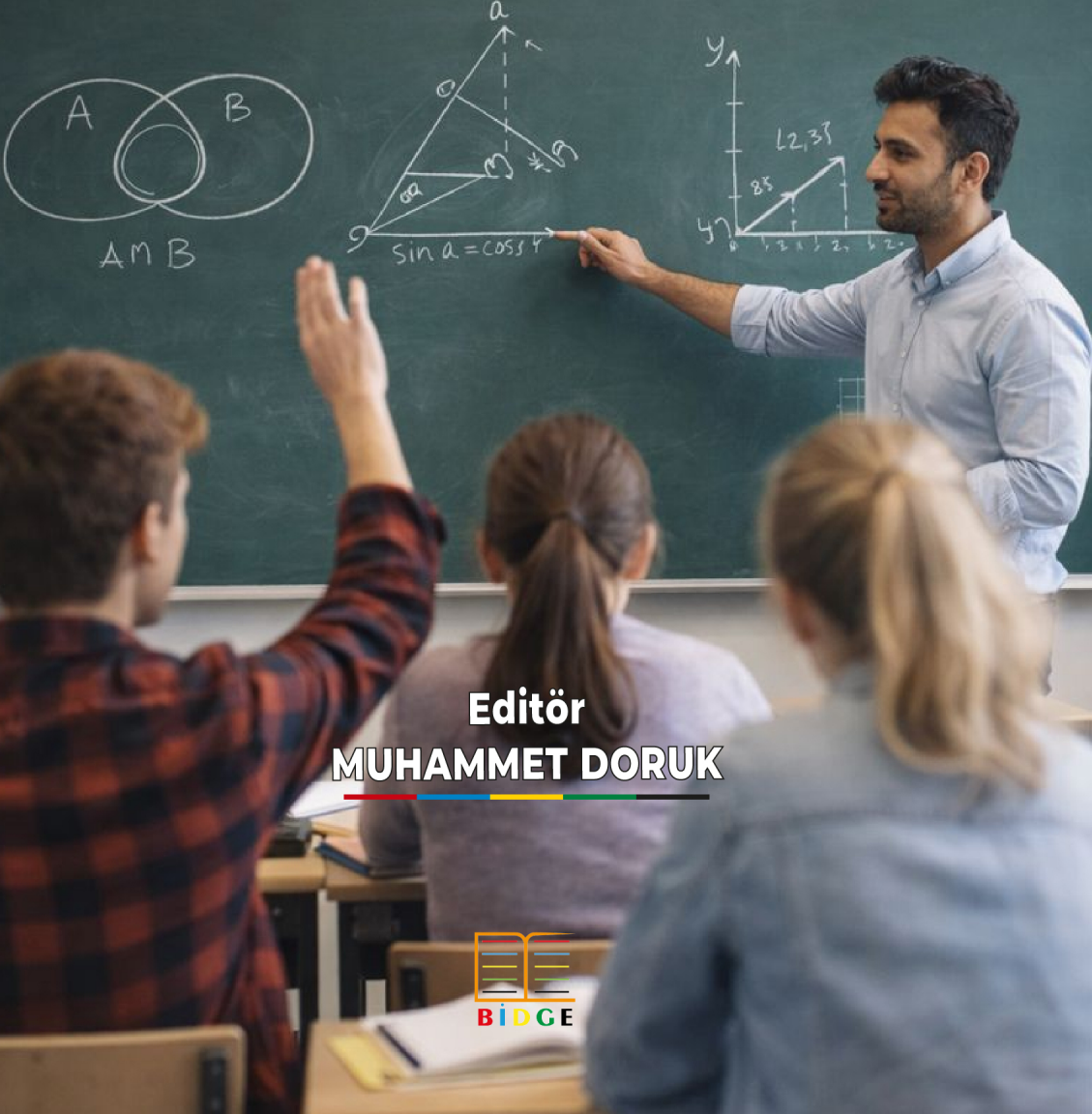


Matematik Eğitiminde Akıl Yürütme Odaklı Yaklaşımlar



Editör
MUHAMMET DORUK

BİDGE Yayınları

Matematik Eğitiminde Akıl Yürütme Odaklı Yaklaşımlar

Editör: MUHAMMET DORUK

ISBN: -

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 2025-12-25

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /
Ankara



ÖNSÖZ

Matematik eğitimi alanında son yıllarda yapılan çalışmalar, matematiksel öğrenmenin yalnızca doğru sonuçlara ulaşma süreci olarak ele alınamayacağını; bireylerin bu sonuçlara hangi düşünme yolları ve akıl yürütme süreçleriyle ulaştıklarının en az sonuçlar kadar önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Bu bağlamda akıl yürütme, matematiksel bilginin yapılandırılması, anlamlandırılması ve gerekçelendirilmesi süreçlerinde merkezi bir rol üstlenmektedir.

Matematiksel akıl yürütme; bireyin matematiksel ilişkileri fark etmesini, bu ilişkiler arasında bağlantılar kurmasını, genellemelere ulaşmasını ve düşüncelerini tutarlı biçimde temellendirmesini içeren çok boyutlu bir bilişsel süreçtir. Güncel matematik eğitimi araştırmaları, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının matematiksel düşüncelerini daha görünür kılmayı; sezgisel, örnek temelli ve biçimsel düşünme biçimleri arasındaki geçişleri anlamayı amaçlamaktadır. Bu yönüyle akıl yürütme, matematiksel düşünmenin doğasını incelemede temel bir araştırma odağı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Elinizdeki bu kitap, matematik eğitiminde akıl yürütme odaklı yaklaşımları, bireylerin farklı matematiksel bağlamlarda sergiledikleri akıl yürütme süreçlerini ortaya koymayı ve anlamayı amaçlayan çalışmalar çerçevesinde ele almaktadır. Kitapta yer alan araştırmalar, matematiksel düşünmenin çeşitli boyutlarını betimlemeye, bu süreçlerde ortaya çıkan güçlükleri ve eğilimleri incelemeye ve akıl yürütmenin yapısal özelliklerini kuramsal bir perspektifle tartışmaya odaklanmaktadır.

Bu yönüyle eser, matematik eğitimi alanında çalışan araştırmacılar, lisansüstü öğrenciler ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini analiz etmeye yönelik çalışmalarına kuramsal bir zemin sunmayı hedeflemektedir. Aynı zamanda matematiksel akıl yürütmenin doğasına ilişkin farklı

yaklaşımları bir araya getirerek, alan yazındaki tartışmaların derinleşmesine katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

Doç. Dr. MUHAMMET DORUK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

İÇİNDEKİLER

DRİSCOLL PERSPEKTİFİYLE ARİTMETİK TEN CEBİRE GEÇİŞTE BİLİŞSEL BİR REHBER: ZİHNİN CEBİRSEL ALİŞKANLIKLARI	1
--	---

EMİNE GÖKKURT, TUĞBA HAN ŞİMŞEKLER DİZMAN

ÖĞRETMEN ADAYLARININ ARGÜMANTASYON İLE İSPAT SÜREÇLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ: TEK DOĞAL SAYILARIN TOPLAMI ÖRNEĞİ	38
--	----

MUHAMMET DORUK, GÜL MİNE BAYRAM GÜN

ORAN-ORANTI BAĞLAMINDA AKIL YÜRÜTME: SINIF ÖĞRETMENİ ADAYLARININ ÇÖZÜM YOLLARI	61
---	----

ŞEVVAL NAZ YİĞİT, MUTLU PIŞKİN TUNÇ

ÖĞRETMEN ADAYLARININ KOVARYASYONEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİ VE YAŞADIKLARI GÜÇLÜKLER	88
--	----

MUHAMMET DORUK, GÜL MİNE GÜN

BÖLÜM 1

DRİSCOLL PERSPEKTİFİYLE ARİTMETİKTEN CEBİRE GEÇİŞTE BİLİŞSEL BİR REHBER: ZİHNİN CEBİRSEL ALIŞKANLIKLARI

EMİNE GÖKKURT¹
TUĞBA H. ŞİMŞEKLER DİZMAN²

Giriş

Matematik, tarih boyunca hem bağımsız bir bilim alanı olarak hem de eğitim kurumlarında okutulan temel derslerden biri olarak varlığını sürdürmüş ve insan yaşamında önemli bir yer edinmiştir (Karakoca, 2011). Günümüzde ise bilim ve teknolojiye yaşanan hızlı gelişmelerde matematiğin belirleyici bir rol üstlenmesi, bu alana verilen değeri artırmış ve öğretimini ön plana çıkarmıştır.

Matematik öğretimi, öğretim sürecinde yürütülen etkinlikleri ve bu süreçte öğrencilere kazandırılması hedeflenen zihinsel becerileri içermektedir. Matematik öğretiminin temel hedefi, öğrencilere matematiksel düşünme sistemi kazandırmanın yanı sıra,

¹ YL Öğrencisi, Gaziantep Üniversitesi, Matematik Eğitimi, Orcid: 0009-0001-7333-1201

² Doç. Dr., Gaziantep Üniversitesi, Matematik Eğitimi, Orcid: 0000-0003-4709-6102

öğretim sürecinde problem çözme, akıl yürütme, ilişkilendirme, genelleme yapabilme, iletişim kurma gibi temel matematiksel becerilerin geliştirilmesi sağlamaktır. Ayrıca, öğrencilerin bu beceriler doğrultusunda kazandıkları bilgi ve yetenekleri, hem duyuşsal hem de psikomotor gelişimle destekleyerek gerçek yaşam problemlerine aktarabilmeleri hedeflenmektedir (Sayı, 2018). Matematik öğretimi yalnızca temel bilgi ve becerilerin kazandırılmasıyla sınırlı kalmayıp, bireylerin düşünme biçimlerini, problem çözme yetilerini ve dünyaya bakış açılarını geliştiren önemli bir süreçtir (Karakoca, 2011). Yapılandırmacı yaklaşım doğrultusunda öğrencilerin matematiksel bilgiyi kendi deneyimleri üzerinden inşa etmeleri, öğrenme sürecinde aktif katılım göstermeleri ve farklı temsiller kullanarak matematiksel ilişkileri keşfetmeleri önemsenmektedir (NCTM, 2000). Bununla birlikte güncel matematik öğretiminde teknoloji destekli öğrenme ortamları, işbirlikçi çalışmalar ve günlük yaşamla bağlantılı problem durumları da öne çıkmaktadır (Bozkurt ve Koyuncu, 2021). Bu bakış açısı, matematiğin öğrenciler için yalnızca soyut bir bilgi alanı olmaktan çıkıp yaşam becerilerine katkı sağlayan bir disiplin hâline gelmesine hizmet etmektedir.

Matematik öğrenme ve öğretme sürecinin hedeflerini, içeriğini, yöntemlerini ve değerlendirme ölçütlerini belirleyerek öğretim faaliyetlerine yön veren temel bir rehber matematik öğretim programlarıdır. İyi yapılandırılmış bir öğretim programı, öğrencilerin yalnızca matematiksel bilgi edinmelerini değil; aynı zamanda problem çözme, akıl yürütme, modelleme ve iletişim gibi üst düzey bilişsel beceriler geliştirmelerini de amaçlamaktadır (Altun, 2020). Bu doğrultuda 2024 yılında yürürlüğe giren Türkiye Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında matematik öğretimi; sadece akademik bilgi aktarımı olarak değerlendirilmemiş, öğrencilerin yaşam becerilerini geliştirmeyi, eleştirel ve yaratıcı düşünmeyi desteklemeyi ve bilgiyi günlük yaşamla ilişkilendirmeyi

hedefleyen bir yaklaşım benimsemiştir. Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında birey, çevre ve topluma ilişkin değerlerin desteklenmesi; matematik öğrenme-öğretme sürecinin bu değerlerle zenginleştirilerek bireye, topluma ve çevreye duyarlı bir niteliğe ulaşması hedeflenmektedir (MEB, 2024). Türkiye Yüzyılı Maarif Modelinde (2024) Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı ile öğrencilerin ,

- Matematiksel muhakeme, problem çözme, temsil, veriyle çalışma ve veriye dayalı karar verme ile matematiksel araçları ve teknolojiyi etkili biçimde kullanma becerilerini geliştirmeleri,
- Kavramsal bilgi, sosyal-duygusal öğrenme ve okuryazarlık becerilerini matematik alan becerileriyle bütünleştirerek hem öğrenme sürecine hem de sonuçlarına yansıtmaları,
- Kazandıkları beceriler aracılığıyla matematiksel bilgiye ulaşmaları ve bilgilerini beceriye dönüştürmeleri,
- Matematik öğrenmeye yönelik eğilimlerinin bilincine varmaları ve bu eğilimleri geliştirmeleri,
- Sahip oldukları değerleri matematik öğrenme sürecine yansıtmaları ve matematik öğrenirken değerlerini zenginleştirmeleri,
- Elde ettikleri bilgi, beceri, eğilim ve değerleri farklı öğrenme alanlarına, diğer derslere ve günlük yaşamlarına aktarabilmeleri amaçlanmaktadır (MEB, 2024).

Programlar, öğretmenlere yol gösterici olması bakımından sınıf içi uygulamaların niteliğini artırırken, öğrencilerin öğrenme deneyimlerini de zenginleştirmektedir. Programların sınıf içi uygulayıcısı olan öğretmenler matematik öğretiminde önemli bir role sahiptir. Öğrencilerin matematikte başarılı olmaları ve bu dersin

etkili biçimde öğretilmesi, öğretmenlerin rol ve sorumluluklarıyla yakından ilişkilidir. Bu nedenle öğretmenlerin sahip olması gereken bilgi türleri, bu bilgilerin nasıl edinilip geliştirildiği, sınıf içi öğretimin niteliği ve öğretmenlerin mesleki yeterliklerini artırma yolları önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır (Agaç, 2018). Etkili bir matematik öğretim süreci için öğretmen yetiştirme faaliyetlerinin yanı sıra görevdeki öğretmenlerin meslek içi eğitimlerle desteklenmesi de büyük önem taşımaktadır.

Cebir ve Cebirin Matematikteki Yeri

“Cebir” teriminin kökeni, Ortaçağ’da kullanılan al-jabr wa’l muqabala ifadesine dayanmaktadır. Bu ifadenin bir parçası olan Arapça al-jabr kelimesi, denklemlerin çözümünde çıkarılan terimlerin diğer tarafa taşınmasını ifade ederken; al-muqabala ise denklemin her iki tarafındaki benzer terimlerin sadeleştirilmesi ya da birleştirilmesi anlamına gelmektedir (Oaks & Alkhateeb, 2006).

Bununla birlikte, cebir yalnızca dilsel bir terim olmanın ötesinde tarihsel bir gelişim sürecinin ürünüdür. Hint matematik geleneğinin önemli eserlerinden olan Siddhanta’nın Arapçaya çevrilmesiyle birlikte sıfır kavramı ortaya çıkmış ve bu gelişme, cebir adı verilen yeni bir matematik alanının doğuşuna zemin hazırlamıştır. Cebir, Muhammed B. Musa el Harizmi, Sind B. Ali ve Abdulhamid B. Vasi İbn Türk’ün yazdığı eserler aracılığıyla zenginleşmiş, bu eserler ‘yeniden kurma ve karşılaştırma’ anlamına gelen Kitab el Cebir vel-Mukabele başlığını taşımıştır. Söz konusu çalışmalar, cebiri aritmetikten bağımsız bir disiplin haline getirerek önemli bir dönüm noktası oluşturmuştur. Harizmi’nin cebir kitabının 12. yüzyılda Latinceye çevrilmesi ise Batı bilim geleneğinin ilerlemesine derin katkılar sağlamıştır. Harizmi’ye göre cebir düşüncesi, “mahluktan Halik’a gitme”, yani bilinenden bilinmeyene ulaşma anlayışının sistematik bir biçimde şekillendiği bir alan olarak ortaya çıkmıştır (Karakaya & Sekman, 2019).

Tarihsel gelişim süreci içinde ayrı bir disiplin olarak ortaya çıkan ve matematikte geniş bir yere sahip olan cebirin basit ve tek bir tanımı yoktur (Usiskin, 1995). Cebire yönelik karşımıza çıkan bazı tanımlar şu şekildedir: Kieran (1992), cebiri harfler aracılığıyla niceliklerin ve sayıların temsil edilmesini sağlayan bir araç olarak değerlendirmiştir. Reeuwijk (1995) cebirin, matematiğin tanımı en güç olan alt dallarından biri olduğunu ifade etmiş ve cebirin kapsamına nelerin girdiğine ilişkin evrensel ölçütlerin bulunmadığını vurgulamıştır. Dede ve Argün (2003)’e göre cebir; bir dil, bir problem çözme yöntemi ve bir düşünme aracıdır. Bu farklı işlevleri nedeniyle cebire yönelik tanımlar çeşitlilik göstermektedir. Hollingdale (2006), cebiri sayıları harflerle ifade eden bir matematik dalı olarak tanımlar. Ona göre cebirsel denklem, ölçeğin bir tarafına yapılan işlemlerin diğer tarafına aynı şekilde uygulanmasını temsil etmektedir. Akkaya ve Durmuş (2006)’a göre cebir, sayı ve semboller kullanarak incelenen ilişki veya ilişkileri genelleştirilmiş denklemler şeklinde ifade eden bir matematik dalıdır. Kaput (2008), cebirin yalnızca semboller üzerinde işlem yapmaktan ibaret olmadığını vurgulamıştır. Ona göre cebir, genelleme yapma, ilişkileri ifade etme ve bu ilişkileri farklı temsiller aracılığıyla ortaya koyma sürecidir. Yenilmez ve Avcu (2009), cebiri yapı, bağıntı ve nicelikleri konu edinen bir matematik dalı olarak tanımlar. Van de Walle ve arkadaşlarına (2013) göre cebir ile sayılar arasında güçlü bir ilişki bulunmaktadır. Bu ilişki, öğrencilerin temel işlemler içerisindeki örüntüleri fark ederek bunları genelleştirmelerine aracılık etmektedir. Araştırmacılar bu süreci “cebir yapmak” olarak tanımlamaktadır (Döğer, 2024).

Cebir, farklı biçimlerde de olsa binlerce yıldır öğrenme konusu olmuştur. Tarihsel süreç içerisinde yalnızca bağımsız bir matematik disiplini olarak değil, aynı zamanda diğer matematik alanlarının gelişimine katkı sunan bir düşünme biçimi olarak da önem kazanmış, matematik eğitiminin temel yapı taşlarından birini

olmuştur (Kieran, 1992; Usiskin, 1995). Bu bağlamda, cebirin matematikteki konumunun ve öneminin anlaşılması, hem disiplinin doğasını hem de eğitim süreçlerindeki rolünü anlamak açısından önem taşımaktadır.

Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli (TYMM, 2024) İlkokul ve Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde cebir erken dönemde kendini göstermektedir. Tematik bir yapı temelinde düzenlenen İlkokul ve Ortaokul matematik öğretim programında, matematiğe özgü beceriler, kavramlar, fikirler ve işlem ilişkilerinin bütüncül bir çerçevede sunulmasını amaçlamaktadır. Program, cebiri yalnızca ortaokul düzeyinde başlayan bir disiplin olarak değil, ilkokuldan itibaren işlem ilişkilerinin sorgulanması ve genellemeler yapılması yoluyla kazanılan bir düşünme biçimi olarak ele almaktadır. İlkokul düzeyinde program 5 temadan oluşmaktadır. Bunlar; “Sayılar ve Nicelikler”, “İşlemlerden Cebirsel Düşünmeye”, “Nesnelerin Geometrisi”, “Veriye Dayalı Araştırma” ve “Olayların Olasılığı ve Veriye Dayalı Araştırma” temalarıdır. Bu içerik, matematiği yalnızca işlem pratiğine indirgemek yerine, öğrencilerin erken yaşlarda cebirsel düşünme becerilerini geliştirmelerine fırsat tanımaktadır. Özellikle “İşlemlerden Cebirsel Düşünmeye” teması, ilkokul düzeyinde tüm sınıf kademelerinde (1–4. sınıflar) yer almakta olup, öğrencilerin matematiği yalnızca kurallar dizisi olarak değil; günlük yaşamla bağlantılı, sembolik, imgesel ve eylemsel bir süreç olarak kavramalarını hedeflemektedir. Böylece cebir, aritmetik öğrenmelerden soyut düşünmeye geçişi sağlayan bir köprü olarak görülmekte ve ortaokul düzeyinde cebir öğrenimine sağlam bir temel hazırlanmaktadır. Bu açıdan cebir ilkokul matematiğinin çekirdek temalarından birini oluşturur. İşlemlerden Cebirsel Düşünmeye temasında dört işlem ile bu işlemler arasındaki ilişki; problem çözme, problem kurma, zihinden işlem, tahminde bulunma ve eşitlik kavramı ele alınarak işlemsel akıcılık becerisinin kazandırılması amaçlanmıştır. Benzer şekilde TYMM Ortaokul Matematik

Programı'nda cebir, erken aritmetik becerilerin üzerine inşa edilen, üst düzey düşünme ve ispat süreçleriyle zenginleşen bir alan olarak, ortaokul düzeyinde de tüm sınıf kademelerinde (5-8. sınıflar) ele alınmıştır. Cebir kendini 5. Sınıf düzeyinde işlemlerle cebirsel düşünmeye teması ile 6, 7 ve 8. Sınıf düzeylerinde ise işlemlerle cebirsel düşünme ve değişimler teması ile göstermektedir. Program, cebiri yalnızca işlem pratiği olarak değil; genelleme, ilişkilendirme, fonksiyonel düşünme ve algoritmik akıl yürütme bağlamında ele almakta; böylece öğrencilerin hem matematiksel hem de dijital çağın gerektirdiği becerilerle donatılmasını hedeflemektedir (MEB, 2024).

Cebirsel Düşünme

Cebir, eğitim sistemlerinde yer alan bir öğrenme alanı iken, cebirsel düşünme insan zihninin ortaya koyduğu bir etkinliktir (Kaput, 2008). Diğer bir ifadeyle cebirsel düşünme, cebirin hangi zihinsel süreçlerden doğduğunu yansıtmaktadır. Kaput (2008), cebirin eğitimdeki temel işlevinin öğrencilere soyutlama ve genelleme becerileri kazandırmak olduğunu vurgulamaktadır. Bu yönüyle cebir, öğrencilerin düşünme süreçlerini daha üst düzeye taşıyarak onların problem çözme yaklaşımlarına farklı bakış açıları kazandırmaktadır.

Çelik (2007)'e göre cebirsel düşünme, yalnızca cebirle sınırlı kalmayan, matematiksel düşünmenin özel bir türüdür. Bu nedenle problem çözme, çoklu temsillerden yararlanma, tümdengelim ve tümevarım gibi akıl yürütme süreçlerini de içine almaktadır. Cebirsel düşünme matematiğe dair prosedürlerin genelleştirilmesi sürecini içerir. Cebirsel düşünme, matematiksel yapı ve durumların cebirsel semboller aracılığıyla çeşitli biçimlerde temsil edilip incelenmesini; günlük hayatta karşılaşılan olaylardaki değişimlerin çözümlenmesini; nicel ilişkilerin kavranması ve bunların ifade edilebilmesi için matematiksel modellerden yararlanılmasını kapsamaktadır (NCTM, 2000).

Alanyazında farklı yönlerine vurgu yapılan cebirsel düşünmeye yönelik pek çok tanım görülmektedir (Döğer, 2024). Lins (1992), cebirsel düşünmeyi, bireylerin sembolleri anlamaları ve onları kullanma konusundaki yeterliliklerini kapsayan bir süreç; gerçek yaşam ya da matematiksel bağlamlardan daha soyut yapılara doğru gerçekleşen bir geçiş olarak tanımlamaktadır. Kieran (1996)’e göre cebirsel düşünme sadece cebirsel sembollerin manipülasyonu olarak değil, aynı zamanda genellemeler yapma, ilişkiler kurma ve bu ilişkileri farklı bağlamlarda kullanma sürecidir. Özellikle “erken cebir” bağlamında, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişteki akıl yürütme becerilerini vurgular. Greenes ve Findell (1998), cebirsel düşünmeyi; önemli matematiksel fikirlerin, çeşitli gösterim biçimlerinin, orantısal akıl yürütmenin, denge kavramının, değişkenlerin anlamının, örüntülerin ve fonksiyonların yanı sıra tümevarımsal ve tümdengelimsel akıl yürütmenin bir bütünü olarak görmektedir. Kaf (2007)’a göre cebirsel düşünme; değişkenleri kavrayabilme, sembolik ifadeleri yorumlayabilme, matematiğe ilişkin becerileri geliştirmek amacıyla temsillerle çalışabilme ve modeller arasında dönüşüm yapabilme gibi farklı matematiksel fikirleri içerir. Cebirsel düşünmenin; genellemeler oluşturma, sembolleri ve cebirsel ilişkileri kullanma, çoklu gösterimlerden yararlanma gibi temel becerilerden oluştuğu ifade edilebilir (Bağdat, 2013). Alan yazında yapılan tanımlar dikkate alındığında cebirsel düşünme, bireyin zihinsel süreçlerinin bir ürünü olarak sembollere anlam yükleme ve cebirsel ilişkiler arasında bağlantı kurma becerilerini kapsamaktadır. Ayrıca bireyin, farklı temsil biçimlerini kullanarak düşüncelerini ortaya koyabilmesi, somut–yarı somut–soyut kavramlar arasında geçiş yapabilmesi ve bu ilişkilerden hareketle muhakeme yoluyla sonuca ulaşabilmesi cebirsel düşünmenin temel bileşenleri arasında yer almaktadır (Kaya, 2015).

