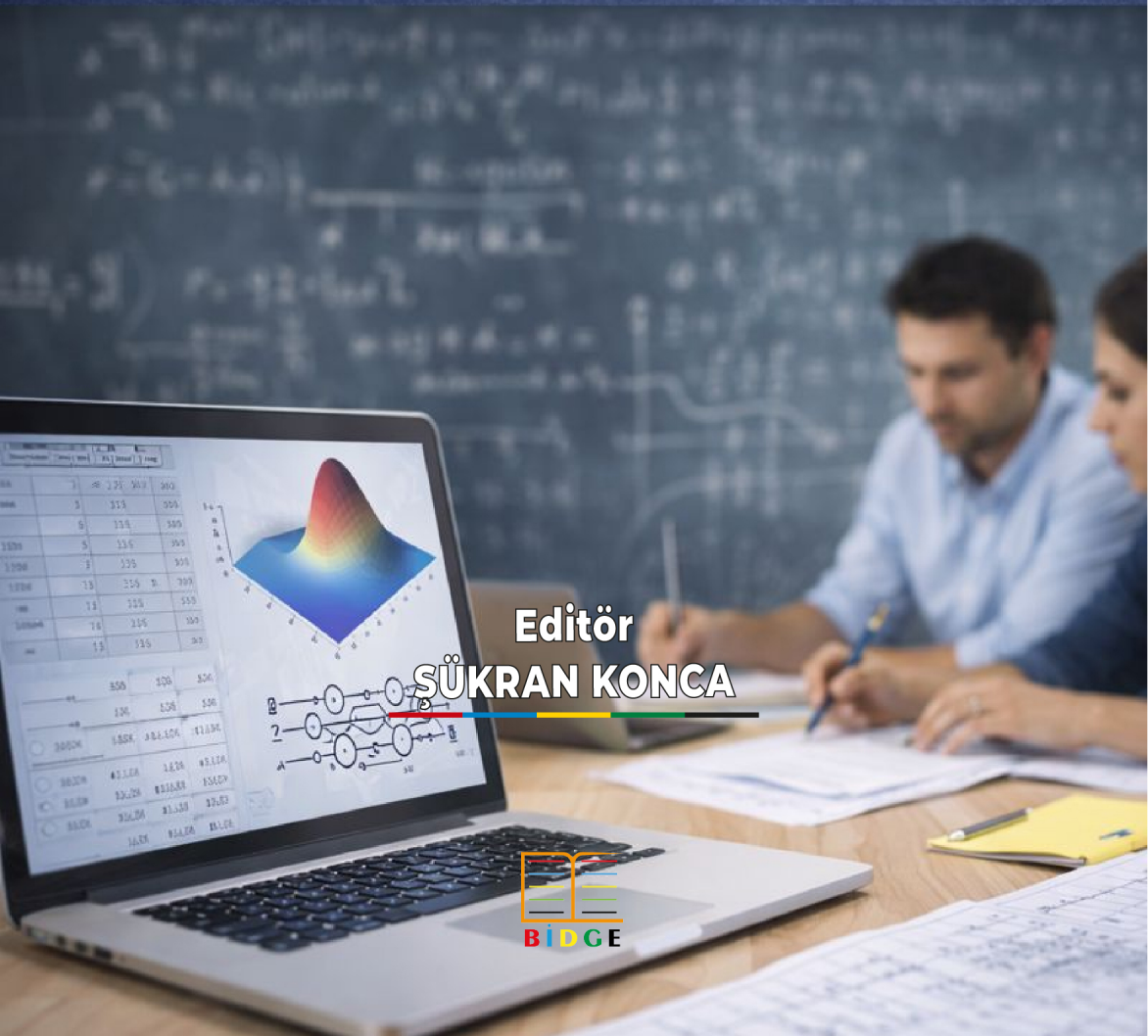


# Modern Matematikte Analiz ve Uygulamalı Yöntemler: Ölçü Teorisi, Diferansiyel Denklemler, Yaklaşım Yöntemleri Ve Makine Öğrenmesi



Editör

SÜKRAN KONCA



**BİDGE Yayınları**

**Modern Matematikte Analiz ve Uygulamalı Yöntemler: Ölçü  
Teorisi, Diferansiyel Denklemler, Yaklaşım Yöntemleri Ve  
Makine Öğrenmesi**

**Editör: ŞÜKRAN KONCA**

**ISBN: 978-625-8567-27-4**

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 2025-12-25

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

[www.bidgeyayinlari.com.tr](http://www.bidgeyayinlari.com.tr) - [bidgeyayinlari@gmail.com](mailto:bidgeyayinlari@gmail.com)

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /  
Ankara



## ÖNSÖZ

Matematik, yalnızca soyut düşüncenin bir ürünü değil; aynı zamanda mühendislikten doğa bilimlerine, sosyal bilimlerden teknolojiye kadar uzanan geniş bir yelpazede gerçek dünya problemlerinin çözümünde vazgeçilmez bir araçtır. İnsanlık tarihinin en köklü ve evrensel bilimlerinden biri olan matematik, hem kuramsal derinliği hem de uygulamalı gücüyle bilimsel ilerlemenin temel dinamiklerinden biri olmayı sürdürmektedir.

Kuramsal matematik; sayıların, yapıların, uzayların ve değişimin doğasını anlamaya yönelik soyut bir çaba olarak, cebir, analiz, geometri, topoloji, mantık ve sayı teorisi gibi alanlarda derinleşmektedir. Uygulamalı matematik ise bu soyut kavramların mühendislik, ekonomi, biyoloji, yapay zeka ve veri bilimi gibi alanlarda nasıl işlevsel hale getirilebileceğini göstermektedir. Bu iki yaklaşım, birbirini tamamlayan ve matematiğin evrenselliğini pekiştiren temel sütunlar olarak ele alınmaktadır.

Bu bağlamda, *Modern Matematikte Analiz ve Uygulamalı Yöntemler: Ölçü Teorisi, Diferansiyel Denklemler, Yaklaşım Yöntemleri ve Makine Öğrenmesi* başlıklı bu akademik eser, matematiğin çok yönlü doğasını yansıtarak hem kuramsal hem de uygulamalı boyutlarını ele almaktadır. Temelinde modern matematiksel analizin farklı yönlerini bir araya getiren çalışmalardan oluşan bu kitap; ölçü teorisi, diferansiyel denklemler, nümerik yöntemler, yaklaşım teorisi ve makine öğrenmesi gibi temel konuları içeren bölümleriyle hem kuramsal çerçeve hem de uygulamalı bakış açısı sunmaktadır. Kitapta yer alan her çalışma, kendi alanının temel kavramlarına odaklanmakla birlikte, matematiğin farklı alt disiplinleri arasındaki doğal ilişkileri de görünür kılmakta ve farklı matematiksel yaklaşımları ortak bir zeminde buluşturmaktadır. Bu yönüyle eser, hem araştırmacılar hem

de ilgili alanlarda çalışan lisansüstü öğrenciler için yararlı bir kaynak olmayı hedeflemektedir.

Editör olarak, bu eserin hazırlanmasında bilimsel katkı sunan tüm yazarlarımıza ve yayın sürecinde emeği geçen herkese teşekkür ederim.

Prof. Dr. şükran KONCA  
İzmir Bakırçay Üniversitesi

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| KLASİK ÖLÇÜM ÜZERİNE BİR DEĞERLENDİRME .....                                                                         | 1   |
| <i>ALİ KARAKUŞ</i>                                                                                                   |     |
| LATİS DEĞERLİ BULANIK ÖLÇÜM FONKSİYONLARI ...                                                                        | 21  |
| <i>ALİ KARAKUŞ</i>                                                                                                   |     |
| YENİ TİP BERNSTEIN-KANTOROVICH<br>POLİNOMLARININ $[-1,1]$ ARALIĞINDAKİ YAKLAŞIMI ..                                  | 43  |
| <i>HARUN ÇİÇEK</i>                                                                                                   |     |
| ( $\Lambda, M$ )- BERNSTEIN - DURRMEYER - STANCU<br>OPERATÖR DİZİSİ İÇİN VORONOVSKAJA TİP<br>YAKINSAMA TEOREMİ ..... | 58  |
| <i>GÜLTEN TORUN, ÜLKÜ DİNLEMEZ KANTAR</i>                                                                            |     |
| SÜREKSİZLİK NOKTASI İÇEREN SINIR DEĞER<br>PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONU AÇILIMI VE<br>CARLEMAN FORMÜLÜ .....          | 73  |
| <i>KADRIYE AYDEMİR</i>                                                                                               |     |
| ELİPTİK SINIF KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN<br>SONLU FARK ŞEMASI VE ÇİFT LAPLACE METODU İLE<br>ÇÖZÜMÜ .....        | 97  |
| <i>HARUN ÇİÇEK, HASAN GÖKBAŞ</i>                                                                                     |     |
| GUT HASTALIĞININ SINIFLANDIRILMASINDA<br>LOJİSTİK REGRESYON VE KNN ALGORİTMALARININ<br>KARŞILAŞTIRMALI ANALİZİ ..... | 113 |
| <i>BAYRAM KÖSE, BAHAR DEMİRTÜRK, ŞÜKRAN KONCA, FATMA<br/>DEMET ARSLAN</i>                                            |     |

# BÖLÜM 1

## KLASİK ÖLÇÜM ÜZERİNE BİR DEĞERLENDİRME

Ali KARAKUŞ<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Dr Öğr Üyesi., Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü,  
Kilis/Türkiye, Orcid: 0000-0002-8483-0137.

## Giriş

Ölçüm, temel olarak bir ipin uzunluğunu, bir tarlanın alanını ve bir evin hacminin hesaplanması, ihtiyacından doğmuştur ve insan yaşamında kolaylıklar getirmiştir. Bu duruma paralel olarak ölçüm kavramının hayatımıza girişi çok eskilere dayanmaktadır. Ölçüm ilk olarak, insanlar tarafından kendi sayılarını veya hayvanlarının sayılarını belirlemek için, ardından bir çubuğun veya bir ipin reel düzlemde ki uzunluğunun ölçümünün belirlenmesi için, daha sonraları tarımın gelişmesi ve yerleşik hayata geçiş ile birlikte bir tarlanın alanını hesaplanmak ve bir evin hacmini hesaplamak için basit anlamdaki ölçümleri temsil etmektedir. Ancak bu basit anlamdaki ölçümler daha kompleks ölçümler için yetersiz kalmıştır. Örneğin bir ağacın hacminin hesaplanmasında veya bir yaprağın yüzey alanının hesaplanmasında bir çok problemle karşılaşılmıştır. İşte bu noktada basit anlamda ölçümün yetersizliği ortaya çıkmıştır. Buna paralel olarak daha kompleks şekil, cisim veya kümelerin ölçümü için bilimin ve özellikle de matematiğin gelişmesiyle bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin; A.L. Cauchy (1789-1857) integrali, bir toplamın limiti olarak tanımlayan ilk matematikçi oldu. Daha sonra Riemann (1826-1865), Cauchy'nin çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca G. Cantor (1845-1918) integral ile ölçüm arasındaki ilişkiyi sezinlemiştir. Yapılan çalışmalar arasında özellikle de Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesgue (1875-1941) in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin

temelini oluşturmaktadır. Klasik ölçüm teorisindeki toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçüme toplamsal ölçüm de denilmektedir.

Bilimin hızlı ilerleyişine bağılı olarak toplamsallık şartının çoğı zaman kısıtlayıcı olduğı görölmüştür. Buna bağılı olarak toplamsallık yerine monotonluk, süreklilik gibi daha esnek şartlar kullanılarak oluşturulan ölçüm kuralları oluşturulmuştur. Bu konuda özellikle (Mukherjea, 1984), Sugeno (Sugeno, 1977) ve Zadeh (Zadeh, 1978) tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu ölçümler genel olarak bulanık ölçüm olarak adlandırılır.

## Klasik Ölçüm

Klasik anlamdaki ölçümler toplamsal ölçümler olarak adlandırılırlar. Bu konuda Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesgue (1875-1941)'nin çalışmaları temel kaynaklar olmuştur. Daha sonra Caratheodory (Caratheodory, 1963) bu çalışmaları cebirsel yapıda incelemiş, ölçülebilirlik ve genişleme teoremlerini yazmıştır. Klasik ölçümlerle ilgili olarak (Zadeh, 1978), (Birkhoff, 1967) önemli kaynaklardır.

**Tanım**  $\mathcal{A}$ ,  $X$  kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlı bir cebir ve  $\mu$  'de  $\mathcal{A}$  üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere;

1-)  $\mu(\emptyset) = 0$

2-)  $\forall A \in \mathcal{A}$  için  $\mu(A) \geq 0$

3-)  $\mathcal{A}$  nın ikişer ikişer ayrık her  $\{A_n\}$  dizisi için

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

olacak şekilde

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

oluyorsa o zaman  $\mu$  ye  $\mathcal{A}$  üzerinde bir ölçüm (klasik ölçüm) denir.

(3). özellik  $\mu$  nün sayılabilir toplamsallığı olarak bilinir. Ayrıca  $\mathcal{A}$  nın ikişer ikişer ayrık her  $\{A_n\}$  dizisini,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(A_n)$$

şeklinde ifade edersek  $\mu$  ölçümü sonlu toplamsal ölçüm olarak tanımlanır (Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, 1986).

**Örnek**  $\mathcal{A} = P(X) = 2^X$  olsun.

$$\mu(A) = \begin{cases} A \text{ daki nokta sayısı} , & A \text{ sonlu ise} \\ \infty & , A \text{ sonsuz ise} \end{cases}$$

tarafından tanımlanan  $\mu$  bir ölçümdür (Atanassov K., More on intuitionistic fuzzy sets, 1989).

Gerçekten;

1-)  $A \in \mathcal{A}$  olmak üzere,  $A = \emptyset$  ise  $\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0$  dir.

2-)  $A \in \mathcal{A}$  olmak üzere  $\mathcal{A} = 2^X$  olduğundan  $A \in 2^X$  dir. O halde

Eğer,  $A = \emptyset$  ise  $A$  sayılabilir olduğundan  $\mu(A) = 0$  dir. Eğer

$A \neq \emptyset$  ise, iki durum söz konusudur.  $A$  sonlu ise  $s(A) > 0$  olduğundan

$$s(A) > 0$$

dır. A sonsuz ise

$$s(A) = \infty$$

olduğundan  $\mu(A) = \infty \geq 0$  dır.

3-)  $(A_k)_{k=1}^n = A$ ,  $\mathcal{A}$  kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olan sonlu bir dizi olsun. Bu durumda,  $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$  için  $A_k \cap A_{k+1} = \emptyset$  dır.

$$s(A_k \cup A_{k+1}) = s(A_k) + s(A_{k+1}) - s(A_k \cap A_{k+1}) = s(A_k) + s(A_{k+1})$$

olur. Daha genel olarak,

$$s\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n s(A_k)$$

olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

dır.

$(A_n)_{n=1}^\infty$ ,  $\mathcal{A}$  kümesi üzerinde ikişer ikişer ayrık olsun.

$A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$  olmak üzere,

$$s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} s(A_n)$$

olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur ki bu durumda  $\mu$  bir ölçümdür.

**Örnek**  $X$  sayılamayan bir küme ve

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : \text{ya } A \text{ ya da } X - A \text{ sayılabilir}\}$$

biçiminde tanımlanan bir sınıf olsun. O zaman  $\mathcal{A}$  bir cebirdir.

Ayrıca,

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ Eğer } A \text{ sayılabilirse} \\ 1 & , \text{ Eğer } X - A \text{ sayılabilirse} \end{cases}$$

tarafından tanımlanan  $\mu$  bir ölçümdür (Atanassov K., New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets, 1994).

Bunun için öncelikle  $\mathcal{A}$  nın bir cebir olduğunu gösterelim.

$E, F \in \mathcal{A}$  olmak üzere  $E \in \mathcal{A}$  için ya  $E$  ya da  $\overline{E} = X - E$  sayılabilir.  $F \in \mathcal{A}$  için ya  $F$  ya da  $\overline{F} = X - F$  sayılabilir.

Eğer  $E$  ve  $F$  (yada  $\overline{E}, \overline{F}$ ) sayılabilirse, sayılabilir kümelerin birleşimleri de sayılabilir olduğundan  $E \cup F \in \mathcal{A}$  ya da  $\overline{E} \cup \overline{F} \in \mathcal{A}$  olur. Şimdi  $\mu$  nun bir ölçüm olduğunu gösterelim:

1-)  $A = \emptyset$ ,  $(A \in \mathcal{A})$  için  $\mu(A) = 0$  dır.

2-)  $A$  yada  $\overline{A} = X - A$  sayılabilir olduğundan. Eğer  $A$  sayılabilir ise  $\mu(A) = 0$  ve  $\mu(X - A) = 1$  olur. Eğer  $\overline{A} = X - A$  sayılabilir ise  $\mu(X - A) = 0$  ve  $\mu(A) = 1$  olur ki her iki durumda da

$$\mu(A) \geq 0$$

olur.

3-)  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $\mathcal{A}$  nın ikişer ikişer ayrık bir dizisi olsun.  $n = 1, 2, \dots$  olmak üzere,  $A_n$  ler sayılabilir olsun. Bu durumda Cantor'a göre sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

dır. Öyle ki  $A_n$  ler sayılabilir olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

dır. Eğer  $A_n$  ler sayılamaz ise, bu durumda  $X - A_n$  ler sayılabilirlerdir.

$(X - A_n)_{n=1}^{\infty}$  dizisinde  $X - A_1 \subset X - A_2 \subset \dots \subset X - A_n$  için

$$\mu(X - A_n) = 1$$

olduğu açıktır.

**Örnek**  $X = \mathbb{Z}^+$  olsun.  $\mathcal{A} = 2^X$  ve  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pozitif reel sayıların yakınsak bir serisi olsun.

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} a_n & , \quad A \neq \emptyset \text{ ve sonlu ise} \\ \infty & , \quad A \text{ sonsuz ise} \\ 0 & , \quad A = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

$\mathcal{A}$  üzerinde tanımlanan  $\mu$  bir ölçüm değildir. Fakat sonlu toplamsal bir ölçümdür (Atanassov K., 1989). Gerçekten;

1-)  $A = \emptyset$  ,  $(A \in \mathcal{A})$  için  $\mu(A) = 0$

2-)  $A = \emptyset$  ise  $\mu(\emptyset) = 0$  ve  $A \neq \emptyset$  ise

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n > 0 \quad \left( \sum_{n \in A} a_n \text{ yakın sakseri old.} \right)$$

$A = \infty$  ise  $\mu(A) = \infty$  olur ki her üç durumda da  $\mu \geq 0$  olduğundan

(2) koşulumuz sağlanmış olur.

3-)  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$  için  $\mu(X) = \infty$  olduğu açıktır. Ancak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

yakınsak bir seri olduğundan  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{n\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  olup  $\mu$  bir

ölçüm değildir. Fakat  $\mu$  sonlu toplamsal bir ölçümdür. Çünkü

$X = \bigcup_{n=1}^k \{n\}$  olacak şekilde sonlu seçersek  $\mu(X) < \infty$  olacağından

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^k \{n\}\right) = \sum_{n=1}^k \mu\{n\}$$

olur ki  $\mu$  sonlu toplamsal bir ölçüm olur.

**Önerme**  $\mathcal{A}$  cebiri üzerinde bir ölçüm  $\mu$  olsun. O zaman,

1-)  $A \subset B$ ,  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{A}$  için  $\mu(A) \leq \mu(B)$  dir.

2-) Eğer  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $1 \leq n < \infty$  ve  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  için

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur.

**İspat:**

1-)  $B = A \cup (B - A)$  alalım. Bu durumda

$$A_1 = A, A_2 = (B - A)$$

ve  $n > 2$  için  $A_n = \emptyset$  ise O zaman  $\mu$  sayılabilir toplamsaldır. Bu durumda  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$  olur ki, buradan

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

olur.

2-)  $B_1 = A_1$  ve  $n > 1$  için  $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$  olsun. Buradan yola

çıkarak  $\forall n$  için  $B_n \in \mathcal{A}$   $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  ,  $B_n \subset A_n$  ve  $B_n$

ayrık kümeleri için, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\text{Birkhoff, 1967}).$$

**Önerme**  $\mu$  ,  $\mathcal{A}$  cebiri üzerinde bir ölçüm olsun.

1-) Eğer  $A_n \subset A_{n+1}$  ,  $1 \leq n < \infty$  için  $A_n \in \mathcal{A}$  ise o zaman

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

dir.

2-) Eğer  $A_n \supset A_{n+1}$  ,  $1 \leq n < \infty$  için  $A_n \in \mathcal{A}$  ,  $\mu(A_1) < \infty$  ve

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  ise o zaman,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

dir. Üstelik  $\mu$  sonlu toplamsal ölçümü (1) vasıtasıyla sayılabilir toplamsaldır.

**İspat:** Öncelikle en son iddiamızı ispatlayalım. (1) özelliği ile  $\mu$  sonlu toplamsal bir ölçüm olmak üzere  $\mathcal{A}$  nın ayrık kümelerinin bir dizisi  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  ve  $B_k = \bigcup_{n=1}^k A_n$  olsun. O zaman

$B_k \subset B_{k+1}$ ,  $B_k \in \mathcal{A}$  ve  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  olur. Bu yüzden (1)

özelliğinin varsayımı tarafından,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty}$$

$$\sum_{n=1}^k \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

elde edilir. Şimdi (1) ve (2) özelliklerini ispatlayalım.

1-)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  ve  $A_n \subset A_{n+1}$  ve  $n > 0$  için,

$$B_1 = A_1, B_n = A_n - A_{n-1}$$

olsun. O zaman,

$$B_n \cap B_m = \emptyset \quad (n \neq m)$$

ve

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

olur ki buradan da,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty}$$

$$\sum_{n=1}^k \mu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k),$$

$$\left( A_k = \bigcup_{n=1}^k B_n \text{ için } \right)$$

istenen elde edilmiş olur.

2-)  $A_n \supset A_{n+1}$ ,  $\mu(A_1) < \infty$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  olsun. O zaman

$$A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)$$

ve

$$A_1 - A_n \subset A_1 - A_{n+1}$$

olur ki (1) dan dolayı  $\mu(A_1) < \infty$  için,

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 - A_n)$$

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

ve

$$\mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$$

bulunur. Eğer  $\mu(X) < \infty$  ise,  $X$  in alt kümelerinin oluşturduğu  $\mathcal{A}$  cebiri üzerindeki  $\mu$  ölçümü sonludur. Eğer  $\mu(X_n) < \infty$  ve

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$  ile  $\mathcal{A}$  daki kümelerin bir  $(X_n)$  dizisi var ise  $\mu$  ölçümü

$\sigma$  – sonlu olarak adlandırılır. Önerme 3.1.1 deki (2) ifadesinden

ayrık kümeler olarak  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  daima elde edilebilir. Bu sonsuzluk

şartı bir ölçüm üzerinde sıkça rastlanır. Genel teoremlerin çoğu

kısmı için bu duruma ihtiyaç duyulur. Bunun en önemli örneği  $\mathbb{R}$

nin alt kümelerinin bir cebiri üzerindeki  $\sigma$  – sonlu ölçümüdür ki

buna aralıklar üzerindeki Lebesgue ölçümü denir (Delgado, 1987).

**Örnek**  $\mathcal{A}$  cebiri üzerinde sonlu toplamsal bir ölçüm  $\mu$  olsun.

$A, B \in \mathcal{A}$  için,

1-)  $A \subset B$  ise  $\mu(A) \leq \mu(B)$

2-)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

3-) Eğer  $A \subset B$  ve  $\mu(A) < \infty$  ise  $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$  dır (Dempster, 1967).

Gerçekten;

1-)  $A, B \in \mathcal{A}$  ve  $A \subset B$  olmak üzere  $B = A \cup (B - A)$  olarak yazabiliriz.  $A_1 = A, A_2 = B - A, n > 2$  için  $A_n = \emptyset$  ise o zaman  $\mu$  sayılabilir toplamsal olur. Bu durumda

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

ifadesinden  $\mu(A) \leq \mu(B)$  elde edilir.

2-) Ölçümün (3). Özelliği gereğince  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  dizisi ikişer ikişer ayrık olacağından toplamsal olarak yazabiliriz. Yani  $k = 1, 2, \dots, n-1$  için  $A_k \cap A_{k+1} = \emptyset$  dır.  $A_1 = A, A_2 = B$  olmak üzere,

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

olur. Yani

$$\mu(A \cup B) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

dir.

3-)  $A \subset B$  ise  $B = A \cup (B - A)$  ve  $\mu(A) < \infty$  olmak üzere,  
 $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$  ifadesinden  $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$   
 elde edilir.

**Örnek** Sonlu toplanabilir  $\mu$  ölçümü için önerme 3.1.2 nin (2) sayılabilir bir ölçüm olmadığını gösterebiliriz.

((2): Eğer,  $A_n \supset A_{n+1}$ ,  $1 \leq n < \infty$  için  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A_1) < \infty$  ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

ise o zaman,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \text{ (Dubois, Possibility Theory, 1988).}$$

$X = Z^+ = \{1, 2, \dots\}$  ve  $A \subset X$  alalım.  $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$  olmak üzere,  $A_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $A_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$ ,  $A_3 = \{3, 4, 5, \dots\} \dots$  için

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

olduğundan

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

elde edilir. Ayrıca  $A_n$  kümesi sonsuz olduğundan  $\mu(A_n) = \infty$  olur dolayısıyla  $\mu$  ölçümü Önerme 3.1.2 nin (2) si için sayılabilir ölçüm değildir.

**Örnek** Bazı  $n$  değerleri için,  $\mu(A_n) < \infty$  olmadıkça

$A_n \supset A_{n+1} \quad 1 \leq n < \infty$ , için  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A_1) < \infty$  ve  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

eşitliğinin gerçekleşmeyeceğini gösterebiliriz (Dubois, Constant approximations of belief functions, 1990).

$X = \mathbb{R}$  ve  $A_n = (n, \infty)$ ,  $\mathcal{A} = 2^X$  ve  $\mu$  sayılabilir bir ölçüm olsun.

$n = 1, 2, 3, \dots$  için,  $A_1 = (1, \infty)$ ,  $A_2 = (2, \infty)$ ,  $A_3 = (3, \infty) \dots$  olmak

üzere,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$  olduğunda  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$  olur. Ancak diğer

yandan,  $\forall n$  için,  $\mu(A_n) = \infty$  olduğundan dolayı

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

olur. Bu da bize gösteriyor ki,  $A_n = (n, \infty)$  kümelerinden bazı  $A_n$

ler için  $\mu(A_1) < \infty$  olmadıkça bu eşitlik sağlanmaz.

## **Sonuçlar**

Bulanık ölçüm, kesin sınırlarla tanımlanamayan durumları belirsizlik düzeyleriyle ifade ederek ölçümlerin daha gerçekçi yapılmasını sağlar. Ayrıca, daha çok geleneksel ölçme yöntemlerinin yetersiz kaldığı gri alanlarda, bulanık kümeler aracılığıyla daha esnek ve kapsayıcı değerlendirmeler yapılabilir. Bu çalışmada, klasik ölçüm ile ilgili bazı bilgiler verilip bu ölçüm ile ilgili bazı temel ve kapsayıcı tanımlara yer verilmiştir.

