlidir çünkü tam olarak saf biçimsel ters olasılığın hem gücünü hem de sınırlarını sergiler.

Laplace ters olasılığı astronomi, fizik, demografi ve hatta adli muhakeme alanlarına uyguladı (Laplace 1812; Hald 1998). Olasılık artık sadece bir oyun kuramı değildi. Bilimsel ve idari çıkarımın bir aracı haline geldi.

Gauss, Hata Kuramı ve Ortaya Çıkan Tepki

Astronomi ve gözlemsel hatalar tarafından yönlendirilen benzer bir gelişme **Carl Friedrich Gauss (1777–1855)**'un çalışmalarında gerçekleşti. Eğer x_1, \dots, x_n gerçek bir μ niceliğinin gözlemleriye, en küçük kareler tahmini şunu minimize eder:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Minimizasyon yapan değer şöyledir:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Gauss hata varsayımları altında,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

en küçük kareler güçlü bir olasılıksal yorum kazanır (Legendre 1805; Hald 1998).

Gauss, Legendre ve Laplace'ı birbirine bağlayan tarih karmaşıktır ancak genel nokta açıktır: hata kuramı olasılığı ampirik bilime daha sıkı bağladı. Daha sonra nesnellik paradigmaları olarak ele alınan birçok prosedür, belirli varsayımlar altındaki Bayesyen çıkarımın özel durumları olarak da yorumlanabilir.

Yine de tepkinin tohumları zaten oradaydı. Farklı önseller farklı sonsal sonuçlar verebiliyordu; yetersiz neden ilkesi istikrarsız görünüyordu; ve bilinmeyen parametrelere olasılık atamak tartışmalı kalmaya devam ediyordu. On dokuzuncu yüzyıl olasılığı, temel anlamının rasyonel inanç derecesinde mi yoksa uzun vadeli frekansta mı yattığı konusunda giderek bölünecekti.

Yorum Krizi: Mantık, Frekans ve Nesnellik (On Dokuzuncu Yüzyıldan Yirminci Yüzyıl Başlarına)

Klasik Bayesyenlik Neden İstikrarsızlaştı?

On dokuzuncu yüzyıla gelindiğinde, ters olasılık bilimsel muhakemenin merkezi haline gelmişti. Bu başarı aynı zamanda onun kırılabilirliğini de açığa çıkardı. Eğer çıkarım önsellere bağlıysa, bilim nesnel kalabilir miydi? Ölçüm iyileştikçe, veri kümeleri büyüdükçe ve kurumlar tekrarlanabilir prosedürler talep ettikçe, önsele duyarlı çıkarım şüpheli hale geldi (Daston 2021; Hald 1998).

Sonuçta ortaya çıkan karşı hareket, olasılığı özel inançtan ayırmaya ve onu kamuya açık olarak gözlemlenebilir düzenliliğe çapalamaya çalıştı. Olasılık giderek önsel yargıdan ziyade tekrarlanan olaylar yoluyla yorumlanacaktı.

Venn, Frekans ve Olasılığın Yeniden Yönlendirilmesi

Buradaki ana seslerden biri, olasılığın tekil hipotezler üzerindeki ters olasılıktan ziyade, karşılaştırılabilir olay

dizilerindeki düzenlilikler yoluyla anlaşılması gerektiğini savunan **John Venn (1834–1923)** idi (Venn 1866). Sıklıkçı (frequentist) itki şöyle özetlenebilir:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

burada n_A , n denemede A 'nın gerçekleşme sayısıdır. Bu, eksiksiz bir resmi tanımdan ziyade yorumlayıcı bir ideal olarak ele alınmalıdır.

Bunun sonuçları geniş kapsamlıydı. Olasılık artık birincil olarak bir inanç derecesi değildi. Tekrarlanabilir denemelerdeki istikrarlı frekansa bağlandı. Bu nesnelliği güvence altına alıyor gibi görünüyordu ancak bir bedeli vardı: hipotezler, benzersiz olaylar veya tek vakalık yargılar için olasılıkları yorumlamak zorlaştı.

Frekans Yorumundan Sıklıkçı Yönteme

Frekans yorumu daha sonra Richard von Mises (1883–1953) tarafından kolektif kavramı aracılığıyla resmileştirildi: istikrarlı limit frekanslarına ve kabul edilebilir seçimler altında değişmezliğe sahip sonsuz bir dizi (von Mises 1957). Bu hamle, sıklıkçılığın bile rastlantısallık hakkındaki zor sorulardan kaçınamayacağını vurguladı.

Modern notasyonla, eğer X_1, X_2, \dots bağımsız göstergeler ise,

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } A \text{ deneme } i \text{ üzerinde gerçekleşirse,} \\ 0 & \text{aksi takdirde,} \end{cases}$$

o zaman

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \rightarrow P(A)$$

uygun koşullar altında sağlanır. Büyük sayılar yasası sıklıkçılığın kanıtılamadığı, ancak ona güçlü bir matematiksel imge verdi.

Olasılık inançtan ayrıldıktan sonra, çıkarım yöntemsel olarak yeniden formüle edilmek zorundaydı. Soru “Hipotezin doğru olma olasılığı nedir?” yerine “Bu prosedür tekrarlanan kullanımda nasıl davranır?” haline geldi.

Hipotez Testi ve Yöntemsel Dönüş

Bu yöntemsel dönüş, yirminci yüzyılda **Ronald A. Fisher**, **Jerzy Neyman** ve **Egon S. Pearson**'ın çalışmalarında doruk noktasına ulaştı (Fisher 1925; Neyman and Pearson 1933). Çıkarım, kontrollü uzun vadeli hataya sahip prosedürlerin tasarımı haline geldi.

Sıfır hipotezi H_0 , alternatif hipotez H_1 ve test istatistiği $T(X)$ ile, Fisheryen test p -değerini verir:

$$p\text{-değeri} = P(T(X) \geq T_{\text{obs}} | H_0),$$

veya karşılık gelen bir kuyruk olasılığı. Neyman–Pearson testi, bir reddetme bölgesi R tanımlar öyle ki:

$$P(X \in R | H_0) = \alpha,$$

burada α Tip I hata oranıdır. Tip II hata şöyledir:

$$P(H_0 \text{ reddedilemedi} | H_1 \text{ doğru}) = \beta,$$

güç ise şöyledir:

$$1 - \beta.$$

Böylece çıkarım, tekrarlanan deneyler üzerinde kontrollü bir hata süreci haline geldi. Kazanç yöntemsel disiplindi. Kayıp ise doğrudan yorumlanabilirlikti. Bir p -değeri $P(\text{veri} | H_0)$ ile ilgilidir, $P(H_0 | \text{veri})$ ile değil. Bu ayırım merkezidir ve genellikle yanlış anlaşılır.

Güçlü Yönler, Sınırlar ve Aksiyomatikleştirme İhtiyacı

Sıklıkçı çıkarım, açık bir kümülatif öğrenme için yerleşik bir mekanizmadan da yoksundu. Her analiz, doğrudan sonsal güncelleme yerine varsayımsal tekrarlama ile kalibre ediliyordu. Sıklıkçılık yargıyı da ortadan kaldırmadı: model formu, test istatistiği ve anlamlılık eşiği seçimler olarak kaldı.

Yine de sıklıkçılık muazzam bir şey başardı: tekrarlanabilirlik, standardize edilmiş prosedür ve operasyonel netlik. Bayesyenlik çıkarımsal tutarlılığı ve inanç revizyonunu korudu. İki gelenek farklı gereklilikleri optimize etti.

Yirminci yüzyılın başlarında olasılık kuramı sadece teknikle değil, anlama da bölünmüştü. İhtiyaç duyulan şey, herhangi birine bağımlı kalmadan rakip yorumları destekleyebilecek kadar geniş bir matematiksel çerçeveydi. Bu çerçeve **Andrey Kolmogorov (1903–1987)**'dan geldi.

Aksiyomatik Temel: Kolmogorov ve Olasılığın Matematiksel Tarafsızlaştırılması (1933)

Çözümünden Önceki Kriz

Yirminci yüzyılın başlarında olasılık vazgeçilmezdi ancak yorum açısından parçalanmıştı. Bayesyenler, sıklıkçılar, mantıksal olasılıkçılar ve eğilim kuramcılarının hepsi bu alanda hak iddia ediyordu. Olasılığın pratik kullanımını felsefi uzlaşmadan daha hızlı ilerliyordu.

Alanının ihtiyacı olan başka bir yorum değil, birden fazla yorumun bir arada var olabileceği biçimsel bir sistemdi. Kolmogorov bu sistemi 1933'te sağladı (Kolmogorov 1956; Hald 1998).

Kolmogorov ve Ölçü-Kuramsal Dönüş

Kolmogorov soyutlama, ölçü kuramı ve yapısal titizliğin şekillendirdiği bir çağda çalıştı. Amacı olasılığın ne anlama geldiğini belirlemek değil, matematiksel olarak ne olduğunu tanımlamaktı. Olasılık, ölçü kuramının bir dalı haline geldi. Bu hamle felsefi anlaşmazlığı bitirmedi; onu biçimsel gelişim düzeyinde tarafsızlaştırdı.

Olasılık Uzayları ve Olayların Resmileştirilmesi

Ω örneklem uzayını gösterebilirsin. Ω üzerinde bir σ -cebiri \mathcal{F} , şu özelliklere sahip alt kümeler koleksiyonudur:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- eğer $A \in \mathcal{F}$ ise, o zaman $A^c \in \mathcal{F}$,
- eğer $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ise, o zaman

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Bir olasılık uzayı şu üçlüdür:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

burada $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ şunları sağlar:

- **Negatif olmama:**

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

- **Normalleştirme:**

$$P(\Omega) = 1,$$

- **Sayılabilir toplanabilirlik:**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

çiftler halinde ayırık A_1, A_2, \dots için.

Bu devrim niteliğindedi çünkü olasılığın inanç, frekans, eğilim veya başka bir şey olup olmadığını belirtmeden olasılığın biçimsel davranışını tanımladı.

Rassal Değişkenler, Beklenti ve Koşullu Yapı

Bu çerçevede, bir rassal değişken ölçülebilir bir fonksiyondur:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

öyle ki uygun Borel kümeleri $B \subseteq \mathbb{R}$ için,

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Beklenti şuna dönüşür:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

Koşullu olasılık, temel durumlarda hala şöyledir:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

$P(B) > 0$ olduğunda; ancak genel koşullandırma, koşullu beklenti ve ilgili ölçü-kuramsal yapılar aracılığıyla resmileştirilir (Kolmogorov 1956).

Kolmogorov'un Başardıkları ve Başaramadıkları

Kolmogorov olasılığı matematiksel olarak özerk kıldı. Olasılık kuramı artık filozoflar yorumu hakkında anlaşamaları bile titizlikle geliştirebilirdi. Bu durum; sonraki yakınsama kuramını, stokastik süreçleri, martingalleri, Markov süreçlerini ve modern istatistiği mümkün kıldı (Kolmogorov 1956; Hald 1998).

Ancak Kolmogorov olasılıkların neyi temsil ettiğini belirlemedi. Aksiyomları olasılıkların nasıl davrandığını belirtir, nihai olarak ne anlama geldiklerini değil. Bu bir zayıflık değildi. Çerçevenin gücünün koşuluydu.

Modern İstatistik ve Makine Öğrenimine Doğru

Kolmogorov'un çerçevesi modern istatistiğin ve makine öğreniminin büyük bir kısmının temelini oluşturur: sonuç uzayları üzerindeki yoğunluklar, parametre uzayları üzerindeki entegrasyon, stokastik süreçler, olasılıksal grafiksel modeller, gizli durum modelleri ve belirsizlik nicelendirmesi; bunların hepsi olasılığın ölçü-kuramsal stabilizasyonunu varsayar (Kolmogorov 1956). Bu matematiksel platform var olduğunda, Bayesyen fikirler alanın biçimsel bütünlüğünü tehdit etmeden geri dönebilirdi.

Öznel Canlanma: Karar Kuramı, Tutarlılık ve Hesaplama (1950'ler–1990'lar)

Formalizmden Sonra: Bayesyenlik Neden Geri Döndü?

Kolmogorov olasılığı matematiksel olarak birleştirdi ancak yorumu açık bıraktı. Bu durum yenilenmiş bir Bayesyen canlanmayı mümkün kıldı. Yirminci yüzyıl ortası iktisadı, istatistiği ve karar verme süreçleri giderek tek vakalık belirsizlik, önsel bilgi ve ardışık öğrenme için çerçeveler gerektiriyordu. Sıklıkçı yöntemler güçlü kalmaya devam etti, ancak Bayesyen fikirler bu sorunları doğrudan ele aldıkları için yeniden güç kazandı.

De Finetti ve Olasılığın Öznelleştirilmesi

Bruno de Finetti (1906–1985) kışkırtıcı bir şekilde “Olasılık yoktur” diyerek, nesnel olasılığın yargıdan bağımsız fiziksel bir büyüklük olarak var olmadığını savundu (de Finetti 1974–1975). Olasılık bunun yerine, belirsiz olaylar hakkındaki kişisel inancın bir ölçüsüdür. Farklı aktörler farklı olasılıklar atayabilir.

De Finetti tutarlılık (coherence) yoluyla keyfiyetten kaçındı. Öznel olasılıklar, rasyonel sayılabilmeleri için olasılık aksiyomlarını karşılamalıdır.

Onun en önemli yapısal sonucu, değiştirilebilir (exchangeable) diziler için temsil teoremidir. Eğer X_1, X_2, \dots sonsuz değiştirilebilir ise, o zaman Bernoulli değişkenleri için:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \int_0^1 \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} d\mu(p),$$

$[0,1]$ üzerindeki bir μ karıştırma ölçüsü (mixing measure) için sağlanır. Nesnel görünen bağımsız ve özdeş dağılımlı (i.i.d.) yapı, böylece tutarlı öznel değerlendirmeden ortaya çıkar.