NCTM (2000), cebirsel düşünmeyi öğrencilerin günlük yaşam durumlarını analiz edebilme, değişimleri inceleyebilme ve

nicel ilişkileri anlamak için matematiksel modeller kurma süreci olarak tanımlar. Cebirsel düşünme, öğrencilerin genellemeleri formüle etme, matematiksel semboller kullanma ve farklı gösterimlerden yararlanarak problem çözme becerilerini kapsayan bir süreçtir (Cai, 2004). Bu tanımlar ışığında bu çalışmada cebirsel düşünme, öğrencilerin semboller ve değişkenler aracılığıyla matematiksel ilişkileri anlamlandırma, genellemeler yapma, farklı temsil biçimleri arasında bağlantı kurma ve bu süreçlerden hareketle muhakeme yoluyla sonuca ulaşma, sonucu gerekçelendirme becerilerini kapsayan bir düşünme biçimi olarak ele alınacaktır. Öğretmenlerin, özellikle ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerin matematiksel problem çözme süreçlerinde cebirsel düşünme becerilerini bilmeleri büyük önem taşımaktadır. Öğrencilerin cebirsel olarak nasıl düşündüklerini ve akıl yürüttüklerini anlamak, öğretim sürecinin niteliğini doğrudan etkilemektedir. Bu durum, doğrusal programlar, denklemler, eşitsizlikler, üstel fonksiyonlar ve logaritmalar gibi cebirsel temsillerin ve çözümlerin gerekli olduğu konuların öğretiminde öğretmenlerin dikkate alması gereken bir husustur. Dolayısıyla öğrencilerin düşünme ve akıl yürütme süreçlerini anlamak, matematikte öğrenmenin gelişimine katkı sağlamak açısından kritik bir unsur olarak değerlendirilmektedir (Kamol & Har, 2010; akt. Yılmaz, 2022).

Zihnin Matematiksel Alışkanlıkları

Goldenberg (1996)'e göre, matematikte ulaşılan sonuçlardan ziyade, bireylerin bu sonuca ulaşırken kullandıkları zihinsel alışkanlıklar daha değerlidir. Lim (2008), matematiksel problem çözme bağlamında zihinsel alışkanlığı, öğrencinin bir problem durumunda aklına ilk gelen fikir, sezgiye dayanarak doğrudan bir eylem gerçekleştirmesi şeklinde tanımlar. Bu, bir anlamda spontane ve otomatik, hızlı bir zihinsel tepki ya da sezgiye dayalı düşünme biçimidir. Cuoco ve diğerleri (1996)'ne göre Zihnin Matematiksel Alışkanlıkları sürekli akıl yürütme, uç örnekleri değerlendirme,

düşünce deneyleri gerçekleştirme ve matematikçilerin çalışmalarında başvurdukları soyutlama süreçlerini kullanabilme yetisidir.

Matematiksel düşüncenin gelişiminde problem çözme stratejileriyle ilişkili zihinsel alışkanlıkların öğrencilere kazandırılması büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle öğretmenlerin bu alışkanlıklara yönelik farkındalıklarının artırılması, matematik öğretimi açısından kritik görülmektedir. Öğretmenlerin zihinsel alışkanlıklarını tanımaları ve bunları ders süreçlerine yansıtmaları, özellikle sınıf içinde daha az sergilenen zihinsel alışkanlıkların öğretim etkinlikleriyle desteklenmesine katkı sağlayabilir (Korkmaz, Dünder & Yaman, 2016). Matematiksel zihin alışkanlıklarının kazandırılmasında yalnızca matematiğin kuramsal bilgisini aktarmak yeterli değildir. Bu sürecin etkili olabilmesi için öğrencilerin matematikçiler gibi düşünmeye yönltilmesi, onların kullandıkları stratejileri inceleyerek kendi çözüm yollarını geliştirmeye teşvik edilmesi gerekmektedir. Gordon (2011), matematiksel zihin alışkanlıklarıyla zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarının öğrencilerin matematiği daha anlamlı bir biçimde öğrenmelerine katkı sağladığını; bu süreçte yalnızca doğru cevaba ulaşmanın değil, aynı zamanda kavramsal öğrenmenin de gerçekleştiğini ifade etmektedir.

Zihnin matematiksel alışkanlıkları, özellikle matematiğin cebir ve geometri alanlarında daha belirgin bir biçimde ortaya çıkmakta ve bu bağlamda zihnin cebirsel ya da geometrik alışkanlıkları şeklinde alt kategorilere ayrılmaktadır (Driscoll, 1999; Mark ve diğerleri, 2009; akt. Köse & Tanışlı, 2014). Matematiğe özgü bu zihinsel alışkanlıkların temel ilkeleri, Driscoll (1999) tarafından cebirsel boyutta, Driscoll ve diğerleri (2007) tarafından ise geometrik boyutta açıklanmıştır.

Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları (ZCA) ve Bileşenleri

Driscoll (1999) tarafından geliştirilen “Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları” (ZCA) kuramsal çerçevesi, cebirsel kavramları anlamlandırmada etkili olan verimli düşünme alışkanlıklarını vurgular. Zihnin cebirsel alışkanlıkları, bireyin cebirsel bir durumla karşılaştığında tercih ettiği çözüm adımlarıdır (Ünveren Bilgiç ve Argün, 2018). Bu alışkanlıklar öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlamakta ve farklı problem durumlarında nasıl çözüm üretebileceklerini öğrenmelerine imkân tanımaktadır (Poindexter, 2011). Driscoll (1999), Zihnin cebirsel alışkanlıklarının öğrencilerin cebir problemlerinde daha derin anlamlara ulaşmalarını, kavramları üst düzeyde değerlendirmelerini ve problem çözme sürecinde sergiledikleri davranışlarla görünür hâle geldiğini belirtmektedir.

Driscoll (1999) çalışmaları sonucunda zihnin cebirsel alışkanlıklarının üç temel bileşene sahip olduğunu belirlemiştir. Bunlar: Doing–Undoing (Yapma-Tersini Yapma), Building Rules to Represent Functions (Fonksiyonel Kural Oluşturma) ve Abstracting from Computation (Hesaplamadan Soyutlama yapabilme). Bu alışkanlıkların edinilmesi, cebirsel genellemeleri kurma, sembolik yapıları çözümleme ve matematiksel ilişkileri formüle etmede önemli bir katkı sağlar. Bu bileşenler, birbirinden bağımsız aşamalar şeklinde ilerleyen bir yapıdan ziyade, iç içe geçmiş süreçler olarak değerlendirilmektedir. Eroğlu ve Tanışlı (2017) tarafından, Driscoll’un (1999) çalışması ile literatürdeki diğer araştırmalardan uyarlanan ZCA bileşenleri Tablo 1.’de sunulmuştur (akt. Sezer, 2019).

Tablo 1: Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarının Kuramsal Çatısı

YAPMA-TERSİNİ YAPMA

YAPMA

Problemi Anlama Becerisi

- Problemi okuma, yorumlama ve problemin içindeki bağlamı anlama
- Nicelikleri ve nicelikler arasındaki ilişkileri tanımlama
- Temsilleri oluşturma

FONKSONEL KURAL OLUŞTURMA

Örüntü Arama Becerisi

- Örüntü durumunu ortaya çıkarma

Örüntü Tanıma Becerisi

- Örüntünün nasıl çalıştığını ortaya koyan tekrarlayan bilgi yığınına arama
- Çoklu temsil kullanımı
- Örüntüyü tahmin etme
- Değişimin analizi

Genelleme Becerisi

- Kuralı tanıma
- Kuralı doğrulama

HESAPLAMADAN SOYUTLAMA

Yapı Üzerinde Çalışma Becerisi

- İşlemsel kısayolları bulma
- Olası yararlı özelliği ortaya çıkarmak için ifadeleri tekrar yazma

İşlemler Hakkında Genelleme Becerisi

- Sonucun farklı durumlarda çalışıp çalışmadığını deneme
- Sayı sistemlerinin nasıl çalıştığını anlamaya yarayacak kısa yol hesaplamaları kullanma
- Kullanılan sayılardan bağımsız olarak işlemleri düşünme
- Örneklerin ötesinde genelleme
- İşlemlerle ilgili genellemeleri matematiksel dili kullanarak açıklama
- Kısa yolları doğrulama

TERSİNİ YAPMA

Tersini Yapma Becerisi

- Çıktılardan girdiye ulaşma becerisi
- Geriye doğru çalışma becerisi

Tablo 1’de ZCA bileşenlerini incelediğimizde: “Yapma” boyutunda, öğrencilerin problem durumlarını anlamaları, nicelikler arası ilişkileri tanımlamaları ve temsiller oluşturmaları ön plana çıkmaktadır. Bu aşama, cebirsel düşünmenin temelini oluşturan problemi anlama ve temsil etme becerilerini kapsar. Bunun devamında, “fonksiyonel kural oluşturma” sürecinde öğrenciler bu tekrar eden düzenlilikleri fark eder, çoklu temsillerden yararlanır, değişimi analiz eder ve genellemeleri kurallar aracılığıyla ifade ederler. “Hesaplamadan soyutlama” boyutu ise işlemleri doğrudan yapmaktan ziyade, işlemler hakkında kısa yollar geliştirme, eşdeğer ifadeler üretme ve işlemlerle ilgili genellemeleri sembolik dil kullanarak açıklama becerilerini kapsamaktadır. Bu aşamada öğrenciler, belirli sayılardan bağımsız düşünmeyi, işlemlerin yapısını keşfetmeyi ve kısa yolları gerekçelendirmeyi öğrenirler. Son

olarak “tersini yapma” boyutu, çıktılarından girdilere ulaşma ve geriye doğru çalışma becerisini içerir. Böylece hem süreci hem de sonucu birlikte değerlendirebilme imkânı kazanırlar. Tablo 3, zihnin cebirsel alışkanlıklarının birbirinden ayrı aşamalardan oluşmadığını, aksine problem çözme sürecinde sürekli iç içe geçmiş ve birbirini besleyen bilişsel süreçler olarak işlediğini ortaya koymaktadır. Yapma-tersini yapma alışkanlığının problem çözme sürecinin neredeyse her aşamasında etkili olduğu söylenebilir (Gürbüz, 2021).

Yapma- Tersini Yapma

Etkili cebirsel düşünme, matematiksel süreçleri gerekçelendirme becerilerinin yanı sıra gerektiğinde bu süreçleri tersine çevirebilme becerisini de kapsamaktadır. Başka bir ifadeyle, birey hem bir işlemi başlangıç noktasından sonuca doğru ilerletebilmeli hem de ulaşılan sonuçtan geriye dönerek işlemleri ters yönde takip edebilmelidir (Karayağlı, 2023). Yapma–tersini yapma alışkanlığı, diğer cebirsel zihin alışkanlıklarını kapsayan temel bir çatı bileşeni olarak değerlendirilmektedir (Driscoll, 1999). Bu alışkanlık, öğrencilerin problem çözme sürecinin her aşamasında yer almakta, ancak yalnızca ortaya çıkış biçimlerinde farklılıklar görülmektedir. Yapma alışkanlığı, problemi anlama becerisi ve bu beceriye bağlı alt göstergelerle açıklanırken; tersini yapma alışkanlığı da benzer şekilde diğer alışkanlıkları kuşatıcı bir nitelik taşımakta ve her problem çözümünde farklı formlarda kendini göstermektedir (Karayağlı, 2023). Yapma- Tersini Yapma Alışkanlığının alt bileşenleri:

Girdiden çıktıyı bulma: Bir örüntüde başlangıç değerlerinden istenilen değere ulaşma.

Çıktıdan girdiyi bulma: Bir çözümünden başlangıç noktasına ulaşma.

Hesaplamalarda geriye doğru çalışma: Bir kuralın veya prosedürün adımlarını geriye doğru çalıştırma (Driscoll, 2001).

Bu alt alışkanlıklara sahip öğrenciler, matematiksel ifadeleri çözme, yeniden yazma veya yeniden yapılandırma süreçlerinde sembolik manipülasyon becerilerini kullanmaktadırlar. Öğrenciler, bir işlemi sonuca götürebildikleri gibi, elde edilen sonucu başlangıç noktasına dönerek de yorumlayabilmelidir. Böylece Yapma- Tersini Yapma ile öğrenciler yalnızca sonuca odaklanmak yerine çözüm sürecini de sorgular ve süreç üzerinde derinlemesine düşünmeler gerçekleştirirler (Özmuşul, 2024). Bu süreçte öğrencilerin gerçekleştirdikleri iş ve işlemler, hem cevaba ulaşma sürecini hem de cevaptan geriye doğru izlenen yolu içerir. Öğrencilerin bu alışkanlık kapsamında sordukları içsel sorular genellikle “Sondan başlarsam ne olur?”, “Bu işlemin tersi nasıl yapılabilir?” veya “Bu sayı ile önceki sayı arasında nasıl bir ilişki vardır?” gibi ifadelerdir.

Driscoll (1999), öğrencilerde Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarının (ZCA) geliştirilmesinde öğretmenin yönlendirici ve düşünmeye sevk eden sorularının belirleyici bir rol oynadığını vurgulamaktadır. Özellikle “yapma-tersini yapma” alışkanlığının kazandırılmasında, öğretmenlerin sorular yoluyla öğrencileri farklı düşünme yollarına yönlendirmesi gerekmektedir. Bu bağlamda Driscoll, öğretmenin sınıfta kullanabileceği örnek soruların bazılarını şu şekilde sıralamaktadır:

“Bu işlem tersine nasıl işler?”

“Verilen sayı ile ondan önce gelen sayı arasındaki ilişki nedir?”

“Eğer çözüm sürecine sondan başlasaydım ne olurdu?”

“Kullandığım işlemlerden hangisi tersine çevrilebilir?”

“Bu sayıları ya da ifadeleri yardımcı bileşenlere ayırabilir miyim?”

Fonksiyonlardan Kural Oluşturma

Driscoll’a (1999) göre fonksiyonlardan kural oluşturma, cebirsel düşünmenin önemli bir boyutu olan ilişkileri ortaya koyma, modelleri tanıma, bilgileri düzenleme ve bir problem durumuna ait giriş-çıkış ilişkilerini temsil edebilme becerilerini kapsamaktadır. Ayrıca, iyi tanımlanmış fonksiyonel kuralların girdileri ve çıktılarıyla ilgili bilgileri düzenleyebilme kapasitesi de bu davranışın ayrılmaz bir parçası olarak görülmektedir. Fonksiyonlardan Kural Oluşturma Alışkanlığının alt bileşenleri:

Bilgileri düzenleme: Bilgiyi; örüntüleri, ilişkileri ve bunları tanımlayan kuralları ortaya çıkarmak için yararlı bir şekilde organize edebilme.

Çözümü öngörme: Belirli bir durumda düzenlilikleri keşfetme ve anlamlandırma.

Bilgileri parçalama: Bir ilişkinin veya örüntünün nasıl çalıştığını ortaya koyan bilgilerde tekrarlayan parçaları arama veya süreci yararlı bileşenlere ayırma.

Farklı temsiller kullanma: Farklı temsillerin (sözel, grafiksel, cebirsel, tablo...) bir durum veya problem hakkında ne gibi farklı bilgiler verebileceğini merak etmek ve ardından farklı temsilleri denemek.

Değişimi tanımlama: Bir süreçteki değişimi veya ilişkiyi değişkenler arasında işlevsel bir ilişki olarak açıkça tanımlayabilme.

Kuralı tanımlama: Belirli girdiler kullanmadan bir kuralın adımlarını tanımlama.

Kuralı gerekçelendirme: Bir kuralın neden herhangi bir sayı için çalıştığını gerekçelendirme (Driscoll, 2001).

Bu alt bileşenler, öğrencilerin cebir problemlerinde ilişkileri anlamlandırmaya çalışırken başvurdukları düşünme yollarını yansıtmaktadır. Öğrenciler bu süreçte, cebirsel düşünmenin temel unsurlarından biri olarak örüntüleri fark eder, bu örüntülere karşılık gelen temsilleri üretir ve matematiksel durumları fonksiyonel kurallar aracılığıyla tanımlamaya yönelirler. Daha ayrıntılı olarak bu özellikleri: “Burada bir ilişki bulunuyor mu”, “Adımlar tekrar edecek mi”, “Sonraki adımda ne gerçekleşecek”, “Bu durumu tahmin edebilir miyiz?”, “Aynı işlemleri farklı sayılarla yaptığımızda hangi özellikler sabit kalır, hangileri değişir?” şeklinde ifade edebiliriz (Sezer, 2019).

Driscoll (1999), öğretmenlerin sınıf ortamında fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığını geliştirmeleri için yöneltebilecekleri bazı soruları aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

“Burada bir kural ya da ilişki var mı?”

“Elde ettiğin kural nasıl işler ve sana nasıl yardımcı olur?”

“Kural neden bu biçimde çalışmaktadır?”

“Değişkenlerin özellikleri nelerdir?”

“Sonraki adımları tahmin etmeni sağlayacak bilgiler mevcut mu?”

“Bu kural her durumda geçerli midir?”

“Tekrar ettiğin adımlar nelerdir?”

“Özel değerler kullanmadan bu adımları nasıl açıklayabilirsin?”

“Aynı işlemleri farklı sayılarla yaptığında sonuç hâlâ doğru mu, değişen nedir?”

“Bir eşitlik yazdığında, eşitlikteki sayılar problemi,bağlamıyla nasıl ilişkilidir?”

Hesaplamadan Soyutlama Yapama

Soyutlama, cebirin temel karakteristik özelliklerinden biri olarak kabul edilmektedir. Cebirsel düşünmenin merkezinde yer alan bu özellik, öğrencinin süreçte kullandığı sayılardan bağımsız biçimde düşünme kapasitesini ifade eder. Bu bağlamda hesaplamadan soyutlama alışkanlığı, öğrencinin yalnızca işlem sonuçlarına bağlı kalmaksızın daha genel ve soyut bir bakış geliştirmesini sağlayan bilişsel bir eğilimdir (Karayağlı, 2023). Hesaplamadan soyutlama alışkanlığına sahip olan bireyler; temel aritmetik işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) arasındaki bağlantıları kullanarak genellemeler yapabilme, çeşitli kısayollar geliştirebilme, sembollerin anlamlarını kavrayarak bunları etkin biçimde kullanabilme becerilerine sahiptir. Ayrıca ihtiyaç durumuna göre ifadeleri sadeleştirerek ya da daha karmaşık hale getirerek eşdeğer biçimlerini oluşturabilir ve farklı sayı sistemleri üzerinde hesaplamalar yapabilirler. Dolayısıyla, bu alışkanlığa sahip bireyler işlemleri yalnızca sayılar üzerinden değil, daha soyut bir düzlemde düşünebilirler (Driscoll, 1999).

Hesaplamadan Soyutlama Yapama alışkanlığının alt bileşenleri aşağıda verilmiştir:

Hesaplama kısa yolları kullanma: İşlemlerin nasıl çalıştığına dair bir anlayışa dayalı olarak hesaplamada kısa yollar arama.

İşlem yapmadan hesaplama: Kullanılan belirli sayılardan bağımsız olarak hesaplamalar hakkında düşünme.

Örneklerin ötesinde genelleme: Genelleştirilmiş ifadeler oluşturma, belirli matematiksel ifadelerin geçerli olduğu koşulları

Eşdeğer ifadeler kullanma: İfadeler arasındaki denklığı görme ve ya kullanma.

Farklı temsiller kullanma (sembolik ifadeler): İşlemlerle ilgili genellemeleri sembolik olarak ifade etme.

Kısa yolları gerekçelendirme: İşlemlerle ilgili kullandığı kısa yolları gerekçelendirme.

Bu alışkanlık, cebirsel yapıların anlaşılması temelinde, kullanılan sayılardan bağımsız olarak hesaplamalar üzerine düşünmeyi ve hesaplamalara ilişkin kısa yollar ile genellemeler geliştirmeyi kapsamaktadır. Dolayısıyla soyutlama, bu zihinsel alışkanlığın merkezinde yer almakta ve öğrencilerin işlem süreçlerinden bağımsız bir şekilde cebirsel düşünme becerilerini geliştirmelerine katkı sağlamaktadır (Özmuş, 2024). Driscoll (1999)’a göre sınıf ortamında işlemlerden soyutlama yapma alışkanlığını geliştirmek isteyen öğretmenlerin kullanabileceği örnek sorular şunlardır:

“Bu hesaplama durumu başka bir işleme benziyor mu, benziyorsa nasıl?”

“Sonucu hesap yapmadan tahmin etmenin bir yolu var mı?”

“Şu ana kadar hangi işlemleri gerçekleştirdin?”

“Aynı işlemleri farklı sayılarla uygularsan değişmeyen ve değişen yönler neler olur?”

“İşlemlerin temel kurallarını nasıl ifade edebiliriz?”

“Bu işlemin özelliği başka hangi işlemle benzerlik göstermektedir?”

NCTM (2000), hesaplamadan Soyutlama Yapama alışkanlığının, basit cebirsel ifadeler için eşdeğer formları tanımada, yeni ifadeler üretmede ve doğrusal denklemleri çözmede önemli bir rol oynadığını vurgulamaktadır. Bu beceriyi kazanan bireylerin; belirli sayılardan bağımsız olarak hesaplamalar üzerine düşünebildikleri, işlemlerin işleyişini kavrayarak hesaplamada kısa yollar geliştirdikleri, işlemlerle ilgili genellemeleri sembolik biçimde ifade edebildikleri, bu kısa yolları gerekçelendirmek için işlemler hakkında genellemelerden yararlanabildikleri ve farklı ifadeler arasındaki denkliği fark edebildikleri belirtilmektedir.

Cebirsel Düşünme Üzerine Yapılan Araştırmalar

Literatür incelendiğinde Cebirsel düşünme üzerinde pek çok araştırmacının çalıştığı görülmektedir. Bu alt başlık kapsamında incelenen çalışmalar ortaokul ve ortaöğretim öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini inceleyen, öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerini karakterize eden, öğretim programlarının ya da belirli öğretim yaklaşımlarının cebirsel düşünme üzerindeki etkilerini araştıran araştırmalar öncelikli olarak dikkate alınmıştır.

Dede ve Argün (2003) çalışmalarında, öğrencilerin cebiri öğrenmede karşılaştıkları güçlüklerin nedenlerini incelemiştir. Araştırmada, öğrencilerin cebiri anlamada zorlanmalarının üç ana boyutta toplandığı belirtilmiştir: cebirin yapısına ilişkin zorluklar (sembolizmin soyutluğu, cebirin dilinin öğrenciler için anlamlı hale getirilememesi), öğrencilerin zihinsel gelişimleri ve hazırbulunuşluk düzeyleri (özellikle eşitlik ve değişken kavramlarının yeterince anlaşılamaması), ve öğretimdeki eksiklikler (geleneksel yöntemlere bağlı kalınması, işlemsel bilgiden yapısal kavrayışa geçişin sağlanamaması). Bulgular, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte

“kültürel şok” yaşadıklarını, eşitlik ve değişken kavramlarındaki eksikliklerin cebirsel ifadeleri anlamalarını engellediğini ve öğretim süreçlerinde kullanılan geleneksel yöntemlerin öğrenmeyi yüzeysel bıraktığını ortaya koymuştur. Çalışmanın sonunda, cebir öğretiminde öğrencilerin kavramsal anlayışını geliştirmek amacıyla elektronik tablolar yaklaşımı, fonksiyonel yaklaşım ve örüntü yaklaşımı gibi alternatif öğretim modelleri önerilmiştir.

Kieran (2004) çalışmasında, aritmetik düşünme ile cebirsel düşünme arasındaki farkları tartışarak erken sınıflarda cebirsel düşünmenin nasıl tanımlanabileceğini ele almıştır. Kieran, cebirsel düşünmeyi üç temel etkinlik üzerinden açıklamaktadır: ifade ve denklemler oluşturma (generational activities), bunları dönüştürme ve eşdeğerlikleri koruma (transformational activities) ve daha üst düzey meta-etkinlikler (ilişkileri analiz etme, genelleme, modelleme, gerekçelendirme). Bu üçlü model, cebirsel düşünmenin yalnızca sembollere indirgenemeyeceğini, ilişkiler, genellemeler ve problem çözme gibi daha geniş matematiksel süreçlerle bağlantılı olduğunu vurgulamaktadır. Kieran’a göre erken dönem cebirsel düşünme; nicel durumları analiz etme, yapı ve ilişkileri fark etme, değişimi inceleme, genelleme, modelleme, gerekçelendirme ve tahmin etme gibi etkinliklerde gelişen düşünme biçimidir. Bu süreçler başlangıçta sembollere bağlı olmaksızın yürütülse de, ilerleyen yıllarda sembolik cebir için bilişsel temel oluşturmaktadır.