## Kaynakça

- Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 87-96.
- Atanassov, K. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 343-349.
- Atanassov, K. (1989). More on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 37-45.
- Atanassov, K. (1994). New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 137-142.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. United States of America: AMS colloquim publications.
- Caratheodory, C. (1963). *Algebraic Theory of Measure and Integration*. New York: Chelsea Publishing.
- Delgado, M. a. (1987). On the concept of possibility-probability consistency. *Fuzzy Sets and Systems*, 311-318.
- Dempster, A. (1967). Upper and lower probablities induced by multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 325-339.
- Dubois, D. a. (1988). *Possibility Theory*. New York: Plenum Press.
- Dubois, D. a. (1990). Constant apprximations of belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 419-449.
- Mukherjea, A. . (1984). *Real And Functional Analysis Part A Real Analysis*. New York: Plenum Press.
- Sugeno, M. (1977). Fuzzy measure and fuzzy integrals. *Fuzzy Automata and Decision Processes*, 89-102.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy Sets a basis for theory of posibility. *Fuzzy sets and system*, 3-28.



## BÖLÜM 2

### LATİS DEĞERLİ BULANIK ÖLÇÜM FONKSİYONLARI

Ali KARAKUŞ<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Dr Öğr Üyesi., Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü,  
Kilis/Türkiye, Orcid: 0000-0002-8483-0137.

## Giriş

Ölçüm, temel olarak bir ipin uzunluğu, bir tarlanın alanı ve bir evin hacminin hesaplanması, ihtiyacından doğmuştur ve insan yaşamına kolaylıklar getirmiştir. Bu duruma paralel olarak ölçüm kavramının hayatımıza girişi çok eskilere dayanmaktadır. Ölçüm ilk olarak, insanlar tarafından kendi sayılarını veya hayvanlarının sayılarını belirlemek için, ardından bir çubuğun veya bir ipin reel düzlemdeki uzunluğunun ölçümünün belirlenmesi için, daha sonraları tarımın gelişmesi ve yerleşik hayata geçiş ile birlikte bir tarlanın alanını hesaplamak ve bir evin hacmini hesaplamak için basit anlamdaki ölçümleri temsil etmektedir. Ancak bu basit anlamdaki ölçümler daha karmaşık ölçümler için yetersiz kalmıştır.

Örneğin bir ağacın hacminin hesaplanmasında veya bir yaprağın yüzey alanının hesaplanmasında birçok problemle karşılaşmıştır. İşte bu noktada basit anlamda ölçümün yetersizliği ortaya çıkmıştır. Buna paralel olarak daha kompleks şekil, cisim veya kümelerin ölçümü için bilimin ve özellikle de matematiğin gelişmesiyle bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin; A.L. Cauchy (1789-1857), integrali bir toplamın limiti olarak tanımlayan ilk matematikçi oldu. Daha sonra Riemann (1826-1865), Cauchy'nin çalışmalarını sürdürmüştür. Ayrıca G. Cantor (1845-1918) integral ile ölçüm arasındaki ilişkiyi sezinlemiştir. Yapılan çalışmalar arasında özellikle de Fransız matematikçiler Emile Borel (1871-1956) ve Henri Lebesgue (1875-1941) in yapmış olduğu çalışmalar bugünkü klasik ölçüm teorisinin temelini oluşturmaktadır. Klasik ölçüm teorisindeki toplamsallık özelliğinden dolayı bu ölçüme toplamsal ölçüm de denilmektedir.

Bu bölümde, latis teorisi, latis genişlemeleri ve özelliklerini inceleyeceğiz (Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, 1986).  $(\mathcal{L}, \wedge, \vee)$  sistemi ya da daha basit bir gösterimle  $\mathcal{L}$  ; eğer  $\wedge, \vee$  işlemleri altında kapalı ise bir latis olarak adlandırılır. İki tane latis ailesi  $\mathcal{L}$  ve  $\mathcal{L}^*$  olsun. Eğer  $\mathcal{L}$  den  $\mathcal{L}^*$  ne tanımlanan dönüşüm birebir ise latis işlemleri altında izomorfizmlikten bahsedebiliriz. Eğer  $\mathcal{L}$  den  $\mathcal{L}^*$  ne bir izomorfiklik varsa  $\mathcal{L}$  ye,  $\mathcal{L}^*$  ile latis-izomorftur denir ve  $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^*$  yazılır. Eğer  $x \wedge y = x$  ise  $x \leq y$  yazarız veya buna benzer olarak eğer  $x \wedge y = y$  ise  $y \leq x$  yazarız. Eğer  $\mathcal{L}$  nin her  $A$  alt kümesi supremum  $\vee A$  ve infimum  $\wedge A$  yı içeriyorsa  $\mathcal{L}$  ye bir tam latis denir. Bir  $\mathcal{L}$  tam latisi maksimum ve minimum elemanları içeren bir latis ailesidir. Biz bu bölümde maksimum ve minimum elemanları, sırasıyla  $L_1$  ve  $L_0$  ile göstereceğiz.

Bu kısımda kullanacağımız  $X$  kümesi, aksi belirtilmedikçe bir tam küme olarak alınacaktır ve  $\mathcal{L}$  de,  $X$  in alt kümelerinin oluşturduğu bir latisler ailesi olarak kabul edilecektir.

**Tanım** Eğer bir  $\mathcal{L}$  latisler ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir latis  $\sigma$  – cebiri olarak adlandırılır:

$$1-) \forall f \in \mathcal{L} \text{ için } f^c \in \mathcal{L}$$

2-) Eğer  $n=1,2,3,\dots$  için  $f_n \in \mathcal{L}$  ise o zaman  $\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}$  dir  
(Atanassov K., More on intuitionistic fuzzy sets, 1989).

$\mathcal{L}$  tarafından üretilen latis  $\sigma$  – cebiri  $\sigma(\mathcal{L})$  şeklinde gösterilir.

Bu kısım boyunca kullanacağımız latisler, tam latisler olacaktır ve  $X$  bir uzay olup,  $\mu$  de,  $X$  in bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonu olarak kabul edilecektir.

**Tanım** Eğer  $m: \sigma(\mathcal{L}) \rightarrow R \cup \{\infty\}$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa,  $m$  ye ,  $\sigma(\mathcal{L})$  latis  $\sigma$  – cebiri üzerinde bir latis değerli ölçüm adı verilir.

$$1-) m(\emptyset) = L_0$$

$$2-) \forall f, g \in \sigma(\mathcal{L}) \text{ için } m(f), m(g) \geq L_0 : f \leq g \Rightarrow m(f) \leq m(g).$$

$$3-) \forall f, g \in \sigma(\mathcal{L}) : m(f \vee g) + m(f \wedge g) = m(f) + m(g).$$

$$4-) \text{ Eğer } f_n \subset \sigma(\mathcal{L}), n \in N \text{ ve } f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \text{ ise o zaman}$$

$$m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \lim_n m(f_n) \text{ dir (Atanassov K., New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets, 1994).}$$

**Uyarı**  $m_1$  ve  $m_2$  aynı latis  $\sigma$  – cebiri üzerinde tanımlı latis değerli ölçümler olsunlar. Eğer bunlarda birisi sonlu ise  $m(E) = m_1(E) - m_2(E), E \in \sigma(L)$  fonksiyonu iyi tanımlıdır ve  $\sigma(\mathcal{L})$  üzerinde sayılabilir toplamsaldır (Atanassov K., 1989).

**Tanım** Eğer  $X$  üzerindeki üyelik fonksiyonlarının  $\sigma(\mathcal{L})$  latisler ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa latis değerli fuzzy(bulanık)  $\sigma$  – cebir olarak adlandırılır.

1-)  $\forall \alpha \in \mathcal{L}$  için  $\alpha$  sabit olmak üzere;  $\alpha \in \sigma(L)$

2-)  $\forall \mu \in \sigma(\mathcal{L})$  için  $1 - \mu \in \sigma(\mathcal{L})$  dir.

3-) Eğer  $(\mu_n) \in \sigma(\mathcal{L})$  ise  $\sup(\mu_n) \in \sigma(\mathcal{L}), n \in N$  dir (Atanassov K., 1989).

**Tanım** Eğer  $m: \sigma(L) \rightarrow R \cup \{\infty\}$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,  $m$  ye latis değerli bulanık ölçüm denir.

1-)  $m(\emptyset) = L_0$

2-)  $\forall \mu_1, \mu_2 \in \sigma(L), m(\mu_1), m(\mu_2) \geq 0; \mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow m(\mu_1) \leq m(\mu_2).$

3-)  $\forall \mu_1, \mu_2 \in \sigma(L), m(\mu_1 \vee \mu_2) + m(\mu_1 \wedge \mu_2) = m(\mu_1) + m(\mu_2).$

4-)  $(\mu_n) \in \sigma(L), n \in N, \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots; \sup(\mu_n) = \mu \Rightarrow m(\mu) = \lim_n m(\mu_n)$   
(Birkhoff, 1967).

**Tanım**  $m^*$  ile gösterilen bir latıs değerli bulanık dış ölçüm,  $\mathcal{L}^X$  üzerinde tanımlı latıs değerli küme fonksiyonlarının bir genişlemesidir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1-) m^*(\emptyset) = L_0$$

$$2-) m^*(\mu_1) \leq m^*(\mu_2) \text{ için } \mu_1 \leq \mu_2 .$$

$$3-) m^*\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \mu_{E_i}\right) \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} m^*(\mu_{E_i}) \text{ (Birkhoff, 1967).}$$

**Örnek** Aşağıdaki örneği inceleyelim:

$$m^* = \begin{cases} L_0, \mu_E = \emptyset \\ L_1, \mu_E \neq \emptyset \end{cases}$$

Burada  $L_0$  latıs kümelerinden oluşan ailelerin minimum elemanı ve  $L_1$  ise maksimum elemanıdır (Birkhoff, 1967).

Eğer  $X$  en az iki eleman iğerirse,  $m^*$  latıs değerli bulanık dış ölçüm olur aksi halde  $\mathcal{L}^X$  üzerinde bir latıs değerli bulanık ölçüm olmaz.

**Önerme**  $F, X$  in  $L_0$  'ı içeren bulanık alt latis kümelerinin bir sınıfı öyleki her  $\mu_A \leq \mu_X$  için  $F$  de  $(\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty}$  dizisi mevcuttur ve  $\mu_A \leq (\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty}$  dır.  $\psi, F$  üzerindeki latis değerli fonksiyonların bir genişlemesi olsun öyle ki  $\mu_A \in F$  için  $\psi(\emptyset) = L_0$  ve  $\psi(\mu_A) \geq L_0$  dir. O zaman  $m^*, \mathcal{L}^X$  üzerinde

$$m^*(\mu_A) = \inf \left\{ \psi(\mu_{B_n})_{n=1}^{\infty} : \mu_{B_n} \in F, \mu_A \leq \mu_{B_n} \right\}$$

ile tanımlı bir bulanık dış ölçüm olur (Caratheodory, 1963).

**Teorem**  $m^*$  bulanık ölçülebilir kümelerin sınıfı olan  $B$ , bir  $\sigma$ -cebirdir. Aynı zamanda  $m^*$  nün  $B$  ye kısıtlanması olan  $\overline{m}$ , bir latis değerli bulanık ölçümdür (Caratheodory, 1963).

**Teorem (Generalized Carathodory Extension Theorem)**  $m, \sigma(\mathcal{L}) \leq \mathcal{L}^X$   $\sigma$ -cebiri üzerinde bir latis değerli bulanık ölçüm ve  $\mu_E \leq \mu_X$  için,

$$m^*(\mu_E) = \inf \left\{ m \left( \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n} \right) : \mu_{E_n} \in \sigma(\mathcal{L}), \mu_E \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n} \right\}$$

olsun. O zaman aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1-)  $m^*$ , bir latis değerli bulanık dış ölçümdür.

2-)  $\mu_E \in \sigma(\mathcal{L})$  iken  $m(\mu_E) = m^*(\mu_E)$  dir.

3-)  $\mu_E \in \sigma(\mathcal{L})$  iken  $\mu_E, m^*$  latis bulanık ölçülebilirdir.

4-)  $\bar{m}, m^*$  nin  $m^*$  - latis değerli bulanık ölçülebilir kümelere daraltılmışı,  $\sigma(\mathcal{L})$  yi içeren bir bulanık  $\sigma$  – cebiri üzerinde bir latis değerli bulanık ölçüme,  $m$  nin bir genişlemesidir

5-) Eğer  $m$  latis değerli bulanık  $\sigma$  – sonlu ise,  $\bar{m}$  latis değerli bulanık ölçümü ( $\sigma(\mathcal{L})$  yi içeren en küçük bulanık  $\sigma$  – cebiri üzerinde)  $m$  nin bir genişlemesidir ve tektir (Caratheodory, 1963).

### Sıfır – Toplamsallık

**Tanım**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$  fonksiyonu  $E, F \in \mathbf{F}, E \cap F = \emptyset$  ve  $\mu(F) = 0$  için

$$\mu(E \cup F) = \mu(E)$$

koşulunu sağlıyorsa  $\mu$  ye sıfır-toplamsaldır denir (Delgado, 1987).

**Tanım** Her  $E, F \in \mathbf{F}, \mu(E) = 0, \mu(F) = 0$ , iken

$$\mu(E \cup F) = 0$$

oluyorsa  $\mu$  ye zayıf sıfır-toplamsaldır denilir.

**Teorem** Boş olmayan herhangi bir  $F \in \mathcal{F}$  için  $\mu(F)=0$  ise  $\mu$  sıfır-toplamsaldır (Dempster, 1967).

**İspat:**  $\mu(F)=0$  olacak şekilde bir  $F \in \mathcal{F}$  varsa,  $F=\emptyset$  dir.

Buradan herhangi bir  $E \in \mathcal{F}$  için  $\mu(E \cup F) = \mu(E)$  elde edilir.

**Teorem** Eğer  $\mu: F \rightarrow [0, \infty]$  azalmayan bir küme fonksiyonu ise aşağıdaki ifadeler denktir (Dempster, 1967).

1-)  $\mu$  sıfır toplamsaldır.

2-)  $E, F \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(F)=0$  için  $\mu(E \cup F) = \mu(E)$  dir.

3-)  $E, F \in \mathcal{F}$  ,  $F \subset E$  ve  $\mu(F)=0$  için  $\mu(E - F) = \mu(E)$  dir.

4-)  $E, F \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(F)=0$  için  $\mu(E - F) = \mu(E)$  dir.

5-)  $E, F \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(F)=0$  için  $\mu(E \Delta F) = \mu(E)$  dir.

**İspat:** (1) $\Rightarrow$ (2) :  $\mu(F)=0$  ise  $0 \leq \mu(E - F) \leq \mu(F)=0$  ve  $(F - E) \cap E = \emptyset$  olacağından

$$\mu(E \cup F) = \mu(E)$$

elde edilir.

**(2)⇒(1):** Açıktır.

**(1)⇒(3):**  $\mu(E) = \mu((E - F) \cup F)$  yazmak yeterlidir.

**(3)⇒(4):**  $\mu(E - F) = \mu(E - (F \cap E))$  ve  $F \cap E \subset E$  olduğundan

$$0 \leq \mu(F \cap E) \leq \mu(F) = 0$$

ifadesinden istenilen elde edilir.

**(4)⇒(1):**  $F \cap E = \emptyset$  iken  $\mu(E) = \mu((E \cup F) - F)$  dir.

**(2) ve (4) ⇒ (5):**  $\mu(E - F) \leq \mu(E \Delta F) \leq \mu(E \cup F)$  eşitsizliğinden istenilen elde edilir.

**(5)⇒(1):**  $E \cap F = \emptyset$  iken  $E \Delta F = E \cup F$  eşitliğinin doğruluğunu göstermek yeterlidir.

Sıfır toplamsal olmayan fuzzy (bulanık) ölçümlerine vereceğimiz en basit örnek aşağıdaki gibidir.

**Örnek**  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{F} = P(X)$  ve

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & E = X \\ 0, & E \neq X \end{cases}$$

(Dubois, Groups Operating on Fuzzy Sets, 1980).

**Teorem**  $\mu$  sıfır-toplamsal olmayan bir fuzzy-ölçümü ve  $E \subset \mathcal{F}$  olsun.  $\mathcal{F}$  de  $\lim_n \mu(F_n) = 0$  olacak şekilde herhangi bir azalan küme dizisi için :

$$\lim_n \mu(E \cup F_n) = \mu(E)$$

ve diğer yandan

$\mu(E) < \infty$  iken  $\mu(E \cup F_{n_0}) < \infty$  koşulunu sağlayan en küçük bir pozitif  $n_0$  sayısı vardır (Dubois, Evidence measures based on fuzzy information, 1985).

**İspat:** Bu teoremi  $\mu(E) < \infty$  için ispatlamak yeterlidir.  $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

alırsa  $\mu(F) = \lim_n \mu(F_n) = 0$  eşitliğini elde ederiz.

$E \cup F_n \searrow E \cup F$  olduğundan  $\mu$  nün sıfır-toplamsal ve sürekli oluşundan

$$\lim_n \mu(E \cup F_n) = \mu(E \cup F) = \mu(E)$$

elde edilir.

**Teorem**  $E \in \mathcal{F}$  ve  $\mu$  sıfır-toplamsal bir fuzzy ölçüm olsun.  $\mathcal{F}$  deki  $\lim_n \mu(F_n) = 0$  olan herhangi bir azalan  $\{F_n\}$  dizisi için

$\lim_n \mu(E - F_n) = \mu(E)$  dir (Dubois, Evidence measures based on fuzzy information, 1985).

### Oto-Süreklilik (Autocontinuity)

**Tanım**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$  fonksiyonu  $n=1,2,3,\dots, E \in \mathcal{F}, F_n \in \mathcal{F}$  ,  
 $E \cap F_n \neq \emptyset$  (ya da  $F_n \subset E$ ) ve  $\lim_n \mu(F_n) = 0$  iken

$$\lim_n \mu(E \cup F_n) = \mu(E)$$

koşulu sağlanıyorsa  $\mu$  'ye üstten (ya da alttan) auto-süreklidir denir. Eğer  $\mu$  hem üstten hem de alttan auto-sürekli ise  $\mu$  ' ye auto-süreklidir denir (Dubois, Evidence measures based on fuzzy information, 1985).

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$  genişletilmiş reel değerli küme fonksiyonu olsun. Herhangi bir  $E \in \mathcal{F}$  ve  $E \neq \emptyset$  için

$$|\mu(E)| \geq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir  $\varepsilon > 0$  sayısı bulunabiliyorsa  $\mu$  auto-süreklidir (Dubois, Evidence measures based on fuzzy information, 1985).

**İspat:** Teoremin koşulundan  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$  ve  $\lim_n \mu(F_n) = 0$  ise öyle bir  $n_0$  doğal sayısı vardır ki her  $n \geq n_0$  için  $F_n = \emptyset$  ve buradan

$$\lim_n \mu(E \cup F_n) = \lim_n \mu(E - F_n) = \lim_n \mu(E) = \mu(E)$$

dir.

**Teorem**  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$  fonksiyonu üstten ya da alttan auto-sürekli ise  $\mu$  sıfır-toplamsaldır (Dubois, Possibility Theory, 1988).

Sıradaki iki teoremde negatif olmayan küme fonksiyonlarının sürekliliği ile auto-süreklilik arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

**Teorem**  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\emptyset$  üzerinde üstten sürekli ve üstten (ya da alttan) auto-sürekli ise  $\mu$  üstten (ya da alttan) sürekli dir.

**İspat :**  $\{E_n\}$ ,  $\mathcal{F}$  deki kümelerin azalan bir dizisi ve

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E_n - E \searrow \emptyset \text{ dir.}$$

$\mu$  ' nün  $\emptyset$  üzerinde sınırlılığı ve üstten sürekliliğinden

$$\lim_n \mu(E_n - E) = 0$$

Ve  $\mu$  ' nün üstten auto-sürekliliğini kullanarak

$$\lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(E \cup (E_n - E)) = \mu(E)$$

elde edeceğiz. Bu ise  $\mu$  ' nün üstten sürekli olduğunu verir. Altan sürekliliği de benzer şekilde ispatlanır.

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\emptyset$  üzerinde azalmayan üstten sürekli bir fonksiyon ve üstten auto-sürekli ise o zaman  $\mu$  üstten sürekli dir.

**İspat:** Eğer  $\{E_n\}$ ,  $\mu(E_1 < \infty)$  olacak şekilde  $\mathcal{F}$  ' deki kümelerin azalan bir dizisi ise  $\mu$  ' nün monotonluğundan

$$0 \leq \mu\left(E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(E_1) < \infty$$

olur. Devamı bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi yapılır.

**Lemma**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  aşağı yarı-sürekli fuzzy ölçüsü (ya da yukarı yarı-sürekli fuzzy ölçüsü) olsun.  $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$  ve  $\lim_n \mu(E_n) = 0$  olsun.  $\mu$  üstten (altan) auto-sürekli ise  $k = 1, 2, 3, \dots$  için  $\mathcal{E}_k = \{E_{n_i}^k\}$  olacak şekilde  $\{E_n\}$  ' in bir  $\{\mathcal{E}_k\}$  alt dizisi bulunabilir öyle ki;

$$\lim_k \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^k\right) = 0$$

dır.

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  aşağı yarı-süreklı fuzzy ölçüsü olsun.  $\mu$  , üstten auto-süreklı ise ,  $\lim_n \mu(E_n) = 0$  koşulunu sağlayan  $\mathcal{F}$ ’ nin bir  $\{E_n\}$  dizisinin,

$$\mu\left(\overline{\lim_n E_{n_i}}\right) = 0$$

olacak şekilde bir  $\{E_{n_i}\}$  alt dizisi bulunabilir (Dubois, Possibility Theory, 1988). Bu durumun tersi,  $\mu$  sonlu sıfır-toplamsal olduğu zaman yine doğrudur.

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  sınırlı bir fuzzy ölçüsü olsun.

$\mu$  alttan auto-süreklıdır  $\Leftrightarrow \mu$  sıfır-toplamsaldır ve herhangi bir  $A \in \mathcal{F}$  ,  $\{E_n\}$  alt dizisi vardır öyle ki,

$$\mu\left(A - \overline{\lim_n E_{n_i}}\right) = \mu(A) \text{ dır (Dubois, Possibility Theory, 1988).}$$

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  fuzzy ölçüsü olsun. Eğer  $\mu$  üstten auto-süreklı ise alttan auto-süreklıdır. Dahası,  $\mu$  sonlu ise alttan auto-süreklilik üstten auto-sürekliliği verir ve böylece auto-süreklilik , üstten auto-süreklilik ve alttan auto-süreklilik denktir (Dubois, Possibility Theory, 1988).

**Tanım**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$  üstten (alttan) düzgün auto-süreklidir  $\Leftrightarrow$   
 $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  vardır ki;

$$\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \varepsilon$$

$$[\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(E - F) \leq \mu(E) + \varepsilon]$$

$E \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{F}, E \cap F = \emptyset$  ( ya da  $E \subset F$  ) ve  $|\mu(F)| < \delta$  dır.

$\mu$  hem alttan hem de üstten düzgün auto-sürekliliğe sahipse  $\mu$  ye düzgün auto-süreklidir denir (Dubois, Constant approximations of belief functions, 1990).

**Teorem** Eğer  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$  fonksiyonu üstten düzgün auto-sürekliliğe sahipse (alttan) o zaman üstten auto-süreklidir (alttan). Böylece düzgün auto-süreklilik auto-sürekliliği verir (Dubois, Constant approximations of belief functions, 1990).

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu azalmayan ise aşağıdaki ifadeler denktir.

1-)  $\mu$  , düzgün auto-süreklidir.

2-)  $\mu$  , üstten düzgün auto-süreklidir.

3-)  $\mu$  , alttan düzgün auto-süreklidir.

4-)  $E \in \mathcal{F}$ ,  $F \in \mathcal{F}$  ve  $\mu(F) \leq \infty$  olsun. Herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sayısı vardır ki;

$$\mu(E) - \varepsilon \leq \mu(E \Delta F) \leq \mu(E) + \varepsilon$$

**İspat :** (1)  $\Rightarrow$  (2) Açıktır.

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\mu(E \cap F) \leq \mu(F) \leq \delta$  olduğundan,

$\mu(E) = \mu((E - F) \cup (E \cap F)) \leq \mu(E - F) + \varepsilon$  eşitliğinden ve  $\mu$  nün monotonluğundan istenilen elde edilir.

(3)  $\Rightarrow$  (4)  $\mu(E \cap F) \leq \mu(F) \leq \delta$  olduğundan,

$$\mu(E \Delta F) = \mu((E \cup F) - (E \cap F)) \geq \mu(E - F) - \varepsilon \geq \mu(E) - \varepsilon$$

bulunur. Diğer taraftan  $\mu(F - E) \leq \mu(F) < \delta$  olduğundan

$$\mu(E) \geq \mu(E - F) = \mu((E \Delta F) - (F - E)) \geq \mu(E \Delta F) - \varepsilon \text{ elde edilir.}$$

(4)  $\Rightarrow$  (1) Açıktır.

### **Monoton Küme Fonksiyonlarının Yapısal Karakteristikleri**

Bu bölümde  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu azalmayan fonksiyon iken yapısal karakteristikleri arasındaki ilişkiyi özetleyeceğiz.

**Teorem**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  quasi-toplamsal ise auto-sürekli dir , dahası  $\mu$  sonlu ise quasi-toplamsallık düzgün auto-sürekliliği verir.

**İspat :**  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ,  $\theta$  özel  $T$ -fonksiyonu ile quasi-toplamsal olsun. Herhangi bir  $E \cap F_n = \emptyset$  olacak şekilde  $E \subset \mathcal{F}$  ,  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$  ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ve  $\lim_n \mu(F_n) = 0$  için  $\theta \circ \mu$  ye toplamsallığı uygularsak ve  $\theta$  ve  $\theta^{-1}$  in sürekliliğinden

$$\begin{aligned} \lim_n \mu(E \cup F_n) &= \lim_n \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) + \theta(\mu(F_n)) \right] \\ &= \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) + \theta\left(\lim_n \mu(F_n)\right) \right] \\ &= \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) \right] = \mu(E) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu  $\mu$  ' nün üstten auto-sürekli olduğunu verir. Benzer şekilde,  $E \in \mathcal{F}$  ,  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$  ,  $\{F_n\} \subset E, n = 1, 2, 3, \dots$  ve  $\lim_n \mu(F_n) = 0$  için  $\mu(F_n) < \infty$  olduğunu kabul edersek;

$$\begin{aligned} \lim_n \mu(E - F_n) &= \lim_n \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) - \theta(\mu(F_n)) \right] \\ &= \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) - \theta\left(\lim_n \mu(F_n)\right) \right] \\ &= \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) \right] = \mu(E) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu da  $\mu$  nün alttan auto-sürekli olduğunu verir. Sonuç olarak  $\mu$

auto-sürekli. Dahası  $\mu(x) = a < \infty$  ise;  $\theta$  ,  $[0, a]$  üzerinde düzgün sürekli. Böylece  $\theta^{-1}, [0, \theta(a)]$  üzerindedir.

$$\mu(E \cup F) = \theta^{-1} \left[ \theta(\mu(E)) + \theta(\mu(F)) \right]$$

eşitliğinden herhangi ayrık iki  $E, F \in \mathcal{F}$  için  $\mu$  nün üstten düzgün auto-sürekli olduğunu görmek kolaydır. Böylece quasi-toplamsallığın monotonluğu vermesi gerçeğinden,  $\mu$  düzgün auto-sürekli.

**Lemma** Eğer  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu  $\lambda$  – kuralını sağlıyorsa auto-sürekli. Dahası  $\mu(x) < \infty$  olduğunda düzgün auto-sürekli (Dubois, Constant approximations of belief functions, 1990).