Dutch Book Argümanları ve Tutarlılık Mantığı

Frank P. Ramsey (1903–1930) ve de Finetti ile ilişkilendirilen Dutch Book argümanı, rasyonel inancı bahis davranışıyla ilişkilendirir Newman 2008, de Finetti 1974–1975). Eğer bir aktörün belirttiği olasılıklar olasılık aksiyomlarını ihlal ediyorsa, zeki bir bahisçi aktörün sonuç ne olursa olsun para kaybetmesini garanti eden bahisler kurgulayabilir.

Örneğin, eğer:

$$P(A) = 0.6, \quad P(A^c) = 0.5,$$

ise tutarlılık şunu gerektirir:

$$P(A) + P(A^c) = 1,$$

ancak burada:

$$0.6 + 0.5 = 1.1.$$

Aktör A üzerine bir birimlik getiriyi 0.6'ya ve A^c üzerine bir birimlik getiriyi 0.5'e satın alırsa, toplam ödeme 1.1'dir, ancak toplam getiri sadece 1 olabilir. Garanti edilen kayıp şöyledir:

$$1.1 - 1 = 0.1.$$

Nokta matematiksel olduğu kadar felsefidir: olasılık aksiyomları rasyonel tutarlılık normlarıdır.

Savage ve Özel Olasılığın Türetilmesi

Leonard J. Savage (1917–1971) bu fikirleri tam bir karar kuramına genişletti (Savage 1954). S durumlar kümesi, A eylemler kümesi ve $c(a, s)$ eylem a 'nın durum s 'deki sonucu olsun. Eğer eylemler üzerindeki tercihler uygun rasyonellik aksiyomlarını karşılıyorsa, o zaman bir P olasılık ölçüsü ve U fayda fonksiyonu mevcuttur öyle ki aktör beklenen faydayı maksimize ediyormuş gibi davranır:

$$\mathbb{E}[U] = \sum_{s \in S} P(s)U(c(a, s)).$$

Böylece Savage gerekçelendirme yönünü tersine çevirdi. Olasılığın rasyonel seçime rehberlik ettiği sadece varsayılmadı; rasyonel seçim olasılıksal bir temsili gerektirdi.

Hesaplamalı Engel

Tüm kavramsal zarafetine rağmen, Bayesyen çıkarım uzun süre pratik bir engelle karşılaştı:

$$\pi(\theta | x) = \frac{f(x | \theta)\pi(\theta)}{\int f(x | \theta)\pi(\theta) d\theta}.$$

genellikle hesaplanamayan bir normalleştirme integrali içerir. Konjuge ailelerde kesin çözümler mümkündür; gerçekçi modellerde ise genellikle değildir.

MCMC ve Bayesyen Çıkarımın Pratik Dönüşü

Hesaplamalı atılım Markov zinciri Monte Carlo (MCMC) yoluyla geldi. **Nicholas Metropolis** ve iş arkadaşları Metropolis algoritmasını tanıttı (Metropolis et al. 1953); **W. K. Hastings** bunu

genelleştirdi (Hastings 1970); **Stuart Geman** ve **Donald Geman** Gibbs tarzı örneklemeyi ilerletti (Geman and Geman 1984); ve **Alan E. Gelfand** ile **Adrian F. M. Smith** Gibbs örneklemesinin ana akım Bayesyen istatistiğe girmesine yardımcı oldu (Gelfand and Smith 1990).

Metropolis–Hastings’te, mevcut durum θ ise, $\theta' \sim q(\theta' | \theta)$ önerilir ve şu olasılıkla kabul edilir:

$$\alpha = \min \left(1, \frac{\pi(\theta')f(x | \theta')q(\theta | \theta')}{\pi(\theta)f(x | \theta)q(\theta' | \theta)} \right).$$

Aksi takdirde θ' da kalınır.

Gibbs örneklemesi koordinatları şöyle günceller:

$$\theta_i \sim P(\theta_i | \theta_{-i}, x),$$

burada θ_{-i} , θ_i dışındaki tüm bileşenleri gösterir.

MCMC’den önce Bayesyen çıkarım genellikle kolayca çözülebilen (tractable) modellerle sınırlıydı. MCMC’den sonra hiyerarşik modeller, gizli değişkenli modeller ve diğer karmaşık yapılar pratik olarak erişilebilir hale geldi. Bayesyenlik, felsefi olarak güçlü ancak hesaplamalı olarak sınırlı bir doktrinden büyük bir uygulamalı metodolojiye dönüştü.

Kuram, Uygulama ve Modern Yapay Zekaya Giden Yol

Hesaplamalı dönüş, Bayesyen çıkarımın sadece bir formül değil, belirsizlik altında algoritmik bir keşif süreci olduğunu gösterdi. Kolmogorov matematiksel platformu sağladı, de Finetti ve Savage etkili yorumları sağladı ve MCMC pratik uygulanabilirliği sağladı. Olasılık artık hesaplamalı bilimlere ve nihayetinde yapay zekaya gömülmeye hazırды.

Modern Olasılık ve Yapay Zeka Çağı

Kuramdan Hesaplamalı Altyapıya

Yirminci yüzyılın sonlarına gelindiğinde olasılık altyapısal hale gelmişti. Modern yapay zeka tek tip Bayesyen değildir, ancak makine öğreniminin çoğu olasılıksal kavramlara dayanır: olabilirlik, koşullu bağımlılık, gizli değişkenler, belirsizlik nicelendirmesi ve ardışık tahmin (Pearl 1988; Bishop 2006; Murphy 2012).

Naive Bayes ve Yakınsamanın Kalıcılığı

Basit bir örnek Naive Bayes sınıflandırıcısıdır. Sınıf etiketi C ve öznelikler X_1, \dots, X_n ile:

$$P(C | X_1, \dots, X_n) \propto P(C)P(X_1, \dots, X_n | C).$$

Koşullu bağımsızlık varsayımı altında:

$$P(X_1, \dots, X_n | C) = \prod_{i=1}^n P(X_i | C),$$

yani

$$P(C | X_1, \dots, X_n) \propto P(C) \prod_{i=1}^n P(X_i | C).$$

Varsayım nadiren tam olarak doğrudur, ancak Naive Bayes genellikle iyi performans gösterir çünkü sınıflandırma, mükemmel üretici gerçekçilikten ziyade göreceli olabilirliklere ve karar sınırlarına bağlıdır (Murphy 2012).

Grafiksel Modeller ve Yapının Temsili

Olasılıksal grafiksel modeller bu mantığı yapılandırılmış bağımlılığa genişletir. Bir Bayes ağında:

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | \text{Pa}(X_i)),$$

burada $\text{Pa}(X_i)$, X_i 'nin ebeveynleridir. Bu modeller koşullu bağımsızlığı kompakt bir şekilde kodlar ve yüksek boyutlu çıkarımı uygulanabilir kılar (Pearl 1988; Koller and Friedman 2009). Ayrıca nedensel analize giden bir yol açarlar.

Judea Pearl (1936–) hem Bayes ağları hem de daha sonra grafiksel nedensellik için merkezi bir isimdi (Pearl 1988, 2009). Çalışmaları, zekanın sadece olasılıkları değil, yapılandırılmış bağımlılık ilişkilerini de gerektirdiğini gösterdi.

Kalman Filtreleme ve Gizli Durum Çıkarımı

Rudolf E. Kálmán (1930–2016) dinamik sistemler için yinelemeli durum tahmini yöntemini tanıttı (Kalman 1960). Doğrusal bir durum-uzay modelinde:

$$x_t = Ax_{t-1} + w_t, \quad y_t = Hx_t + v_t,$$

Gauss gürültüleri w_t ve v_t ile çıkarım görevi, y_1, \dots, y_t gözlemlerinden gizli durum x_t 'yi tahmin etmektir. Yineleme tahmin (prediction),

$$P(x_t | y_{1:t-1}),$$

ve güncelleme (update),

$$P(x_t | y_{1:t}),$$

arasında gidip gelir. Doğrusal-Gauss varsayımları altında, her ikisi de Gauss olarak kalır ve analitik olarak güncellenebilir. Kalman filtresi, ardışık Bayesyen tarzı çıkarımı kontrol, navigasyon, sinyal işleme ve robotik için hesaplamalı olarak verimli hale getirdi.

Gizli Markov Modelleri ve Zamansal Yapı

Gizli Markov modelleri (HMM), gizli durum muhakemesini ayrıık zamanlı gizli durumlara genelleştirir. Gizli durumlar Z_t ve gözlemler X_t ile:

$$P(Z_t | Z_{1:t-1}) = P(Z_t | Z_{t-1}), \quad P(X_t | Z_{1:t}, X_{1:t-1}) \\ = P(X_t | Z_t).$$

Temel çıkarım görevleri filtreleme,

$$P(Z_t | X_{1:t}),$$

düzeltilme (smoothing),

$$P(Z_t | X_{1:T}),$$

ve en olası durum dizisinin kodunu çözmedir. İleri-geri ve Viterbi algoritmaları bu görevleri uygulanabilir kılar (Rabiner 1989). HMM'ler konuşma tanıma, biyoinformatik ve doğal dil işlemede merkezi hale geldi.

Sinir Ağları ve Olasılıksal Eğitim

Sinir ağları genellikle deterministik fonksiyon yaklaşıtııcılar olarak tanımlanır, ancak birçok standart eğitim prosedürü form olarak olasılıksaldır. Girdi x , çıktı y ve parametreler θ verildiğinde, genellikle şu belirtilir:

$$P(y | x, \theta),$$

ve θ , olabilirlik maksimize edilerek veya negatif log-olabilirlik minimize edilerek uydurulur.

Sınıflandırmada, softmax katmanı standarttır:

$$P(y = k | x) = \frac{e^{z_k}}{\sum_j e^{z_j}},$$

burada z_k logit değerleridir. Bu, normalize edilmiş bir koşullu dağılımdır.

Bayesyen sınırlar, ağırlıkların kendilerini rassal olarak ele alarak daha ileri gider:

$$P(\theta | D) \propto P(D | \theta)P(\theta),$$

ve tahminler parametre belirsizliği üzerinden ortalama alır. Bu, prensipte kalibre edilmiş bir belirsizlik sağlar ancak kesin çıkarım zordur (Neal 1996; MacKay 1992).

Tüm sıradan derin ağların sadece Bayesyen çıkarım yaptığını söylemek çok güçlü bir iddia olurdu. Daha kesin bir ifade, birçok derin öğrenme yönteminin amaç bakımından olasılıksal olduğu ve kısmi Bayesyen yorumlara veya genişletmelere izin verdiğidir (Goodfellow, Bengio, and Courville 2016).

Büyük Dil Modelleri ve Olasılıksal Dizi Modelleme

Büyük dil modelleri (LLM), otoregresif çarpanlara ayırma yoluyla belirteç (token) dizileri üzerinde dağılımlar tanımlar:

$$P(x_1, \dots, x_T) = \prod_{t=1}^T P(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}).$$

Üretim zamanında model şunu kullanır:

$$P(\text{sonraki belirteç} | \text{bağlam}).$$

Eğitim, metin verilerinin olabirliğini maksimize eder veya çapraz entropi kaybını minimize eder (Bengio et al. 2003; Brown et al. 2020).

Bu nedenle LLM'ler olasılıksal dizi modelleridir. Standart formda, üretim sırasında hipotezler üzerinde açık bir Bayesyen sonsal güncelleme yapmazlar. Bayesyenlikle ilişkileri daha gevşektir: belirsizlik altında koşullu olasılıklar atarlar ve bunları verilerden öğrenirler. Basitçe Bayesyen olmaktan ziyade, olasılıksal ve koşullu olarak tanımlanmaları daha doğrudur.

Yakınsama ve Tarihsel Perspektif

Modern yapay zeka olağanüstü bir yakınsamayı açığa çıkarır. Bayes sonsal muhakemede; Bernoulli veriye dayalı öğrenmede; Laplace evrensel modelleme tutkusunda; Kolmogorov resmi altyapıda; de Finetti açık belirsizlik temsilinde; ve MCMC yaklaşık sonsal hesaplamada hayatta kalır. Olasılıksal yapay zeka; disiplinli belirsizlik temsili, eksik bilgiden öğrenme ve belirsizlik altında karar verme imkanı sunar. Sınırlamaları –hesaplama maliyeti, yanlış model belirleme, aşırı güven ve yorumlanabilirlik– aynı derecede kalıcıdır (Murphy 2012; Goodfellow, Bengio, and Courville 2016).

Bu gerilimler, tarihi merkezi felsefi sorusuna geri getirir: Olasılık nihai olarak ne anlama gelir?

Felsefi Sentez: Olasılık Ne Anlama Gelir?

Kalıcı Soru

Dört yüzyıllık gelişimin ardından olasılık vazgeçilmezliğini korumakta ve yorum açısından hala netleşmemiştir. Bu bir başarısızlık değildir. Olasılık matematik, ampirik sorgulama, inanç ve eylemin sınırında yer alır. Tek bir yoruma kolayca teslim edilemeyecek kadar çok entelektüel işleve hizmet eder (Hájek 2002; Joyce 2003).

Kanonik Yorumlar

Tartışmalara dört ana yorum hakimdir. Sıklıkçı yorum, olasılığı uzun vadeli göreceli frekansla özdeşleştirir. Bayesyen veya öznelci yorum, onu rasyonel inanç derecesiyle özdeşleştirir. Eğilim (propensity) yorumu, onu dünyadaki eğilimsel bir yatkınlık olarak ele alır. Mantıksal yorum, onu kanıt ile hipotez arasındaki bir ilişki olarak ele alır ve özellikle **John Maynard Keynes** ve **Rudolf Carnap** ile ilişkilendirilmiştir (Keynes 1921; Carnap 1950).