Kaput (2008), *Algebra in the Early Grades* kitabındaki çalışmasında, cebirin ne olduğu ve cebirsel düşünmenin nasıl tanımlanabileceği sorularına yanıt aramış; erken yaşlarda cebir öğretiminin gerekçelerini ve olanaklarını tartışmıştır. Kaput, cebiri yalnızca sembolik işlemler olarak değil; genelleme, fonksiyonel ilişkiler kurma, yapıları fark etme ve modeller geliştirme süreçlerinin bütünü olarak tanımlamıştır. Bu çerçevede, erken sınıflarda cebirsel düşünmenin gelişimi için üç temel yaklaşımı öne çıkarmıştır. Bunlar: aritmetikten cebire geçişi destekleyen

genellemeler, örüntü ve fonksiyon odaklı etkinlikler ve modelleme yoluyla cebirsel kavramların yapılandırılmasıdır. Bulgular ve tartışmalar, erken yaşta cebir öğretiminin öğrencilerin yalnızca sembollerini kullanma becerilerini değil; aynı zamanda analiz etme, gerekçelendirme ve farklı temsiller arasında geçiş yapabilme becerilerini geliştirdiğini göstermektedir. Kaput, cebirsel düşünmenin erken yaşlarda matematik öğretiminde yer bulmasının, ilerleyen yıllarda karşılaşılan öğrenme güçlüklerini azaltacağını ve 34 öğrencilerin daha esnek, üretken bir matematiksel düşünme geliştirmelerine katkı sağlayacağını vurgulamıştır.

Yenilmez ve Teke (2008) çalışmalarında, yenilenen ilköğretim matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Bulgular, öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinde program sonrasında anlamlı bir gelişme olduğunu göstermiştir. Özellikle birinci, ikinci ve üçüncü düzeylerde öğrencilerin performanslarının belirgin şekilde arttığı, ancak dördüncü düzeyde (daha karmaşık cebirsel ifadeleri anlamlandırma) gelişmenin sınırlı kaldığı saptanmıştır. Ayrıca başarı düzeyi yüksek öğrencilerin cebirsel düşünme gelişimlerinin daha fazla olduğu bulunmuş, cinsiyet ve matematik ilgisi değişkenlerine göre anlamlı bir farklılık tespit edilmemiştir. Araştırma sonucunda, yenilenen matematik programının öğrencilerin özellikle temel cebirsel düşünme düzeylerinde olumlu etkiler sağladığı; ancak daha üst düzey becerilerin gelişimi için ek etkinlikler ve uzun süreli öğretim süreçlerine ihtiyaç duyulduğu vurgulanmıştır.

Van den Kieboom, Magiera ve Moyer (2010) çalışmalarında, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kendi cebirsel düşünme becerileri ile ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşüncelerini fark etme ve yorumlama becerileri arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamışlardır. Katılımcı öğretmen adaylarına bir dönem boyunca cebir temelli içerik dersleri almış, 130 cebirsel görev çözmüş, ayrıca ortaokul öğrencileriyle klinik mülakatlar yaparak onların

öz mlerini analiz etmişlerdir. Bulgular,  ğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin özellikler arasında farklılık gösterdiğini; özellikle “kuralı gerekçelendirme” becerisinin en zayıf alan olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca, adayların kendi cebirsel düşünme düzeyleri ile öğrencilerin düşüncelerini fark etme ve yorumlama başarıları arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Nitel analizler, yüksek cebirsel düşünme puanına sahip adayların öğrencilerin örüntü kurma ve kural geliştirme süreçlerini daha doğru ve derinlikli analiz edebildiklerini, düşük puanlıların ise çoğunlukla yalnızca öğrencilerin eylemlerini betimlemekle yetindiklerini göstermiştir. Araştırmacılar,  ğretmen yetiştirme programlarında adaylara yalnızca cebirsel bilgi kazandırmanın değil; aynı zamanda öğrencilerin düşünme süreçlerini tanıma ve yorumlama fırsatları sunan uygulamalara da ağırlık verilmesi gerektiğini önermişlerdir.

şandır (2013) doktora tezinde, 8. sınıf  ğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerini geliştirmek amacıyla yapılandırmacı öğrenme ortamlarının etkisini incelemiştir. Uygulama sürecinde deney grubuna yapılandırmacı öğrenme ortamları tasarlanarak problem çözme, grup çalışmaları ve çoklu temsillere dayalı etkinlikler uygulanmış; kontrol grubunda ise geleneksel  ğretim yöntemleri kullanılmıştır. Bulgular, deney grubundaki öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinde kontrol grubuna kıyasla anlamlı bir gelişim gösterdiğini ortaya koymuştur. Özellikle  ğrencilerin örüntülerden genelleme yapma, sembolleri anlamlı kullanma ve ilişkileri analiz etme becerilerinde belirgin ilerlemeler kaydedilmiştir. Araştırmada, cebir  ğretiminde yapılandırmacı temelli etkinliklerin öğrencilere daha derinlemesine öğrenme fırsatları sunduğu vurgulanmış ve  ğretim programlarında bu tür etkinliklere daha fazla yer verilmesi önerilmiştir.

Akkan ve Baki (2016) alışmasında, 5–8. sınıf  ğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçleri sembollerin kullanımı ve harflerin

anlamı bağlamında incelenmiştir. Bulgular, öğrencilerin öğrenim seviyeleri arttıkça eşittir işaretinin ilişkisel anlamını kavramada ve harfleri değişken olarak yorumlamada olumlu gelişmeler gösterdiklerini; ancak sınıf düzeyleri arasındaki farkların oldukça sınırlı kaldığını ortaya koymuştur. Öğrencilerin çoğunun eşittir işaretini hâlen işlemsel olarak algıladığı, harfleri ise nesne veya etiket olarak yorumlama eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Araştırmacılar, aritmetikten cebire geçişte özellikle sembollerin ilişkisel anlamının ve harflerin değişken olarak kullanımının öğretimde daha güçlü şekilde vurgulanması gerektiğini önermiştir.

Ateş (2021) doktora tezinde, öğrencilerin matematiksel muhakeme ve cebirsel düşünme süreçlerini, üstbilişsel farkındalık ve strateji kullanımıyla ilişkili olarak incelemeyi amaçlamıştır. Bulgular, öğrencilerin cebirsel düşünme ve matematiksel muhakeme becerilerinin genellikle orta düzeyde olduğunu; üstbilişsel farkındalık düzeyi yüksek olan 36 öğrencilerin ise problem çözme sürecinde daha sistematik davrandıklarını ve genelleme ile sembollerin anlamlı kullanımında daha başarılı olduklarını ortaya çıkarmıştır. Araştırmada, cebirsel düşünme becerilerini geliştirmek için derslerde üstbilişsel stratejilerin öğretimine ağırlık verilmesi, öğrenci düşünme süreçlerinin tartışıldığı etkinliklerin artırılması ve öğretmenlerin öğrencilere süreci yansıtmaya fırsatları vermesi önerilmiştir.

Yılmaz Tıgılı (2023) yaptığı çalışmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünceleri hakkındaki bilgilerini incelemiştir. Bulgular, öğretmenlerin öğrencilerin cebir öğrenmeden önce sahip olması gereken önkoşul bilgiler konusunda sınırlı bilgiye sahip olduklarını göstermiştir. Öğretmenler, öğrencilerin sözel ifadelerden sembolik ifadelere geçiş ve denklem çözme performanslarını öngörebilmiş, fakat eşitlik kavramının ilişkisel anlaşılması, değişken kavramı ve fonksiyonel düşünme gerektiren görevlerde öğrencilerin performanslarını doğru

tahmin edememişlerdir. Araştırmacı, öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerini daha iyi tanıyabilmeleri için mesleki gelişim programlarının, değişken, eşitlik ve fonksiyonel düşünme gibi kavramlara vurgu yapacak şekilde tasarlanmasını önermiştir.

Erdoğan (2023) doktora tezinde, ortaokul sonu itibarıyla öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerine ait yetkinlik profillerini tanılamayı amaçlamıştır. Bu doğrultuda, Bilişsel Tanı Modelleri (BTM) çerçevesinde çok boyutlu, çoktan seçmeli tanı testleri geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Çalışma, 2600 dokuzuncu sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Bulgular, cebirsel düşünmenin alt boyutları arasında hiyerarşik bir yapının bulunduğunu ortaya koymuştur (Nicel muhakeme → genelleştirilmiş aritmetik → fonksiyonel düşünme ilişkisi; ayrıca temsil → genelleme → gerekçelendirme sıralaması). Öğrencilerin çoğunun temel düzeylerde (nicel muhakeme ve genelleştirilmiş aritmetik) yetkinlik gösterdiği, ancak fonksiyonel düşünme ve gerekçelendirme gibi üst düzey becerilerde zorluk yaşadıkları görülmüştür. Araştırmacı, bu sonuçlara dayanarak öğretim programlarının öğrencilerin genelleme, fonksiyonel ilişkilendirme ve gerekçelendirme becerilerini geliştirecek etkinliklerle zenginleştirilmesini önermektedir.

Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları (ZCA) Üzerine Yapılan Araştırmalar

Cuoco, Goldenberg ve Mark (1996) çalışmalarında, matematik müfredatlarının yalnızca sonuçlara değil, matematikçilerin kullandıkları “zihinsel alışkanlıklara” (habits of mind) da odaklanması gerektiğini vurgulamışlardır. Çalışmada Yazarlar, matematiksel zihinsel alışkanlıkları üç kategoride incelemişlerdir: genel alışkanlıklar (örüntü arama, deneme-yanılma, açıklama yapma, tahmin ve görselleştirme gibi), matematiğe özgü yaklaşımlar (örneğin fonksiyonel düşünme, çoklu temsiller kullanma, tümevarım ve tümdengelim süreçlerini birlikte yürütme),

ve alan-özel alışkanlıklar (geometrik ve cebirsel düşünme biçimleri). Özellikle cebirsel alışkanlıklar, hesaplamalardan soyutlama, kurallar inşa etme, algoritmik düşünme, sistemleri parçalara ayırma ve genellemeler oluşturma gibi süreçlerle tanımlanmıştır. Çalışmada, bu alışkanlıkların öğrencilere kazandırılmasının, onların matematiksel anlamda daha üretken, esnek ve yaratıcı olmalarını sağladığı; ayrıca matematiksel araştırma deneyimine yaklaşımlarına yardımcı olduğu ileri sürülmüştür.

Driscoll (1999) çalışmasında, 6. sınıftan 10. sınıfa kadar geçen süreçte öğrencilere cebiri öğretmenin ileri öğrenmeler için kritik bir öneme sahip olduğundan hareketle, Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları (ZCA) kavramını tanımlamıştır. Çalışmada ZCA'nın üç temel bileşeni olarak yapma–tersini yapma (doing–undoing), fonksiyonel kural oluşturma (building rules to represent functions) ve hesaplamadan soyutlama (abstraction from computation) öne çıkarılmıştır. Driscoll, bu alışkanlıkların gelişimi için öğrencilerin işlemleri yalnızca uygulamaları değil, aynı zamanda tersini düşünmeleri, çoklu temsillerle kuralları yapılandırmaları ve hesaplamalardan soyutlamalar yapabilmeleri gerektiğini vurgulamıştır. Ayrıca, öğretmenlerin süreci yönlendiren ders içi öğrenme sorularının bu alışkanlıkların kazandırılmasında kritik bir rol oynadığı belirtilmiştir. Çalışmada, söz konusu alışkanlıkların birbirinden bağımsız değil, iç içe geçmiş süreçler olduğu; özellikle yapma–tersini yapma alışkanlığının diğer alışkanlıkların gelişiminde sıkça ortaya çıktığı ifade edilmiştir. Araştırma sonucunda, öğretmenlerin sınıf ortamlarında bu alışkanlıkları besleyecek görevler ve problemler sunmaları gerektiği, öğrencilerin kavramsal düşünme becerilerini destekleyecek etkinliklerle ZCA'nın geliştirilebileceği önerilmiştir.

Eroğlu ve Tanışlı (2017) araştırmalarında, zihnin cebirsel alışkanlıklarının (ZCA) sınıf ortamına nasıl entegre edilebileceğini incelemiştir. Yapılan ZCA çerçevesine göre betimsel analizler

sonucunda öğrencilerin başlangıçta örüntü aramada ve çoklu temsil kullanımında zorlandıklarını; ancak süreç ilerledikçe tablo ve sembolik temsilleri kullanarak genellemelere ulaşabildiklerini gözlemlenmiştir. Öğrencilerin, sözel olarak ifade ettikleri ilişkisel düşüncelerini zamanla sembolik ifadelere dönüştürmeleri, kavramsal cebirin gelişimini desteklemiştir. Ayrıca, öğretmenin sorgulama sürecindeki yönlendirmelerinin öğrencilerin “yapma–tersini yapma”, “fonksiyonel kural oluşturma” ve “işlemlerden soyutlama” gibi ZCA bileşenlerini geliştirmede kritik rol oynadığı belirlenmiştir. Çalışmada, cebirsel alışkanlıkların kısa sürede kazandırılmayacağı, ancak uzun soluklu etkinlikler, çoklu temsiller ve sorgulama odaklı öğretimle öğrencilerin bu alışkanlıkları geliştirebileceği sonucuna ulaşılmış; ileride daha uzun süreli araştırmalara ihtiyaç olduğu önerilmiştir.

Ünveren-Bilgiç ve Argün (2018) çalışmalarında, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının problem çözme bağlamında Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarını (ZCA) nasıl kullandıklarını incelemişlerdir. Veriler “Cebirsel Zihin Alışkanlıkları Çalışma Kağıdı” ve görüşmeler yoluyla toplanmış; Driscoll’un (1999) tanımladığı üç bileşen doğrultusunda analiz edilmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının çoğunlukla verilenleri ve istenenleri açıkça belirtmeden ezbere dayalı çözümler ürettiklerini; özellikle soyutlama ve kural oluşturma aşamalarında zorlandıklarını ortaya koymuştur. Görüşmeler, dördüncü sınıf adaylarının birinci sınıflara kıyasla öğrencilerin mevcut bilgilerini yapılandırmaya daha çok önem verdiklerini, birinci sınıf öğrencilerinin ise problemlerin sadece çözümüne odaklandıklarını göstermiştir. Araştırmada, öğretmen adaylarının eğitim süreçleri boyunca ZCA kullanımında gelişim kaydettikleri, ancak pedagojik bağlamda hâlâ eksiklikler bulunduğu vurgulanmış; bu nedenle matematik öğretim bilgisi ile cebirsel alışkanlıklar arasındaki ilişkiyi ortaya koyacak daha fazla çalışmaya ihtiyaç olduğu önerilmiştir.

Sezer (2019) doktora tezinde, ortaokul öğrencilerinin zihinsel alışkanlıklarının (özellikle zihnin cebirsel alışkanlıkları - ZCA ve zihnin geometrik alışkanlıkları - ZGA) gelişimi boylamsal bir bakış açısıyla incelenmiştir. Tasarım araştırması modeline dayalı olan çalışmada, öğrencilerin mevcut ZCA ve ZGA düzeylerini belirlemek amacıyla “ZCA ve ZGA Belirleme Testleri” uygulanmış; ardından geliştirilen ders planları ve öğrenme ortamları öğrencilerle paylaşılmış ve süreç sonunda ikinci testlerle gelişim ölçülmüştür. Ayrıca, seçilen öğrencilerle gerçekleştirilen odak grup görüşmeleri video kayıtları üzerinden ayrıntılı içerik analiziyle değerlendirilmiştir. Bulgular, üç yıl boyunca öğrencilerin zihinsel alışkanlıklarında belirgin gelişmeler yaşandığını göstermiştir. Özellikle ZCA kapsamında yapma–tersini yapma ve fonksiyonel kural oluşturma alışkanlıklarında ileri düzey gelişim görülmüş; hesaplama soyutlama alışkanlığında ise “kısa yollar geliştirme” ve “kısa yolları doğrulama” boyutlarında gelişme kaydedilmiştir.

Sezer ve Altun (2020) çalışmalarında, ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları (ZCA) düzeylerini geliştirmeyi amaçlamışlardır. Sonuçlar, öğrencilerin ZCA düzeylerinde anlamlı bir gelişim olduğunu göstermiş; özellikle yapma–tersini yapma ve fonksiyonel kural oluşturma alışkanlıklarında belirgin ilerleme kaydedildiği belirlenmiştir. Buna karşın, hesaplama soyutlama alışkanlığında sınırlı bir gelişme olduğu saptanmıştır. Araştırmada, kısa süreli etkinliklerin bu alışkanlıkların tamamını geliştirmede yeterli olmadığı, öğrencilerin farklı sınıf düzeylerinde uzun soluklu etkinliklerle desteklenmesi gerektiği vurgulanmıştır. Ayrıca, derslerde öğrencilerin ilgisini çekecek somut ve günlük yaşamdan problem durumlarına yer verilmesinin, özellikle soyutlama alışkanlığının gelişimine katkı sağlayacağı önerilmiştir.

Gürbüz (2021) doktora tezinde, ortaokul öğrencilerinin cebirsel kavramları soyutlama süreçleri ayrıntılı olarak

incelenmiştir. Araştırma süreci iki aşamada tasarlanmıştır: İlk aşamada tasarım tabanlı araştırma modeli kullanılarak öğrencilerin “denge/denklem” ve “değişken” kavramlarını soyutlama süreçlerine odaklanılmış, ikinci aşamada ise durum çalışmasıyla elde edilen bulgular derinleştirilmiştir. Araştırmada, RBC+C soyutlama teorisi (Recognizing, Building-with, Constructing, Consolidation) ile tahmini öğrenme yörüngeleri (learning trajectories) çerçevesi birlikte kullanılmıştır. Bulgular, öğrencilerin başlangıçta cebirsel kavramları daha çok aritmetik temelli düşündüklerini; ancak süreç içerisinde aritmetik stratejilerden cebirsel stratejilere geçiş yaptıklarını ortaya koymuştur. Özellikle “denge” kavramının anlaşılmasıyla birlikte öğrencilerin cebirsel ifade oluşturma, eşitlik korunumunu kavrama ve fonksiyonel ilişkilere dayalı genellemeler yapma becerilerinde gelişmeler gözlenmiştir. Çalışmada ayrıca öğrencilerin soyutlama becerileri ile Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları (ZCA) arasında sıkı bir ilişki olduğu belirlenmiş; işlemlerden soyutlama, yapma-tersini yapma ve fonksiyonel kural oluşturma alışkanlıklarının soyutlama sürecini kolaylaştırıcı rol oynadığı görülmüştür. Sonuç bölümünde, etkili bir cebir öğretimi için öğrencilere uzun soluklu öğrenme yörüngeleri, çoklu temsil imkânları ve sorgulama odaklı etkinlikler sunulması önerilmiş; ayrıca öğretmenlere hizmet içi eğitimlerde soyutlama mekanizmasının nasıl destekleneceğine yönelik uygulamalara yer verilmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Özmuşul (2024) doktora tezinde, Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları (ZCA) çerçevesinde probleme dayalı cebir öğretiminin, öğretmen adaylarının cebir öğretim bilgilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve öğretim yeterlik inançlarına etkisini incelemiştir. Bulgular başlangıçta orta ve düşük düzeyde cebir öğretim bilgisine sahip olan adayların süreç sonunda yeterli düzeye ulaştığını ortaya koymuştur. Çalışmada, ZCA çerçevesinde probleme dayalı öğretimin öğretmen adaylarının ZCA düzeylerini

geliştirmede, cebirsel dűřűnmelerini derinleştirmede ve pedagojik alan bilgilerini zenginleştirmede etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. neriler arasında, đretmen yetiştirme programlarında ZCA'ya dayalı etkinliklerin sistematik olarak ders içeriklerine entegre edilmesi, đretmen adaylarının hem kavramsal bilgi hem de pedagojik içerik bilgisi bağlamında desteklenmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Kaynakça

- Agaç, G. (2018). Etkili Matematik Öğretimine İlişkin Öğretim Elemanlarının Perspektifleri Ve Bilgi Kaynakları Üzerine Bir İnceleme. . Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.
- Altun, M. (2020). *Matematik Öğretimi*. Aktüel Yayınları.
- Akkan, Y., & Baki, A. (2016). Ortaokul Öğrencilerinin Aritmetikten Cebire Geçiş Süreçlerinin İncelenmesi: Sembollerin Kullanımı ve Harflerin Anlamı. Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11(2).
- Akkaya, Recai (2006). İlköğretim Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Alanında Karşılaşılan Kavram Yanılgılarının Giderilmesinde Etkinlik Temelli Yaklaşımın Etkililiği. Yüksek Lisans Tezi. Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.
- Ateş, H. (2021). Ortaokul öğrencilerinin matematiksel muhakeme ve cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi. Doktora tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Bağdat, O. (2013). İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Becerilerinin Solo Taksonomisi İle İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
- Baş, S.; Erbaş, A. K.; Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Yapılarıyla İlgili Bilgileri. Eğitim Ve Bilim, 36(159), 41-55.

- Bozkurt, A. &. (2021). Matematik Öğretiminde Çağdaş Yaklaşımlar Ve Dijital Dönüşüm. (11(2)), 54-62. Eğitim Teknolojisi Kuram Ve Uygulama.
- Cai, J. (2004). Developing Algebraic Thinking In The Earlier Grades: A Case Study Of The Chinese Elementary Curriculum. The Mathematics Educator, 8(1), 107–130.
- Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese primary school curriculum. The Mathematics Educator, 8(1), 107 130.
- Cuoco, A. (2008). Mathematical habits of mind: An organizing principle for curriculum design. Paper presented at a Project Next Session on Helping Students Develop.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P , ve Mark, J (1996). Habits of mind: an organizing principle for a mathematics curriculum. Journal of Mathematical Behavior, 15(4), 375-402.
- Çelik, Derya (2007). Öğretmen Adaylarının Cebirsel Düşünme Becerilerinin Analitik İncelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Dede, Y. V. (2003). Cebir, Öğrencilere Niçin Zor Gelmektedir? 24: 180-185. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.
- Döğer, B. (2024). Ortaokul Matematik Ders Kitaplarındaki Değerlendirme Sorularının Cebirsel Düzeylerinin İncelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
- Driscoll, M. (1999). Fostering Algebraic Thinking: A Guide For Teachers Grades 6 10. Portsmouth, Nh: Heinemann.

- Driscoll, M. (2001). *Fostering Algebraic Thinking Toolkit: A Guide For Staff Development*.
- Driscoll, M., Wing Dimatteo, R., Nikula, J., Egan, M., Mark, J. Ve Kelemanik, G. (2008). *The Fostering Geometric Thinking Toolkit*. Porstmouth, Nh: Heinemann.
- Erdoğan, M. (2023). *Cebirsel Düşünme Becerilerine Ait Yetkinlik Profillerinin Bilişsel Tanı Modelleri İle Tanılanması*. Doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Eroğlu, D., & Tanışlı, D. (2017). *Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarının Sınıf Ortamına Entegrasyonu*. İlköğretim Online,
- Goldenberg, E. P. (1996). “Habits Of Mind” As An Organizer For The Curriculum. *Journal Of Education*, 178(1), 13–34.
- Gordon, M. (2011). *Mathematical Habits Of Mind: Promoting Students’ Thoughtful Considerations*. *Journal Of Curriculum Studies*, 43(4), 457–469.
- Greenes, C. Ve Findell, C. (1998). *Algebra Puzzles And Problems (Grade 7)*, Mountain View, Ca: Creative Publications
- Gürbüz, M. Ç. (2021). *Ortaokul Öğrencilerinin Cebirsel Kavramları Soyutlama Süreçlerinin İncelenmesi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Hollingdale, S. (2006). *Makers Of Mathematics*. Courier Corporation.
- Karakaya, V. &. (2019). *Matematiksel Düşüncenin Tarihi Gelişimi Ve Eğitimde Konumlanması*. *Matematiksel Düşüncenin* .
- Karakoca, A. (2011). *Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları*. Eskişehir: Osmangazi Üniversitesi.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419.
- Kaf, Y. (2007). Matematikte Model Kullanmanın 6.Sınıf Öğrencilerinin Cebir Erişİlerine Etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kamol, N., & Har, Y. B. (2010). Upper Primary School Students' Algebraic Thinking. In L. Sparrow, B. Kissane, Ve C. Kurst (Eds.), *Proceedings Of The 33rd Annual Conference Of The Mathematics Education Research Group Of Australasia* (Issue July, Pp. 3–7).
- Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, Ve M. L. Blanton (Eds.), *Algebra İn The Early Grades*. Taylor Ve Francis Group.
- Kieran, C. (1991). A Procedural-Structural Perspective On Algebra Research. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Of The Fifteenth International Conference For The Psychology Of Mathematics Education* (Pp. 245-253), Genoa, Italy.
- Kieran, C. (1992). The Learning And Teaching Of School Algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning: A Project Of The National Council Of Teachers Of Mathematics*. Macmillan Publishing Co, Inc.
- Kieran, C. (1996). The Changing Face Of School Algebra. In C. Kieran & F. Hitt (Eds.), *Research İssues İn The Learning And Teaching Of Algebra* (Pp. 1–17). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum.

- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The Transition From Arithmetic To Algebra. In P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas For The Classroom: Middle Grades Mathematics* (Pp. 119-139). New York: Macmillan.
- Korkmaz, S., Dündar, S., & Yaman, H. (2016). Problem Çözmede Zihnin Matematiksel Alışkanlıkları. *Turkish Journal Of Computer And Mathematics Education (Turcomat)*, 7(1).
- Köse, N. & Tanışlı, D. (2014). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Geometrideki Zihinsel Alışkanlıkları. *Kuram Ve Uygulamada Eğitim Bilimleri (Kuyeb)*, 14(3), 1-28.
- Linchevski, L. (1995). Algebra With Numbers And Arithmetic With Letters: A Definition Of Pre-Algebra. *The Journal Of Mathematical Behaviour*, 14, 113 120.
- MEB. (2024). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli: İlkokul Matematik Dersi Öğretim* . Milli Eğitim Bakanlığı.
- MEB. (2024). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli: Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı*. Milli Eğitim Bakanlığı.
- NCTM. (2000). *Principles and Standarts for School Mathematics*. Reston/VA: National Council of Teachers .
- Oaks, J. A. (2006). Simplifying Equations In Arabic Algebra, *Historia Mathematica*.
- Özcan, H. (2024). Ortaokul Matematik Ders Kitaplarında Yer Verilen Cebir Öğrenme Alanına Dair Etkinliklerin Matematiksel Potansiyelleri. *Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi*, Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

- Özmuş, B. (2024). Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları Çerçevesinde Probleme Dayalı Cebir Öğretiminin Öğretmen Adaylarının Cebir Öğretim Bilgilerine Etkisi. Yayınlanmamış Doktora Lisans Tezi. Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
- Reeuwijk, M. V. (1995). The Role Of Realistic Situations In Developing Tools For Solving Systems Of Equations. Aera Conference - The Learning And Teaching Of Algebra.
- Sayı, M. (2018). Ortaokul Öğrencilerinin Problem Kurma Becerileri İle Cebirsel Düşünme Düzeyleri Arasındaki İlişki. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Sezer, N. (2019). Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreç Ve Becerilerinin Boylamsal İncelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Uludağ Üniversitesi, Bursa
- Sezer, N., & Altun, M. (2020). 6. Sınıf Öğrencilerinin Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarının Geliştirilmesi Üzerine Bir Çalışma. Journal Of Uludag University Faculty Of Education.
- Şandır, H. (2013). Yapılandırmacı öğrenme ortamlarının 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerine etkisi. Doktora tezi. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Turgut, S., & Doğan Temur, Ö. (2017). Sınıf Öğretmenlerinin Erken Cebire Yönelik Düşüncelerinin Belirlenmesi. İlköğretim Online, 16(4), 1469-1490.
- Usiskin, Z. (1995). Why İs Algebra Important To Learn? 30–37. American Educator, Spring.

- Ünveren-Bilgiç, E.N., & Argün, Z. (2018). Examining Middle School Mathematics Teacher Candidates' Algebraic Habits Of Mind In The Context Of Problem Solving. International E- Journal Of Educational Studies (Iejes), 2 (4), 64-80.
- Van Amerom, B. (2002). Reinvention Of Early Algebra: Developmental Research On The Transition From Arithmetic To Algebra (Doctoral Dissertation). University Of Utrecht, The Netherlands.
- Yenilmez, K. Ve Avcu, T. (2009). Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Alanındaki Başarı Düzeyleri. Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10(2), 37-45.
- Yenilmez, K., & Teke, M. (2008). Yenilenen Matematik Programının Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Düzeylerine Etkisi. İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9(15), 229-246.
- Yeşildere, S. & Türnüklü, E. B.(2007). Öğrencilerin Matematiksel Düşünme Ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(1), 181-213.
- Yılmaz Tıgılı, N. (2023). Middle school mathematics teachers' knowledge of eighth grade students' algebraic thinking. Doktora tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Yılmaz, A. (2022). Ortaokul 7. Ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Becerilerinin İncelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

BÖLÜM 2

ÖĞRETMEN ADAYLARININ ARGÜMANTASYON İLE İSPAT SÜREÇLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ: TEK DOĞAL SAYILARIN TOPLAMI ÖRNEĞİ

MUHAMMET DORUK¹
GÜL MİNE BAYRAM GÜN²

Giriş

Matematik öğretiminin temel amaçlarından biri, bireylerin matematiksel düşüncelerini “niçin?” ve “neden?” sorularına dayalı olarak mantıklı ve gerekçelendirilmiş biçimde ifade edebilmelerini sağlamaktır (Altıparmak & Öziş, 2005). Matematiğin temel bileşenlerinden biri olan ispat, matematiksel bilginin anlamlandırılması, yapılandırılması ve geçerliliğinin güvence altına alınmasında merkezi bir rol üstlenmektedir (Schabel, 2005; Tall, 1995). Matematiksel düşünmenin özünde, ortaya atılan iddiaların gerekçelendirilmesi ve bu gerekçelerin başkaları tarafından kabul edilebilir biçimde sunulması yer almaktadır. Bu bağlamda

¹ Doç. Dr., Uşak Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid:0000-0003-3085-1706

² Arş. Gör., Hakkari Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid:0000-0003-3468-0756

matematik eğitiminde argüman, argümantasyon ve ispat kavramları ön plana çıkmaktadır.

Son yıllarda yapılan araştırmalar, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının matematiksel önermelere ikna olma süreçleri ile bu önermeleri ispatlama süreçleri arasında önemli bilişsel ve yapısal farklılıklar bulunduğunu ortaya koymaktadır. Bu durum, argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkinin ayrıntılı biçimde incelenmesini matematik öğretimi açısından kritik hâle getirmektedir.

Argüman, bir iddiayı desteklemek amacıyla ileri sürülen gerekçeler bütünü olarak tanımlanırken; argümantasyon, bu gerekçelerin oluşturulması, sunulması, savunulması ve değerlendirilmesini içeren dinamik bir süreçtir (Toulmin, 1958; Knipping, 2008). Bireylerin bir önermenin doğruluğuna ikna olma ya da bir varsayım geliştirme amacıyla yürüttükleri zihinsel etkinlikler argümantasyon kapsamında değerlendirilmektedir. Bu sürecin sonunda ortaya konulan ve sonucun geçerliliğini güvence altına almayı amaçlayan ürün ise ispat olarak adlandırılmaktadır (Pedemonte, 2007). Matematiksel argümantasyon sürecinde bireyler; örnekler, sezgiler, sembolik işlemler ya da önceki bilgilerine dayalı gerekçeler aracılığıyla bir önermenin doğruluğuna kendilerini ikna etmeye çalışmaktadır. Bu yönüyle argümantasyon, matematiksel düşünmenin doğal bir bileşeni olup bireyin matematiksel iddialarla kurduğu ilk temas noktasıdır (Ingliš vd., 2007).

İspat ise bir matematiksel önermenin doğruluğunu, kabul edilmiş tanımlar, aksiyomlar ve daha önce ispatlanmış teoremler aracılığıyla, tümdengelimsel ve mantıksal olarak geçerli biçimde ortaya koyma süreci olarak tanımlanmaktadır (Stylianides, 2007). Weber'e (2005) göre matematiksel ispat, bireyin tanımlar, varsayımlar ve aksiyomlar gibi ön bilgileri temel alarak çıkarım kurallarını sistematik biçimde uyguladığı bir matematiksel

etkinliktir. Bu yönüyle ispat, bireysel ikna sürecinin ötesine geçerek matematiksel bilginin matematik topluluğu tarafından kabul edilmesini sağlayan temel araçtır. Argümantasyondan farklı olarak ispat, yalnızca ikna edici olmayı değil, aynı zamanda matematiksel geçerliliği de zorunlu kılmaktadır (Balacheff, 1988).

Matematiksel ispatın eğitimsel bağlamda birden fazla işlevi bulunmaktadır. İspat; matematiksel bilgiyi doğrulama, kavramlar ve önermeler arasındaki ilişkileri açıklama, matematiksel düşünmeyi derinleştirme, genelleme yapmayı destekleme ve matematiksel iletişimi güçlendirme gibi işlevlere sahiptir (De Villiers, 1999; Hanna, 2000). Ancak öğretim süreçlerinde ispatın çoğu zaman yalnızca doğrulama işleviyle ele alınması, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispatı mekanik ve prosedürel bir etkinlik olarak algılamalarına yol açabilmektedir.

Öğretmen adaylarının ispatla kurdukları ilişkiyi açıklamaya yönelik geliştirilen önemli kuramsal çerçevelerden biri ispat şemalarıdır. Harel ve Sowder (1998), bireylerin ispat üretme ve ispatı kabul etme biçimlerini dışsal, deneysel (tümevarımsal) ve analitik (tümdengelimsel) ispat şemaları altında sınıflandırmıştır. Bu çerçeve, öğretmen adaylarının bir matematiksel önermeyi neden ve nasıl geçerli kabul ettiklerini anlamada güçlü bir analitik araç sunmaktadır. Alanyazında, öğretmen adaylarının çoğunlukla deneysel ve dışsal ispat şemalarına dayandıkları, analitik ispat üretmede ise önemli güçlükler yaşadıkları sıklıkla rapor edilmektedir (Weber, 2001).

İspat yapma sürecinde yaşanan güçlükler, matematik eğitimi araştırmalarında öne çıkan bir diğer konudur. Öğretmen adaylarının; birkaç örnekle doğrulamayı ispat için yeterli görme, sembolik manipülasyonları gerekçe olarak sunma, matematiksel dili ve notasyonu etkili kullanamama, kavramsal bilgi eksiklikleri ve uygun ispat yöntemini seçememe gibi çeşitli güçlükler yaşadıkları belirtilmektedir (Selden & Selden, 2003; Stylianides & Stylianides,

2009). Bu güçlüklerin yalnızca teknik bilgi eksikliğinden değil, ispata giden bilişsel sürecin yeterince desteklenmemesinden de kaynaklandığı düşünülmektedir.

Bu noktada argümantasyon ile ispat arasındaki ilişki ön plana çıkmaktadır. Inglis vd. (2007), argümanların amacının belirsizliği azaltmak, ispatların amacının ise belirsizliği ortadan kaldırmak olduğunu vurgulayarak iki süreç arasındaki temel farkı ortaya koymuştur. Argümantasyon bireyin kendisini ikna etme sürecini temsil ederken, ispat başkalarını ikna etme ve matematiksel geçerliliği sağlama sürecini ifade etmektedir (Mariotti, 2006). Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemaları sınıflamasından yararlanan Inglis vd. (2007), argümantasyon süreçlerinde kullanılan gerekçeleri tümdengelimsel, tümevarımsal ve yapısal-sezgisel olmak üzere üç yapı altında incelemiştir. Bu yapıların, ispat yapılarının belirlenmesinde de işlevsel olduğu belirtilmektedir (Pedemonte, 2008).

Pedemonte (2007, 2008), argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkiyi içeriksel benzerlikler üzerinden değil, ifadeler arasındaki mantıksal ve bilişsel bağlantılar üzerinden ele alarak yapısal bütünlük kavramını önermiştir. Buna göre argümantasyon ve ispat aynı yapıda olduğunda yapısal süreklilik; her ikisi de tümdengelimsel olmadığında spontane süreklilik; farklı yapılar söz konusu olduğunda ise yapısal mesafe ortaya çıkmaktadır. Bu yaklaşım, argümantasyon–ispat ilişkisini daha derinlemesine analiz etmeye olanak tanımaktadır (Boero vd., 2010).

Literatür incelendiğinde, matematiksel argümantasyon ile ispat süreçleri arasındaki ilişkiyi doğrudan ele alan çalışmaların sınırlı olduğu görülmektedir (Doruk, 2016; Yitmez & Yılmaz, 2024). Mevcut çalışmalar, yapısal bütünlüğün sağlandığı durumlarda bireylerin daha başarılı ispatlar üretebildiklerini; buna karşılık ispattan önce tümevarımsal ya da sezgisel gerekçelere dayanan bireylerin tümdengelimsel ispatlara geçişte ciddi güçlükler

yaşadıklarını göstermektedir (Inglis vd., 2007; Knipping, 2008). Bu bağlamda, öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde yaşadıkları güçlüklerin anlaşılabilmesi için, ispattan önce yürüttükleri argümantasyon süreçlerinin ayrıntılı biçimde incelenmesi gerekmektedir. Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının sonlu tek doğal sayıların toplamı kuralı bağlamında, ispattan önce girdikleri matematiksel argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki yapısal ilişkileri incelemektir. Çalışmada, öğretmen adaylarının hangi argümantasyon yapılarıyla kuralın doğruluğuna ikna oldukları, bu yapıların ispat süreçlerine nasıl yansıdığı ve yapısal bütünlüğün ispat başarısı üzerindeki rolü araştırılmıştır. Bu yönüyle çalışmanın, argümantasyon–ispat ilişkisini belirli bir matematiksel içerik üzerinden ele alarak alanyazına özgün katkılar sunması ve öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin geliştirilmesine yönelik öğretimsel çıkarımlar üretmesi beklenmektedir.

Yöntem

Araştırmanın Deseni

Bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması deseni benimsenmiştir. Durum çalışması, belirli bir olgunun kendi bağlamı içerisinde derinlemesine incelenmesine olanak tanıyan bir araştırma desendir (Yıldırım & Şimşek, 2021). Araştırmada, öğretmen adaylarının sonlu tek doğal sayıların toplamı kuralı özelinde ispattan önce girdikleri argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki yapısal ilişkiler ayrıntılı olarak incelendiğinden, durum çalışması deseni araştırmanın amacına uygun görülmüştür.

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu, Türkiye’de bulunan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği

programında öğrenim gören 28 son sınıf öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışma grubunun belirlenmesinde ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme, araştırmanın amacına uygun olarak önceden belirlenen bir ya da birden fazla ölçütü karşılayan durumların çalışmaya dâhil edilmesini esas alan amaçlı örnekleme yöntemlerinden biridir (Yıldırım & Şimşek, 2021). Bu çalışmada ölçüt olarak, öğretmen adaylarının son sınıf öğrencisi olmaları belirlenmiştir. Bu ölçütün seçilme gerekçesi, öğretmen adaylarının lisans eğitimleri süresince cebir, analiz ve geometri gibi matematiksel derslerin büyük bir bölümünü tamamlamış olmaları ve bu nedenle belirli bir düzeyde matematiksel olgunluğa ulaşmış olabileceklerinin düşünülmesidir. Böylece, öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçlerinin daha anlamlı biçimde incelenebileceği varsayılmıştır.

Veri Toplama Aracı ve Veri Toplama Süreci

Araştırmada veri toplama aracı olarak, iki aşamalı problemin yer aldığı yazılı bir form kullanılmıştır. Problemin ilk aşaması matematiksel ispattan önceki argümantasyon sürecine, ikinci aşaması ise matematiksel ispat yapmaya yöneliktir. Formda öğretmen adaylarına sırasıyla şu sorular yöneltilmiştir:

- “Tek doğal sayıların toplamını veren bir kural var mıdır? Varsa, bu kurala nasıl ulaştığınızı gösteriniz.”
- “Bu kuralın matematiksel olarak doğruluğunu gösteriniz”

Veri toplama aracında tek doğal sayıların sonlu toplamın kullanılmasının nedeni argümantasyon ve ispat açısından birçok farklı doğruluk gösterim şekillerinin olmadır. Bu sonlu toplamın kuralı için hem argümantasyon sürecinde hem de ispat sürecinde birçok alternatif yapıda yol bulunmkaadır. Bu sayede öğretmen adaylarının kendilerine özgü yapıları daha belirgin ortaya çıkarabilecekleri düşünülmüştür. Araştırmada kullanılan sorunun argüantasyon e ispat süreçlerini ortaya çıkarmak için geçerliği,

matematiksel argümantasyon ve ispat konusunda deneyimli bir akdemisyenin onayı alınmıştır. Veri toplama süreci öğretmen adaylarının kendi sınıflarında gerçekleştirilmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarına çalışmanın amacı hakkında bilgilendirme yapılmış, gönüllülük esasına dayalı yürütüleceği belirtilmiştir. Öğretmen adaylarına herhangi bir süre kısıtlaması getirilmemiş, formları doğal sınıf ortamında doldurmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının formlarını en geç ders sonunda teslim ettikleri gözlemlenmiştir.

Veri Analizi

Araştırmada elde edilen nitel verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analiz, verilerin önceden belirlenen temalar doğrultusunda düzenlenerek, doğrudan alıntılarla desteklenmesi ve bulguların okuyucunun anlayabileceği biçimde yorumlanmasını amaçlayan bir analiz yaklaşımıdır (Yıldırım & Şimşek, 2021).

Öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçlerinin yapısal özelliklerini belirlemek amacıyla, Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemaları sınıflamasından yararlanılarak Inglis vd. (2007) tarafından geliştirilen sınıflama kullanılmıştır. Inglis vd. (2007), lisansüstü öğrencilerin argümantasyon süreçlerini inceledikleri çalışmalarında, ortak özellikler taşıyan gerekçeleri üç temel yapı altında sınıflandırmıştır: tümdengelsel (dedüktif), tümevarımsal (indüktif) ve yapısal-sezgisel. Bu gerekçe tipleri, yalnızca argümantasyon süreçlerinin değil, aynı zamanda ispat yapılarının belirlenmesinde de kullanılabilir (Pedemonte, 2008).

- Tümdengelsel gerekçe tipi, aksiyomlardan ulaşılan çıkarımların, cebirsel manipülasyonların ya da karşıt örneklerin kullanıldığı, resmi matematiksel gerekçelere dayalı yapıları ifade etmektedir (Inglis vd., 2007).

- Tümevarımsal (indüktif) gerekçe tipi, bir önermenin bir ya da birkaç özel örnek ya da daha genel bir örnek yoluyla doğrulanmasını içermektedir (Inglis vd., 2007).
- Yapısal-sezgisel gerekçe tipi ise, öğrencilerin bir sonuca ikna olmalarında etkili olan görsel, sezgisel ya da zihinsel yapıların; deney ve gözlemler yoluyla oluşturulmasını kapsamaktadır (Inglis vd., 2007).

Elde edilen verilerin analizinde iki araştırmacı bağımsız olarak kodlama yapmıştır. Kodlamalar arasındaki puanlayıcılar arası uyum yüzdesi %79 olarak hesaplanmıştır. Uyum sağlanamayan durumlarda araştırmacılar bir araya gelerek ilgili argümantasyon ve ispatları yeniden tartışmış ve uzlaşma yoluyla ortak karara varmışlardır. Analiz sürecinde elde edilen her bir kategoriye ilişkin olarak, öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispatlarından temsil edici örneklerle sıklıkla yer verilmiştir.

Bulgular

Bu çalışmada öncelikle öğretmen adaylarının tek doğal sayıların toplamını veren kuralı keşfetmeye yönelik girdikleri matematiksel argümantasyon süreci sonunda ürettikleri argümanların yapısal özellikleri ortaya konulmuştur. Bu amaçla öğretmen adaylarına, sonlu tek doğal sayıların toplamını veren bir kuralın olup olmadığı sorulmuş; böyle bir kural olduğunu düşünen adaylardan ise bu kurala nasıl ulaştıklarını gerekçeleriyle açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının bu süreçte ürettikleri argümanların yapısal dağılımına ilişkin bulgular Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1 Öğretmen Adaylarının Argümantasyon Yapıları

Argümantasyon yapıları	Frekans	Yüzde
Tümdengelimsel	2	%7
Tümevarımsal	16	%57
Yapısal-sezgisel	10	%36

Tablo 1 incelendiğinde, öğretmen adaylarının argümantasyon sürecinde en çok tümevarımsal yapıda en az ise tümdengelimsel yapıda argümanlar ürettikleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun tek sayıların toplamına ilişkin kuralı belirlerken tümevarımsal argümantasyon yapısını kullandıkları görülmektedir. Bu yapıdaki öğretmen adaylarının çoğu, sonlu tek sayı dizisinin birkaç terimini deneyerek elde ettikleri sonuçlardan hareketle toplamı veren bir genellemeye ulaşmaya çalışmıştır. Bazı öğretmen adayları ise ileri sürdükleri kuralın doğruluğuna, yalnızca birkaç özel örnek üzerinden yaptıkları doğrulamalarla ikna olmuşlardır. Tümdengelimsel argümantasyon yapısına sahip öğretmen adayının argümanı Şekil 1’de yer verilmiştir.

Şekil 1 Tümdengelimsel Argümantasyon Yapısına Örnek

Vardır. Deneyerek ulaştım.

$$1+3 = 4 = 2^2$$

$$1+3+5 = 9 = 3^2$$

$$1+3+5+7 = 16 = 4^2$$

$$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$$

Buradan tek doğal sayıların toplamının doğal sayıların karesi olduğu sonucuna ulaştım

On öğretmen adayının yapısal-sezgisel argümantasyon yapısına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları, çoğunlukla yeterli matematiksel gerekçe sunmadan iddialar üretmiş ya da yetersiz zihinsel gösterimler yoluyla dizinin toplamına ilişkin kurala ikna olmaya çalışmışlardır. Bu argümantasyon yapısında yer alan bazı öğretmen adaylarının, geçerli olmayan bir toplam kuralını doğru kabul ettikleri tespit edilmiştir. Yapısal-sezgisel

argümantasyon yapısına sahip öğretmen adayının argümanlarına Şekil 2’de yer verilmiştir. Bu şekilde öğretmen adayı toplam kuralını bulmak için aritmetik dizilerin özelliklerini gerekçe olarak kullanmak istese de yetersiz zihinsel gösterim yapmışlardır. Sembolik ifadeler kullanmaya çalışmıştır.

Şekil 2 Yapısal-Sezgisel Argümantasyon Yapısına Örnek

Var mıdır Bu formülü bulmak için öncelikle tek sayılar $2n+1$ ($n=\{0,1,2\}$)
 $\left(\frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{2} + 1 \right) \times \text{Terim sayısı} = \text{İçerik}$ 1 3 5 7 9

İki öğretmen adayının ise kendilerini ikna etme sürecinde, söz konusu sonlu tek sayı dizisinin toplamını aritmetik dizi kavramı gibi matematiksel kavramlarla ilişkilendirerek doğru kurala ulaştıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarının toplam kuralına ulaşmak için ürettikleri argümanlarda aritmetik dizilerin özelliklerini gerekçe olarak kullanmışlardır. Tümdengelimsel argümantasyon yapısına sahip öğretmen adayının argümanlarına Şekil 3’te yer verilmiştir.

Şekil 3 Tümdengelimsel Argümantasyon Yapısına Örnek

→ Evet vardır kuralı bulunmuş kuralıdır bu şekilde doğrulanabiliriz
çünkü 1’den de kadar sayılar olsun ardışık sayıların toplamını bulduğumuz
orijinal terim ile terim sayısını kullandık ve toplamı bulabiliriz

Argümantasyon sürecinin ardından öğretmen adaylarından ulaştıkları kuralın doğruluğunu matematiksel olarak göstermeleri, başka bir deyişle kurala ilişkin ispat üretmeleri istenmiştir. Bu aşamada öğretmen adayları, öncelikle kendilerini ikna ettikleri matematiksel iddiaları, şimdi matematiksel olarak savunma sürecine girmiştir. Bu süreç, öğretmen adaylarının ispatlama süreci olarak ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının ürettikleri ispatlar yapısal

özelliklerine göre analiz edilmiş ve elde edilen bulgular Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2 Öğretmen Adaylarının İspatlarının Yapısal Özellikleri

İspat yapıları	Frekans	Yüzde
Tümdengelimsel	5	%18
Tümevarımsal	7	%25
Yapısal-sezgisel	11	%39
İspat yok	5	%18

Tablo 2 incelendiğinde, öğretmen adaylarının en çok yapısal-sezgisel yapıda, en az tümdengelimsel yapıda ispatlar ürettikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının en fazla yapısal-sezgisel yapıda ispatlar ürettikleri görülmektedir. Bu öğretmen adayları genellikle matematiksel dayanağı olmayan açıklamalarla ispat yapmaya çalışmış ya da ispatlarını yeterli gerekçelerle destekleyememiştir. Bazı öğretmen adaylarının ise kavramsal bir anlayışa dayanmaksızın yalnızca sembolik manipölasyonlarla bir ispat oluşturmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının matematiksel düşüncelerini uygun matematiksel notasyonlarla ifade etme, ispat yapısı kurma ve ispatlama yöntemlerini etkili biçimde uygulama konularında güçlük yaşadıkları söylenebilir. Şekil 4’te öğretmen adaylarının ürettikleri yapısal-sezgisel ispata örnek sunulmuştur.

Şekil 4 Yapısal-Sezgisel İspata Örnek

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 + \dots + 2n+1 \\
 &= 1+1+3+1+ \dots + 2n+1+1 - n \quad \text{① Her sayıya 1 ekler ve kadar 1 çıkar} \\
 &= 2+4+ \dots + 2n+2 - n \quad \text{② Çıkardığımız Sayı d} \\
 &= 2(1+2+ \dots + n+1) - n \quad \text{③ Parantez için top} \\
 &= \frac{2(n+2)(n+1)}{2} - n \\
 &= (n+2)(n+1) - n = n^2 + 2n + 2 - n = n^2 + 2n + 1 \\
 &= n^2 + 2n + 1 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 = \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

Yedi öğretmen adayının tümevarımsal ispat yapısında ispatlar ürettiği belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları, dizinin birkaç teriminden hareketle genel bir sonuca ulaşmaya çalışmış; bir ya da birkaç özel örnek yardımıyla matematiksel genellenenin ispatlanabileceğini ifade etmişlerdir. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel bir önermenin ispatında özel örneklerin rolü ve sınırları konusunda yeterli bilgiye sahip olmadıklarını göstermektedir. Şekil 5'te öğretmen adaylarının ürettikleri tümevarımsal ispata örnek sunulmuştur.