**Teorem** Eğer  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu azalmayan ve alt-toplamsal ise düzgün auto-sürekli (Dubois, Constant approximations of belief functions, 1990).

**İspat :**  $E \in \mathcal{F}$  ,  $F \in \mathcal{F}$  için

$$\mu(E) \leq \mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$$

eşitsizliğinden istenen elde edilir.

**Teorem**  $\mu_1 : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ve  $\mu_2 : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonlarının ikisi de sıfır-toplamsal (ya da auto-sürekli, ya da düzgün auto-sürekli) olsun. Eğer, herhangi bir  $E \in \mathcal{F}$  için  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ,

$$\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$$

şeklinde tanımlanırsa  $\mu$  de sıfır-toplamsaldır (ya da auto-sürekli, ya da düzgün auto-sürekli ) (Dubois, Constant approximations of belief functions, 1990).

## Sonuçlar

Bu çalışmada, latis teorisi, latis genişlemeleri ve özellikleri ile klasik ölçüm, bulanık ölçüm ve latis değerli ölçüm arasındaki ilişki ayrıntılı olarak ortaya konmuş ve klasik ölçümde yapılmış olan birçok tanım ve teorem, bulanık kümeler ve latis kümeleri yardımıyla bulanık ölçüm ve latis-değerli ölçüm (latis ölçüm)'e taşınabilmiştir.

Ayrıca klasik analizde önemli bir yere sahip olan yakınsaklık, süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi kavramlar bulanık ölçüm uzayı üzerine Egoroff ve Lusin teoremleri kullanılarak genelleştirilebilmiştir.

Bu durum gösteriyor ki; klasik analizdeki bazı kavramlar ve uygulamaları, bulanık ölçüm uzayı üzerine taşınabilir ve burada da kendine uygulama alanı bulabilir.

## Kaynakça

- Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 87-96.
- Atanassov, K. (1989). Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 343-349.
- Atanassov, K. (1989). More on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 37-45.
- Atanassov, K. (1994). New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 137-142.
- Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. United States of America: AMS colloquim publications.
- Caratheodory, C. (1963). *Algebraic Theory of Measure and Integration*. New York: Chelsea Publishing.
- Delgado, M. a. (1987). On the concept of possibility-probability consistency. *Fuzzy Sets and Systems*, 311-318.
- Dempster, A. (1967). Upper and lower probablities induced by multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 325-339.
- Dubois, D. a. (1980). Groups Operating on Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 543-548.
- Dubois, D. a. (1985). Evidence measures based on fuzzy information. *Automatica*, 547-562.
- Dubois, D. a. (1988). *Possibility Theory*. New York: Plenum Press.
- Dubois, D. a. (1990). Constant apprximations of belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 419-449.

## BÖLÜM 3

### YENİ TİP BERNSTEIN-KANTOROVICH POLİNOMLARININ $[-1,1]$ ARALIĞINDAKİ YAKLAŞIMI

Harun ÇİÇEK<sup>1</sup>

#### Giriş

Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin incelenmesi, matematiksel analiz içerisinde uzun yıllara yayılan zengin ve derinlikli bir araştırma alanı oluşturmıştır. Bu incelemeler sırasında, özellikle fonksiyonel analiz ile yaklaşım teorisi disiplinleri birbirini tamamlayan bir bütünlük içerisinde ele alınmış; söz konusu operatörlerin yapısal karakteristiklerinin anlaşılması, bu iki alanın sunduğu yöntem ve kavramsal araçlar olmaksızın mümkün görülmemiştir. Kapalı bir aralık üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uygun polinom dizileri aracılığıyla yaklaşık olarak temsil edilebileceğinin ortaya çıkışı, yalnızca yaklaşım teorisinin gelişiminde bir dönüm noktası teşkil etmekle kalmamış, aynı zamanda fonksiyonel analiz çerçevesinde ele alınan operatör teorisinin de kapsamını genişletmiştir. Bu bulgu, analizin çeşitli alt

---

<sup>1</sup> Doktor Öğretim Üyesi, Bitlis Eren Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0003-3018-3015

disiplinleri arasında kurulan teorik köprülerin en erken örneklerinden biri olarak kabul edilmektedir.

Bu bağlamda, 1885 yılında Karl Weierstrass tarafından sürekli fonksiyonların polinomlarla yaklaşılabileceğini ifade eden klasik ispat, yaklaşım teorisinin tarihsel gelişiminde temel başlangıç noktasını oluşturmuş ve sonraki araştırmaların yönünü büyük ölçüde belirlemiştir. Ancak Weierstrass'ın orijinal ispatının gerek uzunluğu gerekse teknik giriftliği nedeniyle dönemin pek çok matematikçisi tarafından yeterince açıklayıcı ve erişilebilir bulunmaması, daha sistematik, daha doğrudan ve yapısal özellikleri daha net ortaya koyan alternatif ispat yöntemlerinin geliştirilmesine duyulan ihtiyacı artırmıştır. Bu arayışlar, pozitif lineer operatörlerin sistematik biçimde ele alınmasıyla sonuçlanmış ve bu operatörlerin yakınsaklık kriterlerinin araştırılması modern yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri hâline gelmiştir.

Bu süreç içinde, S. N. Bernstein tarafından tanıtılan ve bugün Bernstein operatörleri olarak bilinen pozitif lineer operatörler, yaklaşım teorisinin hem kavramsal hem de uygulamalı yönüne önemli katkılar sunmuştur. Bernstein operatörlerinin Weierstrass yaklaşım teoremini basit, açık ve tamamen pozitiflik ilkesine dayalı bir ispatla elde etmesi, yaklaşım teorisinin seyrini değiştirmiş ve pozitif lineer operatörlerin önemini belirgin biçimde artırmıştır. Ardından Korovkin tarafından ortaya konulan ve belirli bir test fonksiyonu ailesi aracılığıyla operatör dizilerinin yakınsaklığını karakterize eden Korovkin tipi teoremler, yaklaşım teorisinin araç kutusunu daha da genişletmiş; hem klasik hem de genelleştirilmiş fonksiyon uzaylarında operatör yakınsaklığının incelenmesine güçlü bir çerçeve sağlamıştır.

Tüm bu gelişmeler, lineer pozitif operatörlerin yalnızca fonksiyonların yaklaştırılmasında temel araçlar olmanın ötesinde,  $q$  –analiz,  $p, q$ -genelleştirmeleri, ağırlıklı fonksiyon uzayları ve olasılıksal yorumlar gibi çağdaş matematik alanlarına da nüfuz eden geniş kapsamlı bir teorik yapı ortaya çıkardığını göstermiştir. Dolayısıyla yaklaşım teorisi, günümüzde analizin pek çok kolunda kullanılan zengin operatör sınıflarının incelenmesine imkân sağlayan, tarihsel temelleri yüzyılı aşan bir matematiksel disiplin haline gelmiştir.

1912 de S.N. Bernstein

$$B_n(f; \rho) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \rho^k (1 - \rho)^{n-k}$$

burada  $n \in \mathbb{N}$  ,  $0 \leq \rho \leq 1$  olmak üzere, polinomlar dizisi ile birlikte sürekli bir  $f$  fonksiyonuna yaklaşmanın daha basit bir ispatı verilmiştir. (Bernstein,1912-1913). Lineer pozitif Bernstein operatörleri temel alınması üzerine birçok farklı operatör kurulmuştur. Ayrıca bunların farklı genellemeleri yapılmıştır.

Günümüzde ise bu operatörler kullanılarak çalışmalar yapılmaktadır. Bernstein operatörlerinin kurulmasının ardından Kantorovich 1930 yılında,  $[0, 1]$  aralığı üzerinde integrallenebilir  $f$  fonksiyonları için;

$$K_n(f; \rho) = (n + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho^k (1 - \rho)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt$$

biçiminde tanımlı  $K_n$  operatörleri tanımlanmıştır.  $K_n$  operatörlerine ise Kantorovich operatörleri denilmektedir. (Lorentz, 1953).

$\rho \in [0,1]$  ,  $0 \leq a_{k,n} \leq 1$  olduğunda

$$L_n(f; \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} f(a_{k,n}) P_{k,n}(\rho), \quad P_{k,n}(\rho) \geq 0$$

pozitif operatör dizisinin  $n \rightarrow \infty$  için  $[0,1]$  aralığında  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. Bohman ise bunları şu şekilde sıralamıştır;

$$L_n(1; \rho) \Rightarrow 1$$

$$L_n(t; \rho) \Rightarrow \rho$$

$$L_x(t^2; \rho) \Rightarrow \rho^2$$

şeklinde ifade etmiştir. Aşıkardır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri  $f$  fonksiyonunun  $[0,1]$  aralığının dışındaki diğer değerlerinden ise bağımsızdır.

1953 yılında Korovkin, Bohman tarafından ortaya konulan yakınsaklık koşullarının genel bir çerçeve içinde geçerliliğini fark etmiş ve bu gözlem doğrultusunda bugün Korovkin tipi teoremler olarak anılan temel sonuçlardan ilkinin ispatlamıştır. Bu çalışma, yaklaşım teorisinde pozitif lineer operatörlerin yakınsaklığını karakterize eden test fonksiyonları yönteminin sistematik biçimde kullanılmasının önünü açmış ve alanın kuramsal temellerini önemli ölçüde güçlendirmiştir. Bunu izleyen yıllarda, özellikle Bernstein polinomları üzerine çok sayıda araştırma gerçekleştirilmiş, bu polinomların hem klasik hem de genelleştirilmiş formlarına ilişkin yöntemler giderek daha kapsamlı bir biçimde incelenmiştir. Bernstein polinomları üzerine yürütülen sistematik çalışmaların 1990'lı yıllardan itibaren belirgin bir ivme kazandığı, bu dönemde polinomların analitik, cebirsel ve olasılıksal özelliklerine ilişkin pek çok araştırmanın literatürde yer aldığı görülmektedir. Bernstein yaklaşımının farklı fonksiyon uzaylarına, değişken ağırlık yapılarına ve genelleştirilmiş  $q$ -calculus yöntemlerine uyarlanmasıyla birlikte,

her geçen yıl yeni operatör aileleri, yeni yakınsaklık kriterleri ve çeşitli genelleştirme türleri literatüre kazandırılmıştır.

Bu gelişmeler içerisinde en dikkat çekici ilerlemelerden biri Lupaş'a aittir. Nitekim Lupaş, 1987 yılında Bernstein polinomlarının  $q$ -analogunu tanıtarak klasik polinom ailesini  $q$ -analiz bağlamında yeniden biçimlendirmiş ve bu yeni yapı altında polinomların yaklaşım özelliklerini ayrıntılı biçimde incelemiştir. Lupaş'ın çalışması,  $q$ -analiz ile yaklaşım teorisi arasındaki etkileşimi güçlendirmiş, daha sonra ortaya çıkan  $q$ -Bernstein,  $p$ ,  $q$ -Bernstein ve diğer  $q$ -genelleştirmeli operatörlerin temelini oluşturmuştur.

Öte yandan, yaklaşım teorisinde klasik yakınsaklık kavramı etrafında süregelen araştırmalar devam ederken, modern çalışmalar içerisinde “istatistiksel yakınsaklık” kavramı da önemli bir yer edinmiştir. Bu kavram aracılığıyla operatör dizilerinin klasik noktadan-noktaya veya uniform yakınsaklık dışında kalan daha zayıf fakat oldukça etkili yakınsaklık türleri incelenebilmekte; böylece operatörlerin istatistiksel yaklaşım özellikleri, istatistiksel limit davranışları ve yaklaşım hızları sistematik bir biçimde analiz edilmektedir. Özellikle Korovkin tipi sonuçların istatistiksel ortamlara uyarlanması, pek çok operatör ailesinin hem teorik hem uygulamalı açıdan yeni niteliklerinin keşfedilmesine imkân tanımıştır.

Yukarıdaki bilgiler ışığında yeniden tanımladığımız Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yeni bir genellemesini tanıtacağız. Çalışmamızda

$\rho \in [0,1]$  ve  $f \in C[-1,1]$  ve

$$\varphi_m^j(\rho) = \frac{(m+1)^m}{(2m)^m} \left( \frac{m}{m+1} + \rho \right)^j \left( \frac{m}{m+1} - \rho \right)^{m-j} \text{ olmak üzere}$$

$$N_m(f; \rho) = \frac{(m+1)^2}{2m} \sum_{j=0}^m \varphi_m^j(\rho) \int_{\left(2\frac{j}{m+1}-1\right)\frac{m}{m+1}}^{\left(2\frac{j+1}{m+1}-1\right)\frac{m}{m+1}} f(t) dt$$

şeklinde tanımlamış olduğumuz operatörün lineer pozitif operatör olduğunu ayrıca Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını,  $[-1,1]$  simetrik aralığı üzerinde düzgün yakınsadığını gösterilecektir. Süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Bu operatör için ise bazı teoremler ispat edilecektir. Ayrıca bu operatörün merkezci momentleri yardımı ile de asimptotik yaklaşımı hesaplanacaktır.  $N_m(f; \rho)$  operatörünün  $f$  fonksiyonuna yaklaşımı grafikler yardımı ile gösterilecektir. Son olarak seçilen bazı fonksiyonlara operatörün yaklaşımı bazı  $m$  ve  $\rho$  değerleri için nümerik tablosu da hazırlanacaktır.

## ARAŞTIRMA VE BULGULAR

### Operatörün Tanımlanması

Bu bölümde  $N_m(f; \rho)$  operatörü tanıtılarak Korovkin teoremi kullanılarak operatörün yaklaşım özellikleri incelenecektir.  $N_m(f; \rho)$  operatörünün merkezi momentleri hesaplanacaktır. Voronowskaja'nın Bernstein polinomu için yapmış olduğu asimptotik yaklaşım hesabı  $N_m(f; \rho)$  operatörü için yapılacaktır.  $N_m(f; \rho)$  operatörü için yaklaşım hızı hesaplanacak ve bu operatör için ise bazı teoremler de ispat edilecektir.

$\rho \in [0,1]$  ve  $f \in C[-1,1]$  ve

$$\varphi_m^j(\rho) = \frac{(m+1)^m}{(2m)^m} \left( \frac{m}{m+1} + \rho \right)^j \left( \frac{m}{m+1} - \rho \right)^{m-j} \text{ olmak üzere}$$

$$N_m(f; \rho) = \frac{(m+1)^2}{2m} \sum_{j=0}^m \varphi_m^j(\rho) \int_{\left(2\frac{j}{m+1}-1\right)\frac{m}{m+1}}^{\left(2\frac{j+1}{m+1}-1\right)\frac{m}{m+1}} f(t) dt \quad (1)$$

Bernstein-Kantorovich Operatörü (1) ile tanımlansın. Öncelikle  $N_m(f; \rho)$  operatörünün lineer pozitif operatör olduğu ispatlanmıştır.

Lineerlik özelliği:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ve  $\forall f, g$  fonksiyonu için

$$N_m(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot N_m(f; \rho) + \beta \cdot N_m(g; \rho)$$

eşitliği sağlandığında  $N_m$  operatörü lineer operatördür.

### Tanım

$X$  ve  $Y$  aynı  $F$  cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere;  $L : X \rightarrow Y$  Şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör adı verilir,

### Tanım

Lineer pozitif operatör monoton artandır. Yani;

$$f(\rho) \leq g(\rho) \Rightarrow L(g; \rho) \geq L(f; \rho)$$

eşitliği sağlanır.

### Teorem

$L$  bir lineer pozitif operatör olmak üzere  $|L(f)| \leq L(|f|)$  eşitsizliği sağlanır.

### Tanım

$(f_n)$  dizisi  $f$  fonksiyonuna  $x$  üzerinde düzgün yakınsaktır.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$  için  $\exists n_0$  öyle ki  $\forall n > n_0$  ve  $\forall \rho \in X$  için  $|f_n(\rho) - f(\rho)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $n_0(\varepsilon)$  sayısı vardır.

## Tanım

$(a, b) \subset \mathbb{R}$  açık bir aralık ve  $f$  de  $(a, b)$  den  $\mathbb{R}$  ye bir fonksiyon olsun.  $t, v \in (a, b)$  için

$$\lim_{t \rightarrow v} \frac{f(t) - f(v)}{t - v} = A(v)$$

sonlu limiti varsa, bu  $A(v)$  sayısına  $f$  fonksiyonunun  $v$  noktasındaki türevi denir ve  $f'(v)$  ile gösterilir.

Bu durumda,  $f$  fonksiyonu  $v$  noktasında türevlenebilirdir denir.

## Tanım

$f$  bir  $I$  aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere, her  $\rho_1, \rho_2 \in I$  için;

$$|f(\rho_1) - f(\rho_2)| \leq M |\rho_1 - \rho_2|^\alpha$$

olacak şekilde  $M > 0$  varsa,  $f$  'ye Lipschitz sınıfındandır denir ve  $f \in Lip_M(\alpha)$  ile gösterilir.

## Tanım

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $f$  fonksiyonu verilsin.  $[0, b - a]$  aralığında tanımlı

$$\begin{aligned} \omega(\delta) &= \omega(f; \delta) \\ &= \left\{ \sup_{\rho_1, \rho_2 \in [a, b]} |f(\rho_2) - f(\rho_1)| : |\rho_2 - \rho_1| \leq \delta, \right\} \end{aligned}$$

fonksiyonuna  $f$  'nin süreklilik modülü denir.

## Teorem

$N_m(f; \rho)$  operatörü  $[-1,1]$  aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan  $f$  fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır yani,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|N_m(f; \rho) - f(\rho)\|_{C[-1,1]} = 0$$

### **Teorem**

$f \in C[-1,1]$  olsun bu taktirde yeterince büyük  $K$ 'lar için;

$$|N_m(f; \rho) - f(\rho)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

### **Teorem**

$f$  türevlenebilir ve türevi  $[-1,1]$  aralığında, sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda; belirli bir  $n$  den sonra;

$$\sqrt{n}|N_m(f; \rho) - f(\rho)| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} + 2\omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{dır.}$$

### **Teorem**

$f$  fonksiyonu  $[-1,1]$  aralığında sınırlı ve  $(-1,1)$  aralığının bir  $x$  noktasında ikinci türevi mevcut olsun. Bu takdirde;

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(N_m(f; \rho) - f(\rho)) = -\rho f'(\rho) + (1 - \rho^2) \frac{f''(\rho)}{2}$$

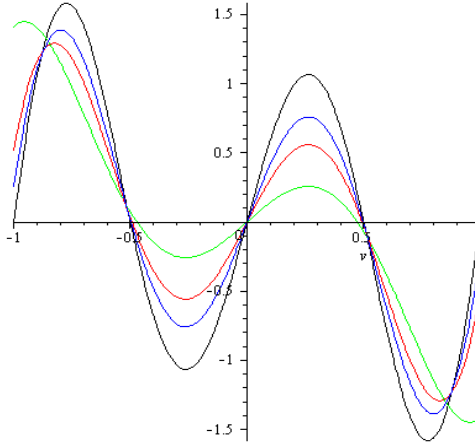
eşitliği sağlanır.

### **Örnek**

Aşağıda  $f(\rho) = (1 + \rho^2)\sin(2\rho\pi)$  fonksiyonuna  $N_m(f; \rho)$  Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşımı maple programında grafikler çizilerek gösterilmiştir. Şekil 1 de siyah renk  $f$

fonksiyonunu yeşil, mavi ve kırmızı renkler ise grafik üzerinde değişen değerler belirtilmiştir.

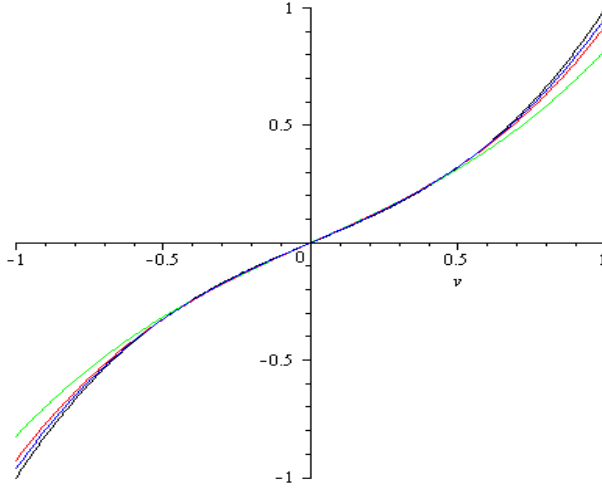
*Şekil 1  $f(\rho)$  fonksiyonunun  $m = 10, m = 25$  ve  $m = 50$  değerleri için operatörümüzün yaklaşımı*



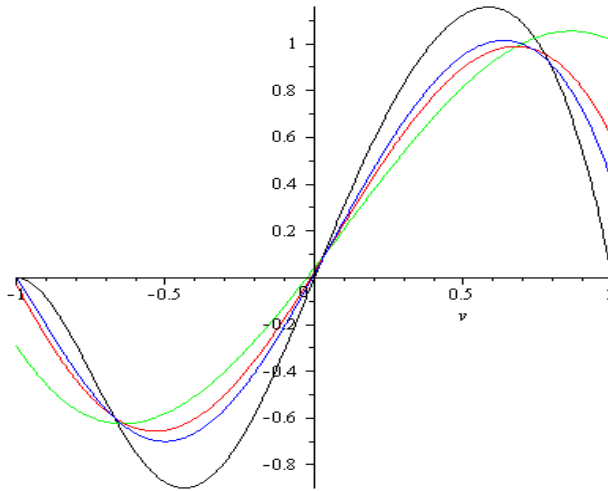
## Örnek

Aşağıda  $f(\rho) = (1 + \rho^2)\sin\left(\frac{1}{6}\rho\pi\right)$  fonksiyonuna Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşımı maple programında grafikler çizilerek gösterilmiştir. Şekil 2 de siyah renk  $f$  fonksiyonunu yeşil, mavi ve kırmızı renkleri ise değişen değerleri belirtmiştir.

Şekil 2  $f(\rho)$  fonksiyonunun  $m = 10, m = 25$  ve  $m = 50$  değerleri için operatörümüzün yaklaşımı



Şekil 3  $f(\rho)$  fonksiyonunun  $m = 10, m = 25$  ve  $m = 50$  değerleri için operatörümüzün yaklaşımı



## Örnek

Aşağıda  $f(\rho) = (1 + \rho^3)\sin(\rho\pi)$  fonksiyonuna Bernstein-Kanorovich operatörünün yaklaşımı maple programında grafikler çizilerek gösterilmiştir. Şekil 3 de siyah renk  $f$  fonksiyonunu yeşil, mavi ve kırmızı renkleri ise değişen değerleri belirtmiştir.

## Sonuç

$[-1,1]$  simetrik aralık üzerinde tanımlamış olduğumuz  $N_m(f; \rho)$  operatörünün lineer pozitif operatör olduğu, korovkin teoremi şartlarını sağladığı ve  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiş olup daha sonra ise  $N_m(f; \rho)$  operatörünün merkezi momentleri hesaplanmıştır. ve aşağıdaki eşitlikler de elde edilmiştir.

$$\aleph_{n,0}(\rho) = 1$$

$$\aleph_{n,1}(\rho) = -\frac{\rho}{m+1}$$

$$\aleph_{n,2}(\rho) = \frac{2\rho^2}{m+1} - \frac{3m^3 + 11m^2 + 12m + 3}{3(m+1)^4}$$

$$\begin{aligned}\aleph_{n,3}(\rho) = & -\frac{6m^5 + 19m^4 + 22m^3 + 12m^2 + 4m + 1}{(m+1)^6} \\ & + \frac{3vm^4(6 - \rho^2) - \rho m^3(12\rho^2 + 49) + 3\rho m^2(23 - 6\rho^2)}{3(m+1)^5} \\ & + \frac{3\rho m(15 - 12\rho^2) + 3\rho(3 - \rho^2)}{3(m+1)^5}\end{aligned}$$

$$\aleph_{n,4}(\rho) = \frac{4\rho^4(m+1)^7}{5(m+1)^8} - \frac{24\rho^3(m^3 + m^2)}{(m+1)^6}$$

$$+ \frac{-10m^7 + 305m^6 + 670m^5 + 311m^4 + 230m^3 + 235m^2 + 70m + 5}{5(m+1)^8}$$

$$- \frac{\rho^2(6m^5 + 20m^4 + 95m^3 + 11m^2 + 12m + 3)}{(m+1)^6}$$

$$- \frac{\rho(6m^5 + 20m^4 + 22m^3 + 12m^2 + 4m + 1)}{(m+1)^6}$$

Hesapladığımız merkezi momentler kullanılarak  $N_m(f; \rho)$  operatörünün asimptotik yaklaşımı incelenmiş ve aşağıdaki eşitliğin sağlandığı gösterilmiştir.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(N_m(f; \rho) - f(\rho)) = -\rho f'(\rho) + (1 + \rho^2) \frac{f''(\rho)}{2}$$

Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla  $N_m(f; v)$  operatörünün yaklaşım hızı hesaplanmış olup aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$|N_m(f; \rho) - f(\rho)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$f$  türevlenebilir ve türevi  $[-1,1]$  aralığında, sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda; belirli bir  $n$  den sonra

$$\sqrt{m}|N_m(f; \rho) - f(\rho)| \leq \frac{K}{\sqrt{m}} + 2w\left(f'; \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Son olarak  $N_m(f; \rho)$  operatörünün

$$f(\rho) = (1 + \rho^2)\sin(2\rho\pi)$$

ve

$$g(\rho) = (1 + \rho^2)\sin\left(\frac{1}{6}\rho\pi\right)$$

fonksiyonlarına ait farklı  $m$  değerleri için yaklaşımların karşılaştıran grafikler çizilmiştir.

## Kaynakça

Bernstein, S. N. (1913). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités. *Communication Society Mathematical Kharkow*, 13 (1912/13), 1-2.

Kantorovich, L. V. (1930). Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein. *I, II, CR Academia URSS*, 563(568), 595-600.

Deo, N., Noor, M. A., & Siddiqui, M. A. (2008). On approximation by a class of new Bernstein type operators. *Applied mathematics and computation*, 201(1-2), 604-612.

Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russian). *In Doklady Akademii Nauk SSSR (NS)* (Vol. 90, p.p 961).

Altomare, F. & Campiti, M. (2011). Korovkin-type approximation theory and its applications. *Walter de Gruyter*, (Vol. 17).

## BÖLÜM 4

### $(\lambda, \mu)$ – BERNSTEIN - DURRMEYER - STANCU OPERATÖR DİZİSİ İÇİN VORONOVSKAJA TİP YAKINSAMA TEOREMİ

Gülten TORUN<sup>1</sup>

Ülkü DİNLEMEZ KANTAR<sup>2</sup>

#### Giriş

Düzgün yaklaşımı en uygun şekilde ifade eden Weierstrass yaklaşım teoremini kanıtlamak için Bernstein (Bernstein, 1912) tarafından oluşturulmuş olan Bernstein operatörleri üzerine araştırmalar günümüzde de devam etmektedir. Son zamanlarda araştırmacılar, bu tip operatörlerin yakınsama davranışının daha iyi olduğunu göstermek için  $\lambda$  ve  $\mu$  gibi parametreleri dahil etmişler ve böylece yaklaşım teorisindeki modelleme olanaklarını geliştirmeye çalışmışlardır. Zhou ve Cai (Zhou ve Cai, in review),  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein operatörleri olarak adlandırdıkları iki parametrelili yeni bir Bernstein operatörü tanımlamışlardır. Ayrıca, Stancu tipi genelleştirilmiş  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein operatörlerinin çeşitli yaklaşım özellikleri (Cai ve ark., 2024) de incelenmiş ve bu çalışmada Voronovskaja tipi asimptotik teorem ve noktasal tahminler gibi yeni tanımlanan operatörlerin daha ileri yaklaşım özelliklerini de incelenmiştir.