Her biri gerçek bir şeyi yakalar ve hiçbirini her şeyi yakalayamaz. Sıklıkçılık kamusal düzenliliği korur ancak tekil

vakalarda zorlanır. Bayesyenlik öğrenmenin doğrudan bir hesabını verir ancak önseller hakkında sorular uyandırır. Eğilim, olasılığı fiziksel sistemlere bağlar ancak bağımsız olarak tanımlanması zordur. Mantıksal olasılık nesnel kanıtsal destek arar ancak genelleştirilmesinin zor olduğu kanıtlanmıştır.

Temel İlkelerden Bir Ayrıştırma

Daha kullanışlı bir sentez, herhangi bir olasılıksal ifadenin minimal yapısıyla başlar: bir olasılıklar uzayı, bir bilgi gövdesi ve bu bilgi ışığında olasılıklara ağırlık atayan bir kural. Sembolik olarak:

$$P(A | I),$$

burada A bir olay ve I ilgili bilgidir.

Bu notasyon, olasılığın her zaman varsayımlara, verilere, simetrilere, frekanslara veya arka plan bilgisine koşullu olduğunu açık hale getirir. Hiçlikten gelen bir olasılık ataması yoktur.

Bayesyen–Sıklıkçı Karşıtlığının Çözülmesi

Bayesyen–sıklıkçı karşıtlığı, birbirini dışlayan gerçekler arasındaki bir çatışmadan ziyade, açıklama düzeyleri arasındaki bir çatışma olarak en iyi şekilde anlaşılır. Sıklıkçılık, olasılıkların tekrarlanan örneklemede nasıl görüldüğünü ve prosedürlerin uzun vadede nasıl davrandığını tanımlar. Bayesyenlik, güvenin kanıtlar ışığında nasıl revize edilmesi gerektiğini tanımlar. Biri dış performansı, diğeri iç tutarlılığı vurgular.

Bu nedenle katmanlı bir görüş tercih edilmelidir. Ampirik düzeyde, olasılıklar frekanslar ve kalibrasyon yoluyla değerlendirilebilir. Çıkarımsal düzeyde, bilgiye koşullu güven dereceleri olarak işlev görürler. Matematiksel düzeyde, aksiyomları karşılayan ölçülerdir. Karar düzeyinde, beklenen faydaya dahil olurlar. Olasılık, birkaç düzeyde işleyen tek bir çerçevedir.

Olasılık, Bilgi ve Karar

Bilgi açısından bakıldığında olasılık, belirsizliği sıkıştırır: yüksek olasılıklı olaylar daha az şaşırtıcı, düşük olasılıklı olaylar daha şaşırtıcıdır. Bu durum olasılığı entropi ve bilgi kuramına bağlar (Cover and Thomas 2006). Eylem açısından bakıldığında olasılık, karar için vazgeçilmezdir. Beklenen fayda çerçevesinde:

$$\mathbb{E}[U] = \sum_s P(s)U(s),$$

veya benzer integral ile olasılık, belirsizlik altında rasyonel eylemi mümkün kılar.

Gizli Sabit Olarak Tutarlılık

Yorumlar arasında bir yapısal sabit kalır: tutarlılık. Kolmogorov bunu toplanabilirlik ve normalleştirme gibi aksiyomlar aracılığıyla ifade etti. De Finetti bunu tutarlılık (coherence) ve Dutch Book savunmasızlığı aracılığıyla ifade etti. Diller farklıdır ancak talep aynıdır.

Bu daha derin bir sentez önerir. Olasılık, iç tutarlılık kısıtlamaları altında belirsizliği temsil etmek için benzersiz bir şekilde geliştirilmiş bir sistemdir. Alternatif çerçeveler mevcuttur inanç fonksiyonları, olasılık teorisi (possibility theory), kesin olmayan olasılıklar ve diğerleri (Shafer 1976; Walley 1991) ancak hiçbiri biçimsel olgunluk, ampirik entegrasyon ve karar teorik kapsam açısından olasılıkla eşleşemez.

Nesnelliğin Sınırları

Bu sentez aynı zamanda tam nesnellik illüzyonunu da dağıtır. Sıklıkçı yöntemler model seçimine, örnekleme varsayımlarına ve hata eşiklerine dayanır. Bayesyen yöntemler önsel bilgiyi açıkça dahil eder ancak bunu tutarlılık ve kanıtla kısıtlar. Her iki durumda da olasılıksal muhakeme varsayımlara koşulludur. Olasılık varsayımları ortadan kaldırmaz; onları düzenler.

Birleşik Bir Formülasyon

Tarihsel ve felsefi olarak bütünleşmiş bir tanım dolayısıyla mümkündür: Olasılık, mevcut bilgiye koşullu, rasyonel çıkarım ve karar verme süreçlerine rehberlik etmek için kullanılan, bir olasılıklar uzayı üzerindeki matematiksel olarak kısıtlanmış bir belirsizlik temsilidir.

Bu formülasyon Kolmogorov'un yapısını, Bayes'in güncelleme kuralını, sıklıkçıların ampirik düzenlilik kaygısını ve karar kuramının eylem kaygısını korur. Hiçbir tekil yorum tüm bağlamlarda evrensel olarak doğru değildir. Modeller merkezidir. Belirsizlik sorgulamanın giderilebilir bir kusuru değil, yönetilmesi gereken kalıcı bir durumdur.

Çağdaş Bilim ve Yapay Zeka İçin Çıkarımlar

Modern yapay zeka bu katmanları zımnen birleştirir. Kolmogorovyen dağılımları, sıklıkçı değerlendirmeyi, bazı ortamlarda Bayesyen belirsizlik nicelendirmesini ve diğerlerinde karar kuramsal hedefleri kullanır (Murphy 2012; Goodfellow, Bengio, and Courville 2016). Aynı zamanda olasılığın sınırları vardır. Olasılık bir durum uzayı ve bir model varsayar, oysa sorgulama genellikle bilinmeyen bilinmeyenlerle ve yanlış model belirlemeleriyle karşı karşıyadır. Olasılık belirsizliği yönetir ancak cehaleti ortadan kaldırmaz.

Final Sentezi

Tarihsel dizi artık kısaca özetlenebilir. **Girolamo Cardano** belirsizliği sayılabilir hale getirdi. **Pascal** ve **Fermat** onu geleceğe yönelik kıldı. **Jacob Bernoulli** onu büyük sayılar yasasıyla ampirik düzenliliğe bağladı. **Bayes** öğrenmeyi açık hale getirdi. **Laplace** ters olasılığa evrensel bir tutku verdi. Sıklıkçı düşünürler yönetsel disiplin sağladı. **Kolmogorov** resmi tarafsızlık sağladı. **De Finetti**

ve **Savage** öznel rasyonelliği yeniden inşa etti. Modern hesaplama, büyük ölçekli olasılıksal çıkarımı pratik hale getirdi.

Ortaya çıkan şey tek bir metafizik öz değil, disiplinli bir sonuçtur: Rasyonel aktörler belirsizlik altında temsil etmeli, güncellemeli ve eyleme geçmelidir ve olasılık bunu tutarlı bir şekilde yapmak için en gelişmiş çerçeve olmaya devam etmektedir.

Gelecek Yönelimler ve Açık Problemler: Bildiğimiz Olasılığın Ötesinde

Olgun Bir Çerçevenin Sınırları

Yirmi birinci yüzyıla gelindiğinde olasılık; titiz temellere, zengin yorumlara, ölçeklenebilir hesaplama ve geniş uygulamaya sahipti. Başarısı aynı zamanda sınırlarını da açığa çıkardı. Sınır artık sadece bir model içinde olasılıkların nasıl hesaplanacağı değil, olasılıksal temsilin her zaman sorgulamanın karşılaştığı belirsizlik türleri için yeterli olup olmadığıdır.

Olasılık, bir olasılıklar uzayı ve bu uzay üzerinde bir model varsayar. Sorunlar; nedensel yapı bilinmediğinde, model yanlış belirlendiğinde, varsayılan uzayın dışına düşen yeni olumsuzluklar ortaya çıktığında veya stratejik etkileşim sistemin kendisini değiştirdiğinde ortaya çıkar.

Korelasyondan Nedenselliğe

Gözlem ve müdahale arasındaki ayırmda merkezi bir sınır belirir. Klasik olasılık şu formdaki soruları yanıtlar:

$$P(Y | X),$$

ancak birçok bilimsel soru şunu gerektirir:

$$P(Y | \text{do}(X)).$$

Nedensel çıkarımın (causal inference) özü budur.

Judea Pearl, gözlemsel olasılığın tek başına nedenselliği tam olarak temsil edemeyeceğini savundu (Pearl 2009). $P(X, Y)$ 'yi bilmek, X 'e müdahale edildiğinde ne olacağını kendi başına belirlemez. Yapısal nedensel modeller; olasılığı yönlendirilmiş grafikler, yapısal denklemler ve müdahale operatörü ile zenginleştirir. Şematik formda:

$$Y = f(X, U),$$

dışsal arka plan U ile. O zaman şu ikisi arasındaki karşılık:

$$P(Y | X) \quad \text{ve} \quad P(Y | \text{do}(X))$$

matematikselsel olarak anlamlı hale gelir.

Bu durum makine öğrenimi için muazzam derecede önemlidir. Tahminde güçlü olan sistemler müdahale, politika değişikliği veya dağılım kayması altında hala başarısız olabilir çünkü birliktelik (association) nedensellik değildir. Ana araştırma yönleri arasında nedensel keşif, derin yapısal nedensel modeller ve sinirsel sistemlerde karşıolguşal muhakeme yer alır (Pearl 2009; Schölkopf et al. 2021).

Bayesyen Derin Öğrenme ve Belirsizlik Sorunu

İkinci bir sınır, derin öğrenmede kalibre edilmiş belirsizlikle ilgilidir. Standart ağlar genellikle nokta tahminleri veya aşırı güvenli tahmin dağılımları sağlarken, yüksek riskli uygulamalar açık epistemik belirsizlik gerektirir.

Bayesyen sinir ağları şunu hedefler:

$$P(\theta | D) \propto P(D | \theta)P(\theta),$$

ve tahmini ortalama alma:

$$P(y | x, D) = \int P(y | x, \theta)P(\theta | D) d\theta.$$

Prensipde bu daha zengin bir belirsizlik temsili sağlar. Pratikte ise integral yüksek boyutta ürkütücüdür. Bu durum

varyasyonel çıkarım, sonsal yaklaşıklama, topluluklar (ensembles), Monte Carlo yöntemleri ve dropout tabanlı yaklaşımlar gibi Bayesyen vekiller üzerine araştırmaları motive eder (Neal 1996; Blundell et al. 2015; Gal and Ghahramani 2016).

Daha derin soru, çok büyük sinirsel sistemlerdeki belirsizliğin hem uygulanabilir hem de aslına sadık bir şekilde temsil edilip edilemeyeceğidir.

Olasılığın Ötesindeki Belirsizlik

Üçüncü bir sınır, net olasılıksal belirlemeye direnen belirsizlikle ilgilidir. Klasik olasılık bilinen bir durum uzayı ve güvenilir bir model varsayar. Ancak birçok gerçek sistem bilinmeyen bilinmeyenleri, model yanlış belirlemesini, muğlaklığı (ambiguity) veya hasmane etkileşimi içerir.

Bu durum gürbüz (robust) ve dağılımdan bağımsız yaklaşımları tetiklemiştir. Dağılımsal olarak gürbüz optimizasyon, tek bir dağılım yerine muğlaklık kümeleri üzerinde garantiler arar (Rahimian and Mehrotra 2019). Konformal tahmin (conformal prediction), değiştirilebilirlik varsayımları altında sonlu örneklem kapsamına sahip tahmin kümeleri oluşturur (Vovk, Gammerman, and Shafer 2005; Angelopoulos and Bates 2023). Hasmane gürbüzlük ve kesin olmayan olasılık üzerine ilgili çalışmalar da benzer şekilde dikkati bir model içindeki optimizasyondan model başarısızlığına karşı korunmaya kaydırır (Walley 1991).

Bu yöntemler olasılığın yerini almaz; klasik varsayımların kırılğan olduğu durumlarda onu tamamlar.

Ardışık Karar, Pekiştirmeli Öğrenme ve Güvenlik

Dördüncü bir sınır, belirsizliğin zaman içindeki eylemle bulunduğu yerde belirir. Pekiştirmeli öğrenme (reinforcement learning); olasılıksal geçiş modellerini, karar kuramını, optimizasyonu ve ardışık geri bildirimini birleştirir. Bayesyen

pekiştirmeli öğrenmede, çevrenin kendisi hakkındaki belirsizlik temsil edilir:

$$P(\text{çevre} \mid \text{veri}).$$

Bu çekicidir çünkü zeki aktörler öğrenirken karar vermelidir. Aynı zamanda zordur çünkü ardışık eylem hatayı, seyrek geri bildirim, kısmi gözlemlenebilirliği ve feci sonuçları büyütebilir (Sutton and Barto 2018; Ghavamzadeh et al. 2015).

Dolayısıyla güvenli ve güvenilir yapay zeka; Bayesyen öğrenme, kontrol, gürbüz optimizasyon ve etişim keşifim noktasında yer alır.

Olasılıksal Programlama ve Otomatikleştirilmiş Çıkarım

Diğer bir büyük yön, olasılıksal modellerin program olarak ifade edildiği ve çıkarımın kısmen otomatikleştirildiği olasılıksal programlamadır. Stan, Pyro ve TensorFlow Probability gibi sistemler bu gündemi takip eder (Carpenter et al. 2017; Bingham et al. 2019; Dillon et al. 2017). Bu gelişme tarihsel olarak çarpıcıdır çünkü olasılığı en eski tutkularından birine geri döndürür: belirsizlik altında disiplinli muhakeme için genel amaçlı bir dil.

Vaadi ifade gücü ve erişilebilirliktir; zorluğu ise otomatikleştirilmiş çıkarımın kırılgan varsayımları gizleyebilmesidir. Güçlü soyutlama, model eleştirisi ihtiyacını ortadan kaldırmak yerine artırır.