Şekil 5 Tümevarımsal İspata Örnek

$$\begin{array}{llll}
 1. \text{ adım} & \dots & 1 & \rightarrow 1. \text{ adım} \quad n=1 \quad n^2 = 1 \checkmark \\
 2. \text{ adım} & \dots & 1+3 & \rightarrow 2. \text{ adım} \quad n=2 \quad n^2 = 4 \\
 3. \text{ adım} & \dots & 1+3+5 & \rightarrow 3. \text{ adım} \quad n=3 \quad n^2 = 9 \\
 4. \text{ adım} & \dots & 1+3+5+7 & \rightarrow 4. \text{ adım} \quad n=4 \quad n^2 = 16 \\
 \vdots & & \vdots & \\
 n. \text{ adım} & \dots & \dots & \rightarrow n. \text{ adım} \quad n=n \quad n^2 \checkmark
 \end{array}$$

Beş öğretmen adayının ise sonlu tek doğal sayıların toplamına ilişkin kuralı tümdengelimsel yapıda ve başarılı bir biçimde ispatladıkları belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının ispatlarında matematiksel çıkarımlara dayalı tutarlı bir yapı oluşturdukları görülmüştür. Başarılı öğretmen adaylarının dört farklı tümdengelimsel ispat yolu kullandıkları tespit edilmiştir. Bu yollar; matematiksel tümevarım yöntemi, aritmetik dizi kavramının özelliklerinden yararlanma, farklı sayı kümeleriyle ilişki kurma ve Gauss tipi terim eşleme yöntemi olarak sınıflandırılmıştır. Bu öğretmen adaylarının ispatlarını matematiksel kavram, yöntem ve işlemlere dayalı olarak tamamladıkları söylenebilir. Şekil 6'da öğretmen adaylarının ürettikleri farklı türden geçerli ispatlara yer verilmiştir.

Şekil 6 Tümdengelimsel İspat Çeşitlerine Örnekler

$$1+3+5+\dots+2n-1=n^2$$

Induksi: $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ "all r"

Langkah ke-1: $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ (n ∈ N) benar untuk n=1

Langkah ke-2: $1+2+\dots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-3: $1+2+\dots+(n+2) = \frac{1}{2}(n+2)(n+3)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-4: $1+2+\dots+(n+3) = \frac{1}{2}(n+3)(n+4)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-5: $1+2+\dots+(n+4) = \frac{1}{2}(n+4)(n+5)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-6: $1+2+\dots+(n+5) = \frac{1}{2}(n+5)(n+6)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-7: $1+2+\dots+(n+6) = \frac{1}{2}(n+6)(n+7)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-8: $1+2+\dots+(n+7) = \frac{1}{2}(n+7)(n+8)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-9: $1+2+\dots+(n+8) = \frac{1}{2}(n+8)(n+9)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-10: $1+2+\dots+(n+9) = \frac{1}{2}(n+9)(n+10)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-11: $1+2+\dots+(n+10) = \frac{1}{2}(n+10)(n+11)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-12: $1+2+\dots+(n+11) = \frac{1}{2}(n+11)(n+12)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-13: $1+2+\dots+(n+12) = \frac{1}{2}(n+12)(n+13)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-14: $1+2+\dots+(n+13) = \frac{1}{2}(n+13)(n+14)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-15: $1+2+\dots+(n+14) = \frac{1}{2}(n+14)(n+15)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-16: $1+2+\dots+(n+15) = \frac{1}{2}(n+15)(n+16)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-17: $1+2+\dots+(n+16) = \frac{1}{2}(n+16)(n+17)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-18: $1+2+\dots+(n+17) = \frac{1}{2}(n+17)(n+18)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-19: $1+2+\dots+(n+18) = \frac{1}{2}(n+18)(n+19)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-20: $1+2+\dots+(n+19) = \frac{1}{2}(n+19)(n+20)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-21: $1+2+\dots+(n+20) = \frac{1}{2}(n+20)(n+21)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-22: $1+2+\dots+(n+21) = \frac{1}{2}(n+21)(n+22)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-23: $1+2+\dots+(n+22) = \frac{1}{2}(n+22)(n+23)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-24: $1+2+\dots+(n+23) = \frac{1}{2}(n+23)(n+24)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-25: $1+2+\dots+(n+24) = \frac{1}{2}(n+24)(n+25)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-26: $1+2+\dots+(n+25) = \frac{1}{2}(n+25)(n+26)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-27: $1+2+\dots+(n+26) = \frac{1}{2}(n+26)(n+27)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-28: $1+2+\dots+(n+27) = \frac{1}{2}(n+27)(n+28)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-29: $1+2+\dots+(n+28) = \frac{1}{2}(n+28)(n+29)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-30: $1+2+\dots+(n+29) = \frac{1}{2}(n+29)(n+30)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-31: $1+2+\dots+(n+30) = \frac{1}{2}(n+30)(n+31)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-32: $1+2+\dots+(n+31) = \frac{1}{2}(n+31)(n+32)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-33: $1+2+\dots+(n+32) = \frac{1}{2}(n+32)(n+33)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-34: $1+2+\dots+(n+33) = \frac{1}{2}(n+33)(n+34)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-35: $1+2+\dots+(n+34) = \frac{1}{2}(n+34)(n+35)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-36: $1+2+\dots+(n+35) = \frac{1}{2}(n+35)(n+36)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-37: $1+2+\dots+(n+36) = \frac{1}{2}(n+36)(n+37)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-38: $1+2+\dots+(n+37) = \frac{1}{2}(n+37)(n+38)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-39: $1+2+\dots+(n+38) = \frac{1}{2}(n+38)(n+39)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-40: $1+2+\dots+(n+39) = \frac{1}{2}(n+39)(n+40)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-41: $1+2+\dots+(n+40) = \frac{1}{2}(n+40)(n+41)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-42: $1+2+\dots+(n+41) = \frac{1}{2}(n+41)(n+42)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-43: $1+2+\dots+(n+42) = \frac{1}{2}(n+42)(n+43)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-44: $1+2+\dots+(n+43) = \frac{1}{2}(n+43)(n+44)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-45: $1+2+\dots+(n+44) = \frac{1}{2}(n+44)(n+45)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-46: $1+2+\dots+(n+45) = \frac{1}{2}(n+45)(n+46)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-47: $1+2+\dots+(n+46) = \frac{1}{2}(n+46)(n+47)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-48: $1+2+\dots+(n+47) = \frac{1}{2}(n+47)(n+48)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-49: $1+2+\dots+(n+48) = \frac{1}{2}(n+48)(n+49)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-50: $1+2+\dots+(n+49) = \frac{1}{2}(n+49)(n+50)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-51: $1+2+\dots+(n+50) = \frac{1}{2}(n+50)(n+51)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-52: $1+2+\dots+(n+51) = \frac{1}{2}(n+51)(n+52)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-53: $1+2+\dots+(n+52) = \frac{1}{2}(n+52)(n+53)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-54: $1+2+\dots+(n+53) = \frac{1}{2}(n+53)(n+54)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-55: $1+2+\dots+(n+54) = \frac{1}{2}(n+54)(n+55)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-56: $1+2+\dots+(n+55) = \frac{1}{2}(n+55)(n+56)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-57: $1+2+\dots+(n+56) = \frac{1}{2}(n+56)(n+57)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-58: $1+2+\dots+(n+57) = \frac{1}{2}(n+57)(n+58)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-59: $1+2+\dots+(n+58) = \frac{1}{2}(n+58)(n+59)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-60: $1+2+\dots+(n+59) = \frac{1}{2}(n+59)(n+60)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-61: $1+2+\dots+(n+60) = \frac{1}{2}(n+60)(n+61)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-62: $1+2+\dots+(n+61) = \frac{1}{2}(n+61)(n+62)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-63: $1+2+\dots+(n+62) = \frac{1}{2}(n+62)(n+63)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-64: $1+2+\dots+(n+63) = \frac{1}{2}(n+63)(n+64)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-65: $1+2+\dots+(n+64) = \frac{1}{2}(n+64)(n+65)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-66: $1+2+\dots+(n+65) = \frac{1}{2}(n+65)(n+66)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-67: $1+2+\dots+(n+66) = \frac{1}{2}(n+66)(n+67)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-68: $1+2+\dots+(n+67) = \frac{1}{2}(n+67)(n+68)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-69: $1+2+\dots+(n+68) = \frac{1}{2}(n+68)(n+69)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-70: $1+2+\dots+(n+69) = \frac{1}{2}(n+69)(n+70)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-71: $1+2+\dots+(n+70) = \frac{1}{2}(n+70)(n+71)$ (n ∈ N) benar

Langkah ke-72: $1+2+\dots+(n+71) = \frac{1}{2}(n+71)(n+72)$ (n ∈

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n = k \text{ down}$$

$$+ \frac{1+3+5+7+\dots+n}{n+1+n+1+\dots+n+1} = \frac{(n+1)^2}{2} //$$

Çalışmanın son aşamasında, öğretmen adaylarının argümantasyon sürecinin ispat sürecine nasıl yansıdığı incelenmiştir. Bu amaçla öğretmen adaylarının argümantasyon yapıları ile ispat yapıları karşılaştırılmıştır. Öğretmen adaylarının tek doğal sayıların toplamı kuralına ikna olmak için girdikleri argümantasyon süreci ile bu kuralın doğruluğunu göstermek amacıyla girdikleri ispat süreci arasındaki yapısal ilişkiler Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3 Öğretmen Adaylarının Argümantasyon ile İspat Yapıları Arasındaki İlişki

Argümantasyon yapısı	İspat yapısı	Frekans	Yüzde
Tümdengelsel	Tümdengelsel	2	%7
Tümevarımsal	Tümdengelsel	3	%11
	Tümevarımsal	4	%14
	Yapısal-sezgisel	6	%21
	İspat yok	3	%11
Yapısal-sezgisel	Tümevarımsal	5	%18
	Yapısal-sezgisel	3	%11
	İspat yok	2	%7

Tablo 3 incelendiğinde, tümdengelsel argümantasyon süreci yaşayan öğretmen adaylarının tamamının ispat sürecinde de aynı yapıyı koruyarak geçerli ispatlar ürettikleri görülmektedir. Bu durum, argümantasyon ile ispat arasında yapısal bütünlük sağlayan öğretmen adaylarının ispatta daha başarılı olduklarını göstermektedir.

Tümevarımsal argümantasyon yapısına sahip öğretmen adaylarının yalnızca üçünün, ispat sürecinde yapısal dönüşüm gerçekleştirerek tümdengelsel ispata ulaştıkları belirlenmiştir. Altı öğretmen adayının ise yapısal-sezgisel ispata yönelindiği ve bu durumun yapısal boşluk oluşturduğu görülmüştür. Dört öğretmen adayının ise argümantasyon yapısını koruyarak tümevarımsal ispat üretmeye çalıştıkları ve bu nedenle başarılı olamadıkları tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının argümantasyon ile ispat süreçleri arasında spontane sürekliliğin olduğu görülmüştür. Bu bulgular, tümevarımsal argümantasyon süreci yaşayan öğretmen adaylarının çoğunun ispat sürecinde yapısal dönüşüm yapmakta zorlandıklarını göstermektedir. Yapısal-sezgisel argümantasyon sürecine sahip öğretmen adaylarının ise hiçbirinin dönüşümsel bir ispat üretmediği, tümdengelsel ispat yapısına dönüşüm yapamadıkları ortaya çıkmıştır.

Genel bir değerlendirme yapıldığında 28 öğretmen adayında sadece ikisinin bilişsel bütünlük içinde, üçünün yapısal dönüşüm yaparak ispatlarda başarılı oldukları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunda argümantasyon ve ispat süreçleri arasında yapısal boşluk ya da spontane süreklilik bulunduğu; bu durumun ise ispatta başarısızlığa yol açtığı sonucuna ulaşılmıştır.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Tek doğal sayıların sonlu toplamı kuralı bağlamında öğretmen adaylarının argümantasyon ve ispat süreçlerini yapısal olarak ortaya koymayı amaçlayan bu çalışmada, öncelikle ispattan önce gerçekleşen argümantasyon süreci incelenmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının kuralın doğruluğuna ispattan önce farklı yollarla ikna olduklarını göstermektedir. Öğretmen adaylarının çoğunluğunun (%57) tümevarımsal argümantasyon yapısına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının tek doğal sayıların toplamına ilişkin kurala çoğunlukla bir ya da birkaç özel örnek üzerinden denemeler yaparak, örüntüler oluşturarak ve deneysel doğrulamalar yoluyla ikna olduklarını ortaya koymaktadır. Elde edilen bu bulgu, öğretmen adaylarının matematiksel iddialara yönelik ikna süreçlerinde ampirik ve örnek temelli gerekçelere yöneldiklerini ortaya koyan önceki araştırma sonuçlarıyla uyumludur (Balacheff, 1988; Galbraith, 1981; Goetting, 1995; Inglis vd., 2007; Ko, 2010; Pedemonte, 2007).

Bununla birlikte, öğretmen adaylarının yaklaşık %36'sının yapısal-sezgisel argümantasyon yapısında olduğu belirlenmiştir. Bu gruptaki öğretmen adaylarının ikna süreçlerinde çoğunlukla matematiksel temele dayanmayan dışsal gerekçelere, sezgisel açıklamalara ya da yeterli matematiksel temsillerle desteklenmeyen sembolik manipölasyonlara başvurdıkları görölmüştür. Bu tür argümantasyonların, matematiksel geçerliği sorgulanmadığında, öğretmen adaylarını hatalı genellemelere yönlendirebildiği belirlenmiştir. Nitekim çalışmada bazı öğretmen adaylarının tek

doğal sayıların toplamına ilişkin geçerli olmayan kuralları doğru kabul ettikleri tespit edilmiştir. Bu durum, matematiksel ikna ile matematiksel doğruluk arasındaki ayrımın öğretmen adayları tarafından yeterince içselleştirilemediğini göstermektedir (Harel & Sowder, 1998). Öte yandan, yalnızca iki öğretmen adayının kuralın doğruluğuna ulaşırken tümdengelsel argümanlar kullandığı belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının, kavramlar arası ilişkiler kurarak ya da ispat yapısını önceden tasarlayarak, ispattan önce daha güçlü ve matematiksel açıdan tutarlı bir ikna süreci yaşadıkları görülmüştür. Bu sonuç, özellikle başarılı öğrencilerin matematiksel önermelere ikna olma sürecinde tümdengelsel argümanlar ürettiklerini ortaya koyan çalışmalarla örtüşmektedir (Doruk, 2016; Harel & Sowder, 1998).

Argümantasyon sürecinin ardından öğretmen adaylarından ulaştıkları kuralın doğruluğunu matematiksel olarak göstermeleri istendiğinde, öğretmen adaylarının farklı yapıda ispatlar ürettikleri belirlenmiştir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının farklı ispat şemalarına sahip olduklarını ortaya koyan önceki çalışmalarla paralellik göstermektedir (Cusi & Malara, 2007; Doruk, 2016; Harel & Sowder, 1998; Sarı vd., 2007). Öğretmen adaylarından yalnızca beşinin tümdengelsel yapıda geçerli ispatlar üretebildiği, büyük çoğunluğunun ise geçerli bir ispat ortaya koyamadığı görülmüştür. Bu sonuç, öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin genel olarak yetersiz olduğunu ortaya koyan araştırma bulgularıyla uyumludur (Ko & Knuth, 2009; Riley, 2003; Weber, 2001).

Geçerli olarak üretilen ispatlar incelendiğinde, matematiksel tümevarım yöntemi, Gauss tipi terim eşleme yöntemi, aritmetik dizi kavramı ve tek doğal sayıların farklı sayı kümeleriyle ilişkilendirilmesine dayalı ispat yollarının kullanıldığı görülmüştür. Bu durum, tek doğal sayıların toplamı kuralının farklı ispat yöntemlerine açık bir matematiksel yapı sunduğunu göstermektedir. Ancak bu potansiyele rağmen, hiçbir öğretmen adayının geometrik

ya da görsel (örneğin alan modeli) ispatlara yönelmemesi dikkat çekicidir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının ispatı ağırlıklı olarak sembolik ve cebirsel bir etkinlik olarak algıladıklarını düşündürmektedir (Mariotti, 2006).

Öğretmen adaylarının önemli bir bölümünün tümevarımsal ya da yapısal-sezgisel yapıda ispatlar üretmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu durum, öğretmen adaylarının bir önermenin doğruluğunu göstermek için birkaç örnekle doğrulamanın ya da sembolik işlemler yapmanın yeterli olduğunu düşündüklerini göstermektedir. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının örnek doğrulamasını ve geleneksel, ritüel ispat biçimlerini geçerli ispat olarak kabul ettiklerini ortaya koyan çalışmalarla benzerlik göstermektedir (Harel & Sowder, 1998; Knuth, 2002; Martin & Harel, 1989; Morris, 2002). İspatlar ayrıntılı olarak incelendiğinde; matematiksel düşünceleri açık biçimde ifade edememe, matematiksel notasyonu etkili kullanamama, kavramsal bilgi eksiklikleri, ispat yöntemlerini yanlış uygulama ve örnek doğrulamasını ispatla eşdeğer görme gibi güçlüklerin ön plana çıktığı görülmüştür. Bu güçlükler, öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde yaşadıkları yaygın sorunlar arasında yer almaktadır (Doruk & Kaplan, 2015; Moore, 1994; Weber, 2001).

Çalışmanın en dikkat çekici bulgularından biri, öğretmen adaylarının argümantasyon süreçleri ile ispat süreçleri arasındaki yapısal ilişkilerin niteliğidir. Bulgular, yalnızca iki öğretmen adayının argümantasyon sürecinden ispat sürecine yapısal süreklilik sağlayarak geçerli ve başarılı ispatlar üretebildiğini göstermektedir. Bu durum, argümantasyon ile ispat arasında kurulan yapısal bütünlüğün ispatlama sürecini önemli ölçüde kolaylaştırdığını ortaya koymaktadır. Elde edilen bu sonuç, ispattan önce yürütülen varsayım oluşturma ve gerekçelendirme sürecinin ispat yapmayı desteklediğini vurgulayan önceki araştırma bulgularıyla uyumludur (Knipping, 2008; Pedemonte, 2007; Pedemonte & Buchbinder,

2011). Buna karşılık, yalnızca üç öğretmen adayının tümevarımsal argümantasyon yapısını tüm dengelimsel bir ispat yapısına dönüştürerek geçerli ispat üretebildiği belirlenmiştir. Bu bulgu, yapısal bütünlük bulunmayan durumlarda da yapısal dönüşümün mümkün olduğunu, ancak bu dönüşümün öğretmen adayları tarafından nadiren gerçekleştirilebildiğini göstermektedir. Söz konusu dönüşümü gerçekleştirebilen öğretmen adaylarının, argümantasyon sürecinde dizinin terimlerini sistematik biçimde inceledikleri ve elde ettikleri örüntüyü genelleştirmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu sonuç, süreç-örnek genellemesine dayalı tümevarımsal argümantasyon yapısının tüm dengelimsel ispata dönüşebildiğini ortaya koyan araştırma bulgularıyla örtüşmektedir (Martínez & Pedemonte, 2014). Öte yandan, argümantasyon ve ispat süreçleri arasında spontane süreklilik ya da bilişsel boşluk bulunan öğretmen adaylarının hiçbirinin geçerli bir ispat üretememiş olması, ispattan önce geçirilen argümantasyon sürecinin ispatlama becerisi açısından ne denli kritik bir rol oynadığını açık biçimde ortaya koymaktadır. Bu bulgu, spontane süreklilik ve yapısal boşluğun ispatlama sürecinde önemli bir güçlük oluşturduğunu belirten çalışmalarla uyumludur (Martínez & Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007). Buna karşılık, argümantasyon ile ispat arasında sağlanan yapısal bütünlüğün ispat üretimini kolaylaştırdığı yönündeki sonuçlarla da örtüşmektedir (Pedemonte, 2008).

Sonuç olarak, bu çalışmada tek doğal sayıların sonlu toplamı kuralı bağlamında öğretmen adaylarının ispattan önce yürüttükleri matematiksel argümantasyon süreci ile ispat süreci arasındaki yapısal ilişkiler incelenmiştir. Bulgular, öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun tüm dengelimsel yapıda argümantasyon ve ispat üretemediğini ve bu iki süreci çoğunlukla yapısal bütünlük içinde yürütemediklerini göstermektedir. Argümantasyon ile ispat arasında önemli ölçüde yapısal boşluk, spontane süreklilik ve sınırlı sayıda yapısal dönüşüm bulunduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda, öğretmen

adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmek için ğretim süreçlerinde yalnızca bir önermenin doğruluğunun gösterilmesine odaklanmak yerine, öğrencilerin bu önermeye argümantasyon yoluyla ulaşmalarına olanak tanınmalıdır. Tümdengelimsel argüman üretimi teşvik edilmeli, ğrenci–ğrenci etkileşimine dayalı sınıf içi tartişmalara yer verilmelidir. Ayrıca argümantasyon–ispat geçişi öğretimsel olarak açık biçimde ele alınmalı ve bu iki süreç arasındaki yapısal dönüşümler üzerine odaklanılmalıdır. Farklı ispat türlerini (cebirsel, geometrik, görsel ve kombinatoryal) içeren zengin ispat etkinliklerinin, ğretmen adaylarının ispatlama becerilerinin geliştirilmesine önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

Kaynakça

- Altıparmak, K., & ziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. *In Second UCSMP international conference on mathematics education*. NCTM.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *In Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-204). Belo-Horizonte, Brazil: PME.
- Cusi, A., & Malara, N. (2007). *Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions*. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 591-600). Cyprus, Larnaca.

- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. In M. De Villiers (ed.) *Rethinking Proof with Sketchpad*, pp. 3-10.
- Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi* (Tez No: 433823). [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi].
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 315-328.
- Galbraith, P.L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 1-28.
- Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof* (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9539653).
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol. 2). NCTM.

- Inglis, M., Meija-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, 40, 427-441.
- Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.
- Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.
- Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.
- Martinez, M.V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational studies in mathematics*, 86(1), 125-149.
- Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*. 27, 249-266.
- Morris, A.K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' ability to make the inductive/educative distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79-118.

- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*, 40(3), 385–400.
- Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, 43(2), 257–267.
- Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295–319.
- Schabel, C. (2005). An Instructional model for teaching proof writing in the number theory classroom. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 15(1), 45–59. <https://doi.org/10.1080/10511970508984105>
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36.
- Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Stylianides, A. ve Stylianides, G. (2009). Proof construction and evaluation. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237–253.

- Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. *Justifying and Proving in School Mathematics*, 27-38.
- Toulmin, S.E. 1958. The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119.
- Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2021). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Seçkin Yayıncılık.
- Yitmez, B. G., & Yılmaz, S. (2024). Matematik Öğretmeni Adaylarının Ortaklaşa Argümantasyon Sürecindeki Argümanlarının ve İspat Şemalarının İncelenmesi. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 13(1), 102-119.

BÖLÜM 3

ORAN-ORANTI BAĞLAMINDA AKIL YÜRÜTME: SINIF ÖĞRETMENİ ADAYLARININ ÇÖZÜM YOLLARI

Şevval Naz YİĞİT¹
Mutlu PİŞKİN TUNÇ²

Giriş

Oran ve orantı kavramlarının anlaşılması, bu kavramların yetkin kullanımına sahip olunmasa bile matematik bilincini kolaylaştırır. Bu sebeple oran ve orantı kavramı matematik biliminin temelini oluşturur. Ayrıca bu kavramlar orantısal akıl yürütme becerisinin gelişiminde de önemli rol oynar (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012).

Oran ve orantı kavramları, rasyonel sayı işlemlerinde, cebirsel ve geometrik problemleri çözmede ve birimleri bölmede temel kavramlar olduğundan, matematikte önemli bir yere sahiptir (Wahyuningrum, Suryadi & Turmudi, 2017:1). Oran ve orantı, ortaokul seviyesinde yer edinen konular olmasına rağmen,

¹ Yüksek Lisans Öğrencisi, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik Eğitimi, Orcid: 0009-0002-7440-6460

² Doçent Doktor, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik Eğitimi, Orcid: 0000-0002-6703-1325

matematiğin diğerkonularının da temelini oluşturmaktadır (Ben-Chaim & ark., 2012). Cebir, fonksiyonlar, yüzde, geometri, veri analizi, hız, benzerlik, trigonometri gibi konuların öğrenilebilmesi için bu kavramların anlaşılması gerekmektedir (Shield & Dole, 2008:10). Öğrencilere ilkokulda orantısal durumlar daha temel seviye de aktarılsa da Milli Eğitim öğretim programında oran konusu 6. sınıfta, oran ve orantı öğretimi ise 7. sınıfta yer almaktadır (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2024). Bu kavramlarda kavramsal ve işlemsel olarak eksikliğin olması matematiğin diğerkonularını öğrenmede engel oluşturmaktadır (Şen, 2022:311).