---

<sup>1</sup> Doç. Dr., Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Kuzeykent, Kastamonu, ORCID:0000-0002-1897-0174

<sup>2</sup> Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500 Yenimahalle, Ankara, ORCID: 0000-0002-5656-3924

Ardından (Cai ve Zhou, 2024) makalesinde,  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein operatörlerini Durrmeyer tipinde tanımlanarak, bu operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiş, yakınsama oranını sırasıyla süreklilik modülü, Lipschitz sürekli fonksiyonu ve Steklov ortalamasını kullanarak incelenmiş ve Voronovskaja asimptotik formülü oluşturulmuştur. (Dinlemez Kantar & Torun, 2025) makalesinde yapılan çalışmada ise,  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatör dizisi tanıtılmış ve bu operatör dizisi için gerekli olan momentler ve merkezi momentler hesaplanmış, Korovkin teoremi ispatlanmış ve bir yakınsaklık oranı bulunmuştur. Biz de bu operatör dizisi için birinci ve ikinci çeşit süreklilik modüllerini kullanarak yakınsaklık oranlarını ve ayrıca Lipschitz sınıfı fonksiyonların yardımıyla yakınsaklık oranını vereceğiz. Ardından ele alınan operatör dizisi için Voronovskaja tip yakınsaklık teoremini ispatlayacağız. En son olarak da bu yakınsamayı destekleyen grafikleri vereceğiz.

(Dinlemez Kantar & Torun, 2025) makalesinde aşağıdaki şekilde tanımlanmış olan  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatör dizisini ele alalım:

$g \in C[0,1]$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  olmak üzere,

$$U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g; x) = (m+1) \sum_{l=0}^m v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) \int_0^1 v_{m,l}(z) g\left(\frac{zm+\alpha}{m+\beta}\right) dz, \quad (1)$$

burada  $v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x)$ ,  $(\lambda, \mu)$  –Bezier baz fonksiyonlarıdır ve

$$v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) = v_{m,l}(x) + Y_l v_{m+1,l}(x) - Y_{l+1} v_{m+1,l+1}(x),$$

$$l = 0, 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\begin{cases} Y_0 = Y_{m+1} = 0, \\ Y_l = (1-\mu) \frac{m-2k+1}{2(m^2-1)} + \frac{1+\mu}{2(m+1)} \lambda, \quad l = 0, 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3)$$

$-1 \leq \lambda \leq 1$  ve  $\mu$ , 1 ile  $m$  arasında yer alan bir sabittir (Cai & Zhou, 2024 ).

İlk önce bu çalışmada elde edilecek Teoremleri verebilmek için gerekli olan Lemmaları verelim.

**Lemma 1.** (Dinlemez Kantar & Torun, 2025)  $e_j(z) = z^j$ ,  $j = 0,1,2,3,4$  ve  $m > 1$  doğal sayı olmak üzere  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_j(z); x)$  için aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

i)  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_0(z); x) = 1,$

ii)  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_1(z); x) = \frac{m}{m+\beta} \left( x + \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right.$   
 $\left. + (1+\mu)\lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} \right) + \frac{\alpha}{m+\beta},$

iii)  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_2(z); x) = \frac{m^2}{(m+\beta)^2} \left( x^2 + \frac{2x(2-3x)}{m+3} + \frac{6x^2-8x+2}{(m+2)(m+3)} \right.$   
 $\left. + (1-\mu) \left[ \frac{x-2x^2+x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} - \frac{1-2x-2x^2+3x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)} \right] \right.$   
 $\left. + (1+\mu)\lambda \left[ \frac{x-x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} - \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right] \right)$   
 $+ \frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2} \left( x + \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right.$   
 $\left. + (1+\mu)\lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} \right) + \frac{\alpha^2}{(m+\beta)^2},$

iv)  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_3(z); x) = \frac{m^3}{(m+\beta)^3} \left( x^3 + \frac{3x^2(3-4x)}{m+4} + \frac{9x(2-6x+4x^2)}{(m+2)(m+3)} + \frac{6-36x+54x^2-24x^3}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right.$   
 $\left. + (1-\mu) \left[ \frac{3x^2-6x^3+3x^{m+1}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{6x^3-18x^2+6x+6x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{3-6x-15x^2+18x^{m+1}-3(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] \right.$   
 $\left. + (1+\mu)\lambda \left[ \frac{3x^2-3x^{m+1}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{6x-3x^2+3x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{11(1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1})}{2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] \right)$   
 $+ \frac{3m^2\alpha}{(m+\beta)^3} \left( x^2 + \frac{2x(2-3x)}{m+3} + \frac{6x^2-8x+2}{(m+2)(m+3)} + (1-\mu) \left[ \frac{x-2x^2+x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} \right. \right.$   
 $\left. - \frac{1-2x-2x^2+3x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)} \right] + (1+\mu)\lambda \left[ \frac{x-x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} - \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right] \right)$   
 $+ \frac{3m\alpha^2}{(m+\beta)^3} \left( x + \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right)$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \mu) \lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} + \frac{\alpha^3}{(m+\beta)^3}, \\
\text{v) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(e_4(z); x) &= \frac{m^4}{(m+\beta)^4} \left( x^4 + \frac{4x^3(4-5x)}{m+5} + \frac{72x^2-192x^3+120x^4}{(m+4)(m+5)} \right. \\
& + \frac{96x-432x^2+576x^3-240x^4}{(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{24-192x+432x^2-384x^3+120x^4}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \\
& + (1 - \mu) \left[ \frac{3x^2-4x^4+2x^{m+1}}{(m+4)(m+5)} + \frac{18x^2-56x^3+28x^4+10x^{m+1}}{(m+3)(m+4)(m+5)} \right. \\
& + \frac{36x-114x^2+100x^3-32x^4+40x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + \left. \frac{23-46x-232x^2+255x^{m+1}-23(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \right] \\
& + (1 + \mu) \lambda \left[ \frac{2x^3-2x^{m+1}}{(m+4)(m+5)} + \frac{18x^2-12x^3-6x^{m+1}}{(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{36x-36x^2+12x^3-12x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \right. \\
& + \left. \frac{12(1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1})}{(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} \right] + \frac{4m^3\alpha}{(m+\beta)^4} \left( x^3 + \frac{3x^2(3-4x)}{m+4} + \frac{9x(2-6x+4x^2)}{(m+2)(m+3)} \right. \\
& + \frac{6-36x+54x^2-24x^3}{(m+2)(m+3)(m+4)} + (1 - \mu) \left[ \frac{3x^2-6x^3+3x^{m+1}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{6x^3-18x^2+6x+6x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right. \\
& + \left. \frac{3-6x-15x^2+18x^{m+1}-3(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] + (1 + \mu) \lambda \left[ \frac{3x^2-3x^{m+1}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{6x-3x^2+3x^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right. \\
& + \left. \frac{11(1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1})}{2(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] + \frac{6m^2\alpha^2}{(m+\beta)^4} \left( x^2 + \frac{2x(2-3x)}{m+3} + \frac{6x^2-8x+2}{(m+2)(m+3)} \right. \\
& + (1 - \mu) \left[ \frac{x-2x^2+x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} - \frac{1-2x-2x^2+3x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)(m+3)} \right] + (1 + \mu) \lambda \left[ \frac{x-x^{m+1}}{(m+2)(m+3)} \right. \\
& - \left. \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \right] + \frac{4m\alpha^2}{(m+\beta)^4} \left( x + \frac{1-2x}{m+2} + (1 - \mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right. \\
& + (1 + \mu) \lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} + \left. \frac{\alpha^4}{(m+\beta)^4} \right).
\end{aligned}$$

**Lemma 2.** (Dinlemez Kantar & Torun, 2025)  $m > 1$  doğal sayı olmak üzere  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisi için Lemma 1 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\begin{aligned}
\text{i) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x); x) &= \frac{-\beta x}{m+\beta} + \frac{m}{m+\beta} \left\{ \frac{1-2x}{m+2} + (1 - \mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right. \\
& + (1 + \mu) \lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} \left. \right\} + \frac{\alpha}{m+\beta} := \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x) &= \frac{\beta^2 x^2}{(m+\beta)^2} + \frac{m^2}{(m+\beta)^2(m+3)} \left\{ 2x(2-3x) + \frac{6x^2-8x+2}{(m+2)} \right. \\
&\quad + (1-\mu) \left[ \frac{1-2x^2+x^{m+1}}{(m+2)} - \frac{1-2x-2x^2+3x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m-1)(m+2)} \right] \\
&\quad + (1+\mu) \lambda \left[ \frac{x-x^{m+1}}{(m+2)} - \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \right] \left. \right\} + \frac{2m\alpha x}{(m+\beta)^2} \\
&\quad + \frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2} \left\{ \frac{1-2x}{m+2} + (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)(m+2)} \right. \\
&\quad + (1+\mu) \lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)(m+2)} \left. \right\} - \frac{2mx(1-2x)}{(m+\beta)(m+2)} + \frac{\alpha^2}{(m+\beta)^2} \\
&\quad - \frac{2mx}{(m+2)(m+\beta)} \left\{ (1-\mu) \frac{1-2x+x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m-1)} \right. \\
&\quad + (1+\mu) \lambda \frac{1-x^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)} \left. \right\} - \frac{2m\alpha}{m+\beta} := \rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^4; x) &= \frac{\beta^4 x^4}{(m+\beta)^4} + \frac{m^4 x^4 (16x^3-20x^4)}{(m+\beta)^4(m+5)} - \frac{4m^3 x(9x^2-12x^3)}{(m+\beta)^3(m+4)} \\
&\quad + \frac{6m^2 x^2 (4x-6x^2)}{(m+\beta)^2(m+3)} - \frac{4x^3 m(1-2x)}{(m+\beta)(m+2)} + \frac{m^4 (72x^2-192x^3+120x^4)}{(m+\beta)^4(m+5)(m+4)} \\
&\quad - \frac{4m^3 (18x^2-54x^3+36x^4)}{(m+\beta)^3(m+4)(m+3)} + \frac{6m^2 (2x^2-8x^3+6x^4)}{(m+\beta)^2(m+3)(m+2)} \\
&\quad + (1-\mu) \left[ \frac{m^4 (2x^3-4x^4+2x^{m+1})}{(m+\beta)^4(m+5)(m+4)} - \frac{2m^3 (3x^3-6x^4+3x^{m+2})}{(m+\beta)^3(m+4)(m+3)} \right. \\
&\quad + \frac{6m^2 (x^3-2x^4+x^{m+3})}{(m+\beta)^2(m+3)(m+2)} - \frac{2m^3 (x^3-2x^4+x^{m+4}-x^3(1-x)^{m+1})}{(m+\beta)(m+2)(m-1)} \left. \right] \\
&\quad + (1+\mu) \lambda \left[ \frac{m^4 (2x^3-2x^{m+1})}{(m+\beta)^4(m+5)(m+4)} - \frac{6m^3 (x^3-x^{m+2})}{(m+\beta)^3(m+4)(m+3)} \right. \\
&\quad + \frac{6m^2 (x^3-x^{m+3})}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)} - \frac{2m (x^3-x^{m+4}-x^3(1-x)^{m+1})}{(m+\beta)(m+2)(m-1)} \left. \right] + O\left(\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

**Lemma 3.** (Dinlemez Kantar & Torun, 2025)  $m > 1$  doğal sayı olmak üzere  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisi için Lemma 2 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\text{i) } \lim_{m \rightarrow \infty} m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x); x) = 1 - (2 + \beta)x + \alpha,$$

$$\text{ii) } \lim_{m \rightarrow \infty} m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x) = 6x - 10x^2,$$

$$\text{iii) } \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^4; x) = 12x^2 (x-1)^2.$$

## Yaklaşım Özellikleri

$U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatörleri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi (Dinlemez Kantar & Torun, 2025) de verilmiştir. Burada önce süreklilik modüllerini kullanarak yakınsaklık oranlarını veren teoremleri vereceğiz.

Süreklilik modülünü

$$\omega(g; \delta) := \sup_{0 < k \leq \delta} \sup_{x, x+k \in [0,1]} |g(x+k) - g(x)|, \quad g \in C[0,1] \quad (4)$$

olarak verelim. Süreklilik modülünün

$$|g(z) - g(x)| \leq \omega(g; \delta) \left(1 + \frac{|z-x|}{\delta}\right) \quad (5)$$

özellliği vardır.

**Teorem 1.**  $g \in C^1[0,1]$  olsun.  $m > 1$  doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| &\leq |g'(x)| \left| \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right| \\ &\quad + 2 \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)} \omega \left( g'; \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

eşitsizliği vardır. Burada  $\sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)$  ve  $\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)$  ler Lemma 2 nin (i) ve (ii) eşitlikleri ile tanımlıdır ve  $g'$  nün süreklilik modülü  $\omega(g'; \delta)$  ile ifade edilmektedir.

**İspat.**  $g \in C^1[0,1]$  olsun.  $\forall x, z \in [0,1]$  için ortalama değer teoremini kullanırsak;

$$g(z) - g(x) = g'(x)(z - x) + (g'(z) - g'(x))(z - x) \quad (7)$$

yazabiliriz. (7) eşitliğine (1) de tanımlanan  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}$  operatörünü uygulayıp, operatörün lineerliğini, ardından eşitliğin her iki tarafına mutlak değer kullanırsak;

$$\begin{aligned} U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) &= g'(x)U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(z - x; x) \\ &\quad + U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((g'(z) - g'(x))(z - x); x), \\ |U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x)| &\leq |g'(x)| |U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(z - x; x)| \\ &\quad + U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(|g'(z) - g'(x)||z - x|; x). \end{aligned}$$

Son eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifadeye (5) özelliği ve Cauchy Schwartz eşitsizliğini uygularsak;

$$\begin{aligned} |U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x)| &\leq |g'(x)| |U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(z - x; x)| \\ &\quad + \omega(g'; \delta) U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}\left(|z - x| + \frac{|z - x|^2}{\delta}; x\right), \\ &\leq |g'(x)| |U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(z - x; x)| \\ &\quad + \omega(g'; \delta) \sqrt{U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z - x)^2; x)} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z - x)^2; x)}\right), \\ &\leq |g'(x)| \left|\sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)\right| + \omega(g'; \delta) \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)} \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)}\right) \end{aligned}$$

olur.  $\delta = \sqrt{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)}$  seçersek (6) eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

$\delta > 0$  için Peetre  $\kappa$  fonksiyoneli

$$\kappa_2(g; \delta) := \inf_{h \in C^2[0,1]} \{\|g - h\| + \delta \|h''\|\}, \quad (8)$$

ile tanımlanır. (De Vore & Lorentz 1993, Teo. 2.4.) den

$$\kappa_2(g; \delta) \leq L\omega_2(g; \sqrt{\delta}) \quad (9)$$

olacak biçimde bir  $L > 0$  sabit vardır. Burada  $\omega_2(g; \sqrt{\delta})$  fonksiyonu  $g$  nin ikinci dereceden süreklilik modülüdür ve

$$\omega_2(g; \sqrt{\delta}) := \sup_{0 < k \leq \sqrt{\delta}} \sup_{x, x+k, x+2k \in [0,1]} |g(x+2k) - 2g(x+k) + g(x)| \quad (10)$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 2.**  $g \in C[0,1]$  olsun.  $x \in [0,1]$  ve  $m > 1$  doğal sayısı için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned} |U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x)| &\leq L\omega_2 \left( g; \sqrt{\frac{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) + (\sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x))^2}{8}} \right) \\ &\quad + \omega \left( g; \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

burada  $L > 0$  pozitif bir sabit,  $\sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)$  ve  $\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)$  ifadeleri Lemma 2 de tanımlanmıştır. Ayrıca  $\omega$  ve  $\omega_2$  fonksiyonları  $g$  nin sırasıyla birinci ve ikinci süreklilik modülleridir.

**İspat.**  $g \in C[0,1]$  fonksiyonu için yardımcı bir operatörü;

$$\hat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) = U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g \left( x + \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right) + g(x) \quad (12)$$

ile tanımlayalım.  $\hat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisinin lineerliği ve Lemma 1 in (i) ve (ii) özelliklerini kullanırsak

$$\hat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(z - x; x) = 0 \quad (13)$$

olduğunu görürüz.  $h \in C^2[0,1]$  için Taylor açılımı;

$$h(z) = h(x) + h'(x)(z - x) + \int_x^z (z - u)h''(u)du \quad (14)$$

şeklinde. (14) eşitliğinin her iki yanına  $\widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}$  operatör dizisini uygulayıp, (13) ü kullanırsak;

$$\widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(h(z); x) - h(x) = \widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu} \left( \int_x^z (z-u)h''(u)du; x \right)$$

olur. (12) ve Lemma 2 nin (ii) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \left| \widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(h(z); x) - h(x) \right| &\leq U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu} \left( \left| \int_x^z (z-u)h''(u)du \right|; x \right) \\ &\quad + \int_x^{x+\sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)} \left| x + \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) - u \right| |h''(u)| du, \\ &\leq \|h''\| \left( U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu} \left( \frac{(z-u)^2}{2}; x \right) + \frac{\left( \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^2}{2} \right), \\ &\leq \frac{\|h''\|}{2} \left( \rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) + \left( \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca (1) operatörü, (12) yardımcı operatörü ve Lemma 1 in (i) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \left| \widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) \right| &\leq \left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) \right| + \left| g \left( x + \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right) \right| + |g(x)| \\ &\leq 3\|g\| \end{aligned} \quad (16)$$

olur. (12), (15) ve (16) dan

$$\begin{aligned} \left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| &\leq \left| \widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z) - h(z); x) - (g - h)(x) \right| \\ &\quad + \left| \widehat{U}_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(h(z); x) - h(x) \right| + \left| g \left( x + \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right) - g(x) \right| \\ &\leq 4\|g - h\| + \frac{\|h''\|}{2} \left( \rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) + \left( \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^2 \right) + \omega \left( g; \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

olur. Her  $h \in C^2[0,1]$  için (17) eşitsizliğinin sağ tarafında infimum alırsak

$$\begin{aligned}
 \left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| &\leq 4\kappa_2 \left( g; \frac{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) + \left( \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^2}{8} \right) \\
 &\quad + \omega \left( g; \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right), \\
 &\leq L\omega_2 \left( g; \sqrt{\frac{\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) + \left( \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^2}{8}} \right) \\
 &\quad + \omega \left( g; \sigma_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)
 \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisinin yakınsama oranını Lipschitz sınıfı fonksiyonların yardımı ile inceleyeceğiz. Eğer  $g \in Lip_c(\tau)$  ise

$$|g(z) - g(x)| \leq M|z - x|^\tau; \quad z, x \in [0,1] \quad (18)$$

dır. Burada  $M > 0$  ve  $0 < \tau \leq 1$  dir.

**Teorem 3.** Eğer  $g \in Lip_c(\tau)$  ise  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisi için

$$\left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| \leq M \left( \rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^{\frac{\tau}{2}}$$

eşitsizliği vardır. Burada  $\rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x)$ , Lemma 2 de tanımlanmıştır.

**İspat.**  $g \in Lip_c(\tau)$  olsun.  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisinin lineerliğinden

$$\left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| \leq U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(|g(z) - g(x)|; x)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (m+1) \sum_{l=0}^m v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) \int_0^1 v_{m,l}(z) \left| g\left(\frac{zm+\alpha}{m+\beta}\right) - g(x) \right| dz \\
&\leq M(m+1) \sum_{l=0}^m v_{m,l}^{\lambda,\mu}(x) \int_0^1 v_{m,l}(z) \left| \frac{zm+\alpha}{m+\beta} - x \right|^\tau dz \quad (19)
\end{aligned}$$

olur.  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$  eşitliğinde  $p = \frac{2}{\tau}$  ve  $q = \frac{2}{2-\tau}$  olarak alıp, (19) un sağ tarafında yer alan integrale Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\begin{aligned}
\left| U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right| &\leq M \left( U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x) \right)^{\frac{\tau}{2}} \left( U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(1; x) \right)^{\frac{2-\tau}{2}} \\
&\leq M \left( \rho_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(x) \right)^{\frac{\tau}{2}}
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Son olarak,  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatörlerinin asimptotik davranışını incelemek için Voronovskaja tip bir yaklaşım teoremi vereceğiz.

**Teorem 4.**  $g \in C^2[0,1]$  olsun.  $x \in [0,1]$  ve  $m > 1$  doğal sayısı için

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} m \left( U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right) &= (1 - (2 + \beta)x + \alpha)g'(x) \\
&\quad + (3x - 5x^2)g''(x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada  $-1 \leq \lambda \leq 1$  ve  $0 \leq \alpha \leq \beta$  dır.

**İspat.**  $g \in C^2[0,1]$  olsun.  $g(z)$  fonksiyonuna  $x$  civarında Taylor formülünü açarsak;

$$g(z) = g(x) + g'(x)(z-x) + \frac{1}{2}g''(x)(z-x)^2 + r(z,x)(z-x)^2 \quad (20)$$

yazabiliriz. Burada  $\lim_{z \rightarrow x} r(z,x) = 0$  dır. (20) eşitliğine  $U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x)$  operatör dizisini uygular ve  $m$  ile çarparsak;

$$m \left( U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(g(z); x) - g(x) \right) = mg'(x)U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x); x)$$

$$+ \frac{m}{2} g''(x) U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^2; x) + m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(r(z,x)(z-x)^2; x) \quad (21)$$

olur. (21) in son terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak;

$$m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(r(z,x)(z-x)^2; x) \leq \left( U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(r^2(z,x); x) \right)^{\frac{1}{2}} \left( m^2 U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^4; x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\lim_{m \rightarrow \infty} U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(r^2(z,x); x) = 0$  ve Lemma 3 ün (iii) eşitliğinden  $m \rightarrow \infty$  için  $m^2 U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}((z-x)^4; x)$  limiti sonlu olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m U_{m,\alpha,\beta}^{\lambda,\mu}(r(z,x)(z-x)^2; x) = 0 \quad (22)$$

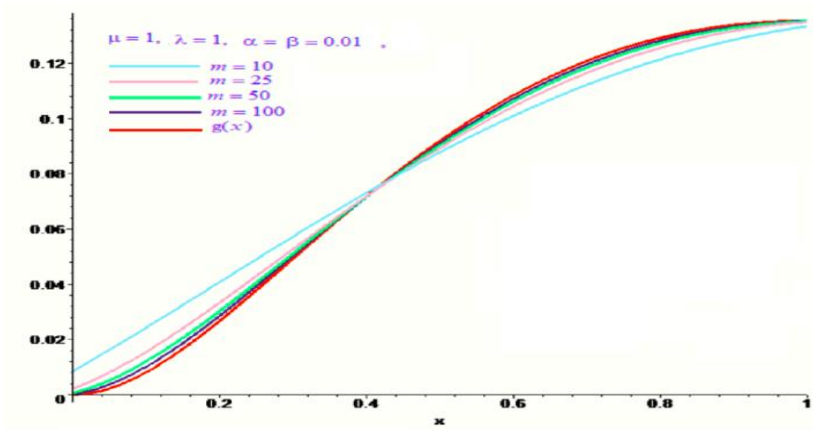
elde ederiz. Böylece (21) eşitliğinin  $m \rightarrow \infty$  için limitini alıp, Lemma 3 ün (i) ve (ii) eşitlikleri ve (22) yi kullanırsak Teorem 4 ün ispatını tamamlamış oluruz.

## Grafiksel Sonuçlar

Bu çalışmada,  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein-Durrmeyer-Stancu operatörlerinin yaklaşım özellikleri inceledik ve bu operatörlerin asimptotik davranışı için Voronovskaja tipi teorem verdik. Çalışmada elde edilen teorik sonuçları desteklemek amacıyla, bu operatörlerin bir  $g$  fonksiyonuna yakınsamasını bazı grafiksel örneklerle göstereceğiz.

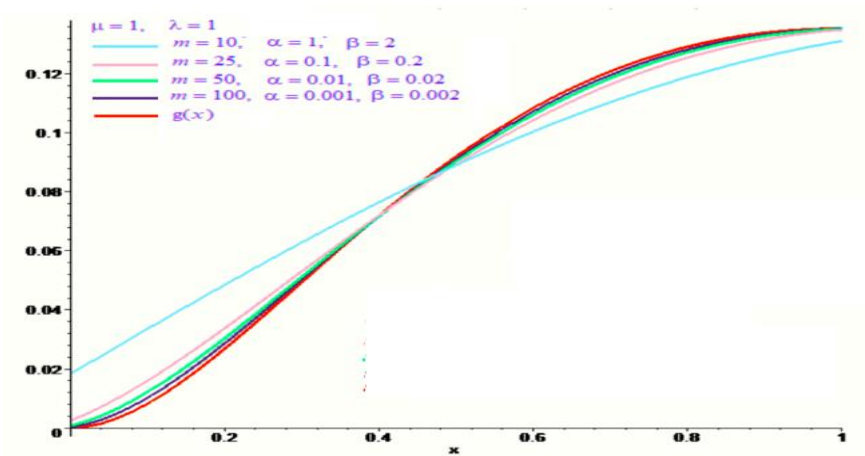
**Örnek.**  $g(x) = x^2 e^{-2x}$  fonksiyonunun  $x \in [0,1]$  için tanımlandığını varsayalım. İlk olarak, aşağıdaki grafik  $U_{m,\alpha,\beta}^{\mu,\lambda}(g; x)$  operatörlerinin  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = \beta = 0.01$  ve farklı  $m$  değerleri için  $g(x)$  fonksiyonuna yakınsamasını göstermektedir (Şekil 1).

Şekil 1.  $U_{m,0.01,0.01}^{1,1}(g;x)$  operatörlerinin  $g(x)$  fonksiyonuna yakınsaması



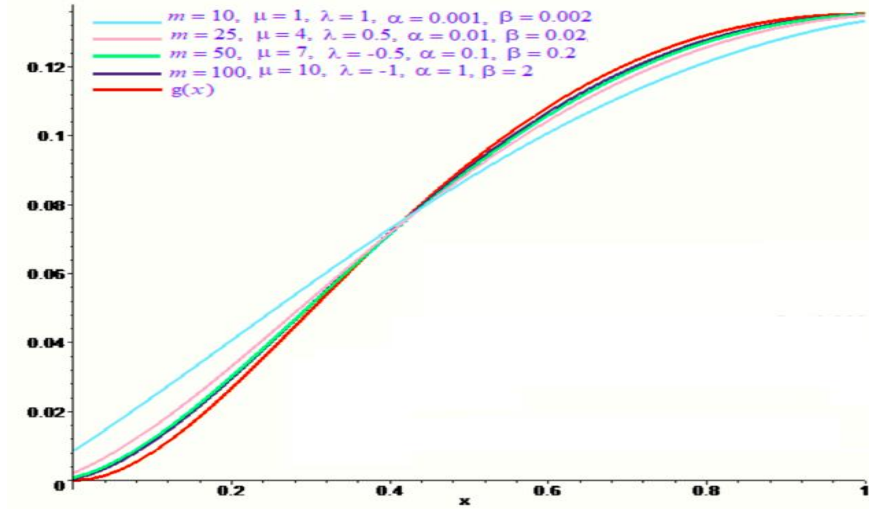
İkinci olarak, aşağıdaki grafik  $U_{m,\alpha,\beta}^{\mu,\lambda}(g;x)$  operatörlerinin  $\mu=1, \lambda=1$  olmak üzere  $m, \alpha$  ve  $\beta$  'nın farklı değerleri için  $g(x)$  fonksiyonuna yakınsamasını göstermektedir (Şekil 2).