Açık Problemler ve Sonraki Paradigma

Bu sınırlar alanı en eski felsefi sorusuna daha keskin bir formda geri getirir: Olasılıksal muhakemenin sınırları nelerdir? Nedensellik, yorumlanabilirlikten ödün vermeden olasılıkla bütünleştirilebilir mi? Makineler sadece ölçülebilir risk yerine derin belirsizlik altında muhakeme yapabilir mi? Bilinmeyen bilinmeyenler hiç resmileştirilebilir mi?

Geleceğin olasılığı tamamen yerinden etmesi pek olası değildir. Daha makul olan; nedensel-olasılıksal hibritler, gürbüz ve dağılımdan bağımsız yöntemler, epistemik sınırlamanın bilgi-kuramsal ölçüleri, hasmane belirsizliğin oyun-kuramsal modelleri ve daha zengin model eleştirisi ve revizyonu çerçeveleri aracılığıyla onu genişletmesi ve tamamlamasıdır.

Kapanış Perspektifi

Olasılık oyunları için bir araç olarak başladı, bir çıkarım kuramı haline geldi, bilim ve istatistik için bir temel olarak olgunlaştı ve yapay zekanın temel bir altyapısına dönüştü. Şimdi yeni bir meydan okumayla karşı karşıya: sadece modeller içindeki belirsizliği değil, modellerin kendilerinin kırılabilirliğini de hesaba katmak. Onun en yüksek değeri sadece belirsizliği nicelendirmekte değil, disiplinli belirsizliğin nerede bittiğini ve daha derin cehaletin nerede başladığını ortaya koymakta yatabilir.

Uygulamalı Ara Bölüm: Yoğun Bakımda Kırılabilir Güven

Bu bölüm boyunca geliştirilen mantık, belirsizlik sonuç doğuran ampirik bir soruyla ilişkilendirildiğinde daha somut hale gelir. Klinik bir ortamda, ilgili olasılık nadiren önceden verilir. Gözlemlerden çıkarım yapılmalı, kanıtlar biriktikçe revize edilmeli ve bir modele ve tanımlanmış bir popülasyona koşullu olarak yorumlanmalıdır. Bu süreci örneklendirmek için, bu bölüm Beta–Bernoulli modelini MIMIC-IV’teki yetişkin yoğun bakım ünitesi (YBÜ) başvuruları arasındaki hastane içi mortaliteye uygulamaktadır. MIMIC-IV, Beth Israel Deaconess Tıp Merkezi’ndeki rutin klinik bakımdan elde edilen ve kimlik bilgileri gizlenmiş bir elektronik sağlık kaydı kaynağıdır (Johnson et al. 2023). Bu analizde, PhysioNet üzerinden yayımlanan MIMIC-IV sürüm 3.1 kullanılmıştır (Johnson et al. 2024). Veri kaynağına erişim PhysioNet üzerinden sağlanmıştır (Goldberger et al. 2000).

Analizin amacı bilinçli olarak sınırlandırılmıştır. Bu, hasta düzeyinde bir tahmin sistemi, nedensel bir analiz veya klinik bir karar aracı değildir. Bu, Bayesçi öğrenmenin ampirik bir gösterimidir: başlangıçta dağınık olan bir inanç durumu, açık varsayımlara bağlı kalmak koşuluyla, gözlemler geldikçe daha odaklanmış hale gelir.

Kohort oluşturma ve çıkarımsal hedef

Analizde üç MIMIC-IV tablosu kullanılmıştır: patients.csv.gz, admissions.csv.gz ve icustays.csv.gz. Gözlem birimi hastaneye yatış (başvuru) idi. Bir hastaneye yatışın birden fazla YBÜ kalışı içerdiği durumlarda, yalnızca ilk YBÜ kalışı tutulmuştur. İkili (binary) sonuç, hastane düzeyindeki mortalite göstergesiydi,

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{hasta hastaneye yatış süresince öldüyse,} \\ 0, & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Kohort oluşturma akışı Tablo 1’de gösterilmektedir. Ham YBÜ tablosu 94.458 YBÜ kalışı içeriyordu. Hastaneye yatış başına ilk YBÜ kalışının tutulması 85.242 kayıt üretti. Tutulan tüm kayıtlar hastane başvuruları ve hasta demografisi tablolarıyla eşleşti, geçerli bir ikili mortalite sonucuna ve yaş değerine sahipti ve yetişkin yaş kriterini sağladı.

Tablo 1. Yetişkin YBÜ başvuruları kohortunun oluşturulması.

Adım	Kayıtlar
Yüklenen YBÜ kalışları	94.458
Hastaneye yatış başına ilk YBÜ kalışı	85.242
Hastane başvuruları ile eşleşenler	85.242
Hasta demografisi ile eşleşenler	85.242
Geçerli ikili sonuç ve yaş	85.242
18 yaş ve üzeri yetişkin YBÜ başvuruları	85.242

Çıkarımsal hedef,

$$p = P(Y_i = 1),$$

şeklindeki toplam olasılığı; ki bu da kohort tanımı ve model varsayımları altında bir sonraki benzer yetişkin YBÜ başvurusu için hastane içi mortalite olasılığı olarak yorumlanır. *Benzer (karşılaştırılabilir)* kelimesi burada esastır: bu tahmin, seçilen popülasyona koşulludur ve evrensel bir mortalite olasılığı olarak yorumlanmamalıdır.

Beta–Bernoulli modeli

Y_1, \dots, Y_n , tutulan başvurular için mortalite göstergelerini ifade etsin. Model şunu varsayar:

$$Y_i \mid p \sim \text{Bernoulli}(p).$$

Bilinmeyen mortalite olasılığına tekdüze (uniform) bir önsel (prior) atanmıştır:

$$p \sim \text{Beta}(1,1).$$

Bu önsel bilinçli olarak basit tutulmuştur. Sıfır ile bir arasındaki her p değerine eşit bir önsel yoğunluk verir ve güncelleme mekaniğini şeffaf hale getirir. Klinik olarak elde edilmiş bir önsel ile karıştırılmamalıdır.

Eğer d ölüm ve $s = n - d$ hayatta kalma gözlemlenirse, eşleniklik (conjugacy) şunu verir:

$$p \mid Y_{1:n} \sim \text{Beta}(1 + d, 1 + s).$$

Sonsal (posterior) ortalama şudur:

$$E[p \mid Y_{1:n}] = \frac{1 + d}{2 + n},$$

ve bir sonraki benzer başvuru için mortalitenin sonsal öngörü olasılığı şöyledir:

$$P(Y_{n+1} = 1 | Y_{1:n}) = \int_0^1 p \pi(p | Y_{1:n}) dp = \mathbb{E}[p | Y_{1:n}].$$

Sonsal ortalama ile bir adımlık sonsal öngörü olasılığı arasındaki eşitlik, Bernoulli modeline özgü bir kolaylıktır.

Genel sonsal mortalite olasılığı

Uygun 85.242 yetişkin YBÜ başvurusunun 9.475'i hastane içi ölümlerle, 75.767'si ise hayatta kalma ile sonuçlanmıştır. Dolayısıyla gözlemlenen mortalite oranı şuydu:

$$\frac{9,475}{85,242} = 0.111154.$$

Beta(1,1) önselini güncellemek şunu verir:

$$p | Y_{1:n} \sim \text{Beta}(9,476, 75,768).$$

Sonsal ortalama,

$$\mathbb{E}[p | Y_{1:n}] = \frac{9,476}{85,244} = 0.111163,$$

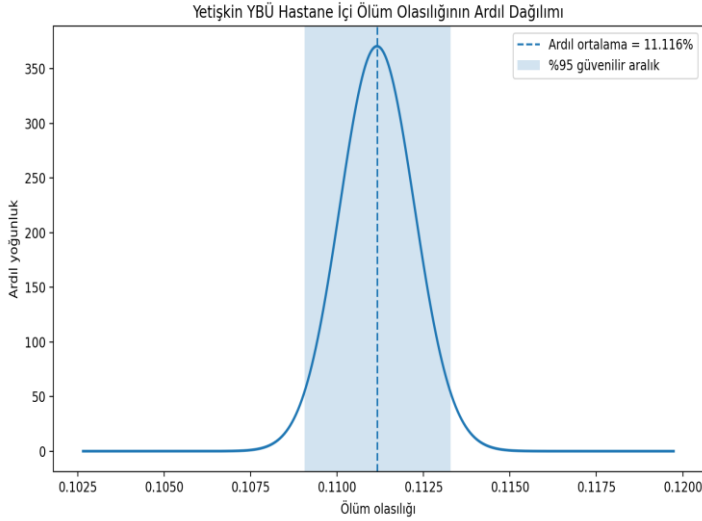
veya yaklaşık 11.12%'dir. Eşit kuyruklu 95% güvenilirlik aralığı (credible interval) şöyledir:

$$0.109062 \leq p \leq 0.113282,$$

veya yaklaşık 10.91% ila 11.33%.

Tablo 2. Yetişkin YBÜ hastane içi mortalitesi için genel Beta–Bernoulli sonsal dağılımı.

Nicelik	Değer
Uygun yetişkin YBÜ başvuruları	85.242
Hastane içi ölümler	9.475
Hayatta kalanlar	75.767
Gözlemlenen mortalite oranı	11.115%
Önsel dağılım	Beta(1,1)
Sonsal dağılım	Beta(9,476,75,768)
Sonsal ortalama	11.116%
95% güvenilirlik aralığı	[10.906%, 11.328%]
Sonsal öngörü olasılığı	11.116%



Şekil 1. Yetişkin YBÜ başvuruları için toplam hastane içi mortalite olasılığının sonsal dağılımı. Kesikli dikey çizgi sonsal ortalamayı, gölgeli alan ise %95 güvenilirlik aralığını işaret etmektedir.

Şekil 1 sonsal yoğunluğu göstermektedir. Kohort büyük olduğu için dağılım dardır. Sonuç belirsizliği ortadan kaldırmaz; geriye kalan belirsizliği açık ve nicel olarak sınırlandırılmış hale getirir.

Kanıtlar biriktikçe sıralı güncelleme

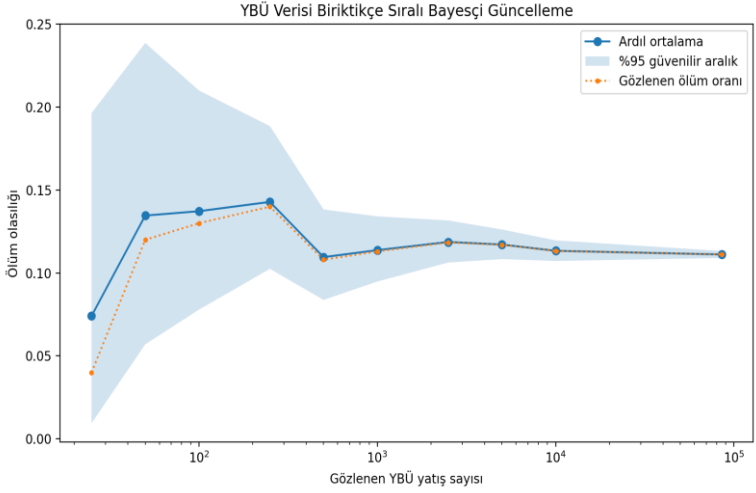
Aynı model, gözlem sayısı arttıkça güvenin nasıl değiştiğini göstermek için kullanılabilir. Tablo 3, kümülatif analizden seçilen kontrol noktalarını sunmaktadır. Yalnızca 25 başvuru ve gözlemlenen bir ölüm sonrasında sonsal ortalama %7,41 olup %95 güvenilirlik aralığı [%0,95–%19,64] düzeyindedir. 500 başvurunun ardından sonsal ortalama %10,96'ya ulaşmış ve %95 güvenilirlik aralığı [%8,38–%13,83] düzeyine daralmıştır. Tüm 85.242 başvuru dahil edildiğinde sonsal ortalama %11,12 civarında sabitlenmiş ve %95 güvenilirlik aralığı [%10,91–%11,33] düzeyine daralmıştır.

Tablo 3. Sıralı Bayesyen güncellemeden seçilmiş kontrol noktaları.

Gözlemlenen başvurular	Ölümler	Sonsal ortalama	95% Güvenilirlik aralığı
25	1	7.41%	[0.95%, 19.64%]
100	13	13.73%	[7.79%, 21.00%]
500	54	10.96%	[8.38%, 13.83%]
1.000	113	11.38%	[9.49%, 13.41%]
10.000	1.133	11.34%	[10.72%, 11.97%]
85.242	9.475	11.12%	[10.91%, 11.33%]

Şekil 2, bu örüntüyü görünür kılmaktadır. Erken dönem sonsal tahminler önemli ölçüde dalgalanır çünkü her bir gözlem kayda değer bir ağırlık taşır. Örneklem büyüdükçe sonsal dağılım, herhangi bir tekil başvuruya karşı giderek daha az duyarlı hale gelir ve güvenilirlik aralığı daralır. Bu, bölümde daha önce izlenen tarihsel gelişimin uygulamalı karşılığıdır: Bernoulli'nin ampirik düzenlilik endişesi ile Bayes'in rasyonel güncelleme endişesi tek bir çıkarımsal silsilede birleşmektedir.

Bu gösterim için kullanılan sıralama deterministiktir ve örneklendirme amaçlıdır. MIMIC-IV verileri anonimleştirilmiştir ve buradaki hastalar arası zaman damgaları, gerçek bir tarihsel kronoloji olarak yorumlanmamalıdır. Şekil, klinik sonuçlardaki zamansal sapmayı değil, kanıtların birikimini göstermektedir.



Şekil 2. YBÜ kanıtları biriktikçe sıralı Bayeşçi güncelleme. Gözlem sayısı arttıkça sonsal ortalama gözlemlenen mortalite oranına yaklaşırken, 95% güvenilirlik aralığı daralmaktadır. Yatay eksen logaritmiktir.