Orantısal Akıl Yürütme

Akıl yürütme, bir hedef doğrultusunda programlanmış adımlar sayesinde bir olay veya problem durumunu mantık çerçevesinde değerlendirip, “Neden” ve “Nasıl” soruları etrafında durumu anlamlandırarak yapılan üst düzey düşünme biçimidir (Erdem, 2011). Akıl yürütmenin en yoğun kullanıldığı alanların başında matematik gelmektedir. Bu sebeple matematik öğreniminin temelinde matematiksel akıl yürütme yer alır (Kahraman, Kul & Aydoğdu, 2019).

Matematikte kullanılan akıl yürütme becerilerinden biri orantısal akıl yürütmedir (Öztürk, 2023). Matematik programlarında önemi açıkça ortaya konan orantısal akıl yürütme, matematik eğitiminin ana unsurlarından biri olduğu için birçok çalışmada yer almıştır (Çelik & Arslan, 2025). Lamon (2007:637), orantısal akıl yürütmeyi, “orantısal durumları fark etme, bu durumları ifade etme, analiz yapma, açıklama ve bu durumlarla ilgili destekleyici kanıtlar ortaya koyma” olarak tanımlamıştır. Matematik eğitiminde, matematiksel düşünmeye ihtiyaç duyulan karmaşık süreçlerin yoğun olması sebebiyle orantısal akıl yürütme becerisi üzerinde çalışmalar yapmanın önemli olduğu vurgulanmıştır (Karlı & Yıldız, 2022).

Orantısal akıl yürütme Millî Eğitim Bakanlığı tarafından hazırlanan matematik ders öğretim programında önemli yer tutmaktadır. Bu bağlamda programın zenginleştirilmesi bakımından öğrencilere orantısal akıl yürütme gerektirecek gerçek yaşam durumlarının sunulması ve bu durumlara uygun oran orantı problemleri kurmaları daha sonra bu problemleri farklı stratejilerle çözmeleri istenebileceği belirtilmiştir (MEB, 2024).

Orantısal akıl yürütme, matematik eğitimde önemli bir beceridir (Martínez Juste, Arıcan, Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, 2023). Orantısal durumları içeren sorular, zaman içerisinde birçok matematik ders kitabında yer aldığından orantısal akıl yürütme, en eski problem çözme araçlarından biri olarak düşünülmektedir (Oller-Marcén & Gairín, 2015). NCTM'in (2000:15) yayınladığı Principles and Standards of School Mathematics (PSSM)'de Ortaokul Matematik Programında orantısal akıl yürütme becerisinin önemi vurgulanmıştır ve bu becerinin gelişebilmesi için problem çözme temelli bir yaklaşımın benimsenmesi önerilmiştir. Orantısal akıl yürütme matematikte yalnızca oran ve orantı konularına ait bir beceri değildir; eğitim, yüzdelere, kesirler, rasyonel sayılar, olasılık, eşlik ve benzerlik, histogram ve trigonometri gibi konularda da sıklıkla kullanılır (Dougherty, Bryant, Bryant & Shin, 2016; NCTM, 2000). Fen bilimleri içerisinde de ivme, yoğunluk ve diğer türetilmiş niceliklerde oran ve orantılar kullanılır (Dougherty & ark., 2016) ve görsel sanatlar içerisinde perspektif konularında da oranlar ve orantılar kullanılmaktadır (Koz, 2019). Ünsal (2009)'a göre, orantısal akıl yürütme yalnızca okullarda formal eğitim içerisinde değil günlük hayatın içerisinde de kullanılan bir beceridir.

Orantısal akıl yürütme geniş kullanım alanının yanı sıra öğrenilmesi öğrenciler için zor olan ve gelişmesi uzun zaman alan bir beceridir. Bundan dolayı birçok araştırmacı bu kavram üzerinde çalışmış ve çalışmaya devam etmektedir (Tourniaire & Pulos, 1985:192).

Oran-Orantı Konusuna Ait Farklı Problem Tipleri ve Çözüm Stratejileri

Literatürde oran ve orantı kavramları bağlamında farklı problem türleri tanımlanmıştır. Bunlardan biri, Cramer ve Post'un (1993:404) Rasyonel Sayı Projesi (Rational Number Project) kapsamında tanımladığı üç problem tipidir. Bilinmeyen değeri bulma; bu problem tipinde dört adet kendi içinde orantı oluşturan değişken bulunur. Soruda üç tanesi bellidir dördüncü değişkenin bulunması beklenir. Niceliksel karşılaştırma, bu problem tipinde tüm sayısal değerler verilmiştir. Ancak bu değerlerin orantısal olarak karşılaştırılması beklenir. Niteliksel tahmin ve karşılaştırma, bu problem tipinde sayısal veriler yoktur. Sözel ifadeler kullanılarak çözüme ulaşılır (Cramer & Post, 1993:405). Orantısal akıl yürütme becerileri hem nitel hem de nicel bir süreç olduğundan bu problem tipi de niceliksel karşılaştırma kadar önemlidir (Lesh, Post & Behr, 1988).

Araştırmalar gösteriyor ki orantı problemlerinin çözümünde çeşitli stratejiler kullanılmaktadır (Baroody & Coslick, 1998; Ben-Chaim & ark., 2012; Cramer & Post, 1993; Cramer, Post & Currier, 1993; Kaput & West, 1994; Lamon, 2007, 2012). Bazı araştırmacılar bu stratejileri formal ve formal olmayan stratejiler şeklinde ikiye ayırmıştır (Baroody & Coslick, 1998; Kaput & West, 1994; Pişkin Tunç, 2024:139). Bu bölümde öncelikle orantısal akıl yürütme stratejilerinden formal olmayan yani informal stratejilere yer verilecek, ardından formal stratejilere yer verilecek ve son olarak hatalı orantısal akıl yürütme stratejilerine yer verilecektir.

Birim Oran Stratejisi: Niceliklerden birinin 1 olması durumunda diğerinin alacağı değerin hesaplandığı stratejidir. “Yani 1 tanesi kaçta denk gelir?” Sorusunun cevabını verir (Cramer & Post, 1993:404).

Arttırma Stratejisi: Bu stratejide nicelikler belli bir kurala göre artıp azalır (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto, & Miller, 1998). Bir oran kurulur ve toplama yöntemiyle başka bir orana ulaşılır (Lamon, 2007, 2012).

Değişim Çarpanı Stratejisi: Bu strateji “skaler yöntem” ya da “ölçek-değişim yöntemi” olarak da isimlendirilir. Benzerlik problemlerinde de “ölçek çarpanı yöntemi” olarak bilinir. Bu stratejide öğrencilerin “kaç katı” sorusunu kullanmalıdır (Ercole, Frantz, & Ashline, 2011:485). Dolayısıyla öğrenciler bu stratejide çarpma ve bölme yoluyla oranlar arasındaki kat bağıntısını kullanarak çözüme ulaşabilir.

Denk Kesir Stratejisi: Bu stratejide verilen oranların birimleri göz ardı edilerek birbirlerine denk kesirlermiş gibi işlem yapıp çözüme ulaşılır (Cramer & Post, 1993:162).

En yaygın kullanılan formal strateji içler dışlar çarpımıdır.

İçler Dışlar Çarpımı Stratejisi: Bu stratejide bir bilinmeyenli iki oran eşitlendikten sonra çapraz çarpma kullanılarak sonuca ulaşılır (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2010). Yani $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğinin orantı olması için $a \times d = b \times c$ bilgisi kullanılmalıdır (Cramer & Post, 1993:405).

Bu strateji çoğu zaman doğru çözüme ulaştırırsa da hatalı düşüncelere yol açabilir (Cramer & Post, 1993; Cramer & ark., 1993). Bu işlemi yapabiliyor olmak orantılı düşünmenin gerçekleştiği anlamına gelmez. Öğrenci bu stratejiyi kullanarak oran kavramını tam olarak kavramasa da doğru sonuca ulaşabilir (Lamon, 1989; 1995; 2012).

NCTM’e (2000) göre orantısal düşünme becerisi, iki oranı eşitleyip bilinmeyen niceliği bulmaktan çok daha fazlasıdır. Bu becerinin kullanılabilmesi için verilen niceliklerin tanınması, bu nicelikler arasındaki ilişkinin anlaşılması ve ilişkilerin net bir şekilde

ortaya konulması için tablolar, sayılar, grafikler ve denklemler kullanılması gerekir.

Formal ve informal stratejiler dışında hatalı orantısal akıl yürütme stratejileri de vardır. Aşağıda bu stratejiler açıklanmıştır.

Toplamsal Strateji: En yaygın hatalı orantısal akıl yürütme stratejisidir (Ben-Chaim & ark., 2012:195; Karplus, Pulos, & Stage, 1983:230). Orandaki çokluklardan biri diğerinden çıkarılarak aradaki fark bulunur ve bu farkın diğer oran için de aynı olması gerektiği düşünülür (Tourniaire & Pulos, 1985:193)

Veri ihmali: Bu stratejide verilen niceliklerden sadece birinin dikkate alınır. Diğer nicelik göz ardı edilir (Ben-Chaim & ark., 1998:250).

Hatalı ve Sorudan Bağımsız Cevap: Bu stratejide problemde verilen nicelikler arasındaki ilişki hiç düşünülmeden rastgele işlemler yapılarak yanlış sonuca ulaşılır (Ben-Chaim & ark., 1998:250).

Orantısal akıl yürütmenin en önemli becerilerinden biri, orantısal durumları tanıma becerisidir (Lobato & Ellis, 2010). Nicelikler arasında orantısal olmayan ilişkilerin olduğu ancak orantısalmış gibi izlenim veren durumlara orantısal olmayan problemler denir (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005:60). Bu problemleri orantısal akıl yürütme stratejileriyle çözmek hatalı olur. Öğrenciler genellikle çarpma stratejisi gerektiren problemleri toplama stratejisiyle çözmeye çalışmaktadır (Lamon, 2007).

Orantı öğretiminde başlıca sorunlardan biri, sadece öğrencilerin değil öğretmenlerin de orantısal olmayan durumları orantısal olarak değerlendirmesidir. (Atabaş & Öner, 2016:64; Modestou & Gagatsis, 2007:147; Van Dooren & ark., 2005:61). Bu bağlamda, sınıf öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme

gerektiren sorularda kullandıkları stratejilerin incelenmesi amaçlanmıştır.

Yöntem

Bu çalışma 2024-2025 akademik bahar döneminde, Batı Karadeniz'deki bir devlet üniversitesinde yürütülmüştür. Araştırmanın çalışma grubunu sınıf öğretmenliği lisans programının üçüncü sınıfını tamamlamak üzere olan 43 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda kullandıkları stratejileri incelemek için üç farklı problem tipi dikkate alınarak hazırlanmış sekiz orantısal akıl yürütme sorusundan oluşan bir test uygulanmıştır. Araştırmada amaca en uygun olduğu düşünülen betimsel tarama deseni kullanılmıştır. Tarama modelleri bir durumu tüm gerçekliğiyle ortaya koymayı amaçlayan çalışmalardır (Karasar, 2000).

Katılımcılar

Araştırmamıza sınıf öğretmenliği lisans eğitiminin üçüncü sınıfını tamamlamak üzere olan 43 adet öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcıların 33'ünü kadın öğretmen adayları oluştururken, 10'unu erkek öğretmen adayları oluşturmaktadır.

Veri Toplama Aracı

Veri toplama aracı, araştırmacılar tarafından ilgili literatürde bulunan orantısal akıl yürütme problemleri uyarlanarak geliştirilmiştir. Üç adet bilinmeyen değeri bulma, üç adet niceliksel karşılaştırma, bir adet niteliksel tahmin ve karşılaştırma ve bir adet orantısal olmayan problem tipi ilgili testte kullanılmıştır.

Bulgular

Bu çalışmanın amacı sınıf öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda kullandıkları stratejileri incelemektir. Bu bölümde bulgular, her bir problem için kullanılan stratejiler

yüzde değerleri üzerinden incelenmiş; yapılan analizler örnek çözümlerle desteklenmiştir.

Birinci Probleme Ait Bulgular

Birinci problem bilinmeyen değeri buldurmaya yönelik bir problem tipidir. Probleme ait soru ve örnek öğretmen adayı çözümü Resim 1’de verilmiştir.

Resim 1 Birinci probleme Ait öğretmen adayı çözümü

Aşağıdaki problemleri tüm işlem adımları açık olacak şekilde çözünüz. Hatalı olduğunuzu düşündüğünüz işlemleri veya çözümlerde kullanmayacağınız adımları silmeyiniz, sadece üzerlerini çizerek belirtiniz.

1) Aşağıda soru işareti (?) ile gösterilen yerleri iki farklı yolla bulunuz.

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{12} = \frac{?}{15}$ $? = 5$ $\left| \frac{4}{12} \cdot \frac{?}{15} = \frac{1}{3} \right.$ $4 \cdot \frac{?}{15} = \frac{1}{3}$ $? = 5$

b) $\frac{10}{20} = \frac{5}{?}$ $2 \cdot ka + 1$ $? = 10$ $\left| \frac{10}{20} \cdot \frac{?}{?} = \frac{5}{?} \right.$ $5 \cdot 2 = 10$ $? = 10$

c) $\frac{30}{90} = \frac{15}{?}$ $\frac{1}{3} = \frac{15}{?}$ $? = 45$ $\left| \frac{30}{90} \cdot \frac{15}{?} = \frac{15}{?} \right.$ $15 \cdot 3 = 45$ $? = 45$

d) $\frac{7}{8} = \frac{12}{16} \cdot \frac{3}{4}$ $? = 6$ $\left| \frac{7}{8} = \frac{12}{16} \cdot \frac{3}{4} \right.$ $12 \cdot 3 = 36$ $? = 6$

e) $\frac{6}{24} = \frac{2}{?}$ $\frac{1}{4} = \frac{2}{?}$ $? = 8$ $\left| \frac{6}{24} = \frac{2}{?} \right.$ $6 \cdot ? = 2 \cdot 24$ $? = 8$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{kat sayılarla çarpılana}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{içler dışlar çarpımı ile çarpılana}}$

Resim 1’de görüldüğü üzere öğretmen adayının kullandığı ilk strateji literatürde informal stratejilerden “değişim çarpanı” olarak adlandırılan stratejidir. İkinci olarak kullandığı strateji ise formal bir strateji olan “içler-dışlar çarpımı” stratejisidir.

Tablo 1 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 1’de kullandıkları çözüm stratejileri

Problemde Kullanılan Stratejiler	İçler-Dışlar Çarpımı	Denk kesir	Değişim Çarpanı
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%93	%68	%42

Tablo 1 incelendiğinde sınıf öğretmeni adaylarının çoğu (%93) formal bir strateji olan içler-dışlar çarpımı yöntemini

kullanmışlardır. İnformal stratejilerden ise en fazla denk kesir stratejisini (%68) kullanmışlardır. Bunun yanında sınıf öğretmen adaylarının yine informal stratejilerden olan değişim çarpanı (%42) stratejisini kullandıkları görülmektedir.

İkinci Probleme Ait Bulgular

İkinci problem niceliksel karşılaştırma problem tipine ait bir sorudur. Problem ve örnek öğretmen adayı çözümü Resim 2’ de verilmiştir.

Resim 2 İkinci Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü

2) Bir otelde tadım şefi olarak görev alan Hilal, gelen müşterilere aynı tatta limonata sunmak istemektedir. Limonata yapmakla görevli olanlardan Tuğçe 5 bardak limon suyu ile 6 bardak su kullanarak limonata hazırlamıştır. Umur ise 7 bardak limon suyu ile 8 bardak su kullanarak limonata hazırlamıştır. Buna göre Hilal şef tadım yaptıktan sonra limonatalardan hangisinin daha ekşi olduğunu söyleyebilir? İşlemlerle açıklayınız.

$$\text{Tuğçe} = \frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

$$\text{Umur} = \frac{7}{8} = \frac{21}{24}$$

Umur daha ekşi

Resim 2’de verilen problem çözümünde öğretmen adayının limon suyu ve saf suyu oranlayıp daha donra payda eşitleyerek çözüme ulaştığı görülmektedir. Payda eşit olduğu durumda payı büyük olanın daha ekşi olacağını düşünüp işlemi tamamlamıştır. Bu çözüm informal stratejilerden “denk kesir” stratejisine karşılık gelmektedir.

Tablo 2 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 2’de kullandıkları çözüm stratejileri

Problemde kullanılan stratejiler	Değişim Çarpanı	Denk Kesir	Birim Oran	Boş Bırakma	Net Olmayan Çözüm	Hatalı ve Sorudan Bağımsız Cevap
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%9	%63	%2	%9	%5	%12

Tablo 2 incelendiğinde sınıf öğretmen adaylarının çoğunun (%63) informal bir strateji olan denk kesir stratejisini kullanarak soruyu çözdükleri belirlenmiştir. Ayrıca ikinci olarak informal

stratejilerden olan değişim çarpanı (%9) ve üçüncü olarak birim oran (%2) stratejilerini kullandıkları belirlenmiştir. Bunun dışında soruyu boş bırakan (%9), net olmayan çözüm yapan (%5) ve hatalı veya sorudan bağımsız cevap veren (%12) öğretmen adayları tespit edilmiştir.

Üçüncü Probleme Ait Bulgular

Üçüncü problem niceliksel Karşılaştırma problem tipine ait bir sorudur. Resim 3 ve Resim 4 ‘de bu probleme ait soru ve örnek öğretmen adayı çözümleri verilmiştir.

Resim 3 Üçüncü Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü

3) Emel, 4 farklı dikdörtgensel kutuya sahiptir. Bu kutuların kenar uzunlukları aşağıdaki şıklarda verilmiştir. Buna göre bu kutuların hangisinin şekli kareye daha çok benzemektedir? İşlemlerle açıklayınız. *karenin kenarları eşit olduğu için oran 1'dir.*

A. 25 cm – 30 cm
B. 15 cm – 20 cm
C. 5 cm – 10 cm
D. 35 cm – 40 cm

Handwritten solution:

Diagram of a rectangle with width 30 and height 25.

A) $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$
B) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
C) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
D) $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$

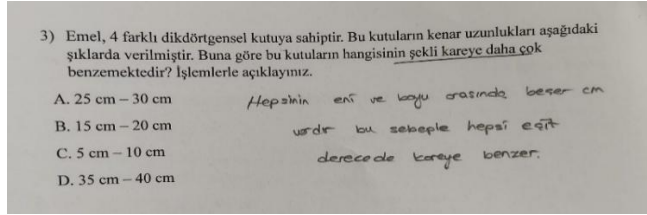
Payda eşitleyelim.

$\frac{20}{24} \rightarrow 1'e$ daha yakın.

$\frac{12}{24}$
 $\frac{13}{24}$
 $\frac{62}{24}$

Resim 3’ de verilen problem çözümünde öğretmen adayı karenin kenarlar oranının 1 olması gerektiğini düşünerek verilen dikdörtgen değerlerinin de kısa kenar ve uzun kenarını oranlayıp payda eşitleyerek 1’e en yakın olan oranı bulmaya çalışmıştır. Öğretmen adayı doğru bir düşünce ile hareket etmiştir. Ancak çözümünün son kısmında işlem hatası yaptığından dolayı yanlış şıkkı işaretlemiştir.

Resim 4 üçüncü Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü



Resim 4’ de verilen problem çözümünde öğretmen adayının çarpımsal düşünmesi gerekirken toplamsal düşündüğü, kısa kenar ve uzun kenar arasındaki farka odaklandığı görülmektedir.

Tablo 3 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 3’de kullandıkları çözüm stratejileri

Problemde kullanılan stratejiler	Değişim Çarpanı	Denk Kesir	Hatalı ve Sorudan Bağımsız Cevap	Boş	Net Olmayan Çözüm	Toplamsal Strateji Kullanma
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%9	%23	%37	%5	%7	%19

Tablo 3’te yüzde dağılımları incelendiğinde en büyük pay hatalı ve sorudan bağımsız cevaba aittir (%37). Bu durum sınıf öğretmen adaylarının bir kısmının soruyu doğru yorumlayamadıklarına işaret etmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının bir kısmı ise toplamsal ilişki (%19) kurarak soruyu çözmüştür. İnfomal stratejilerden denk kesir %23 oranla kullanılmış olup yine infomal stratejilerden değişim çarpanı %9 oranla kullanılmıştır. Bunun yanında soruyu boş bırakan (%5) ve net işlem basamakları yazmayan (7) öğretmen adayları da vardır.

Dördüncü Probleme Ait Bulgular

Dördüncü problem orantısal olmayan bir problem tipidir. Problem ve örnek öğretmen adayı çözümü Resim 5 ve Resim 6’da verilmiştir.

Resim 5 Dördüncü Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü

4) Duru ve Hazar, bir kamyonu kutu yüklüyor. Aynı hızda yükleme yapıyorlar, ancak Duru daha geç başlamıştır. Duru 45 kutu yüklediğinde, Hazar 135 kutu yüklemiştir. Duru 90 kutu yüklediğinde, Hazar kaç kutu yüklemiş olur?

$\frac{0.5n}{x-0.5n}$	<u>Duru</u> başlıyor 45 kutu 90 kutu	<u>Hazar</u> başlıyor 135 kutu ?
-----------------------	---	---

Aynı hızda yüklüyorlarsa Duru 45 kutu yüklediğinde Hazar’da 45 kutu yükler. Yani Hazar, Duru’ya göre 135-45=90 kutu yüklemiştir. Bu durumda Duru 90 kutu yüklediğinde Hazar 90+90=180 kutu yüklemiştir.

Resim 5’ de verilen çözümde öğretmen adayının toplamsal düşündüğü görülmüştür. Yani öğretmen adayı soruda verilen “Duru daha geç başladı” yazısını dikkate alarak doğru bir şekilde açıklamasını yapmıştır.

Resim 6 Dördüncü Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü

4) Duru ve Hazar, bir kamyonu kutu yüklüyor. Aynı hızda yükleme yapıyorlar, ancak Duru daha geç başlamıştır. Duru 45 kutu yüklediğinde, Hazar 135 kutu yüklemiştir. Duru 90 kutu yüklediğinde, Hazar kaç kutu yüklemiş olur?

0.5n	<u>Duru</u> (45) k (90) m	<u>Hazar</u> (135) 3k (X) 3m
-----------------	---------------------------------	------------------------------------

$m=90$
 $x=3m=270$

Resim 6’da verilen çözümde öğretmen adayı sorunun orantısal olduğunu düşünerek formal strateji olan çapraz çarpma yoluyla soruyu çözmeye çalışmıştır. Ancak soru bir orantısal ilişki gerektiren soru değildir. Öğretmen adayı “Duru daha geç başladı” yazısını dikkate almamıştır.

Tablo 4 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 4’te kullandıkları çözüm stratejileri

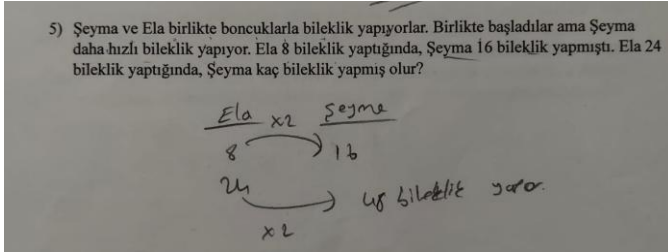
Problemde kullanılan stratejiler	Toplamsal ilişkiyi Fark Etme	Orantısal İlişki Kurma	Boş Bırakma
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%16	%82	%2

Tablo 4 incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük bir kısmının (%82) orantısal ilişki gerektirmeyen soruya orantısalmış gibi çözüm yaptığı görülmektedir. Toplamsal ilişkiyi fark eden %16 oranında öğretmen adayının olmasının yanı sıra soruyu boş bırakan (%2) öğretmen adayı da vardır.

Beşinci Probleme Ait Bulgular

Beşinci probleme bilinmeyen değeri buldurmaya yönelik bir problem tipidir. Problem ve örnek öğretmen adayı çözümler Resim 7 ve Resim 8’de verilmiştir.

Resim 7 Beşinci Problem İçin Öğretmen Adayı Çözümü



Resim 7’ de öğretmen adayının kullandığı strateji informal strateji olan “Değişim çarpanı” stratejisidir.

Resim 8 Beşinci Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü

5) Şeyma ve Ela birlikte boncuklarla bileklik yapıyorlar. Birlikte başladılar ama Şeyma daha hızlı bileklik yapıyor. Ela 8 bileklik yaptığında, Şeyma 16 bileklik yapmıştı. Ela 24 bileklik yaptığında, Şeyma kaç bileklik yapmış olur?

$$\begin{array}{r} 8 \quad \times \quad 16 \\ 24 \quad \times \quad x \\ \hline 8x = 16 \cdot 24 \\ 8x = 384 \\ x = 48 \end{array}$$

x=48 bileklik yapmış olur.

Resim 8’ de öğretmen adayının kullandığı strateji formal strateji olan “İçler-dışlar çarpımı” stratejisidir.

Tablo 5 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 5’te kullandıkları çözüm stratejileri

Problemde kullanılan stratejiler	İçler-Dışlar Çarpımı	Değişim Çarpanı	Denk Kesir	Birim Oran	Net Olmayan Çözüm
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%23	%53	%14	%5	%5

Tablo 5 incelendiğinde sınıf öğretmen adaylarının en fazla informal strateji olan değişim çarpanı (%53) stratejisini kullandıkları görülmektedir. İkinci sırada formal strateji olan içler-dışlar çarpımı (%23), üçüncü sırada informal strateji olan denk kesir (%14) ve dördüncü sırada yine informal strateji olan birim oran (%5) stratejileri kullanılmıştır. Bunu yanında herhangi bir kategoriye yerleştirilemeyen, işlemleri net olarak anlaşılmayan çözümler (%5) vardır.