Şekil 2.  $U_{m,\alpha,\beta}^{1,1}(g;x)$  operatörlerinin  $g(x)$  fonksiyonuna yakınsaması



Son olarak, aşağıdaki grafik  $U_{m,\alpha,\beta}^{\mu,\lambda}(g;x)$  operatörlerinin  $m, \mu, \lambda, \alpha$  ve  $\beta$  'nın farklı değerleri için  $g(x)$  fonksiyonuna yakınsamasını göstermektedir (Şekil 3).

Şekil 3.  $U_{m,\alpha,\beta}^{\mu,\lambda}(g;x)$  operatörlerinin  $g(x)$  fonksiyonuna yakınsaması



Böylece,  $m > 1$  doğal sayı olmak üzere  $[0,1]$  üzerinde  $U_{m,\alpha,\beta}^{\mu,\lambda}(g;x)$  operatör dizisinin  $m$  arttıkça  $g \in C[0,1]$  fonksiyonuna doğru eğilim gösterdiği gözlemlenmektedir.

## Kaynakça

- Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Charkow Ser.2* t., 13, 1-2.
- Zhou, G., & Cai, Q.-B. (in review). Approximation properties of generalized  $\lambda$ - Bernstein operators. *Open Mathematics*.
- Cai, Q.-B., Aslan, R., Özger, F., & Srivastava, H.M. (2024). Approximation by a new Stancu variant of generalized  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein operators. *Alexandria Engineering Journal*, 107, 205-214.
- Cai, Q.-B., & Zhou, G. (2024). Approximation properties of  $(\lambda, \mu)$  - Bernstein-Durrmeyer operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, s. 5946-5953.
- Dinlemez Kantar, Ü. & Torun, G. (2025).  $(\lambda, \mu)$ -Bernstein-Durrmeyer-Stancu Operatör Dizisinin Yakınsaklığı Üzerine. Gülnur Şaffak Atalay (Ed.), *Matematiksel Yapılar: Analiz Ve Geometri Perspektifiyle* içinde (s. 161-169). Ankara: Bidge yayınları.
- De Vore, R. A. & Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation*. Berlin: Springer-Verlag.

# BÖLÜM 5

## SÜREKSİZLİK NOKTASI İÇEREN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONU AÇILIMI VE CARLEMAN FORMÜLÜ

### 1. KADRIYE AYDEMİR<sup>1</sup>

#### Giriş

Özdeğerler ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonları araştırmak için birçok neden vardır. İlk olarak, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen birçok problemin çözümleri genellikle özfonksiyon açılımları cinsinden açıkça verilebilir (inceleyeceğimiz problemler için, bu tür özfonksiyon açılımları, bir vektörün 3-boyutlu uzaydaki  $i$ ,  $j$  ve  $k$  bileşenleri cinsinden gösterimine veya  $n$ -boyutlu uzaydaki karşılık gelen gösterimlerine tamamen benzerdir). İkinci olarak, özdeğerler genellikle bağımsız ilgi konusudur. Özdeğerler, ısı iletimi, konsantrasyon analizleri, gözenekli ortamlarda akış vb. durumlarda ortaya çıkan çözümlerin bozunma (veya büyüme) hızları hakkında net tahminler sağlamaya yardımcı olur. Titreşim problemlerinde ise müzik aletlerinin temel frekanslarını ve harmonik seslerini verirler. Özdeğerler, nükleer reaksiyonlar için kritik kütleinin belirlenmesinde önemlidir. Ayrıca, özdeğerler optimizasyonda ve varyasyon hesaplamalarında doğal olarak ortaya çıkar. Çoğu özdeğer problemi açıkça çözülemediğinden hem özdeğerlerin hem de özfonksiyonların nitel davranışını araştırmak oldukça önemlidir. Bu nedenle, özdeğerlerin

---

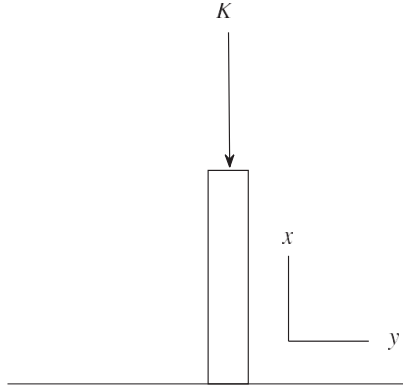
<sup>1</sup> Prof. Dr., Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0002-8378-3949

ve karşılık gelen özfonksiyonların değerlendirmesi için etkili sayısal yöntemler de mevcuttur.

Sturm-Liouville problemleri genellikle kısmi diferansiyel bir denklemde değişkenlerin ayrılması yöntemi ile ortaya çıkmaktadır. Ancak, özdeğer problemleri, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yanı sıra matris teorisi ve daha genel operatör içeren birçok alanda ortaya çıkar. Euler bir kirişin burkulmasını ele alırken ilk olarak bir özdeğer problemini ele almıştır (Guenther & Lee, 2018: 1). Bu problem için uzunluğu 1 olan düz bir elastik çubuk (kiriş) dikey olarak yukarı doğru konumlandırılсын ve tabanından sabitlensin. Bunun için kalın bir metal tel alınabilir. Şekil 1.1'de görüldüğü gibi, çubuğun serbest ucuna  $K$  büyüklüğünde küçük bir basınç kuvveti dikey olarak aşağı doğru etki eder. Çubuğun şeklini belirleyen denklemler

$$Ely'' = -Ky, \quad 0 < x < l$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

biçimindedir.



Şekil 1.1

Burada  $y = y(x)$ , çubuğun orta çizgisinin dikey denge konumundan enine sapmasıdır. Fiziksel sabitler  $E$  ve  $I$ , çubuğun elastik ve geometrik özellikleriyle belirlenir. Bu denklemler,

$0 \leq x \leq l$  için her zaman  $y(x) = 0$  çözümüne sahiptir. Örnek,  $K$  küçük olduğunda çubuğun şeklinin bu olduğunu, ancak  $K$  kritik bir değere yükseltildiğinde çubuğun büküleceğini doğrulamaktadır. Bükülme, çubuğun dikeyden saparak yeni bir denge şekline döneceği anlamına gelir. Bu denklem basit bir Sturm-Liouville denklemdir ve

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0,$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\lambda = K/EI > 0$  ile gösterilmiştir. Burkulma meydana gelirse, aşıkâr çözüm olan  $y(x) = 0$  dan farklı bir çözüm (veya çözümler) bulmak mümkün olmalıdır. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

biçimindedir.  $y(0) = 0$  olduğundan,  $A = 0$  dır. Sıfırdan farklı sapmalar (çözümler) mümkünse,

$$B \neq 0 \text{ ve } y(l) = B \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla, sıfırdan farklı  $y$  çözümleri ancak ve ancak  $\lambda = \lambda_n = (n\pi/l)^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ise mevcuttur ve  $n$  pozitif bir tam sayı ise mevcuttur. Karşılık gelen çözümler  $y = y_n(x) = B_n \sin(n\pi x/l)$  ve  $B_n \neq 0$  dır. Bu çözümlere karşılık gelen  $\lambda$  değerleri (dolayısıyla  $K$ ) özdeğer olarak adlandırılır ve karşılık gelen çözümlere ise özfonksiyon denir. Bu probleme ise özdeğer problemi denir. Euler modeli, burkulmaların meydana gelebileceğini ve yalnızca  $\lambda_n$  özdeğerlerinde meydana geldiğini ve karşılık gelen burkulmuş denge durumlarının  $\sin(n\pi x/l)$  fonksiyonunun katları olduğunu belirler. Aslında, çubuk burkulduğunda, fiziksel durum lineer olmadığı için yeni bir modele ihtiyaç duyulur. Bununla birlikte, lineer olmayan sistemde bile, uygun bir lineer olmayan modelin doğrusallaştırılması olan yukarıdaki lineer problem, burkulmaların meydana gelebileceği  $K$  değerlerini öngörür. Bu tür problemlere çatallanma (dallanma) problemleri denir çünkü lineer olmayan durumlar, lineerleştirilmiş

problemin özdeğerleri olan belirli kritik değerlerde, kararlı bir doğrusal durumdan (genellikle  $y = 0$ ) ayrılır. Dallanma noktasına karşılık gelen ve  $\lambda_n$  özdeğeri tarafından belirlenen  $y_n$  özfonksiyonu, dallanma noktasının yakınında oluşan küçük genlikli lineer olmayan burkulmuş tepkilerin şeklini yaklaşık olarak belirler. Euler burkulma denklemleri,

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(l) = 0,$$

biçiminde regüler bir Sturm-Liouville özdeğer problemini oluşturur burada  $\lambda = K/EI > 0$  biçimindedir. Geçmişten günümüze kadar, matematiksel fizikte yeni ve ilgi çekici uygulamaların ortaya çıkmasıyla bağlantılı olarak Sturm-Liouville problemleri ortaya çıkmaktadır (bak, Burghilea, & ark., 2018:3380, Cannon & Meyer, 1971:434, Courant, & Hilbert, 2024:1, Guenther & Lee, 2018:1, Kittel, 2005:1, Ren, 2006:1, Seitz & Johnson, 1940:1).

Bu çalışmada iki ayrık aralıkta tanımlı olan

$$Ew := -w''(x) + q(x)w = \lambda w, \quad x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3] \quad (1)$$

iki-aralıklı Sturm-Liouville denkleminde,

$$b_1 w := (lw)'(\xi_1) = \alpha \quad (2)$$

$$b_2 w := (lw)'(\xi_3) = \beta \quad (3)$$

sınır şartlarından ve de ortak  $\xi_2$  uç noktasında verilen

$$t_1 w := w(\xi_2 + 0) = \delta w(\xi_2 - 0) \quad (4)$$

$$t_2 w := w'(\xi_2 + 0) = \gamma w'(\xi_2 - 0) \quad (5)$$

geçiş şartlarından oluşan iki-aralıklı bir Sturm-Liouville problemi araştırılmıştır. Burada  $q(x)$  potansiyeli  $[\xi_1, \xi_2)$  ve  $(\xi_2, \xi_3]$  aralıklarının her birinde sürekli olan reel değerli fonksiyondur ve sonlu tek taraflı  $q(\xi_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \xi_i \pm} q(x)$  limitleri mevcuttur,  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

reel sabitlerdir,  $\lambda$  kompleks bir spektral parametredir. Bu çalışmanın amacı, klasik Sturm-Liouville problemlerinin bazı temel spektral özelliklerini elde etmek ve genelleştirmektir. Bu bölüm de sınır

şartlarına ilave olarak etkileşim noktasında iletim koşulları (bu koşullar literatürde geçiş koşulları, süreksizlik koşulları veya impulsiv koşullar olarak da adlandırılmaktadır) da içeren yeni tip iki aralıklı Sturm-Liouville problemlerinin bazı spektral özellikleri araştırılmıştır. Geçiş şartları sol aralığın sağ uç noktasında ve sağ aralığın sol uç noktasında verilmiştir. Çalışmada iki bilinmeyen çözüm için iki farklı Sturm-Liouville denklemi incelenmiştir; biri sol aralık  $[\xi_1, \xi_2)$  üzerinde, diğeri ise sağ aralık  $(\xi_2, \xi_3]$  üzerinde tanımlıdır ve ortak bir uç noktası  $x = \xi_2$  olan etkileşim noktasıdır ve bu noktaya ek iletim koşulları uygulanır. Kendi yaklaşımımızı kullanarak, Green fonksiyonunun bir özfonksiyon serisine açılımı, Parseval eşitliği ve Carleman formülü gibi önemli spektral özellikleri araştırılmıştır.

Son yıllarda geçiş şartları içeren sınır değer iletim problemleri literatürde çok yoğun olarak çalışılmıştır (bak, Aydemir & ark., 2018:921, Allahverdiev & Tuna, 2019:1, Binding & Volkmer, 2012:477, Çavuşoğlu & Mukhtarov, 2022:98, Fu & ark., 2021:2037, Li & ark., 2017:189, Malathi & ark., 1998:119, Mukhtarov & ark., 2015:1671, Mukhtarov & ark., 2020:1, Mukhtarov & ark., 2019:85. Olğar & ark., 2017:114, Olğar & ark., 2022:275, Öztürk & ark., 2023:1, Şen, 2018:6604, Yücel & ark., 2022:90, Wang, 2012:1).

**Not:** Bu çalışmada  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$  ve  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 0$  kabul edilecektir.  $\alpha = \beta$ ,  $\delta = \gamma$  olduğu özel durumda, incelenen problem klasik periyodik Sturm-Liouville problemlerine indirgenir, bu nedenle bu çalışmada elde edilen sonuçlar ilgili klasik sonuçları geliştirir ve genelleştirir. Söz konusu problem karesi integrallenebilir fonksiyonların klasik Hilbert uzayında genel olarak kendine eşlenik değildir. Bu nedenle bir çok klasik yöntem araştırdığımız probleme direkt olarak uygulanamaz. Bu çalışmamızda bazı klasik yöntemleri daha da genelleştirerek özdeğerlerin ve özfonksiyonların bazı önemli özellikleri de araştırılmıştır.

## Esas Sonuçlar

(1) denkleminin  $[\xi_1, \xi_2)$  sol aralığı üzerindeki

$$w(\xi_1, \lambda) = 1, \quad w'(\xi_1, \lambda) = \alpha \quad (6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü  $y_1(x, \lambda)$  fonksiyonu ve aynı denklemin sağ aralık  $(\xi_2, \xi_3]$  üzerindeki

$$w(\xi_3, \lambda) = 1, \quad w'(\xi_3, \lambda) = \beta \quad (7)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü  $z_2(x, \lambda)$  fonksiyonu olsun.  $y_1(x, \lambda)$  ve  $z_2(x, \lambda)$  fonksiyonları her sabit  $x$  için  $\lambda$  parametresinin tam fonksiyonlardır (bak, Titchmarsh, 2011). (1) denkleminin  $(\xi_2, \xi_3]$  sağ aralığında

$$w(\xi_2 + 0) = \delta y_1(\xi_2 - 0) \quad (8)$$

$$w'(\xi_2 + 0) = \gamma y_1'(\xi_2 - 0) \quad (9)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü  $y_2(x, \lambda)$  fonksiyonu ile ve aynı denklemin sol aralık  $[\xi_1, \xi_2)$  üzerinde tanımlı olan ve

$$w(\xi_2 - 0) = \frac{1}{\delta} z_2(\xi_2 + 0) \quad (10)$$

$$w'(\xi_2 - 0) = \frac{1}{\gamma} z_2'(\xi_2 + 0) \quad (11)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü  $z_1(x, \lambda)$  fonksiyonu ile gösterelim. (Aydemir & Mukhtarov, 2015) çalışmasındaki yöntem kullanılarak  $y_2(x, \lambda)$  ve  $z_1(x, \lambda)$  fonksiyonlarının  $\lambda \in \mathbb{C}$  parametresinin tam fonksiyonları olduğu gösterilebilir. Böylece  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$ ,  $z_1(x, \lambda)$  ve  $z_2(x, \lambda)$  fonksiyonlarının tanımından aşağıdaki sonuç kolayca ispatlanabilir.

**Sonuç 1.**  $[\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3]$  iki-aralığı üzerinde tanımlanan

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} y_1(x, \lambda), & x \in [\xi_1, \xi_2) \\ y_2(x, \lambda), & x \in (\xi_2, \xi_3] \end{cases}$$

fonksiyonu (1) denklemini, (2) sınır şartını ve (4)-(5) geçiş şartlarının her ikisini sağlar. Benzer şekilde  $[\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3]$  aralığı üzerinde tanımlanan

$$z(x, \lambda) = \begin{cases} z_1(x, \lambda), & x \in [\xi_1, \xi_2) \\ z_2(x, \lambda), & x \in (\xi_2, \xi_3] \end{cases}$$

fonksiyonu (1) denklemini, (3) sınır şartını ve (4)-(5) geçiş şartlarının her ikisini sağlar. Kolayca gösterilebilir ki,

$\Delta_1(\lambda) := W(y_1(x, \lambda), z_1(x, \lambda))$  ve  $\Delta_2(\lambda) := W(y_2(x, \lambda), z_2(x, \lambda))$  fonksiyonları  $x$  değişkeninden bağımsızdırlar

( $W(y, z; x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$ ,  $y$  ve  $z$  fonksiyonlarının Wronskian determinantıdır).

**Sonu 2.**  $\Delta_1(\lambda)$  ve  $\Delta_2(\lambda)$  fonksiyonları  $\lambda$  parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

**Teorem 1.**  $\Delta_2(\lambda) = \delta\gamma\Delta_1(\lambda)$  eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $W(y_1(x, \lambda), z_1(x, \lambda))$  ve  $W(y_2(x, \lambda), z_2(x, \lambda))$  fonksiyonları  $x$  değişkeninden bağımsız olduğundan (4)-(5) geçiş şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Delta_2(\lambda) &= W(y_2(x, \lambda), z_2(x, \lambda)) \\ &= W(y_2(\xi_2 + 0, \lambda), z_2(\xi_2 + 0, \lambda)) \\ &= \delta\gamma W(y_1(\xi_2 - 0, \lambda), z_1(\xi_2 - 0, \lambda)) \\ &= \delta\gamma\Delta_1(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Tanım 1.**  $\Delta(\lambda) := \Delta_2(\lambda) = \delta\gamma\Delta_1(\lambda)$  fonksiyonu (1)-(5) probleminin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

**Teorem 2.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısının (1)-(5) sınır değer geçiş probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart  $\Delta(\lambda) = 0$  olmasıdır.

**İspat.**  $\lambda$  herhangi bir özdeğer ve buna karşılık gelen özfonksiyon  $u(x, \lambda)$  olsun. Kabul edelim ki  $\Delta(\lambda) \neq 0$  olsun. Bu durumda  $(a_1, b_1, a_2, b_2) \neq (0, 0, 0, 0)$  olmak üzere  $u(x, \lambda)$  özfonksiyonu

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} a_1 y_1(x, \lambda) + b_1 y_2(x, \lambda), & x \in [\xi_1, \xi_2) \\ a_2 z_1(x, \lambda) + b_2 z_2(x, \lambda), & x \in (\xi_2, \xi_3] \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyon (2)-(5) sınır-geçiş şartlarında yerine yazılırsa  $a_1, b_1, a_2, b_2$  bilinmeyen katsayılarına göre homojen lineer bir denklem sistemi elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılsa bu denklem sisteminin determinantının  $M \neq 0$  olmak üzere  $M\Delta(\lambda)$  biçiminde olduğu gösterilebilir.  $\Delta(\lambda) \neq 0$  olduğundan dolayı bu denklem sistemi sadece  $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (0, 0, 0, 0)$  aşıkâr çözümüne sahip olur. Bu ise  $u(x, \lambda)$  fonksiyonunun özfonksiyon olması ile çelişir. Şimdi  $\Delta(\lambda) = 0$  olsun. Karakteristik fonksiyonun tanımı gereği  $\Delta_2(\lambda) = \Delta_1(\lambda) = 0$  olur.  $\Delta_1(\lambda) = 0$  eşitliği gereği  $y_1(x, \lambda)$  ve  $z_1(x, \lambda)$  fonksiyonları lineer bağımlıdır yani,

$$y_1(x, \lambda) = m_1 z_1(x, \lambda), \quad x \in [\xi_1, \xi_2)$$

olacak şekilde  $m_1 \neq 0$  sayısı vardır. Benzer şekilde  $\Delta_2(\lambda) = 0$  eşitliği gereği  $y_2(x, \lambda)$  ve  $z_2(x, \lambda)$  fonksiyonları lineer bağımlıdır yani,

$$y_2(x, \lambda) = m_2 z_2(x, \lambda), \quad x \in (\xi_2, \xi_3]$$

olacak şekilde  $m_2 \neq 0$  sayısı vardır. Bu durumda Sonuç 1. den  $u(x, \lambda)$  fonksiyonu, (2) sınır şartını da sağlar ve bu nedenle bu fonksiyon bu  $\lambda$  için (1)–(5) probleminin çözümüdür, dolayısıyla  $u(x, \lambda)$  fonksiyonu  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyondur. Böylece,  $\Delta(\lambda)$  fonksiyonunun her sıfırının bir özdeğer olduğu kanıtlanmış oldu. İspat bitti.

**Tanım 2.**  $[\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3]$  iki-aralığı üzerinde tanımlı olan ve  $L_2[\xi_1, \xi_2)$  ve  $L_2(\xi_2, \xi_3]$  uzaylarına ait olan tüm kompleks değerli  $f(x)$  fonksiyonlar kümesi  $H$  ile gösterilsin. Bu küme üzerindeki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle_H = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (12)$$

olarak tanımlanmaktadır.

**Sonuç 3.**  $0 < a < b$  olmak üzere öyle  $a$  ve  $b$  sayıları mevcuttur ki

$$a \langle f, g \rangle_{L_2[\xi_1, \xi_2) \oplus L_2(\xi_2, \xi_3]} \leq \langle f, g \rangle_H \leq b \langle f, g \rangle_{L_2[\xi_1, \xi_2) \oplus L_2(\xi_2, \xi_3]}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu nedenle  $H$  bir Hilbert uzayıdır.

**Teorem 3.** (1)-(5) probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

**İspat.**  $\lambda$  herhangi bir özdeğer ve buna karşılık gelen özfonksiyon  $u(x, \lambda)$  olsun. O halde

$$\Xi u - \lambda u = 0, x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3] \quad (13)$$

$$b_1 u - \alpha = 0 \quad (14)$$

$$b_2 u - \beta = 0 \quad (15)$$

$$t_1 u - \delta u(\xi_2 - 0) = 0 \quad (16)$$

$$t_2 u - \gamma u'(\xi_2 - 0) = 0 \quad (17)$$

olur.  $q(x)$  fonksiyonunun reel değerli fonksiyon ve  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  reel sabitler olduğu dikkate alınıp (13)-(17) eşitliklerinin kompleks eşleniği alınırsa

$$\Xi \bar{u} - \bar{\lambda} \bar{u} = 0, x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3] \quad (18)$$

$$b_1 \bar{u} - \alpha = 0 \quad (19)$$

$$b_2 \bar{u} - \beta = 0 \quad (20)$$

$$t_1 \bar{u} - \delta \bar{u}(\xi_2 - 0) = 0 \quad (21)$$

$$t_2 \bar{u} - \gamma \bar{u}'(\xi_2 - 0) = 0 \quad (22)$$

yazılabilir. (13) ve (18) deki denklemler sırası ile  $\bar{u}$  ve  $u$  ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{d}{dx} W(u, \bar{u}; x) = (\lambda - \bar{\lambda}) |u(x)|^2 \quad (23)$$

eşitliği bulunur. (23) eşitliği  $[\xi_1, \xi_2)$  ve  $(\xi_2, \xi_3]$  aralıklarında integrallenirse

$$\begin{aligned} & (\lambda - \bar{\lambda}) \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} |u(x)|^2 dx \right) \\ & = W(u, \bar{u}; x) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2-0} + W(u, \bar{u}; x) \Big|_{\xi_2+0}^{\xi_3} \end{aligned} \quad (24)$$

eşitliği elde edilir. (2)-(3) sınır şartlarından

$$W(u, \bar{u}; \xi_1) = W(u, \bar{u}; \xi_3) = 0 \quad (25)$$

bulunur ve (4)-(5) iletim koşulları uygulanırsa

$$W(u, \bar{u}; \xi_2 + 0) = \delta \gamma W(u, \bar{u}; \xi_2 - 0) = 0 \quad (26)$$

elde edilir. (25)-(26) eşitliklerini (24) de yerine yazılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} |u(x)|^2 dx \right) = 0$$

olduğu açıktır.  $u(x, \lambda)$  bir özfonksiyon olduğu için

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} |u(x)|^2 dx \neq 0$$

ve dolayısıyla  $\lambda - \bar{\lambda} = 0$  yani  $\lambda = \bar{\lambda}$  bulunur. Yani (1)-(5) probleminin her bir  $\lambda$  özdeğeri reeldir.

**Sonuç 4.** (1)–(5) probleminin tüm özfonksiyonları “esas itibarıyla” reeldir, yani her özdeğere karşılık gelen bir reel değerli özfonksiyon mevcuttur.

**Not.** Sonuç 4 hesaba katılarak, bundan sonra (1)–(5) probleminin tüm özfonksiyonlarının reel değerli olduğu kabul edilebilir.

**Teorem 4.**  $(\lambda_1, u_1(x))$  ve  $(\lambda_2, u_2(x))$  (1)-(5) probleminin iki özdeğer-özfonksiyon çifti olsun. Eğer  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ise  $u_1(x)$  ve  $u_2(x)$

özfonksiyonları (9) eşitliği ile tanımlanan iç çarpıma göre ortogonaldır; yani,

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u_1(x, \lambda) u_2(x, \lambda) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} u_1(x, \lambda) u_2(x, \lambda) dx = 0 \quad (27)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $u_1(x)$  ve  $u_2(x)$  özfonksiyonlar oldukları için

$$\Xi u_1 - \lambda u_1 = 0, x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3] \quad (28)$$

$$b_1 u_1 - \alpha = 0 \quad (29)$$

$$b_2 u_1 - \beta = 0 \quad (30)$$

$$t_1 u_1 - \delta u_1(\xi_2 - 0) = 0 \quad (31)$$

$$t_2 u_1 - \gamma u_1'(\xi_2 - 0) = 0 \quad (32)$$

ve

$$\Xi u_2 - \lambda u_2 = 0, x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3] \quad (33)$$

$$b_1 u_2 - \alpha = 0 \quad (34)$$

$$b_2 u_2 - \beta = 0 \quad (35)$$

$$t_1 u_2 - \delta u_2(\xi_2 - 0) = 0 \quad (36)$$

$$t_2 u_2 - \gamma u_2'(\xi_2 - 0) = 0 \quad (37)$$

eşitlikleri sağlanır. (28) ve (33) deki denklemleri sırası ile  $u_2$  ve  $u_1$  ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve  $\xi_1$  noktasından  $\xi_3$  noktasına integrallenirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u_1(x) u_2(x) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} u_1(x) u_2(x) dx \right)$$

$$= W(u_1, u_2; x) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2-0} + W(u_1, u_2; x) \Big|_{\xi_2+0}^{\xi_3}$$

bulunur. Teorem 3 teki ispata benzer argümanlar kullanılarak, bu son eşitliğin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu ve dolayısıyla bu eşitliğin sol tarafının da sıfıra eşit olduğu gösterilebilir.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  olduğundan (24) eşitliği edilir. Yani  $u_1(x)$  ve  $u_2(x)$  özfonksiyonları  $L_2[\xi_1, \xi_2) \oplus L_2(\xi_2, \xi_3]$  Hilbert uzayında (12) ile tanımlanan iç çarpıma göre ortogonal fonksiyonlardır.