Yaş grubuna göre betimsel heterojenlik

Toplu bir sonsal dağılım, anlamlı bir heterojenliği gizleyebilir. Bu kısıtlamayı görünür kılmak için kohort iki geniş yaş grubuna ayrılmıştır: 18–64 yaş arası yetişkinler ve 65 yaş ve üzeri yetişkinler. Her bir grubun mortalite olasılığına ayrı bir Beta(1,1) önseli atanmıştır:

$$p_{18-64} \sim \text{Beta}(1,1), \quad p_{65+} \sim \text{Beta}(1,1).$$

Elde edilen sonsal özetler Tablo 4’te gösterilmektedir.

Tablo 4. YBÜ hastane içi mortalite olasılıklarının yaş gruplarına göre betimsel karşılaştırması.

Yaş grubu	Başvurular	Ölümler	Sonsal ortalama	95% güvenilirlik aralığı
18-64 yaş	38.676	2.982	7.71%	[7.45%, 7.98%]
65 yaş ve üzeri	46.566	6.493	13.95%	[13.63%, 14.26%]

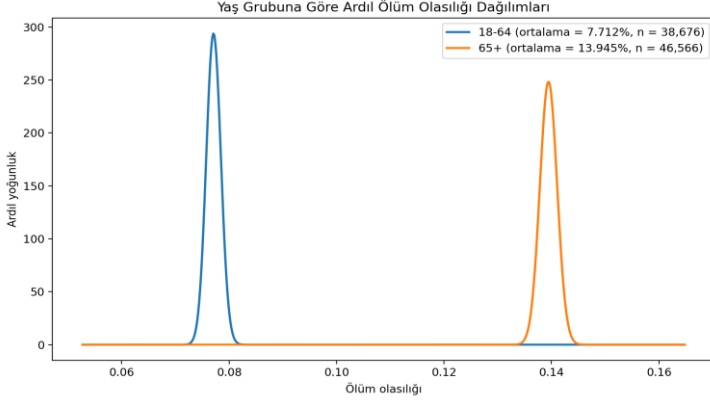
$$\Delta = p_{65+} - p_{18-64}$$

mortalite olasılıkları arasındaki farkı gösterebilir. İki sonsal dağılımdan alınan 100.000 Monte Carlo çekilişi kullanılarak, Δ 'nın sonsal ortalaması 0.0623 bulunmuştur, ki bu da yaklaşık 6.23 yüzde puanlık bir farka karşılık gelmektedir. 95% güvenilirlik aralığı şöyledir:

$$0.0582 \leq \Delta \leq 0.0664.$$

Simüle edilen 100.000 çekilişin tamamı pozitif çıkmıştır; bu da söz konusu model ve kohort tanımını altında, daha yaşlı grupta daha yüksek bir toplam mortalite olasılığı için ezici bir sonsal destek olduğunu göstermektedir.

Şekil 3, elde edilen sonsal yoğunlukları göstermektedir. İki dağılımın neredeyse tamamen birbirinden ayrılması görsel olarak çarpıcıdır, ancak yorumlanırken disiplinli (ölçülü) kalınmalıdır. Analiz, yaşın nedensel bir etkisini değil, betimsel bir ilişki ortaya koymaktadır. Teşhis, hastalığın şiddeti, tedavi yöntemleri, tekrarlayan başvurular veya diğer potansiyel heterojenlik kaynakları için bir düzeltme yapmaz.



Şekil 3. 18–64 yaş ve 65 yaş ve üzeri yetişkin YBÜ başvuruları için sonsal mortalite dağılımları. Aralarındaki fark betimseldir ve nedensel olarak yorumlanmamalıdır.

Uygulamanın kanıtladıkları ve kanıtlamadıkları

Bu uygulama dört noktayı somutlaştırmaktadır. Birincisi, önsel soyut felsefi bir süs değildir: öğrenmenin başladığı ilk durumu sağlar. İkincisi, günlük bir önselin etkisi kanıt hacmi arttıkça azalır. Üçüncüsü, sonsal yoğunlaşma bir modeli kesinliğe dönüştürmez; modele, kohort tanımına ve gözlemlenen verilere bağlı olarak belirsizliği nicelendirir. Dördüncüsü, tek bir toplam olasılık önemli alt grup farklılıklarını gizleyebilir.

Bu analizin açık sınırları da vardır. Bernoulli modeli, başvuruları ortak bir p olasılığına sahip, değiştirilebilir (exchangeable) denemeler olarak ele alır. Bu varsayım pedagojik açıdan faydalı ancak klinik açıdan basitleştirilmiştir. YBÜ başvuruları teşhis, şiddet, tedavi ve kurumsal bağlam açısından farklılık gösterir. Bir hasta birden fazla hastaneye yatışla da veri setine katkıda bulunabilir, bu nedenle gözlemlerin hasta düzeyinde bağımsız olduğu garanti edilemez. Alt grup analizi kasıtlı olarak kabadır (ayrıntısızdır) ve analiz, chartevents.csv.gz dosyasında bulunanlar gibi daha ince taneli fizyolojik ölçümleri kullanmaz. Daha iddialı bir model; hiyerarşik yapıyı, tekrarlanan başvuruları,

zamanla değişen gözlemleri ve klinik bilgiye dayalı ortak değişkenleri içerebilir. Bu tür uzantılar gerçekçiliği artıracaktır, ancak aynı zamanda varsayımları çoğaltacak ve çıkarımsal yükü ağırlaştıracaktır.

Dolayısıyla buradaki temel ders, tek bir sonsal dağılımın klinik bir soruyu çözüme kavuşturduğu değildir. Belirsizliğin şeffaf bir şekilde temsil edilebileceği, güncellenebileceği ve eleştirilebileceğidir. Daha genel anlamda olasılık tarihinde olduğu gibi, YBÜ’de de güven kırılğan olmaya devam etmektedir. Olasılığın erdemi bu kırılğanlığı ortadan kaldırması değil, onu disipline etmesidir.

Sonuç: İnanç Mantığı

Erken modern Avrupa’nın oyun kültüründe başlayan hikaye, kapalı bir doktrin sisteminde değil, modern bilimin ve akıllı hesaplamanın epistemik altyapısında sona ermektedir. İlk başta dar ve teknik bir bulmaca olarak görünen şey yarıda kalan bir oyunda bahislerin adil bir şekilde nasıl bölüştürüleceği sorunu akıl yürütme tarihindeki en önemli entelektüel inşalardan birine dönüşmüştür. Olasılık sadece şans problemlerini çözmekle kalmadı. Belirsizliğin kendisinin nasıl düşünülebileceğini, ölçülebileceğini ve karar vermede nasıl kullanılabilceğini dönüştürdü.

Blaise Pascal (1623–1662) ve Pierre de Fermat (1607–1665)’ya yöneltilen orijinal problem aldaticı derecede mütevazıydı. Ancak içinde kalıcı öneme sahip bir ilkeyi barındırıyordu: adalet yalnızca ne olduğuna değil, neyin mümkün kaldığına da bağlıdır. Bu içgörü, sezgisel ve geriye dönük akıl yürütmeden kesin bir kopuşa işaret ediyordu. Belirsizliğin artık düşüncenin önünde sadece bir engel değil, biçimsel analizin meşru bir nesnesi olduğu yeni bir epistemik duruş getirdi. Olasılık, o anda, olası geleceklerin rasyonel bir disiplini olarak ortaya çıkmaya başladı.

Buradan hareketle, olasılık tarihi bir genişlemeler silsilesi olarak okunabilir. **Jacob Bernoulli (1655–1705)** ile teori, oyunların sınırlarını aşarak ampirik dünyaya girdi. Büyük sayılar yasası, bir yakınsama teoremi kurmaktan fazlasını yaptı. Tekrarlanan rastlantısallıktan istikrarlı bir düzenin doğabileceği ve gözlemlenen frekansların gizli düzenlilikler hakkında disiplinli kanıtlar olarak hizmet edebileceği fikrini inandırıcı kıldı. Olasılık sadece bir adil oyun hesabı değil, soyut akıl yürütme ile deneyim arasında bir köprü haline geldi.

Thomas Bayes (1701/2–1761) ile ve **Richard Price (1723–1791)**'ın vazgeçilmez müdahalesi aracılığıyla bu köprü tersine çevrilebilir (iki yönlü) hale geldi. Olasılık artık sonuçları bilinen mekanizmalardan tahmin etmekle sınırlı değildi. Gözlemlenen etkilerden gizli nedenlere, verilerden altta yatan yapıya ve kanıtlardan revize edilmiş inanca geçmenin bir aracı haline geldi. Bu dönüşümde olasılık sadece bir sonuçlar teorisi olmaktan çıkıp bir öğrenme teorisi haline geldi. Rasyonel yargı artık yalnızca ifade edilen bir şey değil, güncellenebilen bir şeydi.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) bu içgörüyü çok daha iddialı bir sisteme genişletti. Onun ellerinde ters olasılık (inverse probability) evrensel bir bilimsel programın parçası haline geldi: belirsizlik altında genel bir bilgi teorisi. Ancak bu başarımın boyutu, asla tam olarak kaybolmayacak bir fay hattını ortaya çıkardı. Eğer çıkarım önsel varsayımlara dayanıyorsa, nesnellığe ne olacaktı? Olasılık kısmen de olsa inanca dayanıyor gibi görünüyorsa bilimsel otorite iddia edebilir miydi?

Frekansçı (frequentist) tepki, olasılığın konumunu inançtan gözlemlenen düzenliliğe kaydırarak bu gerilimi çözmeye çalıştı. Olasılık, uzun vadeli frekans üzerinden yeniden yorumlandı. Bu hamle matematiksel titizlik, kamusal prosedür ve metodolojik standardizasyon getirdi. Ancak bunu bir bedel karşılığında yaptı. İnanç hakkındaki doğrudan ifadeleri, tekrarlanan örnekleme

davranışına ilişkin ifadelerle değiştirdi ve konuyu en başından beri canlandıran soruyu çözümsüz bıraktı: tek bir belirsiz vaka hakkında nasıl akıl yürütölmelidir? Frekansçı dönüş, bir nesnellik sorununu çözerken diğer bir yorumlama sorununu yoğunlaştırdı.

Sonrasında yaşananlar, bir tarafın diğeri üzerinde kesin bir zaferi değil, anlaşmazlığın yeniden çerçeveselenmesiydi. **Andrey Kolmogorov (1903–1987)**, çoklu yorumların bir arada var olabileceği biçimsel yapıyı sağladı. Olasılık, herhangi bir tekil felsefi anlama bağlı olmaktan ziyade tutarlılık koşulları tarafından yönetilen, olaylar üzerindeki matematiksel bir ölçü (measure) sistemi olarak aksiyomatize edildi. Bu, anlaşmazlığı sona erdirmedi. Sadece onun statüsünü değiştirdi. Olasılık matematiği artık yorumlama tartışmalarının çözümlüne bağlı değildi.

O noktadan itibaren, konu kendini daha derin temeller üzerinde yeniden inşa etti. **Bruno de Finetti (1906–1985)** ve **Leonard J. Savage (1917–1971)** öznelliği (subjectivity) sahneye yeniden sundu, ancak dönüştürölmüş bir biçimde. Olasılık artık dış dünyanın tasvir edilmeye çalışılan bir hali olarak ele alınmıyordu. Rasyonel inanç ve rasyonel eylem üzerinde bir kısıtlama haline geldi. Olasılık aksiyomlarını ihlal etmek sadece ampirik bir hata yapmak değildi; tutarsız (incoherent) hale gelmekti. Hollanda Kitabı (Dutch Book) geleneği bu içgöröye en katı formölasyonunu kazandırdı: olasılıksal tutarlılık, garantili rasyonel olmayan kayıptan kaçınmanın bedelidir. Bu göröşe göre olasılık sadece betimsel değildi. Normatifti (kural koyucuydu).

Hesaplama bu dönüşümü tamamladı. Uzun zamandır felsefi açıdan ikna edici olan ancak çoğu zaman pratik olarak kısıtlanan yöntemler, operasyonel olarak güçlü hale geldi. Simölasyon yöntemleri, yaklaşık çıkarım ve olasılıksal algoritmalar sayesinde Bayesçi akıl yürütme, zarif bir ilkedden büyük ölçekli uygulamaya geçti. Teorik cazibe ile pratik uygulanabilirlik arasındaki eski

uçurum daralmaya başladı. Olasılık uygulanabilir ve çalıştırılabilir hale geldi.

Bu bölümde geliştirilen uygulama bu geçişi somutlaştırmaktadır. MIMIC-IV'ten alınan yetişkin YBÜ başvurularını kullanan Beta–Bernoulli modeli, gözlemlenen hastane sonuçlarını hastane içi mortalite için bir sonsal dağılıma (posterior distribution) dönüştürdü. Analiz kesinlik üretmedi. Disiplinli bir güven durumu üretti: yaklaşık 10.91% ila 11.33% arasında dar bir 95% güvenilirlik aralığına sahip, yaklaşık 11.12%'lik bir toplam sonsal mortalite olasılığı. Sıralı güncelleme, kanıtlar biriktikçe belirsizliğin nasıl daraldığını gösterdi. Yaş grupları arasındaki betimsel karşılaştırma en az onun kadar önemli bir şey daha gösterdi: toplam (kümülatif) bir tahmin, önemli bir heterojenliği gizleyebilir. Seçilen model ve kohort tanımı altında, daha yaşlı grup, daha genç grubunkinden yaklaşık 6.23 yüzde puan daha yüksek bir sonsal mortalite olasılığı sergiledi.

Bu uygulamanın amacı, basit bir sonsal dağılımın klinik bir soruyu bütünüyle halletmesi değildir. Halletmez. Model; kohort inşası, değiştirilebilirlik, önsel seçimi ve sonuç tanımına ilişkin varsayımlara koşullu olmaya devam eder. Nedensel etkiler kurmaz, klinik uzmanlığın yerini almaz veya YBÜ verilerinin tam yapısını yansıtmaz. Değeri metodolojiktir: inanç revizyonunun mantığını görünür kılar. Belirsiz oyunlarla başlayan aynı mimari, şimdi bahislerin (risklerin) oldukça yüksek olduğu ortamlarda akıl yürütmeyi yönetmektedir.