Altıncı Probleme Ait Bulgular

Altıncı problem niceliksel karşılaştırmaya ait problem tipidir. Problem ve örnek öğrenci çözümleri resim 9 ve resim 10'da verilmiştir.

Resim 9 Altıncı Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümleri

6) Emre ve Yusuf parkta, parkın çevresini turlayacak şekilde koşmuşlardır. Emre 6 turunu 30 dakikada, Yusuf ise 3 turunu 12 dakikada koşmuştur. Kim daha hızlı koşmuştur? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

$$\begin{array}{r} \text{Emre'nin turu} \\ \hline 30 \\ 6 \\ \hline = 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Yusuf'un Turu} \\ \hline 12 \\ 3 \\ \hline = 4 \text{ dk} \end{array} \quad \text{Yusuf bir turu daha hızlı koşmuştur.}$$

Resim 9'da öğretmen adayının çözüm için kullandığı strateji informal stratejilerden “Birim oran” stratejisidir. Öğretmen adayı dakikayı tur sayısına oranlayarak özüme ulaşmıştır. Ancak çözümünü açıklamada yetersiz kalmıştır.

Resim 10 Altıncı Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümleri

6) Emre ve Yusuf parkta, parkın çevresini turlayacak şekilde koşmuşlardır. Emre 6 turunu 30 dakikada, Yusuf ise 3 turunu 12 dakikada koşmuştur. Kim daha hızlı koşmuştur? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

$$\begin{array}{r} \text{Emre} \\ \hline 6 \text{ turu} \\ 30 \text{ dk} \\ \hline 5 \text{ dk} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Yusuf} \\ \hline 3 \text{ turu} \\ 12 \text{ dk} \\ \hline 4 \text{ dk} \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \frac{v \cdot t}{6} = \frac{30}{6} = 5 \\ y = \frac{v \cdot t}{3} = \frac{12}{3} = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Emre daha} \\ \text{hızlı koşar.} \\ \text{Formül} \\ \text{yardımıyla} \\ \text{yol} = \text{hız} \times \text{zaman} \end{array}$$

Resim 10'da öğretmen adayı çözümü formül üzerinden yapmaya çalışmıştır. Ancak hatalı bir çözüm gerçekleştirmiştir.

Tablo 6 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 6'da kullandıkları çözüm stratejileri

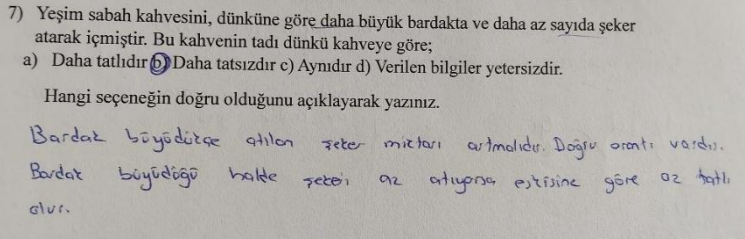
Problemde kullanılan stratejiler	Değişim çarpanı	Denk Kesir	Birim Oran	Hatalı Çözüm	Boş
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%21	%2	%70	%5	%2

Tablo 6 incelendiğinde sınıf öğretmen adaylarının büyük bir kısmının (%70) informal bir strateji olan “Birim oran” stratejisini kullandıkları belirlenmiştir. Bunun yanında yine informal strateji olan “Değişim çarpanı” stratejisinin (%21) ve “Denk kesir” stratejisinin (%2) kullanıldığı belirlenmiştir. Ayrıca hatalı çözüm yapan (%5) ve soruyu boş bırakan (%2) öğretmen adayları da bulunmaktadır.

Yedinci Probleme Ait Bulgular

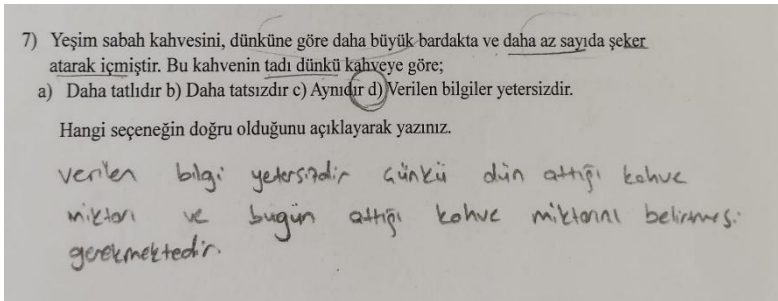
Yedinci problem niteliksel tahmin ve karşılaştırma problem tipine aittir. Problem ve örnek öğretmen adayı çözümü resim 11 ve resim 12’de verilmiştir.

Resim 11 Yedinci Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü



Resim 11 incelendiğinde öğretmen adayının su ve bardak büyüklüğü oranını kıyaslayarak açıklama yazdığı ve doğru yanıtı ulaştığı görülmektedir.

Resim 12 Yedinci Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü



Resim 12 incelendiğine öğretmen adayının su ve bardak büyüklüğü oranını dikkate alması gerekirken farklı bir değişkeni hesaba katarak verilen bilgilerin yetersiz olduğunu söylemiştir.

Tablo 7 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 7’de kullandıkları çözüm stratejileri

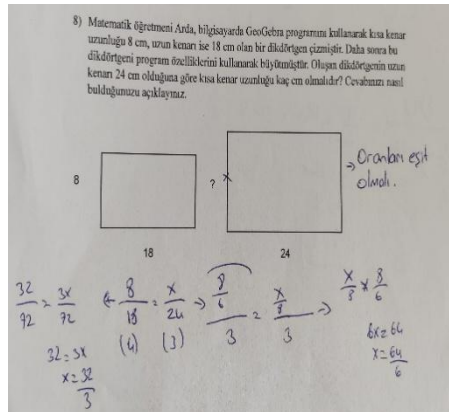
Problemde kullanılan stratejiler	Çarpımsal ilişkiye Dayalı Çözüm		Çarpımsal ilişkiye Dayalı Olmayan Çözüm		
	Sayısal veri kullanarak yapılan çözüm	Sözel olarak ifade edilen çözüm	Veri ihmali	Hatalı Karşılaştırma	Karşılaştırma yapamama
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%2	%56	%16	%21	%2

Tablo 7 incelendiğinde öğretmen adaylarının sözel ifadelerle (%56) bu sorunun çarpımsal ilişkisini açıklamış oldukları görülmektedir. Sayısal veri kullanarak (%2) çözüm yapan öğretmen adayı da bulunmaktadır. Bunun yanında çarpımsal ilişkiye dayalı olmadan çözüm yapan öğretmen adaylarının dağılımı veri ihmali (%16), hatalı karşılaştırma (%21) ve karşılaştırma yapamama (%2) olarak sınıflandırılmıştır.

Sekizinci Probleme Ait Bulgular

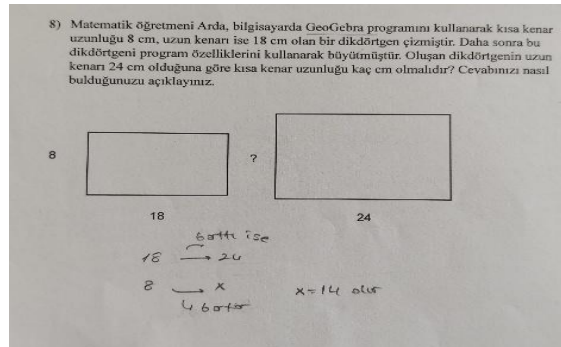
Sekizinci problem bilinmeyen değeri buldurmaya yönelik problem tipidir. Problem ve örnek öğrenci çözümleri Resim 13 ve Resim 14’te verilmiştir.

Resim 13 Sekizinci Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü



Resim 13' de öğretmen adayının kullandığı çözüm stratejisi informal stratejilerden “Denk kesir” stratejidir. Öğretmen adayı kısa kenar ve uzun kenarları oranladıktan sonra payda eşitleyerek bilinmeyen değere ulaşmıştır.

Resim 14 Sekizinci Probleme Ait Öğretmen Adayı Çözümü



Resim 14'te öğretmen adayı orantısız ilişki kurup soruyu çözmesi gerekirken toplamsal strateji kullanarak hatalı bir çözüm gerçekleştirmiştir.

Tablo 8 Sınıf Öğretmen Adaylarının Problem 8’de kullandıkları çözüm stratejileri

Problemde kullanılan stratejiler	İçler-Dışlar Çarpımı	Denk Kesir	Birim Oran	Hatalı Çözüm
Strateji Kullanım Yüzdeleri	%28	%21	%7	%44

Tablo 8 incelendiğinde Sınıf öğretmen adaylarının büyük bir kısmının hatalı çözüm (%44) yaptığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının çoğu toplamsal ilişki kurmuş veya sorudan bağımsız cevaplar vermiştir. Ayrıca en sık kullandıkları strateji içler-dışlar çarpımı (%28) iken informal stratejilerden de denk kesir (%21) ve birim oran (%7) stratejilerini kullanmışlardır.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Elde edilen bu sonuçlar dikkate alındığında öğretmen adaylarının orantısal ve orantısal olmayan durumları ayırt etmede zorlandıkları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının bir kısmının yaptıkları işlemleri açıklamaları istenen sorularda işlemsel olarak doğru adımları uyguladıkları ancak yaptıkları işlemleri açıklamada yetersiz kaldıkları tespit edilmiştir. Bunun yanında çalışma sonucunda öğretmen adaylarının formal stratejilerden çapraz çarpma ve informal stratejilerden ise denk kesir ve değişim çarpanı stratejilerini daha çok kullandıkları ortaya çıkmıştır.

Aşağıda verilen Tablo 9 yapılan incelemelerin bir özeti niteliğini taşımaktadır.

Tablo 9 Öğretmen adaylarının kullandıkları stratejiler

Soru Tipi	Soru No	En çok Kullanılan Stratejiler	Strateji Kullanım Oranı	En fazla Yanılgı/Hata
Bilinmeyen Değeri Bulma	1	Çapraz çarpma	%93	-
	5	Değişim çarpanı	%53	-
	8	Çapraz çarpma	%28	%44 hatalı işlem veya sorudan bağımsız cevap
Niceliksel Karşılaştırma	2	Denk kesir	%63	-
	3	Denk kesir	%23	%37 hatalı işlem veya sorudan bağımsız cevap
	6	Birim oran	%70	-
Niteliksel Tahmin ve Karşılaştırma	7	Sayısal değer vermeden karşılaştırma (çarpımsal ilişkiyi niteliksel olarak kullanma)	%56	-
Orantısal Olmayan Durum	4	Toplamsal ilişki kullanma	%16	%82 (toplamsal ilişkiyi fark edememe)

Tablo 9’da sunulan veriler incelendiğinde öğretmen adaylarının farklı soru tiplerinde belli stratejilere yoğunlaştıkları görülmektedir. Bilinmeyen değeri bulmaya ait problemlerde en sık kullanılan stratejinin çapraz çarpma olduğu, özellikle bu stratejinin orantısal ilişki kurulmaması gereken soruda dahi çok fazla tercih edildiği dikkat çekmektedir. Bu bulgu formal bir strateji olan çapraz çarpmanın öğretmen adayları tarafından genelleştirildiğini ve bağlam dışında da kullanıldığını göstermektedir.

Niteliksel karşılaştırma gerektiren sorularda informal stratejilerden olan denk kesir ve birim oran stratejilerinin daha fazla kullanıldığı göze çarpmaktadır. Özellikle niteliksel tahmin ve karşılaştırma gerektiren soruda çarpımsal ilişkiyi sayısal değer vermeden niteliksel olarak karşılaştırabilen öğretmen adaylarının çoğunlukta olması dikkat çekmektedir.

Tabloda verilen bilgiler ve bulgular dikkate alındığında oran ve orantı konuları öğretilmeye başlamasıyla birlikte öncelikli olarak formal stratejilere değil informal stratejilere yer verilmesinin daha uygun olduğu söylenebilir. Nitekim formal stratejilerin doğrudan sunulması durumunda, sorular orantısız olsun veya olmasın öğrencilerin ilk olarak çapraz çarpma yaptığı görülmektedir. Buna karşılık olarak informal stratejiler, öğrencilerin oran ve orantı kavramlarını anlamlı olarak öğrenmelerini destekleyen stratejiler olarak öne çıkmaktadır.

Kaynakça/References

- Atabaş, Ş., & Öner, D. (2016). An examination of Turkish middle school students' proportional reasoning. *Boğaziçi University Journal of Education*, 33(1), 63–85.
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. New York: Lawrence Erlbaum.
- Ben-Chaim, D., Fey, J.T., Fitzgerald, W.M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional Reasoning among 7th Grade Students with Different Curricular Experiences. *Educational Studies in Mathematics* 36, 247–273 (1998).
Doi:10.1023/A:1003235712092
- Ben-Chaim, D., Keret, Y., Ilany, B. (2012). *Ratio and Proportion Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Sense Publishers.
- Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics teacher*, 86(5), 404-407.
- Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom* (pp. 159 178). NY: Macmillan Publishing Company.
- Cramer, K., & Post, T. (1993, February). Making connections: A Case for Proportionality. *Arithmetic Teacher*, 40(6), 342-346.
- Çelik, A., & Arslan, S. (2025). Orantısal akıl yürütme konulu lisansüstü tezlerin sistematik literatür taraması. *Trakya Eğitim Dergisi*, 15(2), 713-750. Doi:10.24315/tred.1500396

- Dougherty, B., Bryant, D.P., Bryant, B.R. & Shin, M. (2016) Helping Students with Mathematics Difficulties Understand Ratio and Proportion. *TEACHING Exceptional Children*, 49(2), 96-105
- Duatepe, A., Akkuş Çıkla, O., & Kayhan, M. (2005). Orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejilerinin soru türlerine göre değişiminin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 73-81.
- Ercole, L.K., Frantz, M., & Ashline, G. (2011). Multiple ways to solve proportions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16(8), 482–490.
- Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman.
- Kahraman, H., Kul, E., & Aydoğdu İskenderoglu, T. (2019). 7. ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Nicel Karşılaştırma İçeren Orantısal Akıl Yürütme Problemlerinde Kullandıkları Stratejiler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(1), 195-216. Doi: 10.16949/turkbilmat.333046
- Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). Albany: State University of New York Press.
- Karasar, N. (2000). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Nobel Yayın Dağıtım.

- Karlı, M. G., & Yıldız, E. (2022). Incorrect strategies developed by seventh grade students to solve proportional reasoning problems. *Journal of Qualitative Research in Education*, 29, 111-148. Doi: 10.14689/enad.29.5
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219-233.
- Koz, D. (2019). *7. sınıf görsel sanatlar öğrencilerine oran-orantı bilgisinin kazandırılmasına perspektif uygulamalarının etkileri*. Yüksek Lisans Tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Lamon, S. (1989). *Ratio and proportion: Preinstructional cognitions*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Wisconsin-Madison.
- Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder & B. P. Schappler. (Eds.) *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*. (pp. 167-183) Albany, NY, State University of New York Press.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing
- Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations*

- in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lobato, J., & Ellis, A. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning: Grades 6–8*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Martínez-Juste, S., & Arıcan, M., & Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2023). A diagnostic comparison of Spanish and Turkish middle school students' proportional reasoning. *Asian Journal for Mathematics Education*, 2(1), 64-90. Doi:10.1177/27527263231166156
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2024). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı 5, 6, 7 ve 8. sınıflar: Türkiye yüzyılı maarif modeli*. Ankara, Türkiye: MEB.
- Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 335-368. Doi: 10.1016/S0732-3123(03)00025-7
- Modestou, M. & Gagatsis, A. (2008). Proportional reasoning in elementary and secondary education: Moving beyond the percentages. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 147-162). University of Cyprus.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Oller-Marcén A. M., & Gairín J. M. (2015). Proportionality problems in some mathematical texts prior to fourteenth century. In Krainer K., Vondrová N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1859–1865). Prague, Czech Republic: Charles University and ERME.

- Öztürk, F. (2023). *Matematik Öğretmenleri ve öğretmen adaylarının öğrencilerin kullandığı orantısal akıl yürütme stratejilerine yönelik farkındalıkları*. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Pişkin Tunç, M. (2024). Orantısal akıl yürütme nedir? Matematik öğretim programındaki yeri ve önemi. *Korkut Ata Türkiyat Araştırmaları Dergisi*, 19, 132-143
- Shield, M., & Dole, S. (2008). Proportion in middle-school mathematics: It is everywhere. *Australian Mathematics Teacher*, 64(3), 10-15.
- Şen, C. (2022). Ortaokul matematik öğretmenlerinin oran ve orantı konusunda alan ve öğretme bilgisi. *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi SBE Dergisi*, 12(1), 309-328. Doi: 10.30783/nevsosbilen.946955
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204. Doi:10.1007/BF02400937
- Ünsal, A. (2009). *İlköğretim 7. Sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütme becerilerinin başarı, tutum ve cinsiyet değişkenleri açısından incelenmesi: Bolu ili örneği*. Yüksek Lisans Tezi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.
- Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle School Mathematics Methods: Teaching Developmentally* (7th edition). New York: Allyn and Bacon.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional:

Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23, 57–86.

Wahyuningrum, A. S., Suryadi, D., & Turmudi. (2017). Epistemological obstacles on the topic of ratio and proportion among junior high school students. *International Conference on Mathematics and Science Education*, 895(1).
Doi:10.1088/1742-6596/895/1/012066

BÖLÜM 4

ÖĞRETMEN ADAYLARININ KOVARYASYONEL AKIL YÜRÜTME BECERİLERİ VE YAŞADIKLARI GÜÇLÜKLER

MUHAMMET DORUK¹
GÜL MİNE BAYRAM GÜN²

Giriş

Matematikte değişim ve değişkenler arasındaki ilişkileri anlamlandırma, öğrencilerin fonksiyon kavramını derinlemesine kavramalarında kritik bir rol oynamaktadır. Fonksiyonlar, kalkülüs konuları ve değişim oranı kavramları için ön koşul bir muhakeme türü olarak kabul edilen kovaryasyon, iki niceliğin değerlerinin (büyüklüklerinin) eş zamanlı olarak zihinde sürekli bir imge hâlinde tutulması olarak tanımlanmaktadır (Kertil vd., 2023; Saldanha & Thompson, 1998). Bu bağlamda, birden fazla niceliğin karşılıklı ve eş zamanlı değişimini anlamayı gerektiren kovaryasyonel akıl yürütme, matematiksel düşünmenin temel bileşenlerinden biri olarak görülmektedir (Carlson vd., 2002).

¹ Doç. Dr., Uşak Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid:0000-0003-3085-1706

² Arş. Gör., Hakkari Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Orcid:0000-0003-3468-0756

Kovaryasyonel akıl yürütme, temelde niceliksel akıl yürütmeye dayanmaktadır (Thompson, 1993, 1994). Saldanha ve Thompson'a (1998) göre kovaryasyon, bireyin iki niceliğin büyüklüklerindeki eşzamanlı değişimi zihinsel olarak sürdürebilmesini ifade etmektedir. Carlson ve diğerleri (2002) ise kovaryasyonel akıl yürütmeyi, değişen nicelikleri birbirleriyle olan değişim ilişkilerine dikkat ederek koordine etmeyi içeren bilişsel etkinlikler bütünü olarak tanımlamaktadır. Bu muhakeme türü; fonksiyon türlerinin ve ilişkilerinin anlaşılması, eğim kavramının anlamlandırılması, ortalama ve anlık değişim oranlarının kavramsallaştırılması ile oran-orantıya dayalı niceliksel durumların yorumlanmasında merkezi bir rol oynamaktadır. Ayrıca kovaryasyonel akıl yürütme, genelleme, modelleme ve problem çözme gibi üst düzey bilişsel süreçlerin etkin biçimde kullanılmasını desteklemektedir (Paoletti & Moore, 2017). Bu yönüyle kovaryasyonel akıl yürütme, niceliklerin yalnızca ayrı ayrı nasıl değiştiğini değil, bu değişimlerin birbirleriyle nasıl ilişkilendiğini anlamayı ve bu ilişkiyi farklı temsiller aracılığıyla ifade edebilmeyi içermektedir.

Fonksiyonlar, grafikler ve değişim kavramları, ortaokuldan üniversiteye kadar matematik öğretim programlarının merkezinde yer almaktadır. Ancak alan yazında, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının grafik okuma ve grafik çizme süreçlerinde önemli güçlükler yaşadıkları sıklıkla vurgulanmaktadır (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Bu güçlüklerin önemli bir kısmının, grafiklerin statik şekiller olarak algılanmasından ve değişkenler arasındaki dinamik ilişkinin yeterince dikkate alınmamasından kaynaklandığı belirtilmektedir. Kovaryasyonel akıl yürütme, grafiklerin değişim süreçlerini temsil eden anlamlı araçlar olarak ele alınmasını sağlayarak bu tür güçlüklerin aşılmasında önemli bir işlev üstlenmektedir (Thompson, 1994).

Kovaryasyonel akıl yürütmenin gelişiminde bağlamsal ve gerçek yaşam temelli problemler önemli bir yere sahiptir. Özellikle su dolan kaplar gibi fiziksel ve dinamik bağlamlar, niceliklerin birlikte değişimini somutlaştırarak bireylerin bu ilişkileri görselleştirmelerine olanak tanımaktadır (Confrey & Smith, 1995). Bu tür problemler, grafik çizim sürecinde eğim, konkavlık ve konvekslik gibi kavramların anlamlandırılmasını desteklemenin yanı sıra, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin daha açık biçimde kurulmasına katkı sağlamaktadır.

Öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerileri, yalnızca kendi matematiksel yeterlikleri açısından değil, gelecekte öğrencilerine sunacakları öğrenme deneyimlerinin niteliği açısından da büyük önem taşımaktadır. Öğretmen adaylarının grafiklerde eğimin değişimini, kritik noktaları ve eğri türlerini doğru biçimde yorumlayamamaları, sınıf içi öğretim süreçlerinde kavramsal eksikliklerin aktarılmasına yol açabilmektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerinin ayrıntılı biçimde incelenmesi, matematik eğitimi alanı açısından önemli bir gereksinim olarak görülmektedir.

Bu çalışmanın önemi, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerini grafik çizimleri ve bu çizimlere ilişkin açıklamalar üzerinden bütüncül bir yaklaşımla ele alması ve bu süreçte yaşanan güçlükleri eğri türleri, değişkenler arası ilişkiler ve kavramsal tutarlılık bağlamında ayrıntılı biçimde ortaya koymasından kaynaklanmaktadır. Elde edilen bulguların, öğretmen yetiştirme programlarında kovaryasyonel akıl yürütmeye yönelik öğretim tasarımlarının geliştirilmesine katkı sağlaması beklenmektedir.

Bu doğrultuda çalışmada aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranmıştır:

1. Öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerileri nasıldır?
2. Öğretmen adayları kovaryasyonel akıl yürütme sürecinde ne tür güçlükler yaşamaktadır?

Yöntem

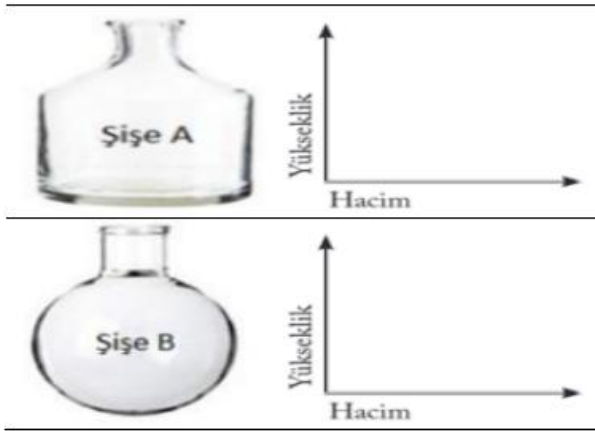
Bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiş ve araştırma deseni olarak durum çalışması kullanılmıştır. Araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerini ve bu süreçte karşılaştıkları güçlükleri ortaya koymaktır.

Araştırmanın çalışma grubunu, bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programında öğrenim görmekte olan 29 son sınıf öğretmen adayı oluşturmaktadır. Katılımcıların son sınıf öğrencilerinden seçilmesi, öğretmen adaylarının lisans eğitimleri boyunca edindikleri matematiksel ve pedagojik bilgi birikimini, kovaryasyonel akıl yürütme bağlamında daha bütüncül bir biçimde yansıtabilmelerine olanak sağlaması nedeniyle tercih edilmiştir.

Öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla kullanılan problem türleri incelendiğinde, alan yazında şişe problemlerinin sıklıkla tercih edildiği görülmektedir (Carlson, 1998; Carlson vd., 2002; Kertil, 2020; Stalvey & Vidakovic, 2015; Şen-Zeytun vd., 2010; Ulusoy, 2020; Yemen-Karpuzcu vd., 2017). Bu doğrultuda, Ulusoy (2020, s. 468) tarafından kullanılan şişe görsellerinin araştırmanın amacıyla uyumlu olduğu değerlendirilmiştir. Söz konusu görseller temel alınarak, iki farklı şişeye yönelik problemler hazırlanmıştır.