### Green Fonksiyonunun Özfonksiyonlar Aracılığı İle Açılımı

Homojen olmayan

$$-\omega''(x) + (q(x) - \lambda)\omega = f(x), \quad x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3] \quad (38)$$

Sturm-Liouville denklemini ve (2)-(5) sınır-geçiş şartlarını alalım. Burada  $f(x)$ ,  $q(x)$  fonksiyonları (1)–(5) probleminin ifadesinde öngörülen koşulları sağlayan reel değerli fonksiyonlardır.  $\lambda \in \mathbb{C}$  (1)–(5) probleminin özdeğeri olmayan herhangi bir kompleks sayı olsun. Böyle bir  $\lambda$  için  $G(x, y; \lambda)$  Green fonksiyonunun

$$\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} \frac{1}{\delta} y_1(x, \lambda) z_1(y, \lambda), & x \in [\xi_1, \xi_2), & y \in [\xi_1, x) \\ \frac{1}{\delta} z_1(y, \lambda) y_1(x, \lambda), & x \in [\xi_1, \xi_2), & y \in [x, \xi_2) \\ \frac{1}{\delta} y_2(x, \lambda) z_1(y, \lambda), & x \in [\xi_1, \xi_2), & y \in (\xi_2, \xi_3] \\ \frac{1}{\gamma} z_1(y, \lambda) y_2(x, \lambda), & x \in (\xi_2, \xi_3], & y \in [\xi_1, \xi_2) \\ \frac{1}{\gamma} y_2(y, \lambda) z_2(x, \lambda), & x \in (\xi_2, \xi_3], & y \in (\xi_2, x] \\ \frac{1}{\gamma} z_2(x, \lambda) y_2(y, \lambda), & x \in (\xi_2, \xi_3], & y \in [x, \xi_3] \end{cases}$$

şeklinde olduğunu gösterebiliriz. Bu fonksiyon (1)-(5) probleminin Green fonksiyonu olarak adlandırılır ayrıca bu fonksiyon  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre simetriktir yani  $G(x, y; \lambda) = G(y, x; \lambda)$  sağlanır.

**Teorem 5.**  $f(x)$  fonksiyonu  $[\xi_1, \xi_2)$  ve  $(\xi_2, \xi_3]$  aralıklarında sürekli olsun ve sonlu  $f(\xi_2 \pm)$  değerlerine sahip olsun. Bu takdirde homojen olmayan (36), (2)-(5) sınır değeri geçiş probleminin bir tek  $u(x, \lambda)$  çözümü vardır ve bu çözüm

$$u(x, \lambda) = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t; \lambda) f(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (39)$$

biçimindedir.

**İspat.**  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$ ,  $z_1(x, \lambda)$ ,  $z_2(x, \lambda)$  çözümlerinin,  $\Delta(\lambda)$  karakteristik fonksiyonunun ve  $G(x, y; \lambda)$  Green fonksiyonunun tanımları kullanılırsa, (39) ile tanımlanan  $u(x, \lambda)$  fonksiyonunun homojen olmayan (6) Sturm-Liouville denklemini ve (2)-(5) sınır değeri geçiş şartlarını sağladığı açıktır. Böylece genelliği kaybetmeden  $\lambda = 0$  sayısının bir özdeğer olmadığı varsayılın. Aksi takdirde,  $\Delta(K) \neq 0$  olacak şekilde  $K > 0$  reel sayısını seçilir ve

$$-u + (q(x) - K)u = \lambda u, \quad x \in [\xi_1, \xi_2) \cup (\xi_2, \xi_3]$$

denklemi aynı (2)-(5) sınır değeri geçiş şartlarıyla birlikte düşünülürse bu problem (1)-(5) problemi ile aynı özfonksiyonlara sahip olur ve tüm özdeğerler  $K$  sayısı kadar sola kayar.  $G(x, y) = G(x, y; 0)$  göstererek ve (38) denklemini

$$-u + q(x)u = \lambda u + f$$

şeklinde yeniden yazarak homojen olmayan (38), (2)-(5) problemi

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) + \lambda \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t) u(t, \lambda) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t) u(t, \lambda) dt \right) \\ = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t) f(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t) f(t) dt \end{aligned} \quad (40)$$

integral denklemi şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak, karşılık gelen (1)-(5) homojen problemi,

$$u(x, \lambda) + \lambda(\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t)u(t, \lambda)dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t) u(t, \lambda)dt) = 0 \quad (41)$$

integral denklemine eşdeğerdir. Şimdi,  $T$  integral operatörü

$$(Tu)(x) := \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t)u(t)dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t; \lambda) u(t)dt \quad (42)$$

eşitliği ile tanımlansın. Böylece (41) integral denklemi  $\mu = -\frac{1}{\lambda}$  olmak üzere

$$(T - \mu I)u = 0 \quad (43)$$

operatör-denklemler formunda yazılabilir, burada  $I$  birim operatörü  $Iu = u$  şeklinde tanımlıdır.  $T$  İntegral operatörünün çekirdeği, yani  $G(x, t)$  Green fonksiyonu simetrik ve sürekli olduğundan, ekstremal prensibi uygulanabilir. Böylece  $T$  integral operatörü sonsuz sayıda  $\mu_n = -\frac{1}{\lambda_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  reel özdeğere sahiptir. Bu özdeğerlere karşılık gelen  $u_0(x)$ ,  $u_1(x), \dots$  özfonksiyonları

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u_n(t)u_m(t)dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} u_n(t)u_m(t)dt = \delta_{nm} \quad (44)$$

şeklinde normalleştirilsin.  $\delta_{nm}$  sayıları  $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{if } n = m \\ 0, & \text{if } n \neq m \end{cases}$  şeklinde tanımlanan Kronecker  $\delta$  sıdır. (Aydemir & Mukhtarov, 2015) ye benzer şekilde,  $|\lambda_n| = O(n^2)$  olduğunu gösterebiliriz.  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  sınırlı ve sürekli fonksiyonlar olduğundan,  $F(x, t)$  fonksiyonunu

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(x)u_n(t) \quad (45)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Eşitliğin sağ tarafı mutlak ve düzgün yakınsak bir seri olduğundan,  $F(x, t)$  fonksiyonu süreklidir. Ayrıca,  $F(x, t)$  nin simetrik bir fonksiyon olduğu açıktır.  $G(x, t) = -F(x, t)$  olduğunu göstereyim. Varsayalım ki

$G(x, t) + F(x, t)$  fonksiyonu özdeş olarak sıfır olmasın. Simetrik, sürekli ve sıfırdan farklı çekirdeğe sahip Fredholm tipi integral denklemlerin bilinen özelliğine göre (bak, Courant & Hilbert, 2024).

$$u(x, \lambda) + \lambda(\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} (G(x, t) + F(x, t)) u(t, \lambda) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} (G(x, t) + F(x, t)) u(t, \lambda) dt) = 0 \quad (46)$$

integral denklemi

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} (G(x, t) + F(x, t)) \tilde{u}(t) dt \\ & + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} (G(x, t) + F(x, t)) \tilde{u}(t) dt \\ & = -\frac{1}{\lambda} \tilde{u}(x) \end{aligned} \quad (47)$$

olacak şekilde  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}(x))$  bir özdeğer-özfonksiyon çiftine sahiptir. (40) ve (44) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} (G(x, t) + F(x, t)) u_n(t) dt \\ & + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} (G(x, t) + F(x, t)) u_n(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\lambda_n} u_n(x) + \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{48}$$

bulunur. Dolayısıyla,  $G(x, t) + F(x, t)$  fonksiyonu tüm  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  özfonksiyonları ile ortogonal olur. O halde, (47) ve (48) den

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} \tilde{u}(t) u_n(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} \tilde{u}(t) u_n(t) dt = 0 \tag{49}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  elde edilir. Bu eşitlik gereği,  $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x, \tilde{\lambda})$  özfonksiyonu tüm  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  özfonksiyonları ile ortogonaldır. O halde bu özfonksiyonun kendisine de ortogonal olduğu, yani

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} |\tilde{u}(t, \tilde{\lambda})|^2 dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} |\tilde{u}(t, \tilde{\lambda})|^2 dt = 0$$

elde edilir. Buradan  $\tilde{u}(x, \tilde{\lambda})$  özdeş olarak sıfır olur. Bu ise çelişkidir. İspat bitti.

Teorem 5 in ispatında, aşağıdaki önemli sonucu da ispatladık.

**Teorem 6.**  $G(x, t)$  Green fonksiyonu mutlak ve düzgün yakınsak bir

$$G(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(t) \tag{50}$$

seri şeklinde yazılabilir.

### Özfonksiyonların Tamlığı: Genelleştirilmiş Parseval Eşitliği

Bu bölümde, önceki bölümlerin sonuçlarına dayanarak, özfonksiyonlar sisteminin tamlık özelliği hakkında bazı önemli sonuçlar verilecektir.

**Teorem 7.**  $f(x)$  fonksiyonu  $[\xi_1, \xi_2)$  ve  $(\xi_2, \xi_3]$  aralıklarında iki kez sürekli türevlenebilir olsun ve  $f(\xi_2 \mp 0), f'(\xi_2 \mp 0), f''(\xi_2 \mp 0)$  sonlu limit değerlerine sahip olsun. Ayrıca (2)–(5) sınır-geçiş koşullarını sağlasın. Bu durumda,  $f(x)$ , mutlak ve düzgün yakınsak olan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} f(t) u_n(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} f(t) u_n(t) dt \right) u_n(x) \quad (51)$$

serisine açılabilir.

**İspat.**  $f''(x) - q(x)f(x) = g(x)$  olsun. (39) ve (50) göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t) g(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t) g(t) dt \right) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)}{\lambda_n} \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u_n(t) g(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} u_n(t) g(t) dt \right) \quad (52) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafı  $u_m(x)$  ile çarpıp integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} f(t) u_m(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} f(t) u_m(t) dt \\ & = -\frac{1}{\lambda_m} \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} g(t) u_m(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} g(t) u_m(t) dt \right) \quad (53) \end{aligned}$$

bulunur. (53) eşitliği (52) de yerine yazılırsa (51) eşitliği elde edilir. İspat bitti.

$u_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$  özfonksiyonlarının ortogonalite özelliğini hesaba katarak ve iyi bilinen standart tekniği kullanarak (örneğin bak, Levitan, 1950) aşağıdaki önemli sonucu elde edebiliriz.

### Sonuç 5. (Genelleştirilmiş Parseval eşitliği)

$f \in L_2[\xi_1, \xi_2) \oplus L_2(\xi_2, \xi_3]$  olsun. Bu durumda genelleştirilmiş

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} f(t) u_n(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} f(t) u_n(t) dt)^2 \end{aligned} \quad (54)$$

Parseval eşitliği sağlanır.

### Rezolvent Açılımı Ve Genelleştirilmiş Carleman Eşitliği

**Teorem 8.**  $f(x)$  fonksiyonu  $[\xi_1, \xi_2)$  ve  $(\xi_2, \xi_3]$  aralıklarında sürekli olsun ve  $f(\xi_2 \mp 0)$  sonlu limit değerlerine sahip olsun.

Ayrıca  $\lambda$  bir özdeğer olmasın. Bu durumda, (39) resolventi

$$u_n(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} u_n(x) \quad (55)$$

biçiminde bir özfonksiyon serisine açılabilir.

**İspat.** Önceki bölümde ispat edildi ki,  $\lambda$  sayısı (1)-(5) homojen probleminin bir özdeğeri değilse bu probleme karşılık gelen (38), (2)-(5) homojen olmayan problem

$$u(x, \lambda) = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t; \lambda) f(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (56)$$

çözümüne sahiptir. Bu rezolvent,  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  özfonksiyonlar sistemi aracılığı ile bir Fourier serisine açılabilir. Her  $n = 0, 1, \dots$  için

$$c_n(f) = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} f(t) u_n(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} f(t) u_n(t) dt \quad (57)$$

sayısı,  $f(x)$  fonksiyonunun  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  özfonksiyonlar sistemine göre genelleştirilmiş Fourier katsayısı olarak adlandırılır. İki kez kısmi integral alarak ve (39) rezolventinin (2)-(5) sınır-geçiş koşullarını sağladığını göz önünde bulundurarak,

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} (u''(t, \lambda) - q(t)u(t, \lambda))u_n(t)dt \\
& + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} (u''(t, \lambda) - q(t)u(t, \lambda))u_n(t)dt \\
& = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u(t, \lambda)(u_n''(t) - q(t)u_n(t))dt \\
& + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} u(t, \lambda)(u_n''(t) - q(t)u_n(t))dt \\
& = \lambda_n(\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} u(t, \lambda)u_n(t)dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} u(t, \lambda)u_n(t)dt) \\
& = \lambda_n c_n(u(\cdot, \lambda))
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $u(x, \lambda)$  rezolvent fonksiyonu homojen olmayan (38) denklemini sağladığından (56) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
c_n(f(\cdot)) &= \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} (u''(t, \lambda) - q(t)u(t, \lambda) - \lambda u(t, \lambda))u_n(t)dt \\
& + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} (u''(t, \lambda) - q(t)u(t, \lambda) - \lambda u(t, \lambda))u_n(t)dt \\
& = \lambda_n c_n(u(\cdot, \lambda)) - \lambda c_n(u(\cdot, \lambda))
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$c_n(u(\cdot, \lambda)) = \frac{c_n(f(\cdot))}{\lambda_n - \lambda}$$

elde edilir. Bu nedenle,  $u(x, \lambda)$  rezolventi verilen  $f(x)$  fonksiyonu ve  $(\lambda_n, u_n(x))$  özdeğer-özfonksiyon çifti aracılığı ile

$$u_n(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(f(\cdot))}{\lambda_n - \lambda} u_n(x)$$

Fourier serisi şeklinde yazılabilir. İspat bitti.

**Teorem 9.** (Genelleştirilmiş Carleman eşitliği)  $\lambda$  sayısı (1)–(5) probleminin bir özdeğeri olmasın. Bu takdirde

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, x; \lambda) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, x; \lambda) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda - t} dN(t)$$

eşitliği ağılanır.

**İspat.** (55)-(57) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, t; \lambda) f(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, t; \lambda) f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} f(t) u_n(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} f(t) u_n(t) dt \right) u_n(x) \\ &= \left( \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n - \lambda} dt + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n - \lambda} dt \right) f(t) \end{aligned}$$

elde edilir.  $f(x)$  keyfi olduğundan, son denklem Green fonksiyonunun

$$G(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n - \lambda}$$

şeklindeki açılımını verir.  $\xi = x$  alıp integral alınarak ve (44) denklemi kullanılarak

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, x; \lambda) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, x; \lambda) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \quad (58)$$

bulunur.  $t$  den büyük olmayan  $\lambda_n$  özdeğer sayısı  $N(t)$  ile gösterilsin. Yani  $N(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$  olsun. O halde (58) eşitliği Carleman formülünün

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2-0} G(x, x; \lambda) dx + \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_2+0}^{\xi_3} G(x, x; \lambda) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda - t} dN(t)$$

şeklindeki Carleman genellemesini ifade eder.

## Kaynakça

Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2015). Spectrum and Green's function of a many-interval Sturm–Liouville problem. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 70(5), 301-308.

.Aydemir, K., Olğar, H., Mukhtarov, O. S., & Muhtarov, F. (2018). Differential operator equations with interface conditions in modified direct sum spaces. *Filomat*, 32(3), 921-931.

Allahverdiev, B. P., & Tuna, H. (2019). Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2019 (2019), No. 03, pp. 1–10

Binding, P., & Volkmer, H. (2012). A Prüfer angle approach to the periodic Sturm-Liouville problem. *The American Mathematical Monthly*, 119(6), 477-484.

Burghilea, D., Saldanha, N. C., & Tomei, C. (2009). The geometry of the critical set of nonlinear periodic Sturm–Liouville operators. *Journal of Differential Equations*, 246(8), 3380-3397.

Cannon, J. R., & Meyer, G. H. (1971). On diffusion in a fractured medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 20(3), 434-448.

Courant, R., & Hilbert, D. (2024). *Methods of mathematical physics, volume 2*. John Wiley & Sons.

Çavuşoğlu, S., & Mukhtarov, O. S. (2022). Modified Finite Difference Method for solution of two-interval boundary value problems with transition conditions. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(1), 98-106.

Fu, J., Hao, X., Li, K., & Yao, S. (2021). Discontinuous fractional Sturm-Liouville problems with eigen-dependent boundary

conditions. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 11(4), 2037-2051.

Guenther, R. B., & Lee, J. W. (2018). *Sturm-Liouville problems: theory and numerical implementation*. CRC Press.

Kittel, C. (2005). *Introduction to solid state physics*. John Wiley & sons, inc.

Levitan, B. M. (1950). Expansion in characteristic functions of differential equations of the second order. *Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad*.

Li, K., Sun, J., & Hao, X. (2017). Weyl function of Sturm–Liouville problems with transmission conditions at finite interior points. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(5), 189.

Malathi, V., Suleiman, M. B., & Taib, B. B. (1998). Computing eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems using shooting technique and direct integration method. *International journal of computer mathematics*, 68(1-2), 119-132.

Mukhtarov, O. S., Olğar, H., & Aydemir, K. (2015). Resolvent operator and spectrum of new type boundary value problems. *Filomat*, 29(7), 1671-1680.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., & Aydemir, K. (2020). Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. *Complexity*, 2020, 1-8.

Mukhtarov, O., Çavuşoğlu, S., & Olğar, H. (2019). Numerical solution of one boundary value problem using finite difference method. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11, 85-89.

Olğar, H., & Muhtarov, F. S. (2017). The basis property of the system of weak eigenfunctions of a discontinuous Sturm–Liouville problem. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(3), 114.

Olğar, H., Mukhtarov, O. S., Muhtarov, F. S., & Aydemir, K. (2022). The weak eigenfunctions of boundary-value problem with symmetric discontinuities. *Journal of Applied Analysis*, 28(2), 275-283.

Öztürk, S. N., Mukhtarov, O., & Aydemir, K. (2023). Non-classical periodic boundary value problems with impulsive conditions. *Journal of New Results in Science*, 12(1), 1-8.

Ren, S. Y. (Ed.). (2006). *Electronic states in crystals of finite size: quantum confinement of Bloch waves*. New York, NY: Springer New York.

Seitz, F., & Johnson, R. P. (1940). Modern theory of solids. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 23(3), 293-315.

Şen, E. (2018). Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a Schrödinger-type boundary-value-transmission problem with retarded argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(16), 6604-6610.

Yücel, M., Muhtarov, F., & Mukhtarov, O. (2022). A New Transformation Method for Solving High-Order Boundary Value Problems. *Journal of New Theory*, (40), 90-100.

Titchmarsh, E. C. (2011). *Elgenfunction Expansions Associated With Second Order Differential Equations*. Read Books Ltd.

Wang, D. B. (2012). Periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive dynamic equations on time scales. *Advances in Difference Equations*, 2012(1), 1-9.

## BÖLÜM 6

# ELİPTİK SINIF KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI VE ÇİFT LAPLACE METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Harun ÇİÇEK<sup>1</sup>  
Hasan GÖKBAŞ<sup>2</sup>

### Giriş

Kısmi diferansiyel denklemler, gerek matematiksel modelleme gerekse fiziksel, biyomekanik ve jeofiziksel süreçlerin çözümlemesinde temel nitelikteki analitik araçlardan biri olarak kabul edilmektedir. Özellikle çok değişkenli sistem davranışlarının tanımlanmasında merkezi bir rol oynayan bu denklemler, termodinamik sistemlerin denge analizinden elastisite kuramındaki gerilme-şekil değiştirme ilişkilerine, akışkanlar mekaniğinde türbülans çözümlemelerinden biyolojik difüzyon modellerine kadar uzanan geniş bir uygulama spektrumuna sahiptir. Hilbert uzayında tanımlanan, öz-eşlenik ve pozitif tanımlı operatör yapısı içeren üçüncü mertebe diferansiyel denklemler için ele alınan yerel olmayan sınır değer problemleri, matematiksel fiziğin soyut

---

<sup>1</sup> Doktor Öğretim Üyesi, Bitlis Eren Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0003-3018-3015

<sup>2</sup> Doktor Öğretim Üyesi, Bitlis Eren Üniversitesi, Matematik Bölümü, Orcid: 0000-0002-3323-8205

düzeydeki uygunluk koşullarının incelenmesi bağlamında önemli bir çözüm sınıfı sunmaktadır (Nayfeh, 1970).

Bu bağlamda, kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) kuramsal ve hesaplamalı çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi, uygulamalı matematik disiplininin tarihsel ve metodolojik çerçevede en temel amaçlarından biri olarak öne çıkmaktadır. KDD'lerin çözümünde kullanılan sayısal yöntem ailesi; sonlu eleman metodu, sınır elemanları yaklaşımı, sonlu hacim yöntemi ve spektral teknikler şeklinde kategorize edilmekte olup, söz konusu yöntemlerin her biri çözüm uzayının yapısal özelliklerine göre güçlü ve zayıf form ifadelerine ayrılmaktadır. Zayıf formülasyonlar, çözüm alanının değişmeli integral yapıları çerçevesinde cebirsel sistemlere indirgenmesini sağlamakta ve polinom tabanlı fonksiyonların süreklilik koşullarının gevşetilmesine imkân tanıyarak temsil gücünü artırmaktadır. Buna karşın güçlü form teknikleri, algoritmik sadelikleri ve doğrudan türevsel tanımlamalarıyla dikkat çekmekle birlikte, ağırsız yaklaşımların kötü koşullanmış sistem matrisleri nedeniyle istikrarsızlık üretmesi, uygulama açısından belirgin sınırlılıklar doğurmaktadır.

Fiziksel süreçlerin deterministik, stokastik veya yarı-deterministik doğalarının matematiksel temsilinde, kısmi diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışı kaçınılmazdır. Bu çerçevede değişkenlerin ayrılması, süperpozisyon ilkesi, integral dönüşümleri ve yansıma yöntemleri gibi analitik araçlar kullanılarak elde edilen kapalı form çözümler, yalnızca sınırlı sayıdaki idealize edilmiş problem sınıfı için geçerliliğini korumaktadır. Çoğu gerçek yaşam modelinde tam çözüm erişilebilirliği mümkün olmadığından, pertürbasyon yöntemleri (Van Dyke, 1975; Kevorkian ve Cole, 1981; Parlange, 1971), ardışık yaklaşım algoritmaları (Tsang, 1960) ve ortogonal fonksiyon tabanlarının kullanıldığı özel çözüm mekanizmaları (Assarı ve Dehghan, 2017) yaklaşık çözüm elde etme sürecinde vazgeçilmez hale gelmiştir. Logaritmik çekirdek temelli

sayısal yaklaşımların, ikinci tür iki boyutlu Fredholm integral denklemlerinin çözümüne uygulanması ise yerel ağsız yöntemlerin geçerlilik ve performans alanını ciddi şekilde genişletmiştir (Bayona ve ark., 2017).

Özellikle son yıllarda, eliptik tipte kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerine yönelik araştırmalar giderek daha sofistike hâle gelmiştir. Radyal tabanlı fonksiyonlar aracılığıyla oluşturulan sonlu fark şemaları (RBF-FD), hem geometrik uyumluluk hem de yüksek dereceli doğruluk kabiliyeti nedeniyle eliptik denklemlerin nümerik çözümünde öne çıkan yöntemlerden biridir. Khoromskij ve çalışma arkadaşları (2017), düzensiz veya çok bağlantılı bölgelerde poliharmonik eğrilerin çok değişkenli polinom temsiliyle hibrit yaklaşımının, doğruluk, algoritmik sadelik ve hesaplama verimliliği bakımından dikkate değer bir sinerji sunduğunu göstermiştir. Çok parametrelili eliptik denklemlerin rank-1 tensörlerin sonlu toplamları ile temsil edilmesine bağlı yakınsama hızı analizi ise Babuska ve diğerleri (2017) tarafından ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Ayrıca stokastik katsayılar ve homojen Dirichlet sınır koşulları içeren doğrusal eliptik problemlerin iki farklı nümerik teknikle yorumlanması Gorial (2011) tarafından matematiksel doğruluk ve kararlılık teorisi bağlamında değerlendirilmiştir.

Diferansiyel denklemlerin kavramsal sınıflandırmasında, bilinmeyen fonksiyonun türevlerine ilişkin bağımlılığın varlığı temel belirleyici ölçüttür. Tek bağımsız değişken içeren ifadeler adi diferansiyel denklem, iki veya daha fazla bağımsız değişken içerenler ise kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılmaktadır. Bu bağlamda diferansiyel denklemin genel çözümü, çözüm ailesinin tüm potansiyel elemanlarını içeren bir üst kümeyi temsil ederken, belirli başlangıç veya sınır koşullarını karşılayan özgül çözüm türleri özel çözüm nitelendirmesi altında sınıflandırılmaktadır.

Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin analizi, fonksiyonel analiz ve operatör teorisinin temel ilkeleri ışığında değerlendirildiğinde,

çözümün varlığı, tekliği ve kararlılığına ilişkin sonuçların elde edilmesinde soyut matematiksel yapıların önemi daha da belirgin hale gelmektedir. Eliptik operatörlerin incelenmesinde, özellikle Hilbert ve Sobolev uzaylarının tanımladığı fonksiyonel çerçeve, çözümün düzenlilik özelliklerinin belirlenmesi bakımından vazgeçilmezdir. Bu bağlamda, eliptik operatörlerin zayıf çözüm kavramı üzerinden ele alınması, klasik anlamda diferansiyellenebilirlik koşullarını sağlayamayan fonksiyon sınıflarının da çözüm uzayına dahil edilmesine imkân tanımaktadır.

Eliptik operatör  $\mathcal{L}$ 'nin  $H_0^1(\Omega)$  gibi Sobolev uzaylarında tanımlanan zayıf çözüm yaklaşımı, diferansiyel denklem problemine karşılık gelen varyasyonel formun, uygun iç çarpım yapıları altında tanımlanmasıyla oluşturulmaktadır. Bu çerçevede, eliptik tip KDD

$$\mathcal{L}u = f \in \Omega$$

$$u = 0 \text{ on } \Omega$$

koşulları altında, klasik türev kavramı yerine zayıf türevler kullanılarak ifade edilen problem, uygun test fonksiyonları  $v \in H_0^1(\Omega)$  için

$$a(u; v) = \langle f, v \rangle$$

biçimindeki soyut forma indirgenmektedir. Burada  $a(.,.)$ , eliptik operatöre karşılık gelen iki terimli bilinear fonksiyonel,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  ise dualite çarpımıdır. Eliptiklik koşulu bu bilinear formun coercive (zorlayıcı) ve sürekli olmasını gerektirmekte olup, söz konusu özellikler fonksiyon uzayında tanımlanan iç çarpım yapılarına bağlıdır. Bu nedenle eliptik operatör kuramı, varlık-teklik çözüm koşullarını garanti altına alan Lax–Milgram teoremi ile güçlü bir yapısal ilişki içerisindedir.

Lax–Milgram teoremi, soyut Hilbert uzayı bağlamında tanımlanan bilinear formun coercivity ve boundedness koşullarını sağlaması

halinde, zayıf çözümün varlığını ve tekliğini güvence altına alır. Böylece eliptik diferansiyel denklemler, klasik çözüm çerçevesinde analiz edilemeyen durumlarda dahi, varyasyonel yöntemler yardımıyla tanımlanabilir bir çözüm sınıfı ortaya koymaktadır. Daha açık bir anlatımla, eliptik operatörün sahip olduğu pozitif tanımlılık ve öz-adjointlik (self-adjointness) koşulları, çözümün yalnızca var olmasını değil aynı zamanda norm eşdeğerliği altında kararlı olmasını da temin etmektedir.

Operatör kuramı perspektifinden bakıldığında, eliptik diferansiyel operatörün spektral karakteristikleri, çözümün davranış biçimini, düzgünlük derecesini ve sınır koşullarına bağlı olarak ortaya çıkabilecek öz-değer yapısını belirleyici rol üstlenmektedir. Fredholm alternatifi, kompakt operatör yaklaşımı ve Riesz temsili teoremi bu bağlamda çözüm uzayının tamamlayıcılığını sağlayan soyut matematiksel bağlantıları oluşturmaktadır. Özellikle Fredholm operatör yapısı, çözümün varlığının özvektör uzayları üzerinden incelenmesine olanak sağlamakta ve aynı zamanda sınır değer problemlerinin parametrik hassasiyet analizinde kritik bir rol oynamaktadır.