Günümüzde olasılık, matematik ve istatistiğin eski sınırlarının çok ötesine uzanmaktadır. Sınıflandırma, filtreleme, grafiksel modelleme, belirsizlik nicelendirmesi, ardışık tahmin ve artık algı, dil ve karar süreçlerine aracılık eden birçok öğrenme sistemine zemin oluşturmaktadır. Çağdaş yapay zeka sistemlerinin tümü açıkça Bayesçi değildir ve her öğrenme algoritmasını bir tür sonsal çıkarım olarak tanımlamak yanıltıcı olur. Ancak, olabirlik

(likelihood) tabanlı öğrenme, koşullu modelleme, belirsizlik temsili ve olasılıksal değerlendirme, modern makine öğreniminin ve istatistiksel yapay zekanın büyük bir bölümünde merkezi önemini korumaktadır.

Tüm bu genişlemeye rağmen, olasılığın temel içgörüsü değişmeden kalır: kesinlik mevcut değildir ve yine de eyleme geçmek gereklidir. Olasılık bu gerilimi ortadan kaldırmaz. Onu disipline eder. Belirsizliğin temsil edilebileceği, karşılaştırılabileceği, eleştirilebileceği ve revize edilebileceği bir dil sağlar. Varsayımları görünür olmaya zorlar, verilerin kanıtsal ağırlığını netleştirir ve yeni bilgiler ışığında güvenin dönüşümünü formalleştirir.

Ayrıca alçakgönüllülüğü zorunlu kılar. Hiçbir olasılık ataması nihai değildir. Her sonsal dağılım geçicidir. Her model koşulludur. Her belirsizlik temsili; bilinmeyenin sınırında revizyona, yanlış spesifikasyona veya başarısızlığa açıktır. Olasılık belirsizliğe karşı zafer kazanmaz; belirsizliği ortadan kaldırıyormuş gibi davranmadan onu entelektüel olarak ele alınabilir hale getirir. Konunun felsefi olarak canlı kalmasının nedeni budur. Bayesçi, frekansçı, eğilim (propensity) ve mantıksal yorumlar arasındaki tartışmalar matematiğin kusurlu olmasından değil, belirsizliğin anlamının bilginin kendisinin anlamından ayrılmaz olmasından dolayı devam etmektedir.

Belirsizlik dünyanın bir özelliği mi, kanıtın bir özelliği mi, rasyonel inancın bir özelliği mi yoksa her üçünün bir kombinasyonu mudur? Olasılık keşfedilmiş midir, inşa edilmiş midir, yoksa bir tutarlılık kısıtlaması olarak mı dayatılmıştır? Bu sorular kesin bir kapanışa direnir, çünkü olasılık ikili bir konum işgal eder. Hem biçimsel modellere hem de akıl yürüten zihinlere aittir. Aynı anda hem matematiksel bir yapı hem de epistemik bir araçtır.

Bununla birlikte, bu çok anlamlılığa rağmen, olasılık olağanüstü bir şey başarır. Belirsizliğin *tutarlı bir şekilde* ele alınmasına olanak tanır. Bu başarı tekniktir çünkü aksiyomlara, teoremlere ve algoritmalara dayanır. Felsefidir çünkü rasyonalitenin kendisinin anlamını yeniden şekillendirir. Rasyonel olmak kesinliğe sahip olmak değildir. Kanıtların ışığında inancı tutarlı bir şekilde revize etmek, daha güçlü desteği daha zayıf olandan ayırmak, kişinin modelinin sınırlarını kabul etmek ve bildiğinden daha fazlasını biliyormuş gibi davranmadan hareket etmektir.

Kumarbazın ikileminden klinik verilerin olasılıksal analizine ve çağdaş akıllı sistemlerin mimarilerine kadar bu ilke varlığını sürdürmüştür. Notasyon değişti. Alanlar çoğaldı. Hesaplama ölçeği erken modern kurucular için neredeyse hayal edilemez hale geldi. Ancak altta yatan mantık fark edilebilir bir şekilde devamlılığını korumaktadır.

Olasılık sadece bir şans teorisi değildir.

O, inancın mantığıdır.

Kaynakça

Angelopoulos, A. N., & Bates, S. (2023). Conformal prediction: A gentle introduction. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 16(4), 494-591.

Bayes, T. (1763). LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, AMFR S. *Philosophical transactions*, (53), 370-418.

Bengio, Y., Ducharme, R., Vincent, P., & Jauvin, C. (2003). A neural probabilistic language model. *Journal of machine learning research*, 3(Feb), 1137-1155.

Bingham, E., Chen, J. P., Jankowiak, M., Obermeyer, F., Pradhan, N., Karaletsos, T., ... & Goodman, N. D. (2019). Pyro: Deep universal probabilistic programming. *Journal of machine learning research*, 20(28), 1-6.

Bishop, D. V. (2006). What causes specific language impairment in children?. *Current directions in psychological science*, 15(5), 217-221.

Blundell, C., Cornebise, J., Kavukcuoglu, K., & Wierstra, D. (2015, June). Weight uncertainty in neural network. In *International conference on machine learning* (pp. 1613-1622). PMLR.

Brown, T., Mann, B., Ryder, N., Subbiah, M., Kaplan, J. D., Dhariwal, P., ... & Amodei, D. (2020). Language models are few-shot learners. *Advances in neural information processing systems*, 33, 1877-1901.

Carnap, R. (1950). Logical foundations of probability.

Carpenter, B., Gelman, A., Hoffman, M. D., Lee, D., Goodrich, B., Betancourt, M., ... & Riddell, A. (2017). Stan: A

probabilistic programming language. *Journal of statistical software*, 76, 1-32.

Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2006). *Elements of information theory (wiley series in telecommunications and signal processing)*. Wiley-interscience.

Daston, L. (2021). Classical probability in the Enlightenment.

de Finetti, B. (1975). *Theory of Probability* (transl. A. Machi and AFM Smith).

Dillon, J. V., Langmore, I., Tran, D., Brevdo, E., Vasudevan, S., Moore, D., ... & Saurous, R. A. (2017). Tensorflow distributions. *arXiv preprint arXiv:1711.10604*.

Fisher, R. A. (1925, July). Theory of statistical estimation. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* (Vol. 22, No. 5, pp. 700-725). Cambridge University Press..

Gal, Y., & Ghahramani, Z. (2016, June). Dropout as a bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning. In *international conference on machine learning* (pp. 1050-1059). PMLR.

Gelfand, A. E., & Smith, A. F. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American statistical association*, 85(410), 398-409.

Geman, S., & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, (6), 721-741.

Ghavamzadeh, M., Mannor, S., Pineau, J., & Tamar, A. (2015). Bayesian reinforcement learning: A survey. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 8(5-6), 359-483.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., & Kruger, L. (1990). *The empire of chance: How probability changed science and everyday life* (Vol. 12). Cambridge University Press.

Goldberger, A. L., Amaral, L. A., Glass, L., Hausdorff, J. M., Ivanov, P. C., Mark, R. G., ... & Stanley, H. E. (2000). PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: components of a new research resource for complex physiologic signals. *circulation*, *101*(23), e215-e220.

Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A., & Bengio, Y. (2016). Deep learning (Vol. 1, No. 2, pp. 1-800). Cambridge: MIT press.

Graunt, J. (1777). Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality. In *Mathematical Demography: Selected Papers* (pp. 11-20). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Hacking, I. (2006). *The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. Cambridge University Press.

Hájek, A. (2002). Interpretations of probability.

Hald, A. (1998). A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. (*No Title*).

Halley, E. (1777). An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind. In *Mathematical Demography: Selected Papers* (pp. 21-26). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications.

Howson, C., & Urbach, P. (2006). *Scientific reasoning: the Bayesian approach*. Open Court Publishing.

Huygens, C. (1980). *De ratiociniis in ludo aleae*. Ex officina J. Elsevirii.

Johnson, A. E., Bulgarelli, L., Shen, L., Gayles, A., Shammout, A., Horng, S., ... & Mark, R. G. (2023). MIMIC-IV, a freely accessible electronic health record dataset. *Scientific data*, 10(1), 1.

Johnson, A., Bulgarelli, L., Pollard, T., Gow, B., Moody, B., Horng, S., ... & Mark, R. (2024). *MIMIC-IV (Version 3.1)*. *PhysioNet*. RRID: SCR_007345.

Joyce, James. "Bayes' Theorem." In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, edited by Edward N.

Zalta. Substantive revision September 30, 2003. Stanford, CA: Metaphysics Research Lab, Stanford

University. <https://plato.stanford.edu/entries/bayes-theorem/>.

Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems.

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics: An introduction* (Vol. 2). Reading: Addison-Wesley.

Keynes, J. M. (1921). *der Friedensvertrag von Versailles* (Vol. 3). Verlag für Politik und Wirtschaft.

Koller, D., & Friedman, N. (2009). *Probabilistic graphical models: principles and techniques*. MIT press.

Kolmogorov, A. (1956). On the Shannon theory of information transmission in the case of continuous signals. *IRE Transactions on Information Theory*, 2(4), 102-108.

Laplace, P. S. (1812). Leçons de mathématiques données à l'École normale en 1795. *Oeuvres complètes de Lapalace. Tome XIV*, 10-177.

Legendre, A. M. (1805). *Mémoire sur les opérations trigonométriques: dont les résultats dépendent de la figure de la terre* (No. 1). F. Didot.

MacKay, D. J. (1992). A practical Bayesian framework for backpropagation networks. *Neural computation*, 4(3), 448-472.

Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6), 1087-1092.

Mises, L. V. (1957). Theory and history: An interpretation of social and economic evolution.

Murphy, K. P. (2012). *Machine learning: a probabilistic perspective*. MIT press.

Neal, R. M. (1996). Priors for infinite networks. In Bayesian learning for neural networks (pp. 29-53). New York, NY: Springer New York.

Neyman, J., & Pearson, E. S. (1933). IX. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231(694-706), 289-337.

Newman, P. (2008). Ramsey, Frank Plumpton (1903–1930). In *The New Palgrave Dictionary of Economics* (pp. 1-9). Palgrave Macmillan, London.

Ore, Ø. (2017). *Cardano: The gambling scholar*. Princeton University Press.

Pearl, J. (1988). Embracing causality in default reasoning. *Artificial Intelligence*, 35(2), 259-271.

Pearl, J. (2009). Causal inference in statistics: An overview.

Plofker, K. (2008). Mathematics in india.

Price, R. (1764). LII. A demonstration of the second rule in the essay towards the solution of a problem in the doctrine of chances, published in the *Philosophical Transactions*, Vol. LIII. Communicated by the Rev. Mr. Richard Price, in a letter to Mr. John Canton, MAFR S. *Philosophical Transactions*, (54), 296-325.

Rabiner, L. R. (1989). A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2), 257-286.

Rahimian, H., & Mehrotra, S. (2019). Distributionally robust optimization: A review. *arXiv preprint arXiv:1908.05659*.

Savage, L. J. (1954). The foundations of statistics Wiley. *New York*.

Schölkopf, B., Locatello, F., Bauer, S., Ke, N. R., Kalchbrenner, N., Goyal, A., & Bengio, Y. (2021). Toward causal representation learning. *Proceedings of the IEEE*, 109(5), 612-634.

Shafer, G. (1976). A theory of statistical evidence. In *Foundations of Probability Theory, Statistical Inference, and Statistical Theories of Science: Proceedings of an International Research Colloquium held at the University of Western Ontario, London, Canada, 10–13 May 1973 Volume II Foundations and Philosophy of Statistical Inference* (pp. 365-436). Dordrecht: Springer Netherlands.

Stigler, S. M. (1990). *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900*. Harvard University Press.

Sutton, R. S., & Barto, A. G. (2018). Temporal-difference learning. *Reinforcement learning: an introduction*, 131-132.

Venn, J. (1866) *The Logic of Chance* (London: Macmillan and Co.).

Vovk, V., Gammerman, A., & Shafer, G. (2005). *Algorithmic learning in a random world*. Boston, MA: Springer US.

Walley, P. (1991). Statistical reasoning with imprecise probabilities.

Zabell, S. L. (1989). The rule of succession. *Erkenntnis*, 31(2), 283-321.

BÖLÜM 3

MAKİNE ÖĞRENMESİNDE YORUMLANABİLİRLİK: LIME VE SHAP YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Giriş

Makine öğrenmesi modelleri son on yılda olağanüstü bir performans artışı sergilemiş; derin sinir ağları, gradient boosting makineleri ve topluluk yöntemleri pek çok klasik istatistiksel modeli geride bırakmıştır. Ne var ki bu başarı beraberinde kritik bir güven sorununu da getirmektedir: tahminlerin nasıl ve neden üretildiğinin anlaşılabilmesi. Gradient boosting ve derin ağlar gibi yüksek kapasiteli modeller özellik uzayında son derece karmaşık ve doğrusal olmayan karar sınırları öğrenebilmekte, ancak bu sınırların yorumlanması insan sezgisinin çok ötesine geçmektedir.

Bu durum yalnızca akademik bir kaygı değil, aynı zamanda endüstriyel ve yasal bir zorunluluktur. Avrupa Birliği'nin 2024 yılında yürürlüğe giren Yapay Zeka Yasası (EU AI Act, Regulation 2024/1689) yüksek riskli yapay zeka sistemleri için açıklanabilirlik zorunluluğu getirmekte; GDPR'ın 'açıklanma hakkı' ilkesini somutlaştırmaktadır. Kredi değerlendirme, tıbbi teşhis ve adli bilişim gibi yüksek riskli alanlarda modelin kararını gereçlendirebilmek artık yasal bir yükümlülüktür (European Parliament, 2024). Nitekim Yalçın (2025a), subklinik mastitis tespitine yönelik yorumlanabilir makine öğrenmesi modellerinin klinik kararları destekleme potansiyelini ortaya koyarken, model çıktılarının

yorumlanabilirliğinin tanısal güvenilirlik açısından kritik önemini vurgulamıştır.