Bu kapsamda öğretmen adaylarına, şekilsel özellikleri birbirinden farklı iki şişenin, yukarıdan sabit hacimli su akışıyla dolması durumunu içeren problemler yöneltmiştir. Öğretmen adaylarından, her bir şişe için suyun hacmine bağlı şişelerdeki suyun yüksekliği arasındaki ilişkiyi gösteren grafikleri çizmeleri istenmiştir. Bu amaçla, her şişeye ait boş hacim–yükseklik grafikleri sunulmuş ve öğretmen adaylarının çizimlerini bu grafiklerin üzerine yapmaları talep edilmiştir. Ayrıca, çizdikleri grafikleri hangi düşünce süreçlerini dikkate alarak oluşturduklarını yazılı olarak açıklamaları istenmiştir. Bu sayede öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerinin yanı sıra, bu süreçte karşılaştıkları kavramsal ve temsile dayalı güçlüklerin de ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Çalışmada kullanılan görseller aşağıda sunulmuştur.

Şekil 1 Çalışmada Kullanılan Görseller



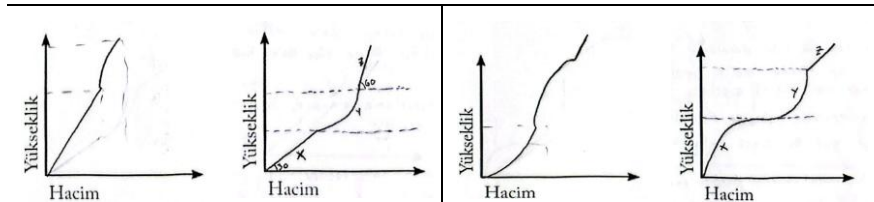
A şişesine ait grafik, şekilsel olarak üç bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler sırasıyla doğrusal, yukarı bükey (konkav) ve yeniden doğrusal yapıdadır. B şişesine ait grafik ise sırasıyla konveks (aşağı bükey), konkav (yukarı bükey) ve doğrusal olmak üzere üç farklı eğri türünden oluşmaktadır.

Elde edilen veriler, öğretmen adaylarının grafik çizimleri ve yazılı açıklamaları üzerinden betimsel analiz yöntemiyle incelenmiştir. Katılımcı ifadeleri üzerinde herhangi bir dilsel ya da anlamsal müdahalede bulunulmamış; bulguların sunumunda, öğretmen adaylarının düşüncelerini yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Bulgular

Çalışmada ilk aşamada, öğretmen adaylarının yaptıkları grafik çizimleri incelenmiştir. Öğretmen adaylarının A şişesi için yaptıkları çizimlerin 12'sinin kabaca doğru olduğu tespit edilmiştir. Bu çizimlerden yalnızca birinde, doğrusal doğru parçaları arasındaki eğim farklılığının dikkate alındığı belirlenmiştir. Buna göre, A şişesi özelinde öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun kovaryasyonel muhakeme becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı söylenebilir. B şişesi için ise, 17 öğretmen adayının kabaca doğru çizim yaptığı tespit edilmiştir. Bu bulguya dayanarak, öğretmen adaylarının yarısından fazlasının B şişesi bağlamında kovaryasyonel muhakeme becerilerinin görece yeterli olduğu ifade edilebilir. Genel bir değerlendirme yapıldığında, iki şişe için toplam 29 öğretmen adayının en az bir şişe için kabaca doğru çizim yapabildiği görülmüştür. Buna göre, öğretmen adaylarının yaklaşık yarısının kovaryasyonel muhakeme becerilerini etkin biçimde kullanarak doğru grafik çizmede güçlük yaşadığı söylenebilir. Aşağıda, her iki şişe için doğru ve yanlış çizim örnekleri birlikte sunulmuştur.

Şekil 2 Sırasıyla A ve B Şişelerine Yönelik Çizilen Yanlış ve Doğru Grafikler



Öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükleri daha ayrıntılı biçimde incelemek amacıyla yaptıkları çizimler analiz edilmiştir. A şişesine ait grafik, şekilsel olarak üç bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler sırasıyla doğrusal, konkav ve yeniden doğrusal yapıdadır. B şişesine ait grafik ise sırasıyla konveks, konkav ve doğrusal olmak üzere üç farklı eğri türünden oluşmaktadır. Öğretmen adaylarının bu eğri türlerini doğru temsil etme durumları Tablo 1’de sunulmuştur.

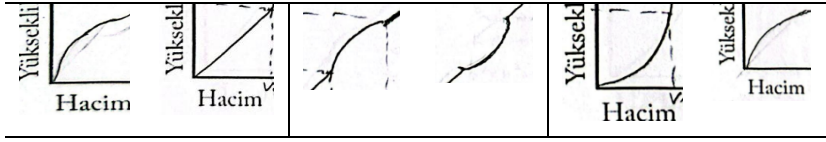
Tablo 1 Öğretmen Adaylarının Eğri Türlerini Çizme Becerileri

A şişesi				B şişesi		
Çizim	Doğrusal	Konkav	Doğrusal	Konveks	Konkav	Doğrusal
Doğru	28	14	23	19	20	27
Yanlış	1	15	6	10	9	2

Tablo 1 incelendiğinde, öğretmen adaylarının eğimin sabit olduğu doğrusal grafiklerde başarı oranlarının daha yüksek olduğu görülmektedir. Buna göre öğretmen adaylarının, bağımsız değişkendeki artışa karşılık bağımlı değişkenin sabit oranda arttığı ilişkileri temsil eden doğrusal eğrileri çoğunlukla doğru çizebildikleri söylenebilir. Buna karşın, öğretmen adaylarının konveks ve konkav eğri çizimi gerektiren grafiklerde daha fazla güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. En az dokuz öğretmen adayının konveks ve konkav eğri çizimini gerektiren bu grafik çizimlerinde başarısız olduğu görülmüştür.

Şekil 3’te sırasıyla doğrusal, konkav ve konveks eğrileri doğru ve yanlış biçimde çizen öğretmen adaylarının çizimlerine yer verilmiştir. Şekil 3’teki örnekler incelendiğinde, doğrusal çizilmesi gereken eğrinin konveks, konkav çizilmesi gereken eğrinin konveks ve konveks çizilmesi gereken eğrinin ise konkav eğri türüyle temsil edildiği görülmektedir.

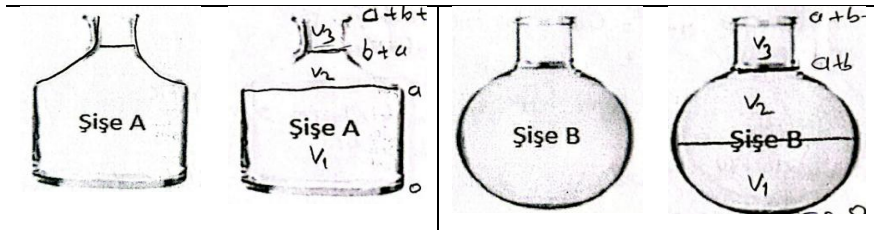
Şekil 3 Sırasıyla Doğrusal, Konkav ve Konveks Grafiklere Yönelik Yanlış ve Doğru Çizimler



Öğretmen adaylarının yaklaşık yarısının, genel olarak grafik çizmede başarısız olduğu tespit edilmiştir. Bu güçlükleri ayrıntılandırmak amacıyla, çizimlerinde başarısız olan öğretmen adaylarının grafikleri ve bu grafikleri hangi düşünme süreçleriyle oluşturduklarına ilişkin yazılı açıklamaları incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda, öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlüklerin belirlenmesine yönelik ayrıntılı analizler yapılmıştır.

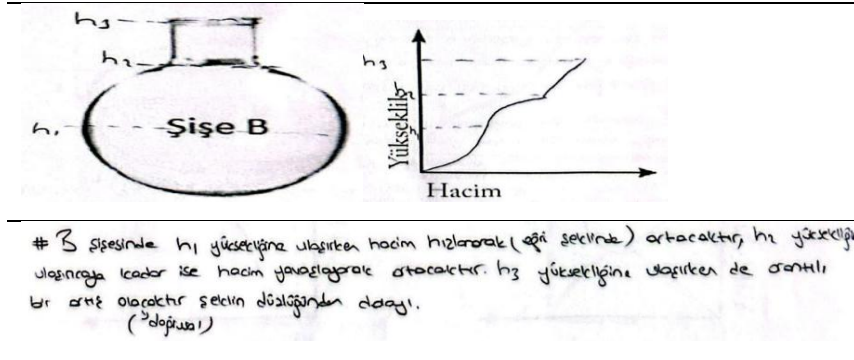
Öncelikle, şişe grafiklerinin doğru biçimde çizilebilmesi için belirli kritik noktaların belirlenmesi gerekmektedir. Bu noktalarda eğri türü değişmektedir. Doğru grafik çiziminin temel koşullarından biri, bu kritik bölgelerin doğru bir biçimde analiz edilmesidir. Kritik bölge analizini yapamayan hiçbir öğretmen adayının doğru grafik çizemediği tespit edilmiştir. Şekil 4’te kritik bölge analizini doğru yapan ve yapamayan öğretmen adaylarına ilişkin örnekler sunulmuştur. İlgili örneklerde, şişe üzerinde herhangi bir kritik bölge incelemesi yapmayan öğretmen adayları ile şişeyi üç kritik bölgeye doğru biçimde ayıran öğretmen adaylarının çizimleri yer almaktadır.

Şekil 4 Sırasıyla A ve B Şişesine Yönelik Yanlış ve Doğru Kritik Bölge Analizi



Başarısız çizim yapan öğretmen adaylarının bir kısmının ise bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi doğru kuramadıkları belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının bağımlı ve bağımsız değişkenleri ters aldıkları ve bu nedenle ilişkinin tersini temsil eden fonksiyonun grafiğini çizdikleri görülmüştür. Şekil 5'te bağımlı–bağımsız değişken ilişkisini ters kuran ve buna bağlı olarak ters fonksiyon grafiği çizen bir öğretmen adayının çizimi ve açıklaması sunulmuştur. İlgili örnekte, bağımsız değişken olarak hacim yerine yükseklik alınmış; buna paralel olarak hacme bağlı yükseklik grafiği çizilmesi gerekirken, yüksekliğe bağlı hacim grafiği çizilmiştir. Dolayısıyla üretilen grafik, hacme bağlı yükseklik fonksiyonunun tersini temsil eden yüksekliğe bağlı hacim grafiği olmuştur.

Şekil 5 Bağımlı–Bağımsız Değişken İlişkisini Ters Kuran Örnek Çizim ve Açıklama

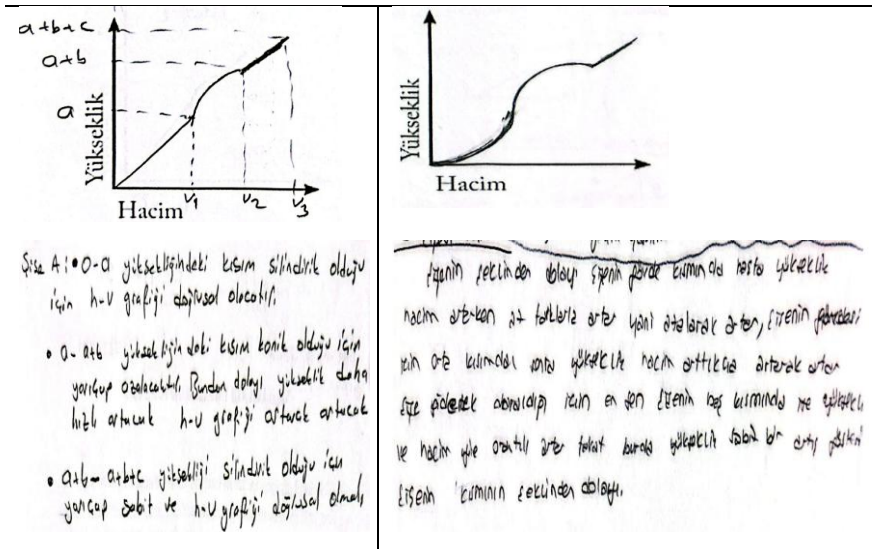


Bazı öğretmen adaylarının ise yaptıkları muhakemeler doğru olmasına rağmen, çizdikleri grafiklerin yaptıkları yorumlarla örtüşmediği belirlenmiştir. Özellikle “artarak artma” ve “azalarak artma” gibi eğimin değişimini ifade eden kritik kavramların, çizilen eğrilere doğru biçimde yansıtılamadığı görülmüştür. Bu durumun, öğretmen adaylarının artan fonksiyon, konkav ve konveks eğri kavramlarına ilişkin kavramsal bilgilerindeki eksikliklerden

kaynaklandığı düşünülmektedir. Şekil 6’da doğru yorumlarla çizimlerin uyuşmadığı örneklere yer verilmiştir.

A şişesine ilişkin örnekte öğretmen adayı “yükseklik artarak artacak” ifadesiyle eğimin giderek arttığını belirtmiş; ancak bu durumu konveks bir eğriyle temsil etmiştir. B şişesine ilişkin örnekte ise sırasıyla “yükseklik az farklarla artar” ve “yükseklik arttıkça artar” ifadeleriyle pozitif eğimin azalması ve artması doğru biçimde ifade edilmiş; ancak bu durum sırasıyla konkav ve konveks eğrilerle hatalı şekilde temsil edilmiştir. Bu örneklerde yorumlamalar doğru, çizimler ise yanlıştır

Şekil 6 Sırasıyla A ve B Şişesine Yönelik Doğru Yorumlarla Çizimlerin Uyuşmadığı Örnekler

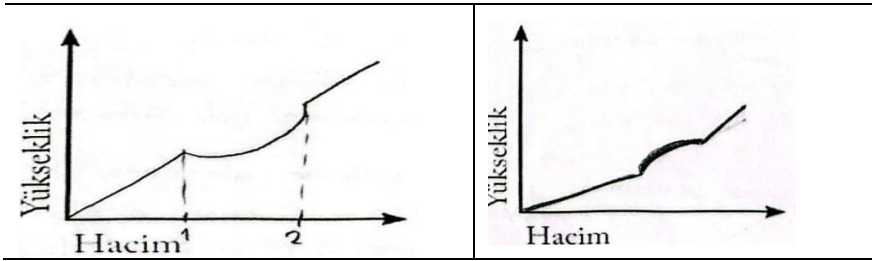


Son olarak, öğretmen adaylarının tamamına yakınının (dört öğretmen adayı hariç) A şişesi için çizdikleri doğrusal grafiklerde eğim farklılığını dikkate almadıkları tespit edilmiştir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının doğrunun eğimi ile bağımlı-bağımsız değişken ilişkisi arasındaki matematiksel ve bağlamsal anlamı yeterince kavrayamadıklarını göstermektedir. Başka bir ifadeyle,

doğrusal bir fonksiyonun grafiğinde eğim değişiminin matematiksel ve bağlamsal anlamı üzerinde yeterince düşünmedikleri söylenebilir.

Şekil 7’de eğim farklılığını dikkate alan ve almayan öğretmen adaylarının çizimlerine yer verilmiştir. A şişesi için verilen ilk örnekte doğrusal bölümler aynı eğimle çizilmiş, ikinci örnekte ise şişenin şeklinin daha dar olması nedeniyle doğrunun daha büyük eğimle çizildiği görülmüştür.

Şekil 7 A Şişesine Yönelik Sırasıyla Eğim Farklılığını Dikkate Almayan ve Alan Çizimler



Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerinin ortaya çıkarılmasını amaçlayan bu araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının yaklaşık yarısının söz konusu becerilere yeterli düzeyde sahip olmadığı tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerilerini kullanma ve bu becerileri grafik temsillerine yansıtma konusunda önemli güçlükler yaşadıkları söylenebilir. Elde edilen bu sonuç, alan yazında matematik öğretmeni adaylarının kovaryasyonel akıl yürütmelerinin zayıf ve yüzeysel olduğunu ortaya koyan çalışma sonuçlarıyla büyük ölçüde örtüşmektedir (Doruk & Cihan, 2024; Kertil, 2020; Kertil vd., 2019; Ulusoy, 2020; Yemen-Karpuzcu vd., 2017).

Çalışmadan elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının doğrusal ilişki içeren, orantı sabitinin değişmediği, doğrusal

eğrilerde görece daha başarılı, buna karşılık eğimin değişkenlik göstererek değiştiği (konkav–konveks) eğrilerde belirgin güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuştur. Özellikle eğimin sabit olduğu durumlarda grafik çizimlerinin büyük ölçüde doğru yapılabilmesi, öğretmen adaylarının oransal akıl yürütme ve sabit değişim kavramlarına daha aşina olduklarını göstermektedir. Bu durumun, doğrusal ilişkilerin matematik öğretiminde erken öğrenme kademelerinden itibaren yoğun biçimde ele alınmasıyla ilişkili olduğu düşünülmektedir (Confrey & Smith, 1995).

Buna karşılık, eğimin değiştiği durumları içeren konkav ve konveks grafiklerde yaşanan güçlükler, öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütmenin dinamik ve sürekli değişime dayalı doğasını yeterince içselleştiremediklerini göstermektedir. Alan yazında kovaryasyonel akıl yürütmenin, değişkenlerin birlikte ve sürekli değişimini anlamayı gerektiren üst düzey bir bilişsel süreç olduğu vurgulanmaktadır (Carlson vd., 2002). Bu çalışmada öğretmen adaylarının kritik bölgeleri doğru biçimde belirleyememeleri ve eğri türündeki değişimleri grafiklerine yansıtamamaları, bu bilişsel sürecin yeterince gelişmediğine işaret etmektedir. Doruk ve Cihan (2024), öğrencilerin yaşadıkları bu tür zorlukların nedenleri arasında öğretmen adaylarının uzamsal akıl yürütme becerilerindeki yetersizliklerin önemli bir yer tuttuğunu belirtmiştir.

Araştırma bulguları, öğretmen adaylarının önemli bir kısmının bağımlı ve bağımsız değişkenleri ters ele aldıklarını ve buna bağlı olarak ters fonksiyon grafikleri çizdiklerini göstermiştir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının fonksiyonel ilişkiyi çoğunlukla cebirsel bir eşleştirme süreci olarak algıladıklarını; değişkenler arasındaki nedensel ve yönlü ilişkiyi ise yeterince dikkate almadıklarını düşündürmektedir. Benzer şekilde Thompson (1994), değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü anlamının, kovaryasyonel düşünmenin temel bileşenlerinden biri olduğunu vurgulamaktadır.

Bazı öğretmen adaylarının sözel açıklamaları ile çizimleri arasındaki tutarsızlıklar, kavramsal bilgi ile temsiller arası geçişte yaşanan kopuklukları ortaya koymaktadır. Özellikle “artarak artma” ve “azalarak artma” gibi eğimin değişimini ifade eden kavramların grafiksel temsile doğru biçimde yansıtılamaması, öğretmen adaylarının konkavlık, konvekslik ve eğim kavramlarını yüzeysel düzeyde bildiklerini göstermektedir. Bu durum, grafik okuma ve grafik çizme becerilerinin yalnızca prosedürel değil, aynı zamanda kavramsal boyutlarıyla da ele alınması gerektiğini ortaya koymaktadır (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Ayrıca bu sonuç, öğretmen adaylarının temsiller arası geçiş yapma becerilerinin önemini gözler önüne sermiştir.

Son olarak, öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun doğrusal grafiklerde eğim farklılığını dikkate almadan çizim yapmaları, eğimin matematiksel ve bağlamsal anlamının yeterince kavranmadığını göstermektedir. Bu bulgu, eğimin yalnızca “doğrunun dikliği” olarak algılandığını; değişkenler arasındaki değişim hızı anlamının ise büyük ölçüde göz ardı edildiğini düşündürmektedir. Bu güçlük aynı zamanda öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme süreçlerindeki bazı eksikliklerden de kaynaklanabilir. Oysa kovaryasyonel akıl yürütme, tam olarak bu değişim hızlarının birlikte ele alınmasını gerektiren bir düşünme biçimidir (Carlson vd., 2002).

Bu araştırma, öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme süreçlerinde çok boyutlu ve birbiriyle ilişkili güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının; eğimin değişkenliği ile ilişkili eğri çizimlerinde ve bu çizimlerin yorumlanmasında, kritik bölge tespitinde, bağımlı–bağımsız değişken ilişkisinin yönünü doğru belirlemede, günlük yaşam bağlamları ile matematiksel temsiller arasındaki ilişkiyi doğru yorumlamada ve doğru yorumlarını grafik temsiline yansıtmakta güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Ayrıca sabit eğimli doğrusal

ilişkiler arasındaki farkların göz ardı edilmesi de dikkat çekici bir bulgu olarak ortaya çıkmıştır. Bu güçlükler, alan yazında rapor edilen bulgularla büyük ölçüde örtüşmektedir (Doruk & Cihan, 2024; Kertil, 2020; Kertil vd., 2019; Şen-Zeytun vd., 2010; Thompson vd., 2017; Ulusoy, 2020; Yemen-Karpuzcu vd., 2017).

Örneğin Doruk ve Cihan (2024), öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme süreçlerinde yeterli uzamsal akıl yürütme düzeyine sahip olma, kritik bölgeleri belirleme, kritik bölgelerde eğim kavramını dikkate alarak doğru çizim yapma ve bağımlı–bağımsız değişken ilişkisini doğru kurma noktasında güçlük yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Ulusoy (2020) ise kritik bölgelerde doğru grafik çiziminin yapılamaması ve bağımlı–bağımsız değişken ilişkisinin doğru belirlenememesi gibi güçlüklerin yaygın olduğunu rapor etmiştir. Bu araştırmada ise özellikle konkav–konveks eğrilerin çizimi, doğrusal eğrilerde eğim farklılığının dikkate alınmaması, günlük yaşam durumu ile matematiksel temsil arasındaki ilişkinin doğru yorumlanamaması ve doğru yorumların grafik temsiline yansıtılamaması güçlüklerinin ön plana çıktığı söylenebilir.

Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, öğretmen yetiştirme programlarında kovaryasyonel akıl yürütmeye yönelik etkinliklere sistematik ve planlı biçimde daha fazla yer verilmesi önerilmektedir. Özellikle eğimin değiştiği durumları içeren dinamik ve bağlamsal problemler, öğretmen adaylarının bu becerilerini geliştirmede etkili olabilir. Grafik çizim süreçlerinde, öğretmen adaylarının kritik bölgeleri belirleme, eğri türü değişimlerini gerekçelendirme ve bu gerekçeleri grafiklere bilinçli biçimde yansıtma becerilerini destekleyen sorgulama temelli etkinlikler tasarlanabilir.

Bağımlı ve bağımsız değişken ilişkisini güçlendirmek amacıyla, öğretmen adaylarının fiziksel ve gerçek yaşam bağlamları (su dolan kaplar, hareket problemleri, hız–zaman ilişkileri vb.) üzerinden çoklu temsillerle çalışmaları sağlanmalıdır. Grafik, tablo,

sözel açıklama ve cebirsel ifade arasındaki geçişleri destekleyen çoklu temsil temelli öğretim yaklaşımları, öğretmen adaylarının kavramsal bütünlük kurmalarına önemli katkılar sağlayabilir (Ainsworth, 2006). Gelecek araştırmalarda ise kovaryasyonel akıl yürütme becerilerinin gelişimi boylamsal çalışmalarla incelenebilir; ayrıca GeoGebra gibi dinamik matematik yazılımlarının bu beceriler üzerindeki etkisi deneysel desenler kullanılarak araştırılabilir.

Kaynakça

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86. <https://doi.org/10.2307/749228>
- Doruk, M., & Cihan, F. (2024). Farklı uzamsal akıl yürütme düzeyindeki ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kovaryasyonel akıl yürütme becerileri. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19(44), 2804-2834.
- Kertil, M. (2020). Covariational reasoning of prospective mathematics teachers: How do dynamic animations affect? *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 11(2), 312-342. <https://doi.org/10.16949/turkbilmat.652481>

- Kertil, M., Erbaş, A. K., & Çetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(3), 207-233. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 137-151. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003>
- Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson, & W. N. Coulombe (Vol. Eds.), *Proceedings of the annual meeting of the psychology of mathematics education – North America*. (Vol. 1, pp. 298–304). North Carolina State University.
- Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 192-210. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.002>
- Şen-Zeytun, A., Çetinkaya, B., & Erbaş, A. K. (2010). Mathematics teachers' covariational reasoning levels and predictions about students' covariational reasoning abilities. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 10(3), 1601-1612.
- Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 165-208. <https://doi.org/10.1007/BF01273861>

- Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 229-274. <https://doi.org/10.1007/BF01273664>
- Ulusoy, F. (2020). Öğretmen adaylarının iki niceliğin eş zamanlı değişimini içeren dinamik fonksiyonel durumlar için oluşturdukları grafik temsilleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research in Education*, 8(2), 462-488. <https://doi.org/10.14689/issn.2148-624.1.8c.2s.3m>
- Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2017). Prospective middle school mathematics teachers' covariational reasoning for interpreting dynamic events during peer interactions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 89-108. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9668-8>

GEÇİCİ KAPAK

*Kapak tasarımı
devam ediyor.*