Sobolev gömümleri ve düzenlilik teoremleri, eliptik tip denklemin çözümünün yalnızca varlığını değil, aynı zamanda  $H^2(\Omega)$  gibi daha yüksek mertebe Sobolev uzaylarına ait olabileceğini de göstermektedir. Böylece eliptik operatörün düzenlilik parametreleri, çözümün diferansiyellenebilirlik derecesini doğrudan belirlemekte; sınır koşullarının türüne bağlı olarak çözümün global veya lokal anlamda ne ölçüde düzgünleşeceğini ortaya koymaktadır.

Bu kuramsal altyapı, eliptik denklemlerin sayısal analizine geçişte de temel nitelik arz eder. Zayıf formun varlığı sayesinde elde edilen varyasyonel çerçeve, sonlu eleman yöntemleri, spectral teknikler, RBF tabanlı ayırıklaştırma stratejileri ve diferansiyel operatör tabanlı meshfree yaklaşımların uygulanabilirliğini garanti altına almaktadır. Nitekim nümerik kararlılık, yakınsama hızı, hata normları ve çözüm

doğruluk analizleri, eliptik operatörün fonksiyonel özellikleriyle doğrudan ilişkili olup, çözüm uzayının seçimi ile ayrıklaştırma yönteminin yapısal uyumluluğu bu bağlamda kritik belirleyicilerdir.

### **Temel Kavramlar**

**Tanım**  $f(t)$ ,  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

integrali ile tanımlanan  $F$  fonksiyonu olup;

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

ile gösterilir. İntegralin mevcut olduğu bütün  $s$  değerleri  $F$  fonksiyonunun tanım kümesini oluşturur” (Podlubny, 1999).

**Tanım (Türevin Laplace Dönüşümü):** “Bir fonksiyonun  $n$ . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü:

$f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  fonksiyonları  $[0, \infty)$  aralığında sürekli,  $f^n(t)$ ,  $[0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve bu fonksiyonların tümü  $\alpha$  üstel mertebeden olsunlar. ” Bu durumda  $s > \alpha$  için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^n(t)\} &= s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots \\ &\quad - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

olur. Özel olarak  $n = 2$  olması durumunda

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s f(0) - f'(0)$$

ve  $n = 3$  için ise

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 \mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 \mathcal{L}\{f(0)\} - s f'(0) - f''(0)$$

bağıntılarını kolayca elde edilebilir” (Podlubny, 1999).

**Tanım** “ $f(t)$ ,  $[0, \infty)$  aralığında sürekli ve  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  olsun.  $f(t)$  fonksiyonuna  $F(s)$  nin ters Laplace dönüşümü denir. Ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ile gösterilir olarak tanımlanır” (Podlubny, 1999).

**Tanım** “ $xy$  düzleminin pozitif çeyreğinde, iki değişkenli bir  $u(x, t)$  fonksiyonu tanımlansın.  $u(x, t)$  fonksiyonu için çift Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u(x, t)\} = \bar{u}(s, p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-st} u(x, t) dx dt$$

olarak tanımlanır (Dhunde ve Waghmare, 2016). Burada  $p$  ve  $s$  kompleks sayılardır. Bu tanım

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{U(x)g(t)\} = \bar{u}(p)\bar{g}(s) = \mathcal{L}_x \{(u(x))\} \mathcal{L}_t \{g(t)\}$$

formunda da yazılabilir”.

**Tanım** “Kompleks çift integral formülü ters çift Laplace dönüşümünü tanımlamak için

$$\mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \{\bar{u}(s, p)\} = u(x, t)$$

formülü kullanılır (Debnath,2016). Bu formül de

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{L}_t^{-1}\{u(s,p)\} &= u(x,t) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} dp \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{st} \bar{u}(s,p) ds \right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $c$  ve  $d$  bilinen reel sabitler ve  $\bar{u}(s,p)$ ,  $Re(p) \geq c$  ile  $Re(s) \geq d$  eşitsizlikleri ile gösterilen bölgede her bir  $p$  ve  $s$  için analitik fonksiyonlar olmalıdır.

(Modanlı ve Bajjah, 2021) de tanımlanan çift Laplace dönüşüm formülü herhangi tamsayı mertebeden kısmi türevlerin dönüşümü için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}\right\} &= p^n \bar{u}(s,p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} \mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^i}{\partial x^i}\right\} \\ \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right\} &= s^k \bar{u}(s,p) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{n-1-j} \mathcal{L}_x\left\{\frac{\partial^j}{\partial x^j}\right\} \\ \mathcal{L}_x\mathcal{L}_t\left\{\frac{\partial^{k+n} u(x,t)}{\partial x^n \partial t^k}\right\} &= \\ p^n s^k \left[ \bar{u}(s,p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} \mathcal{L}_x\left\{\frac{\partial^i u(0,t)}{\partial x^i}\right\} - \bar{u}(s,p) \right. \\ &\quad - \sum_{j=0}^{k-1} s^{n-1-j} \mathcal{L}_x\left\{\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial x^j}\right\} \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} p^{-1-i} s^{-1-j} \mathcal{L}_x\left\{\frac{\partial^{i+j} u(0,0)}{\partial x^{i+j}}\right\} \right]\end{aligned}$$

formülleri ile kullanılır”.

Bu çalışmada, aşağıdaki başlangıç-sınır değer koşullarına bağlı eliptik kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha u_{tt}(t, x) + \beta u_{tx}(t, x) + \lambda u_{xx}(t, x) + \nu u(t, x) = f(t, x), \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad \alpha, \beta, \lambda, \nu > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), \quad u_t(0, x) = g_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

inceleyeceğiz. Burada,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  ve  $f(t, x)$  bilinen fonksiyonlar  $u(t, x)$  çözümü bilinmeyen belirli bir fonksiyondur. (1) denkleminin eliptik bir kısmi diferansiyel denklem olması için

$$\beta^2 - 4\alpha\lambda < 0$$

koşulu sağlanmalıdır.

### Sonlu Fark Şeması Oluşturulması

(1) probleminin yaklaşık çözümünü hesaplamak için grid (ızgara) aralığı

$$[0, T]_\tau = \{ t_k = k\tau, \quad 0 \leq k \leq N, N\tau = T \},$$

$$[0, l]_h = \{ x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, Mh = L \},$$

$$W_{\tau, h} = [0, T]_\tau \times [0, l]_h = \{ (t_k, x_n), t_k \in [0, T]_\tau, x_n \in [0, l]_h \}$$

şeklinde dir. Bu aralıklar

$$(t_k, x_n), (t_{k+1}, x_n), (t_k, x_{n+1}), (t_{k+1}, x_{n+1}) \in W_{\tau, h}$$

dir.

$t = t_k, x = x_n$  alınır (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha u_{tt}(t_k, x_n) + \beta u_{tx}(t_k, x_n) + \lambda u_{xx}(t_k, x_n) + \nu u(t_k, x_n) \\ = f(t_k, x_n) \end{aligned}$$

bulunur. Taylor açılımı kullanılırsa,

$$u_{tt}(t_k, x_n) = \frac{u(t_{k+1}, x_n) - 2u(t_k, x_n) + u(t_{k-1}, x_n)}{\tau^2} + O(\tau^2), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_{tx}(t, x) \\ = \frac{u(t_k, x_n) - u(t_{k-1}, x_n) - u(t_k, x_{n-1}) + u(t_{k-1}, x_{n-1})}{\tau h} \\ + O(\tau^2 + h^2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_{xx}(t_k, x_n) = \frac{u(t_k, x_{n+1}) - 2u(t_k, x_n) + u(t_k, x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (4)$$

(2), (3) ve (4) formüllerinde küçük terimler ihmal edilirse,

$$u_{tt}(t_k, x_n) \cong \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2}, \quad (5)$$

$$u_{tx}(t, x) \cong \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k+1} + u_{n-1}^{k-1}}{\tau h}, \quad (6)$$

$$u_{xx}(t_k, x_n) \cong \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2}, \quad (7)$$

yazılabilir. (5), (6) ve (7) formülleri kullanılır, küçük terimler ihmal edilir (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \beta \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k+1} + u_{n-1}^{k-1}}{\tau h} \\ \lambda \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + v \frac{u_n^{k+1} + u_n^{k-1}}{2} = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2}, \\ 1 < k < N - 1, 1 < n < M - 1, \\ u_n^0 = g_1(x_n), \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = g_2(x_n), 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N \end{cases}$$

elde edilir. Bu fark şeması

$$\begin{aligned} & + \left( \frac{-\beta}{h^2} \right) u_{n-1}^{k+1} + \left( \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} \right) u_n^{k+1} + \left( \frac{\beta}{\tau h} \right) u_{n+1}^{k+1} + \left( \frac{\lambda}{h^2} \right) u_{n-1}^k \\ & + \left( \frac{-2}{\tau^2} - \frac{2\lambda}{h^2} \right) u_n^k + \left( \frac{\lambda}{h^2} \right) u_{n+1}^k + \left( \frac{\beta}{\tau h} \right) u_{n-1}^{k-1} \\ & + \left( \frac{\alpha}{\tau^2} + \frac{v}{2} \right) u_n^{k-1} + \left( -\frac{\beta}{\tau h} \right) u_{n+1}^{k-1} = \frac{f_n^{k+1} + f_n^{k-1}}{2} \end{aligned}$$

olarak da yazılabilir.

Çift Laplace Metodu ile Çözüm

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha u_{tt}(t, x) + \beta u_{tx}(t, x) + \lambda u_{xx}(t, x) + v u(t, x) = f(t, x), \\ 0 < x < l, 0 < t < T, \alpha, \beta, \lambda, v > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x), 0 \leq x \leq l, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

(9) probleminin çözümü için çift Laplace metodunu oluşturalım.

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{u(t, x)\} = U(s, p)$$

olsun. (9) denkleminin her tarafının  $\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t$  Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\alpha s^2 U(s, p) - \alpha s U(0, p) - \alpha U_t(0, p) = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{-\beta u_{tx}(t, x) - \lambda u_{xx}(t, x) - vu(t, x) + f(t, x)\} \quad (10)$$

formülü elde edilir. (10) formülü düzenlenip yeniden yazılırsa

$$U(s, p) = \frac{1}{s} U(0, p) + \frac{1}{s^2} U_t(0, p) + \frac{F(s, p)}{s^2} + \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \frac{1}{\alpha s^2} \{-\beta u_{tx}(t, x) - \lambda u_{xx}(t, x) - vu(t, x)\} \quad (11)$$

bulunur buradan da

$$\mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{f(t, x)\} = F(s, p)$$

dır. (11) denkleminin her tarafının  $\mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1}$  alınır, (9) problemindeki başlangıç değerleri de kullanılırsa

$$u(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \{U(s, p)\} = \alpha g_1(x) + \alpha t g_2(x) + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{F(s, p)}{s^2} \right\} + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \{-\beta u_{tx}(t, x) - \lambda u_{xx}(t, x) - vu(t, x)\} \right\} \quad (12)$$

yazılır. (12) denkleminin çözümü için

$$u(t, x) = \sum_{p=0}^a u_n(t, x) \quad (13)$$

sonsuz serisi kullanılırsa, (13) denklemini

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha s^2} \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left( -\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - v \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t, x) u_n(t, x) \right) \right\} + \alpha g_1 x + \alpha t g_2 x + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{F(s, p)}{s^2} \right\} \quad (14)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (9) denkleminin çözümü

$$u_0(t, x) = \alpha g_1 x + \alpha g_2(x) t + \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{F(s, p)}{s^2} \right\}$$

ve benzer şekilde

$$u_{n+1}(t, x) = \mathcal{L}_x^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha s^2} \left( \mathcal{L}_x \mathcal{L}_t \left( -\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) - v \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) \right) \right) \right\} \quad (15)$$

genel formülü bulunur.

## Kaynakça

Abdulazeez, S.T. & Modanlı, M. (2023). Analytic Solution Of Fractional Order Pseudo-Hyperbolic Telegraph Equation Using Modified Double Laplace Transform Method. *International Journal Of Mathematics And Computer In Engineering*, 1(1), 105-114.

Abdulazeez, S.T. & Modanlı, M. (202). Solutions Of Fractional Order PseudoHyperbolic Telegraph Partial Differential Equations Using Finite Difference Method. *Alexandria Engineering Journal*, 61(12), 12443-12451, 2022.

Ashyralyev, A. (2010). Nonlocal Boundary-Value Problems For Elliptic Equations: Well-Posedness In Bochner Spaces. In *Aip Conference Proceedings* , American Institute Of Physics. (Pp. 66-84)

Ashyralyev, A. (2003). On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 24(1-2), 1-15.

Ashyralyev, A. & Sımsek, S. N. (2017). An Operator Method For A Third Order Partial Differential Equation. *Numerical Functional Analysis And Optimization*, 38(10), 1341-1359.

Ashyralyev, A. & Ozesenli Tetikoglu, F. S. (2012). Fdm For Elliptic Equations With Bitsadze-Samarskii-Dirichlet Conditions. In *Abstract And Applied Analysis* (Vol. 2012), Hindawi.

Ashyralyev, A. & Öztürk, E. (2009). Numerical Solutions Of Bitsadze-Samarskii Problem For Elliptic Equations, In *Further Progress In Analysis* (Pp. 698-706).

Assari, P. & Dehghan M. (2017). The Numerical Solution of Two dimensional Logarithmic Integral Equations On Normal Domains Using Radial Basis Functions With Polynomial Precision. *Engineering with Computers*, 33(4):853–870.

Babuska, I., Tempone, R. & Zouraris, G. E. (2004). Galerkin Finite Element Approximations Of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations. *Siam Journal On Numerical Analysis*, 42(2), 800-825.

Bayona, V., Flyer, N., Fornberg, B., & Barnett, G. A. (2017). On The Role Of Polynomials In Rbf-Fd Approximations: Ii. Numerical Solution Of Elliptic Pdes. *Journal Of Computational Physics*, 332, 257-273.

Berikelashvili, G., Ionkin, N. I. & Morzova, V. A. (2001). On A Nonlocal Boundary Value Problem For Two-Dimensional Elliptic Equation. *Computational Methods In Applied Mathematics*, 3(1), 62-71.

Debnath, L. (2016). The Double Laplace Transforms And Their Properties With Applications To Functional, Integral And Partial Differential Equations. *International Journal Of Applied And Computational Mathematics*, 2, 223-241.

Dhunde, R. R. & Waghmare, G. L. (2016). Double Laplace Transform Method For Solving Space And Time Fractional Telegraph Equations. *International Journal Of Mathematics And Mathematical Sciences*, 2016

Khan, A., Khan, T. T. , Syam, M.I., & Khan, H. (2019). Analytical Solutions Of Time-Fractional Wave Equation By Double Laplace Transform Method. *The European Physical Journal Plus*, 134(4), 163.

Khoromskij, B. N. & Schwab, C. (2011). Tensor-Structured Galerkin Approximation Of Parametric And Stochastic Elliptic Pdes. *Siam Journal On Scientific Computing*, 33(1), 364-385.

Modanli, M. (2022). Comparison Of Caputo And Atangana–Baleanu Fractional Derivatives For The Pseudohyperbolic Telegraph Differential Equations. *Pramana*, 96(1), 7.

Modanli, M. & Bajjah B. (2023). Double Laplace Decomposition Method And Finite Difference Method Of Time Fractional Schrödinger Pseudoparabolic Partial Differential Equation With Caputo Derivative. *Journal Of Mathematics*, 2021(7113205), 1-10, 2021.

Podlubny, L. (1999). Fractional Differential Equations, Mathematics In Science And Engineering. *Academic Press*, San Diego, Calif., Usa, Vol. 198 , 1-81.

Podlubny, L. (1998). Fractional Differential Equations: An Introduction To Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, To Methods Of Their Solution And Some Of Their Applications. Elsevier. Problems For Elliptic Equations. *Numerical Functional Analysis And Optimization*, 24(1-2), 1-15.

Tsang, T. (1960). Transient State Heat Transfer And Diffusion Problems. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*. 52:707.

Van Dyke M. (1975). Perturbation Methods In Fluid Mechanics~ *Parabolic Press*, Paloalto.

Veeresha, P., Prakasha, D.G., Singh, J., Khan I., & Kumar, D. (2020). Analytical Approach For Fractional Extended Fisher–Kolmogorov Equation With MittagLeffler Kernel. *Advances In Difference Equations*, 2020, 1-17.

## BÖLÜM 7

# GUT HASTALIĞININ SINIFLANDIRILMASINDA LOJİSTİK REGRESYON VE KNN ALGORİTMALARININ KARŞILAŞTIRMALI ANALİZİ

**Bayram KÖSE<sup>1</sup>**

**Bahar DEMİRTÜRK<sup>2</sup>**

**Şükran KONCA<sup>3</sup>**

**Fatma Demet ARSLAN<sup>4</sup>**

### Giriş

Artritin ağrılı bir formu olan ve bireyin yaşam kalitesinde düşme, günlük hayatta iş gücü kaybı gibi sorunları beraberinde getiren gut hastalığı; kronik böbrek hastalığı, böbrek taşı, hipertansiyon, obezite, diyabet ve kardiyovasküler hastalık gibi, küresel sağlık sistemleri için önemli bir yük oluşturan kronik

---

<sup>1</sup> Doktor Öğretim Üyesi, İzmir Bakırçay Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, Orcid: 0000-0003-0256-5921

<sup>2</sup> Profesör, İzmir Bakırçay Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Temel Bilimler Bölümü, Orcid: 0000-0002-5911-5190

<sup>3</sup> Profesör, İzmir Bakırçay Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Temel Bilimler Bölümü, Orcid: 0000-0003-4019-958X

<sup>4</sup> Profesör, İzmir Bakırçay Üniversitesi, Tıp Fakültesi, Orcid: 0000-0003-0766-0303

hastalıklara eşlik eden ve her yıl artış gösteren bir hastalık olması nedeniyle, bir halk sağlığı sorunu haline gelen bir hastalıktır (Borghini & ark., 2020: 1-11; Zhang & ark., 2022 3525).

Bu nedenle erken teşhis ve etkin yönetim, hastalığın ilerlemesini yavaşlatmak ve komplikasyonları azaltmak için kritik öneme sahiptir. Başarılı erken teşhis metodolojileri ile bir yandan bireysel düzeyde sağlıklı fiziksel yapıları korunarak, diğer yandan da tedavisi oldukça pahalı olan hastalıkların oranı ve bireysel sağlık yapıları üzerindeki kalıcı etkilerinin minimize edilerek ülke sağlık sistemlerinin yüksek maliyetlerden korunmasına katkı sağlanmış olacaktır.

Cao ve Hu, Ulusal Sağlık ve Beslenme İnceleme Araştırması (NHANES) veri setini kullanarak potansiyel gut riski için bireyselleştirilmiş müdahaleler geliştirmek amacıyla diyet lifi ve trigliserit-glikoz indeksini birbirine bağlamak üzere çeşitli makine öğrenimi modelleri geliştirmişlerdir (Cao & Hu, 2024).

Brikman ve arkadaşları, İsrail'de ülke çapında yapılan retrospektif bir kohort çalışmasında, Ocak 2007 ile Aralık 2022 arasında en az iki serum ürat ölçümü 6,8 mg/dl'yi aşan 18 yaş ve üzeri yetişkinleri belirlemek için 473.124 kişiden oluşan Clalit Sağlık Sigortası veri tabanı kullanarak, gut hastalığı geliştirme riski taşıyan hiperürisemik katılımcıları belirlemek için makine öğrenimi tabanlı bir tahmin modeli geliştirmişlerdir (Brikman & ark., 2024).

Hou, Xiao ve Zhu, çeşitli lojistik regresyon algoritmaları ve rastgele ormanın tahmin performanslarını 123.968 örnek içeren bir tıbbi muayene veri setini analiz ederek gut hastalığının tespitini yapmışlardır (Hou, Xiao & Zhu, 2020: 468-503).

Ichikawa ve arkadaşları, gradient-boosting karar ağacı, rastgele orman ve lojistik regresyon yaklaşımlarını eğitim veri kümesini kullanarak eğitmiş ve ardından test veri kümesinde hiperürisemiyi tahmin etmek için kullanmışlardır (Ichikawa & ark., 2016: 20-24).

Kumar ve arkadaşları, tükürüğün hpcl yöntemiyle analiz edilmesi ürik asit konsantrasyonunun belirlenmesine yardımcı olduğu için hpcl kromatografisinin çıktısı grafik olduğundan, grafik görüntüsünü makine öğrenimi algoritması kullanarak mevcut veri kümeleriyle karşılaştırmışlar ve kişinin gut hastası olup olmadığını tayin etmişlerdir (Kumar & ark., 2022: 11-15).

Bu çalışmada, gut hastalığının sınıflandırılması için lojistik regresyon (LR) ve  $k$  en yakın komşu (KNN) algoritmalarının performansı karşılaştırılmıştır. Her iki algoritmanın performans metrikleri detaylı olarak analiz edilmiş ve klinik uygulamadaki etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Bulgular, her iki algoritmanın da klinik karar desteği için kullanılabilme potansiyeli olduğunu göstermektedir. Bu araştırma, yapay zeka teknolojilerinin sağlık alanındaki uygulamalarını genişletme potansiyeline dikkat çekmek ve gut gibi yaygın sağlık sorunlarının yönetiminde yapay zekanın rolünü vurgulamak amacıyla sunulmuştur.

Bir bilimsel çalışmanın sonuçlarının güvenilirliğini belirleyen iki temel unsur vardır: verilerin güvenilirliği ve geneli temsil etme potansiyeli ile verilerin geçerliliği. Bu iki unsur temel alınarak, İzmir Bakırçay Üniversitesi Çiğli Eğitim ve Araştırma Hastanesi Bilgi Yönetim Sisteminde kayıtlı 612 hastanın verileri kullanılmıştır. Veri kümeleri, cinsiyet, yaş ve ürik asit seviyesi gibi tıbbi öngörücü değişkenlerden oluşmaktadır. Araştırmada, veri seti üzerinde gerçekleştirilen analizlerde her iki modelde belirtilen özellikler kullanılarak eğitilmiştir. Modellerin performansı doğruluk, duyarlılık, özgüllük ve F1 skoru gibi metriklerle değerlendirilmiştir.

## **Materyal ve Metod**

Bu kısımda, kullanılan veri seti, istatistikler ve makine öğrenmesi yöntemlerine yer verilecektir.

## Veriler ve Yöntemler

Bu çalışmada, İzmir Bakırçay Üniversitesi Çiğli Eğitim ve Araştırma Hastanesi Bilgi Yönetim Sisteminde kayıtlı hastaların yaş, cinsiyet ve ürik asit seviyelerini içeren veri seti kullanılmıştır. 612 verinin %70'i eğitim seti için, %30'u test seti için kullanılmıştır. Makine öğrenmesi algoritmalarından ilk olarak  $k$  en yakın komşu algoritması (KNN) sonrasında da lojistik regresyon (LR) yöntemi kullanılmıştır.

## Veri Tanımı ve İstatistikler

Bu kısımda, kullanılan veri setine ait tanımlayıcı istatistikler Tablo 1 'de verilmiştir. Aşağıda Tablo 1'de yer alan tanımlayıcı istatistikler, gut hastalığının cinsiyete bağlı dağılımında belirgin farklılıklar olduğunu göstermektedir. Analize dahil edilen 612 birey için kadınların yaş ortalaması 36,40, ortalama ürik asit düzeyi 3,99 ve gut hastalığı ortalaması 0,044 olarak hesaplanırken; erkeklerde bu değerler sırasıyla 43,88, 5,93 ve 0,1593'tür. Bu bulgular, gut hastalığının erkeklerde kadınlara kıyasla yaklaşık dört kat daha yüksek oranda görüldüğünü ortaya koymaktadır. Ayrıca, gut değişkenine ait standart sapma değerlerinin erkeklerde (0,3668) kadınlara (0,2055) göre daha yüksek olması, erkeklerde hastalığın daha geniş bir dağılım sergilediğine işaret etmektedir. Elde edilen sonuçlar, literatürde erkek cinsiyetin gut hastalığı için önemli bir risk faktörü olduğunu belirten çalışmalarla uyumludur.

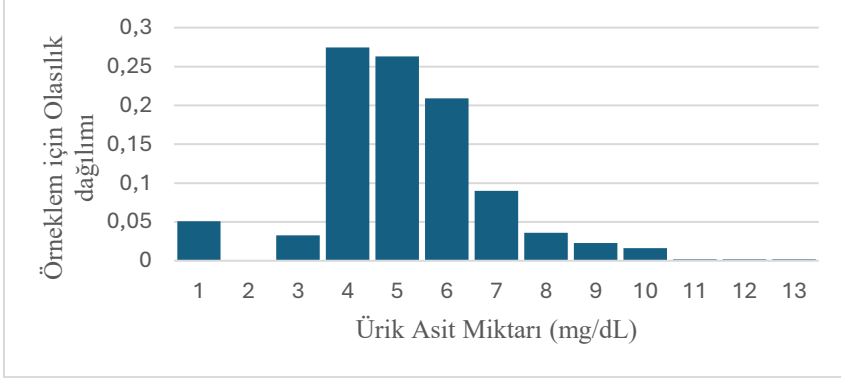
Ayrıca Tablo 1'den çarpıklık ve basıklık değerlerinin de gut değişkeninin dağılım özellikleri açısından önemli olduğu görülmektedir. Kadınlarda gut için çarpıklık 4.4617, basıklık ise 17.9998 olarak hesaplanmıştır. Bu oldukça yüksek değerler, dağılımın aşırı derecede sağa çarpık olduğunu ve yoğun uç değerler barındırdığını ortaya koymaktadır.

*Tablo 1 Tanımlayıcı istatistikler tablosu*

|                | Kadın   |              |         |                | Erkek   |              |        |
|----------------|---------|--------------|---------|----------------|---------|--------------|--------|
| Sayı           | 386     | Hasta Sayısı | 17      | Sayı           | 226     | Hasta Sayısı | 36     |
| Öznitelik      |         |              |         | Öznitelik      |         |              |        |
| Ölçüt          | Yaş     | Ürik asit    | Gut     | Ölçüt          | Yaş     | Ürik asit    | Gut    |
| Ortalama       | 36,4006 | 3,9932       | 0,0440  | Ortalama       | 43,8750 | 5,9255       | 0,1593 |
| Standart Hata  | 0,7831  | 0,0735       | 0,0105  | Standart Hata  | 1,0105  | 0,1049       | 0,0244 |
| Ortanca        | 31,8110 | 4,0000       | 0,0000  | Ortanca        | 45,4154 | 5,7000       | 0,0000 |
| Kip (Mod)      | 60,9102 | 3,6000       | 0,0000  | Kip(Mod)       | 56,9759 | 5,5000       | 0,0000 |
| Standart Sapma | 15,3862 | 1,4445       | 0,2055  | Standart Sapma | 15,1905 | 1,5771       | 0,3668 |
| Varyans        | 236,736 | 2,0866       | 0,0422  | Varyans        | 230,750 | 2,4871       | 0,1345 |
| Basıklık       | -1,3903 | 3,1612       | 17,9998 | Basıklık       | -1,2415 | 1,7356       | 1,5273 |
| Çarpıklık      | 0,3952  | -0,1053      | 4,4617  | Çarpıklık      | -0,3172 | 0,5890       | 1,8745 |
| Aralık         | 46,9213 | 10,9444      | 1,0000  | Aralık         | 46,7979 | 11,5970      | 1,0000 |
| En Büyük       | 64,9869 | 11,1000      | 1,0000  | En Büyük       | 64,8965 | 12,2000      | 1,0000 |
| En Küçük       | 18,0656 | 0,1556       | 0,0000  | En Küçük       | 18,0985 | 0,6030       | 0,0000 |

Bu durum, kadınlarda gut hastalığına sahip birey sayısı oldukça düşük olmasına rağmen, nadiren de olsa yüksek değerlere sahip vakaların görüldüğünü göstermektedir. Erkeklerde ise çarpıklık değeri 1.8745, basıklık değeri 1.5273 olup, bu değerler kadınlara göre daha düşük seviyelerdedir. Bu, erkeklerde dağılımın

görece daha dengeli olduğunu, ancak yine de sağa çarpıklık eğiliminin sürdüğünü göstermektedir. Standart sapma ve çarpıklık değerleri, erkeklerde dağılımın daha geniş bir varyasyona sahip olduğunu işaret etmektedir. Bu nedenle, erkeklerde gut hastalığının hem daha yaygın hem de daha çeşitli klinik düzeylerde gözlemlendiği söylenebilir.