Bu bölümde, yorumlanabilir yapay zeka ekosisteminin en yaygın kullanılan iki post-hoc yöntemi olan LIME (Local Interpretable Model-Agnostic Explanations) ve SHAP (SHapley Additive exPlanations) derinlemesine incelenmektedir. Her iki yöntemin matematiksel temelleri, algoritmik yapıları, güçlü ve zayıf yönleri ile hangi koşullarda hangi yöntemin tercih edilmesi gerektiği ele alınmaktadır. Python ekosisteminde bu yöntemleri uygulayan başlıca kütüphaneler ise lime, shap, interpret ve alibi olarak sıralanabilir.

Yorumlanabilirlik Ekosistemi: Temel Kavramlar

XAI literatüründe sıkça karıştırılan bazı kavramları netleştirmek gerekmektedir. Yorumlanabilirlik (interpretability), bir modelin iç işleyişinin doğrudan insan tarafından anlaşılabilmesi anlamına gelir; karar ağaçları ve lojistik regresyon bu kategoriye girer. Açıklanabilirlik (explainability) ise kara kutu bir modelin çıktısını post-hoc yöntemlerle gerekçelendirebilme kapasitesini ifade eder; LIME ve SHAP bu kategorinin öncü araçlarıdır (Gunning ve diğerleri, 2019).

Post-hoc açıklama yöntemleri iki temel boyuta göre sınıflandırılır. Birincisi kapsam açısından; lokal açıklamalar tek bir tahmin örneğini açıklarken, global açıklamalar modelin genel davranışını ortaya koyar. İkincisi model bağımlılığı açısından; model-agnostik yöntemler yalnızca tahmin fonksiyonunu kullanırken, model-spesifik yöntemler belirli bir model mimarisinin iç yapısından yararlanır. LIME yalnızca lokal açıklama sunarken SHAP her iki düzeyi de kapsayabilmektedir (Ali ve diğerleri, 2023).

LIME: Yerel Yorumlanabilir Model-Agnostik Açıklamalar

LIME, 2016 yılında Ribeiro, Singh ve Guestrin tarafından ACM SIGKDD konferansında sunulmuştur. Yöntemin temel felsefi çıkış noktası şudur: karmaşık bir modeli küresel düzeyde doğrusal bir modelle yaklaştırmak pratikte başarısız olurken, belirli bir tahmin noktasının çevresindeki dar komşulukta yerel bir yaklaştırma yapmak çok daha güvenilirdir. Bu yaklaşım ‘trust the prediction, not the model’ sloganıyla özetlenmiştir (Ribeiro ve diğerleri, 2016).

LIME’in matematiksel temeli, aşağıdaki optimizasyon problemine dayanır:

$$\zeta(x) = \underset{g \in G}{\operatorname{argmin}} L(f, g, \pi_x) + \Omega(g)$$

Burada f açıklanmak istenen kara kutu model, $g \in G$ yorumlanabilir modeller sınıfından bir aday (genellikle ridge regresyonu veya karar ağacı), π_x ise x noktası etrafında tanımlanan yerel ağırlık çekirdeğidir. $\Omega(g)$, g ’nin karmaşıklık cezasını ifade eder ve açıklamada kullanılacak özellik sayısını sınırlar. L kaybı, kara kutu modelin ve yerel yaklaştırıcının π_x ile ağırlıklandırılmış bölgedeki uyumsuzluğunu ölçer.

Algoritma işleyişi beş adımda özetlenebilir. İlk adımda açıklanacak örnek x belirlenir ve yorumlanabilir temsili oluşturulur: tabular veri için binary vektör, metin için kelime varlığı, görüntü için ise süperpiksel maskesi kullanılır. İkinci adımda x ’in yorumlanabilir temsili etrafında rastgele pertürbasyonlar örneklenir ve her pertürbasyon için kara kutu modelin tahmini hesaplanır. Üçüncü adımda pertürbasyonlar, x ’e yakınlıklarına göre üstel çekirdek fonksiyonu aracılığıyla ağırlıklandırılır. Dördüncü adımda ağırlıklı veri kümesi üzerinde yorumlanabilir model eğitilir. Beşinci ve son adımda yorumlanabilir modelin katsayıları özellik önem değerleri olarak raporlanır.

LIME'in Güçlü Yönleri

- Tam model-agnostik yapısı sayesinde herhangi bir kara kutu modele uygulanabilir.
- Metin ve görüntü verileri için `lime.lime_text.LimeTextExplainer` ve `lime.lime_image.LimeImageExplainer` bileşenleri mevcuttur.
- Açıklama çıktısı teknik olmayan paydaşlara aktarımda kolaylık sağlar.
- Hesaplama maliyeti KernelSHAP'a kıyasla genellikle daha düşüktür.

LIME'in Zayıf Yönleri ve Eleştiriler

LIME'in en temel eleştirisi kararsızlık (instability) sorunudur. Aynı örnek için farklı çalıştırmalarda anlamlı ölçüde farklı özellik ağırlıkları elde edilebilir. Bu durum, yüksek özellik sayısında, yetersiz pertürbasyon sayısında ve yanlış çekirdek genişliği (`kernel_width`) seçiminde belirginleşir (Galinkin, 2022). Pertürbasyonlar, özellikler arası korelasyonu dikkate almadığı için gerçekçi olmayan veri noktaları üretilebilmekte ve bu da açıklama geçerliliğini tehlikeye atabilmektedir.

- Küresel açıklama desteği yoktur; her örnek ayrı ayrı açıklanmak zorundadır.
- Çekirdek genişliği seçimi için standart bir kural mevcut değildir.
- Açıklamalar yapısal geçerliliği (fidelity) garanti etmez.

SHAP: Shapley Değerlerine Dayalı Birleşik Açıklama Çerçevesi

SHAP, 2017 yılında Lundberg ve Lee tarafından NeurIPS konferansında sunulmuş ve kısa sürede XAI literatürünün en etkili yöntemi hâline gelmiştir. Teorik temeli, kooperatif oyun teorisinden gelen Shapley değerlerine dayanır. Lloyd Shapley, 1953 yılında bir

koalisyon oyununda her oyuncunun adil payının nasıl hesaplanacağını aksiyomatik olarak tanımlamış; bu katkı 2012 Nobel Ekonomi Ödülü'nün bir parçasını oluşturmuştur.

Makine öğrenmesi bağlamına uyarlandığında: oyuncular özelliklerdir, koalisyonlar özellik alt kümeleridir, oyunun kazancı ise modelin tahmin değeridir. i . özelliğin Shapley değeri, o özelliğin tüm olası özellik koalisyonlarına marjinal katkısının ağırlıklı ortalaması olarak hesaplanır:

$$\phi_i(f) = \sum_{S \subseteq F \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|F|-|S|-1)!}{|F|!} \times [f(S \cup \{i\}) - f(S)]$$

Lundberg ve Lee (2017), bu formülün lokal doğruluk (local accuracy), yokluk (missingness) ve tutarlılık (consistency) aksiyomlarını sağlayan tek toplamsal özellik atıf yöntemi olduğunu kanıtlamıştır. Bu teorik güvence SHAP'ı LIME'dan temelden ayıran temel özelliktir. Tam hesaplama $2^{|F|}$ alt küme gerektirdiğinden üstel karmaşıklığa sahiptir; ancak SHAP kütüphanesi model türüne özel verimli hesaplama yöntemleri sunmaktadır.

SHAP Varyantları

SHAP kütüphanesi, farklı model türleri için optimize edilmiş birden fazla hesaplayıcı sunmaktadır. Bu çeşitlilik hem doğruluk hem de hesaplama verimliliği açısından büyük avantaj sağlamaktadır.

Tablo 1. SHAP Hesaplayıcı Türleri ve Özellikleri

Hesaplayıcı	Hedef Model	Yöntem	Karmaşıklık
KernelSHAP	Model-agnostik	Ağırlıklı regresyon	$O(2^n)$ → örnekleme
TreeSHAP	Ağaç modelleri (XGBoost, RF, LGB)	Tam hesaplama, ağaç yapısı	$O(T \times L^2)$ polinom
DeepSHAP	Derin sinir ağları	DeepLIFT + Shapley	Lineer ölçekli
LinearSHAP	Lineer modeller	Analitik + korelasyon	$O(n^2)$
PermutationSHAP	Model-agnostik	Monte Carlo permütasyon	$O(M \times n \times k)$

Kaynak: Lundberg ve Lee (2017); Lundberg ve diğerleri (2020).

SHAP'ın Güçlü Yönleri

- Shapley aksiyomları sayesinde teorik olarak en sağlam post-hoc açıklama yöntemidir.
- Hem lokal hem de global açıklamalar üretir; küresel önem sıralaması ortalama mutlak SHAP değerleri üzerinden hesaplanır.
- TreeSHAP ile ağaç modelleri için tam ve polinom zamanlı hesaplama mümkündür.
- Beeswarm, waterfall, dependence ve force plot gibi zengin görselleştirme araçları sunar.
- GDPR ve EU AI Act uyumluluğu için hukuki bağlamlarda tercih edilen yöntemdir.

SHAP'ın Zayıf Yönleri

- KernelSHAP hesaplama maliyeti yüksektir; gerçek zamanlı açıklama gerektiren üretim sistemlerinde sorun yaratabilir.
- Yüksek korelasyonlu özellikler varlığında değerler, bireysel katkıları keyfi biçimde dağıtabilir.
- KernelSHAP, arka plan veri seti seçimine duyarlıdır.
- SHAP değerleri korelasyonu yansıtır; nedensellik kanıtı değildir.

LIME ve SHAP: Kapsamlı Karşılaştırma

İki yöntemin teorik ve pratik boyutlardaki temel farklılıkları sistematik bir biçimde ele alınmadan önce, her birinin hangi sorulara yanıt verdiğini netleştirmek gerekmektedir. LIME 'Bu tahmin neden bu şekilde üretildi ve bunu yerel olarak nasıl yorumlayabilirim?' sorusuna odaklanırken, SHAP 'Bu özelliğin ortalama beklentiye katkısı ne kadardır?' sorusunu aksiyomatik bir çerçevede yanıtlar. Bu temel ayrım, yöntemlerin uygulama alanlarını doğrudan belirlemektedir (Salih ve diğerleri, 2024).

Tablo 2. LIME ve SHAP: Teorik ve Pratik Boyutlarda Karşılaştırma

Boyut	LIME	SHAP
Teorik temel	Yerel lineer yaklaşırma	Kooperatif oyun teorisi
Aksiyomatik garanti	Yok	Lokal doğruluk, yokluk, tutarlılık
Açıklama kapsamı	Yalnızca lokal	Lokal ve global
Model-agnostik mi?	Evet	KernelSHAP ile evet; TreeSHAP için hayır
Etkileşim analizi	Desteklemiyor	SHAP interaction values
Çıktı kararlılığı	Düşük (stokastik)	Yüksek (TreeSHAP deterministik)
Hesaplama maliyeti	Orta	Düşük (TreeSHAP) – Yüksek (KernelSHAP)
Yasal uyumluluk	Sınırlı	EU AI Act ve GDPR için tercih edilen

Kararlılık Analizi

LIME'in kararsızlık sorunu XAI literatüründe kapsamlı biçimde belgelenmiştir. Aynı örnek için birden fazla LIME çalıştırmasının ciddi varyans gösterebileceği, özellikle yüksek özellik boyutunda, yetersiz pertürbasyon sayısında ($n < 1000$) ve uygunsuz çekirdek genişliği değerinde bu durumun belirginleştiği görülmektedir. Bu sorunu gidermek amacıyla S-LIME (Zhou ve diğerleri, 2021), GLIME (Tan ve diğerleri, 2023) ve BayLIME

(Zhao ve diğeri, 2021) gibi varyantlar geliştirilmiştir. Bununla birlikte bu varyantların hiçbiri henüz standart lime kütüphanesine entegre edilmemiştir.

SHAP ise özellikle TreeSHAP aracılığıyla deterministik sonuçlar üretir. KernelSHAP'ta örnekleme kaynaklı sınırlı varyans gözlemlense de bu, hesaplama sayısı artırılarak azaltılabilir. Adli bilişim raporları ve yasal belgeler için SHAP açıklamaları çok daha güvenilir kabul edilmektedir.

Veri Türüne Göre Yöntem Seçimi

Tabular veride her iki yöntem de rahatlıkla uygulanabilir; ancak SHAP, korelasyonlu özellikler varlığında daha tutarlı sonuçlar üretir. LIME, özellikler arası bağımsızlık varsayımı nedeniyle korelasyonlu yapılarda gerçekçi olmayan pertürbasyonlar üretebilmektedir. Bu bağlamda Yalçın ve Öztürk (2026), normalleştirme yöntemlerinin aykırı değerler karşısındaki sağlamlığını ve makine öğrenmesi model performansı üzerindeki etkilerini sistematik bir simülasyon çalışmasıyla incelemiş; veri ön işleme tercihlerinin özellik önem sıralamalarını doğrudan etkilediğini göstermiştir. Çalış ve diğeri (2026) ise su kalitesi indeksi tahmini bağlamında farklı makine öğrenmesi modellerinin karşılaştırmalı performans analizini gerçekleştirmiş, model seçiminin açıklanabilirlik stratejisi üzerindeki yansımalarını değerlendirmiştir.

Metin sınıflandırmada LIME, lime.lime_text.LimeTextExplainer aracılığıyla kelime düzeyinde yorumlama sunar ve pratikte yaygın kullanım alanı bulmaktadır. SHAP'ın metin desteği görece daha kısıtlı olup TransformersSHAP gibi özel araçlar gerekmektedir. Görüntü açıklamalarında ise LIME, süperpiksel tabanlı yaklaşımıyla hızlı ve sezgisel sonuçlar üretirken, SHAP'ın DeepSHAP ve GradientSHAP varyantları piksel düzeyinde daha ayrıntılı atıflar sağlar. Zaman serisi verisinde her iki

yöntem de temel formlarında doğrudan uygulanamaz; model-spesifik uyarlamalar gerekmektedir.

Karar Çerçevesi: Yöntem Seçim Rehberi

Hangi yöntemin kullanılacağına ilişkin karar, yalnızca teknik tercihlerden değil; yasal gereksinimler, hedef kitle, model türü ve hesaplama kısıtları gibi çok boyutlu faktörlerden etkilenmektedir. Aşağıdaki tablo, yaygın uygulama senaryoları için pratik bir rehber niteliği taşımaktadır.

Tablo 3. Uygulama Senaryolarına Göre Yöntem Seçim Rehberi

Senaryo	Önerilen	Gerekçe
Ağaç tabanlı model (XGBoost, RandomForest, LightGBM)	TreeSHAP	Tam, hızlı, deterministik
Derin sinir ağı	DeepSHAP / GradientSHAP	Mimari-uyumlu, etkili
Metin sınıflandırma	LimeTextExplainer	Kelime düzeyinde sezgisel
Görüntü sınıflandırma	LIME veya GradientSHAP	Her ikisi de etkili
Hukuki / düzenleyici rapor	SHAP	Aksiyomatik, yeniden üretilebilir
Hızlı prototip açıklama	LIME	Hızlı kurulum, az bağımlılık

Global önem analizi	SHAP	Ortalama SHAP ile tutarlı sıralama
Gerçek zamanlı açıklama	LIME veya LinearSHAP	Düşük gecikme
Özellik etkileşimi	SHAP interaction values	LIME desteklemez
Yüksek korelasyonlu özellikler	SHAP (interventional)	Daha sağlam

SHAP Etkileşim Değerleri

Standart SHAP değerleri her özelliğin ana etkisini ölçerken, SHAP etkileşim değerleri iki özellik arasındaki ikili etkileşim katkısını ayırtmaktadır. Bu, simetrik bir ($n_{\text{örnekler}} \times n_{\text{özellikler}} \times n_{\text{özellikler}}$) matris biçiminde üretilir ve TreeSHAP ile verimli biçimde hesaplanabilir. `shap.TreeExplainer().shap_interaction_values()` çağrısıyla erişilebilen bu değerler, özellikle biyomedikal ve finans alanlarında özellik çiftleri arasındaki ilişkileri inceleme açısından güçlü bir analitik araç sunmaktadır (Lundberg ve diğerleri, 2020). Benzer bir açıklayıcı yaklaşım olan PLS-SEM (kısmi en küçük kareler yapısal eşitlik modellemesi), değişkenler arası doğrusal ilişki yapılarını global düzeyde yorumlanabilir biçimde ortaya koyma kapasitesiyle SHAP'ın global açıklama işleviyle tamamlayıcı bir ilişki içindedir. Nitekim Yalçın (2025b) süt kalitesi ve verim dinamiklerini entegre eden sürdürülebilir bir PLS-SEM çerçevesi geliştirmiş; Saraçoğlu ve diğerleri (2025) PLS-SEM'i hayvan refahı değerlendirmesine, Doğan ve diğerleri (2021) ise yeraltı suyu kalitesinin modellenmesine uygulamıştır. Bu çalışmalar, yorumlanabilir modellemenin farklı disiplinlerdeki güçlü potansiyelini

örneklemektedir. PLS-SEM de SHAP benzeri bir çıktı oluşturduğundan boyutlu yapılarda PLS-SEM kullanılabilir.

LIME ve SHAP'ın Birlikte Kullanımı

İki yöntem birbirini dışlamaz; aksine tamamlayıcı bilgi sağlar. Pratikte önerilen strateji şu üç adımdan oluşmaktadır: Birinci adımda SHAP ile modelin global davranışı analiz edilir ve en önemli özellikler tespit edilir. İkinci adımda belirli bir bireysel karar için LIME ile hızlı ve sezgisel bir lokal açıklama üretilir. Üçüncü adımda iki yöntemin sonuçlarının tutarlılığı, Spearman sıralama korelasyonu gibi ölçütlerle değerlendirilerek açıklamaların güvenilirliği doğrulanır. Bu tamamlayıcı kullanım hem teknik güvenilirlik hem de operasyonel hız açısından optimum bir yaklaşım oluşturmaktadır.

Güncel Gelişmeler ve Gelecek Yönelimleri

LIME'daki kararsızlık sorununa yönelik 2023-2026 döneminde birden fazla varyant geliştirilmiştir. GLIME (2023), özellik bağımlılıklarını modelleyerek daha gerçekçi komşuluk örneklemesi yapar. BayLIME, Bayes çıkarımını LIME çerçevesiyle entegre ederek belirsizlik kestirimi ekler. AKDE-LIME (2026), yerel veri dağılımını dikkate alan adaptif çekirdek yoğunluğu tahminiyle kararlılığı artırır. Öte yandan SHAP ekosisteminde de önemli gelişmeler yaşanmaktadır: ContextualSHAP, SHAP değerlerine doğal dil açıklamaları ekleyerek teknik olmayan paydaşlar için daha erişilebilir çıktılar üretmeyi amaçlamakta; büyük dil modelleri (LLM) ile entegrasyon XAI araştırmalarının hızla büyüyen yeni bir kolunu oluşturmaktadır.

Nedensel açıklanabilirlik, alanın en önemli açık araştırma sorunlarından birini oluşturmaktadır. Mevcut LIME ve SHAP uygulamaları korelasyonu ölçer; nedenselliği değil. CausalSHAP ve karşıolgusal (counterfactual) açıklama yöntemleri bu boşluğu doldurmaya çalışmakta olup önümüzdeki yıllarda bu alanda önemli

gelişmelerin yaşanması beklenmektedir. Ayrıca EU AI Act'in 2026 yılından itibaren tam uygulamaya girmesiyle birlikte açıklanabilirlik araçlarının standartlaşması ve sertifikasyonu gündeme gelmesi beklenmektedir.

Sonuç

Bu bölümde, makine öğrenmesi yorumlanabilirliğinin iki temel post-hoc yöntemi olan LIME ve SHAP matematiksel temelleri, algoritmik yapıları, güçlü ve zayıf yönleri ile uygulama senaryoları açısından kapsamlı biçimde ele alınmıştır. Temel çıkarımlar şu şekilde özetlenebilir: LIME, sezgisel yapısı ve hızlı kurulumu nedeniyle prototipleme ve metin-görüntü açıklamalarında avantaj sunarken, kararsızlık sorunu kritik bağlamlarda dikkatli parametre seçimi gerektirmektedir. SHAP ise aksiyomatik güvencesi, global-lokal açıklama desteği ve deterministik sonuçlarıyla üretim sistemleri ve yasal uyumluluk raporları için daha uygun bir araçtır. İki yöntemin tamamlayıcı biçimde kullanılması optimum bir strateji oluşturmaktadır.

Veri bilimcileri ve makine öğrenmesi uygulayıcıları için temel öneri şudur: model türüne, veri yapısına ve bağlamın yasal gereksinimlerine göre doğru explainer'ı seçmek, açıklama kalitesini doğrudan belirlemektedir. Ağaç modelleri için TreeSHAP, derin ağlar için DeepSHAP ve metin verileri için LimeTextExplainer ilk tercih olmalıdır. Her iki yöntemin de korelasyonu yansıttığı ve nedensellik kanıtı sunmadığı gerçeğinin paydaşlara açıkça iletilmesi, güvenilir ve etik yapay zeka sistemleri geliştirmenin ön koşuludur.

Kaynakça

Ali, S., Abuhmed, T., El-Sappagh, S., Muhammad, K., Alonso-Moral, J., Confalonieri, R., Guidotti, R., Del Ser, J., Díaz-Rodríguez, N., & Herrera, F. (2023). Explainable artificial intelligence (XAI): What we know and what is left to attain trustworthy artificial intelligence. *Information Fusion*, 99, 101805. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2023.101805>

Angiulli, F., Fassetti, F., Miele, S., & Nisticò, R. (2026). LIME-LLM: Probing models with fluent counterfactuals, not broken text. arXiv:2601.11746.

Basu, S. (2025). Explaining ML predictions with SHAP. *Proceedings of the Python in Science Conference (SciPy 2025)*. <https://doi.org/10.25080/mhum9729>

Çalış, B., Bayhan, İ., Yalçın, H., Öztürk, İ., & Yeşilnacar, M. İ. (2026). Comparative performance analysis of machine learning models for predicting the weighted arithmetic water quality index. *Water*, 18(6), 696. <https://doi.org/10.3390/w18060696>

Chen, Z. (2024). The principle of tree explainer and its associated validation. *5th International Conference on Computer Information and Big Data Applications (CIBDA 2024)*. <https://doi.org/10.1145/3671151.3671352>

Dwivedi, R., Dave, D., Naik, H., Singhal, S., Omer, R., Patel, P., Qian, B., Wen, Z., Shah, T., Morgan, G., & Raza, A. (2023). Explainable AI (XAI): Core ideas, techniques, and solutions. *ACM Computing Surveys*, 55(9), 1–33. <https://doi.org/10.1145/3561048>

Doğan, Z., Yalçın, H., Yenigün, İ., & Bilgili, A. V. (2021). Kısmi en küçük kareler yapısal eşitlik modelinin yeraltı suyu kalitesinin değerlendirilmesinde kullanımı. *Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi*, 12(1), 165–174.

European Parliament. (2024). Regulation (EU) 2024/1689 laying down harmonised rules on artificial intelligence (AI Act). Official Journal of the European Union, L 1689. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32024R1689>

European Parliament. (2016). Regulation (EU) 2016/679 on the protection of natural persons with regard to the processing of personal data (GDPR). Official Journal of the European Union, L 119, 1–88.

Galinkin, E. (2022). Robustness and usefulness in AI explanation methods. arXiv:2203.03729.

Gunning, D., Stefik, M., Choi, J., Miller, T., Stumpf, S., & Yang, G.-Z. (2019). XAI — Explainable artificial intelligence. *Science Robotics*, 4(37), eaay7120. <https://doi.org/10.1126/scirobotics.aay7120>

Holzinger, A., Saranti, A., Molnar, C., Biecek, P., & Samek, W. (2022). Explainable AI methods — A brief overview. In A. Holzinger, R. Goebel, R. Fong, T. Moon, K.-R. Müller, & W. Samek (Eds.), *xxAI — Beyond explainable AI* (pp. 13–38). Springer.

Knab, T., Schiele, B., & Fritz, M. (2025). Beyond pixels: Enhancing LIME with hierarchical features and segmentation foundation models. arXiv:2403.07733v4.

Lundberg, S. M., Erion, G., Chen, H., DeGrave, A., Prutkin, J. M., Nair, B., Katz, R., Himmelfarb, J., Bansal, N., & Lee, S.-I. (2020). From local explanations to global understanding with explainable AI for trees. *Nature Machine Intelligence*, 2(1), 56–67. <https://doi.org/10.1038/s42256-019-0138-9>

Lundberg, S. M., & Lee, S.-I. (2017). A unified approach to interpreting model predictions. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30. arXiv:1705.07874.

Mitchell, R., Cooper, J., Frank, E., & Holmes, G. (2022). Sampling permutations for Shapley value estimation. *Journal of Machine Learning Research*, 23(43), 1–46.

Molnar, C. (2022). *Interpretable machine learning: A guide for making black box models explainable* (2nd ed.). <https://christophm.github.io/interpretable-ml-book/>

Ribeiro, M. T., Singh, S., & Guestrin, C. (2016). ‘Why should I trust you?’: Explaining the predictions of any classifier. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 1135–1144. <https://doi.org/10.1145/2939672.2939778>

Saadatfar, H., Kiani-Zadegan, Z., & Ghahremani-Nezhad, B. (2026). Improving LIME stability via density-awareness: Evaluation and comparison of AKDE-LIME. *Applied Artificial Intelligence*, 40. <https://doi.org/10.1080/08839514.2026.2640686>

Saraçoğlu, M. E., Yurtseven, S., & Yalcin, H. (2025). Application of PLS-SEM in assessment of the effect of animal welfare. *Medycyna Weterynaryjna*, 81, 347–356.

Salih, A., Boscolo Galazzo, I., Gkontra, P., Lekadir, K., Petersen, S. E., & Ferrante, E. (2024). A perspective on explainable artificial intelligence methods: SHAP and LIME. *Advanced Intelligent Systems*, 2400304. <https://doi.org/10.1002/aisy.202400304>

Tan, S., Bhatt, U., Koch, J., Bhatt, A., Wiegand, T., & Samek, W. (2023). GLIME: General, stable and local LIME explanation. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36.

Zhao, X., Huang, W., Huang, X., Robu, V., & Flynn, D. (2021). BayLIME: Bayesian local interpretable model-agnostic explanations. *Proceedings of the 37th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI 2021)*.

Zhou, Z., Hooker, G., & Wang, F. (2021). S-LIME: Stabilized-LIME for model explanation. Proceedings of the 27th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2429–2438.

Yalçın, H. (2025a). Interpretable machine learning models for early detection of subclinical mastitis using routine milk composition data. ISPEC Journal of Agricultural Sciences, 9(3), 830–843.

Yalçın, H. (2025b). A sustainable partial least squares structural equation modeling framework for integrating milk quality and yield dynamics in Awassi ewes. Journal of Dairy Science.

Yalçın, H., & Öztürk, İ. (2026). Aykırı değerlere karşı normalleştirme yöntemlerinin sağlamlığı ve makine öğrenmesi performansı üzerindeki etkileri: Sistematik bir simülasyon çalışması. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(2), 1129–1140.