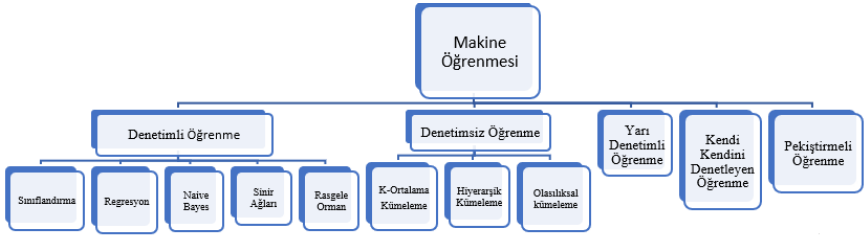


*Şekil 1 Ürik asit histogram grafiği*

Şekil 1’de ürik asit histogram grafiği görülmektedir. Bu grafikten ürik asit seviyesinin genellikle ortalama etrafında yoğunlaştığı ve sağa çarpık bir dağılım gösterdiği tespit edilmiştir.

## **Makine Öğrenmesi Yöntemleri**

Enerji ve kamu hizmetlerinden, seyahat ve otelciliğe, üretimden lojistiğe kadar tüm sektörlerde kullanılan makine öğrenmesi algoritmaları; denetimli öğrenme, denetimsiz öğrenme, yarı denetimli öğrenme, kendi kendini denetleyen öğrenme ve pekiştirmeli öğrenme olmak üzere beş kategoriye ayrılır (Chrystal, 2025). Şekil 2’ de makine öğrenmesi algoritmalarının kategorileri sınıflandırılmıştır.



Şekil 2 Makine öğrenmesi algoritmalarının kategorileri (Chrystal, 2025).

Denetimli makine öğrenmesi algoritmalarından, sınıflandırma algoritmaları, girdi verilerinin parçalarını etiketleyerek kategorik çıktı değişkenlerini (örneğin, "hasta" veya "hasta değil") tahmin eder. Sınıflandırma algoritmaları arasında lojistik regresyon (LR),  $k$  en yakın komşular (KNN) ve destek vektör makineleri (SVM) bulunur (Chrystal, 2025).

Bu bölümde denetimli makine öğrenme yöntemlerinden, sınıflandırma algoritması olan lojistik regresyon (LR) ve  $k$  en yakın komşuluk (KNN) algoritmaları ele alınacaktır.

Sınıflandırma yöntemleri genel olarak parametrik ve parametrik olmayan problemler olarak ikiye ayrılabilir. Aslında, parametrik yöntemler normal dağılımlı popülasyon varsayımlarına dayanır ve problemi çözmek için dağılımların parametrelerini tahmin eder. Ancak Berry ve Linoff 'a göre parametrik olmayan yöntemler, ilgili belirli dağılımlar hakkında hiçbir varsayımda bulunmaz ve bu nedenle dağılımdan bağımsızdır. KNN sınıflandırıcı, parametrik olmayan istatistiksel yaklaşımın bir örneği olarak hizmet eder (Berry & Linoff, 1997).

**Lojistik Regresyon (LR):** Sınıflandırma modelleri, belirli bir girdi verisinin önceden tanımlanmış bir sınıfa ait olup olmadığını belirleyen algoritmalarıdır. İkili sınıflandırmada, çıktı iki sınıftan birine ait iken çok değişkenli sınıflandırmada birden fazla sınıftan birine aittir. Lojistik regresyon analizi, ele alınan veri setindeki gözlemlerin gruplara atanmasında kullanılan yöntemlerden biridir. Sınıf sayısı bilinen lojistik regresyon analizinde var olan veriler

kullanılarak sınıflandırma modeli elde edilir ve elde edilen bu model sayesinde veriye eklenecek yeni gözlemlerin sınıflara atanması sağlanabilmektedir (Hosmer & ark., 2010; Kuyucu, 2012). Lineer regresyon, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek için bağımsız değişkenlerin doğrusal bir kombinasyonunu kullanarak bağımlı değişkeni tahmin etmeye çalışan bir tekniktir (Zhao, Yuhuan & Schaffner, 2001: 2129-2135).

Lojistik regresyon, iki veri faktörü arasındaki ilişkileri belirlemek için kullanılan yapay zekâ ve makina öğrenimi alanında önemli bir veri analizi ve istatistiksel yöntemdir. Bağımlı değişkenin iki kategoriden birine ait olduğu durumlarda, bağımsız değişkenlerin etkisini logit fonksiyonu ile modellemek için kullanılır. Bu yöntem, doğrusal regresyonun varsayımlarını karşılamayan verilerle çalışmak için geliştirilmiştir. Bir öğrencinin sınav sonucuna göre geçip geçmediğini tahmin etmek için ya da bir web sitesinde harcanan zaman, alışveriş sepetindeki ürün sayısı ve ziyaret sıklığı gibi bağımsız değişkenlere bakarak, yeni bir ziyaretçinin alışveriş yapma olasılığı tahmin edilebilir. Burada bağımlı değişken, ziyaretçinin alışveriş yapıp yapmaması (0=Hayır, 1=Evet) olacaktır. Ayrıca, bir hastanın belirli bir hastalığı olup olmadığını tahmin etmek için de kullanılabilir. Burada incelenecek hastalık tipine bağlı olarak değişkenlik göstermekle beraber, örneğin, diyabet hastalığını tahmin etmek için yaş, vücut kitle indeksi, kandaki glikoz ve insülin değerleri gibi bağımsız değişkenler dikkate alınabilir.

Aynı zamanda lojistik regresyon, bağımlı değişkenin yani sınıf değişkeninin iki veya daha fazla kategorili olduğu durumlarda bağımsız değişkenlerle olan neden-sonuç ilişkisini belirlemede kullanılan bir yöntemdir. Lojistik regresyon analizinde bağımsız değişkenlerle bağımlı değişken arasındaki ilişkinin önemli olup olmadığı incelenerek, ilgilenilen değişkenin modelde var olup olmadığı durumlar için elde edilen tahmin değerleri ile gözlenen değerlerin karşılaştırılması yapılmaktadır. İlgilenilen değişkenin modelde yer aldığı durumda daha iyi, daha doğru tahminler elde edilmesi; o değişkenin model için önemli bir değişken olduğu şeklinde yorumlanır. Araştırmacıların, çalıştıkları konuda birden çok etkenin olması halinde, etkenlerin bağımlı değişken üzerine etkisini

tek tek öğrenmenin yanı sıra, bunların birlikte bağımlı değişken üzerindeki etkisini de bilmek ve incelemek istemeleri durumunda tercih ettikleri yöntemlerden biridir. Lojistik regresyon modellerinin özellikle tıp alanındaki uygulamalarında bağımsız değişkenler; risk değişkenleri ya da bir hastalığın ortaya çıkıp çıkmamasını belirleyen değişkenlerdir. Bu değişkenlerin tespiti, erken tanı ve hastalığa neden olan etkenlerle mücadelede önemli bir yer tutmaktadır (Özlüer, Yangın & Sarıdaş, 2021: 112-120).

Lojistik regresyon, iki sınıflı sınıflandırma problemlerinde olasılıkları modelleyerek kategorik sınıfları (örneğin, 0 veya 1) tahmin etmek için kullanılır. Doğrusal regresyon ise sürekli sayılarla (örneğin fiyat tahmini) çalışır. Temel fark, lojistik regresyonun tahminlerini 0 ile 1 arasında sınırlayan sigmoid eğrisine dayanırken, doğrusal regresyonun bağımlı değişkenler arasındaki ilişkiyi doğrusal bir denklemle modellemesidir. Her iki yöntem de bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemeye yönelik olup, lojistik regresyon olasılıkları, doğrusal regresyon ise sürekli değerleri tahmin eder (Zhao & ark., 2001: 2129-2135).

Lojistik regresyonun kökenleri 19. yüzyıla, 1845'te Pierre François Verhulst'un popülasyon büyümesini modellemesine kadar uzanır. Modern lojistik regresyon ise 20. yüzyılın ortalarında gelişmeye başlamıştır. 1944'te Joseph Berkson, tıbbi araştırmalarda lojistik fonksiyonun kullanımını önermiş, 1970'lerde ise lojistik regresyon, sosyal bilimler ve biyomedikal alanda yaygınlaşmıştır (Şenel & Alatlı, 2014: 35-52). 1962 yılında Cornfield, diskriminant fonksiyon yaklaşımını kullanarak lojistik regresyonun popülerleşmesini sağlamıştır. Sonraki yıllarda, 1980'de Breslow ve Day, 1985'te Abbott, 1995'te Gardside ve Glueck, sağlık, yaşam analizi ve kalp hastalığı gibi alanlarda uygulamalar yapmışlardır. Ayrıca, Vupa ve Çelikoğlu 2006 yılında akciğer kanseri için, Ünsal ve Güler 2005'te Türk bankacılığı için lojistik regresyon analizi kullanmışlardır. Hava durumu tahminleri üzerine yapılan çalışmalarda ise 2004 yılında Lewis deniz sisi, Stern ve Parkyn 1999'da Melbourne havaalanı, Fabbian ve arkadaşları 2007'de Canberra havaalanı, Uğur 1984'te Yeşilköy Hava Meydanı ve Tuncer

1991'de Esenboğa Hava Limanı için sis tahminleri yapmıştır (Aktaş & Erkuş, 2009: 47-59).

Lojistik regresyon, makine öğreniminde yaygın olarak kullanılan basit bir tekniktir ve derin makine öğrenmesi bilgisi gerektirmez. Diğer yöntemlere göre avantajları yanında sınıflandırma yöntemlerine baz model olması yer alır. Lojistik regresyon, sınıflandırma sorunlarında, veri ön işleme, makine arızalarını tahmin etme, sağlık hizmetlerinde hastalık olasılıklarını değerlendirme, finansal risk analizi ve pazarlamada reklam tahminleri gibi pek çok alanda kullanılır.

Regresyon analizinin temel işleyiş adımlarına bakıldığında; önce bir iş sorusu belirlenir. Bağımlı ve bağımsız değişkenler belirlenerek analiz için gerekli olan veriler toplanır, veri temizliği yapılır. Veri temizlemenin temel adımları, hatalı ve eksik veri alanlarını değiştirmeyi ve kaldırmayı, yinelenen bilgileri ve alakasız verileri tespit edip çıkarmayı ve biçimlendirmeyi, eksik değerleri ve yazım hatalarını düzeltmeyi içerir. Verilerin eğitim ve test setlerine ayrılması sağlanır, model eğitilir. Model, verileri matematiksel denklemlerle bağlar ve bilinmeyen değerler için tahminler yapar. Eğitilen model kullanılarak yeni veriler için olasılık tahminleri yapılır. Modelin performansı doğruluk, ROC eğrisi, F1 skoru gibi metriklerle değerlendirilir ve sonuçlar yorumlanır. Modelin iyileştirilmesi için gerekirse model yeniden eğitilebilir.

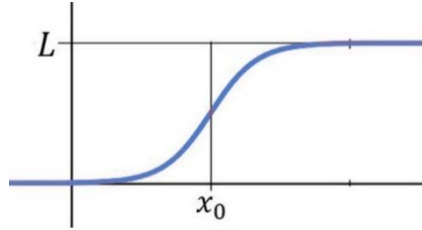
Lojistik regresyon modelinin matematiksel formülasyonunun yapılması kısmında genellikle aşağıda verilen logit fonksiyonu Denklem (1) kullanılır.

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = z = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n \quad (1)$$

$$y = \frac{e^z}{1+e^z} = \frac{1}{1+e^{-z}} \quad (2)$$

Model eğitiminde, geçmiş veriler kullanılarak modelin parametreleri ( $\beta$ ) optimize edilir.  $\beta$  sembolü, regresyon katsayısını temsil eder. Bu genellikle maksimum olasılık tahmini y, Denklem (2)

ile yapılır (Kuyucu, 2012; Zhao, Yuhuan & Schaffner, 2001: 2129-2135; Aktaş & Erkuş, 2009: 47-59). Denklem (2) ile verilen lojistik fonksiyon grafiği Şekil 3 'te verilmiştir.



Şekil 3 Lojistik regresyon fonksiyonu

**K En Yakın Komşu Algoritması (KNN):** KNN algoritması, özellikle sınıflandırma ve regresyon problemlerinde yaygın olarak kullanılan bir denetimli makine öğrenme algoritması olup temelleri ilk olarak 1951 yılında Fix ve Hodges tarafından tanımlanmıştır (Fix & Hodges, 1951: 1-21; Syriopoulos, Kalampalikis & Kotsiantis, 2023). Cover ve Hart ise 1967 yılında bu yaklaşımı genişletmiştir (Cover & Hart, 1967: 21-27).

KNN, küçük veri kümeleri için basit ve doğru bir algoritmadır. Örüntü tanıma, veri inceleme, istatistiksel tahmin, özellik seçimi, kategorik problemler, tavsiye sistemleri, izinsiz giriş tespiti ve finansal tahminler gibi çeşitli alanlarda kullanılır. Uygulaması kolay ve basit olan KNN, büyük eğitim verilerinden olumsuz etkilenmez ve gürültülü verilere karşı dayanıklıdır. Ancak, k parametresinin belirlenmesi gerekliliği bir dezavantaj olarak kabul edilir.

KNN algoritması, eğitiminin olmaması, gerçekleştirilmesinin kolay, analitik olarak izlenebilir, yerel bilgilere uyarlanabilir, paralel gerçekleştirmeye uygun, gürültülü eğitim verilerine karşı dirençli olması gibi avantajları ile sınıflandırma uygulamalarında özellikle tercih edilmektedir. Bu avantajlara rağmen, yüksek miktarda bellek alanına gereksinim duyması, veri seti ve öznitelik boyutu arttıkça işlem yükünün ve maliyetin önemli

ölçüde yükselmesi, performansın  $k$  komşu sayısı, uzaklık ölçütü ve öznitelik sayısı gibi parametre ve özelliklere bağlı olarak etkilenmesi gibi birtakım dezavantajları da beraberinde getirmektedir (Bhatia & Vandana, 2010: 302-305; Liu & Zhang, 2012; 1067-1074).

KNN algoritması, büyük eğitim setlerinin varlığında, oldukça etkin sonuçlar verebilmektedir. KNN algoritması, ilgisiz özniteliklerin varlığında da sınıflandırma modeli oluşturabilmektedir. Böyle durumlarda eğitim için gereken süre oldukça artmaktadır (Aha, Kibler & Goldstone, 1991: 37-66). KNN algoritması basit yapısına karşın, yüksek bir hesaplama maliyetine sahiptir. Sınıf etiketi belirlenmek istenen örneğin, veri setinde yer alan örnekler ile arasındaki uzaklığın belirlenmesi, özellikle büyük eğitim veri setleri için oldukça maliyetli olabilmektedir. Bu maliyeti ortadan kaldırmak için KNN algoritması temel bileşenler analizi gibi boyut azaltma yöntemleri ile ya da arama ağaçları gibi daha güçlü veri yapıları ile kullanılabilmektedir (Shmueli, Patel & Bruce, 2010). Bunun yanı sıra, KNN algoritması, çok boyutlu veri setlerinde etkin değildir, yüksek bellek gereksinimlerine sahiptir, komşu sayısı, uzaklık ölçütü gibi parametrelere duyarlıdır (Duda, Hart & Stork, 2000). KNN arama problemi, referans noktalarının  $k$  en yakın komşularını bulmayı içerir. Genellikle Öklid, Manhattan ve Minkowski uzaklıkları kullanılır, hesaplaması Denklem (3), (4), (5) ile yapılmaktadır.

$$\text{Öklid Uzaklığı} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)} \quad i \neq j: 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$\text{Manhatatan Uzaklığı} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \quad i \neq j: 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

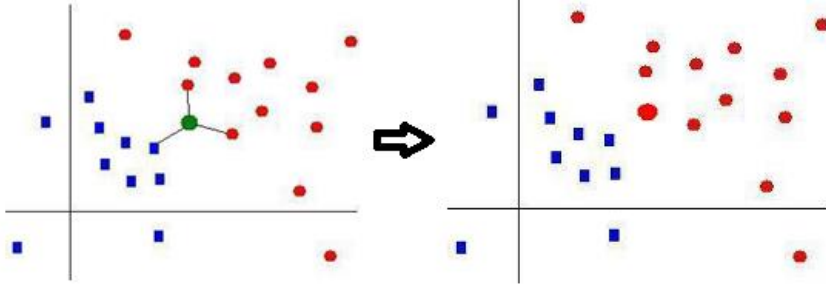
$$\text{Minkowski Uzaklığı} = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^q)^{1/q} \quad i \neq j: 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Ancak Chebyshev normu, Dilca uzaklığı veya Mahalanobis uzaklığı gibi diğer uzaklık ölçüleri de kullanılabilir. KNN algoritmasının sözde kodu Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2 KNN algoritması sözde kodu

**Adım 1.** Veri kümesi yüklenir.  
**Adım 2.** Veri kümesi eğitim ve test setlerine bölünür.  
**Adım 3:**  $k$  değeri, yani en yakın kaç komşuya bakılacağı belirlenir.  
**Adım 4:** Test setindeki her örnek işlenirken;  
Mesafeleri hesaplanır ve sıralanır.  
En yakın  $k$  komşu seçilir.  
Çoğunluk oyu ile sınıf belirlenir.  
**Adım 5:** Test verisi üzerinde algoritmanın doğruluğu ölçülür.

Sınıflandırmanın nasıl yapıldığı  $k=3$  için Şekil 4’de gösterilmiştir.



Şekil 4 KNN ile  $k=3$  için yeni bir veri noktasının sınıflandırılması

## Performans Ölçütleri, Bulgular ve Tartışma

Bu kısımda her iki algoritma ile kurulan modelin doğruluğunu, hassasiyetini, hızını ve verimliliğini anlamaya yardımcı olacak performans ölçütlerine yer verilecektir. Bu ölçütler sayesinde hangi algoritmanın daha iyi sonuç verdiğini veya modelin iyileştirilmesi gereken yönleri belirlenebilir. Bir sonraki bölüme geçmeden, çalışmada ele alınan performans ölçütlerinde sıklıkla kullanacak olan terimler bu kısımda hatırlatılacaktır.

Gerçek değeri pozitif olup pozitif olarak tahmin edilen örnekler doğru pozitif ( $dp$ ) olarak adlandırılır. Gerçek değeri pozitif olup negatif olarak tahmin edilen örnekler ise yanlış negatif ( $yn$ )

olarak adlandırılır. Pozitif olarak tahmin edilip, gerçekte negatif olan örnekler yanlış pozitif ( $yp$ ) olarak adlandırılır. Negatif olarak tahmin edilip, gerçekte de negatif olan örnekler ise doğru negatif ( $dn$ ) olarak adlandırılır.

**Doğruluk skoru (Accuracy):** Modelin doğru sınıflandırdığı örneklerin, toplam tahmin sayısına oranı olarak hesaplanır. Bu metrik, doğru pozitifler ile doğru negatiflerin toplamını alır ve bunu modelin yaptığı tüm tahminlerin toplamına bölerek elde edilir.

$$Accuracy = \frac{dp + dn}{(dp + dn + yp + yn)} \quad (6)$$

**Doğru Pozitif Oranı (True Positive Rate, TPR):** Modelin, pozitif sınıfı doğru şekilde tahmin etme oranıdır ve şu formülle hesaplanır:

$$TPR = \frac{dp}{(dp + yn)} \quad (7)$$

**Yanlış Pozitif Oranı (False Positive Rate, FPR):** Yanlış pozitif oranı, modelin negatif sınıfa ait örnekleri yanlışlıkla pozitif olarak tahmin etme oranını ifade eder. Bu oran, bir modelin yanlış pozitif tahminlerinin tüm gerçek negatif örneklerine göre oranını gösterir.

$$FPR = \frac{yp}{(yp + dn)} \quad (8)$$

Performans analizi yapılırken doğru pozitif oranı ve yanlış pozitif oranlarının ağırlıklı ortalama sonuçları dikkate alınmıştır (Aydemir, 2018).

**Kesinlik (Precision):** Modelin pozitif olarak tahmin ettiği örneklerin gerçekte pozitif olma oranını ölçen parametredir. Formül aşağıda belirtilmiştir (Aydemir, 2018).

$$p = \frac{dp}{(dp + yp)} \quad (9)$$

**Hassasiyet (Recall):** Sınıflandırma modelinin performansını değerlendirmek için kullanılan hassasiyet, pozitif sınıfa ait tüm örneklerde ne kadarını doğru tahmin edebildiğini ölçen orandır. Bu formül

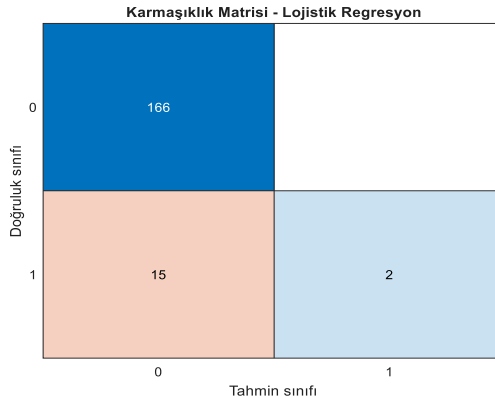
$$r = \frac{dp}{(dp + yn)} \quad (10)$$

biçimindedir (Aydemir, 2018).

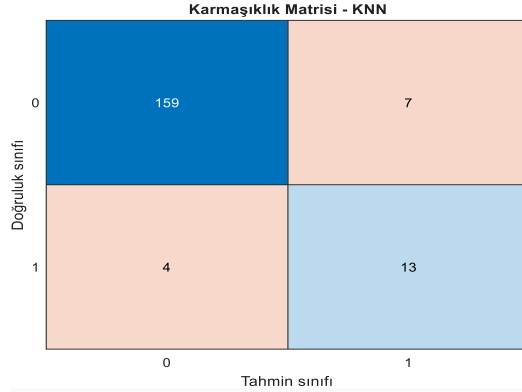
**F1 Ölçüsü:** Kesinlik ve hassasiyet, bir modelin performansını değerlendirmek için yaygın olarak kullanılır. Ancak, bu ölçütler tek başına yeterli değildir ve genellikle birlikte değerlendirilerek, *F*-ölçüsü devreye girer. *F*-ölçüsü, kesinlik ve hassasiyetin harmonik ortalamasını temsil eder ve bu sayede her iki ölçütü birleştirerek daha kapsamlı bir performans değerlendirmesi sağlar. *F1* ölçüsü ise kesinlik ve hassasiyetin eşit önemde olduğu durumlarda kullanılır ve aşağıdaki formülle hesaplanır (Işık & Ulusoy, 2021).

$$F1 \text{ ölçüsü} = 2 \frac{\text{Kesinlik} \times \text{Hassasiyet}}{\text{Kesinlik} + \text{Hassasiyet}} = 2 \frac{pr}{p+r} \quad (11)$$

LR ve KNN modellerine ait karmaşıklık matrisleri sırasıyla Şekil 5 ve Şekil 6’da verilmiştir.



Şekil 5 LR modeli için karmaşıklık matrisi



*Şekil 6 KNN modeli için karmaşıklık matrisi*

Karmaşıklık matrisi yardımıyla, ele alınan LR sınıflandırma modelinin performansı detaylı bir şekilde analiz edilebilir. Bu tablo, modelin tahmin ettiği sınıflar ile gerçek sınıflar arasındaki ilişkileri özetler. Yukarıdaki karmaşıklık matrisi kullanılarak, doğruluk, kesinlik, hassasiyet ve F1 skoru gibi önemli performans ölçütleri Tablo 3'te verilmiştir.

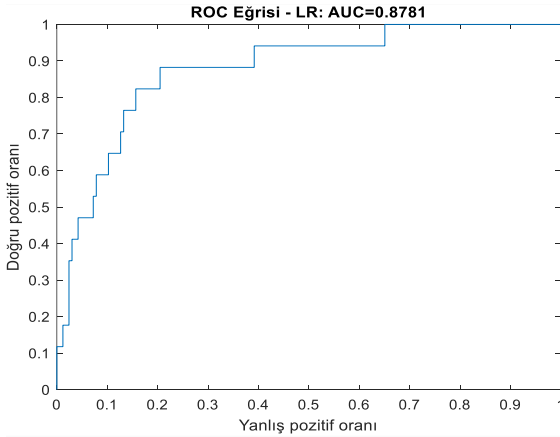
*Tablo 3 LR ve KNN modelleri için performans değerleri*

| Model | Doğruluk | Kesinlik | Duyarlılık | F1 Skoru |
|-------|----------|----------|------------|----------|
| LR    | 0.92     | 1        | 0.12       | 0.21     |
| KNN   | 0.94     | 0.65     | 0.76       | 0.70     |

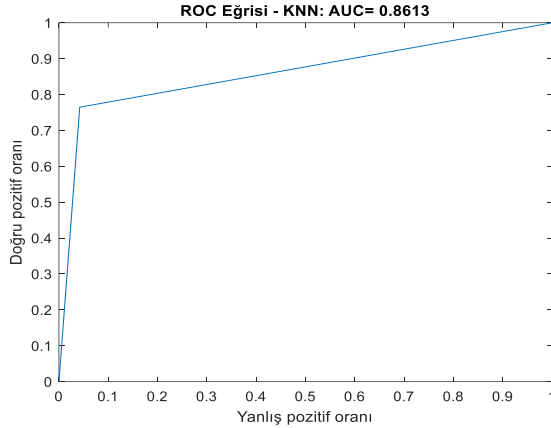
Her iki model de %92-%94 arasında doğruluk oranına sahip olup, bu da modellerin genel olarak doğru tahminlerde bulunduğunu gösteriyor. Ancak, yalnızca doğruluk oranına bakmak yanıltıcı olabilir, çünkü doğruluk tek başına dengesiz veri setlerinde yeterli bir performans ölçütü olmayabilir.

LR ve KNN 'nin kesinlik değerleri sırasıyla 1 ve 0.65 tir. Kesinlik, modelin pozitif olarak sınıflandırdığı her örneğin ne kadarının gerçekten pozitif olduğunu gösterir. Bu değerlerin düşük

olması, modelin çoğunlukla yanlış pozitif sonuçlar ürettiğini gösterir. LR 'nin duyarlılık değeri 0.12, KNN 'nin ise 0.76 dır. Duyarlılık, modelin gerçek pozitifleri doğru bir şekilde tahmin etme oranıdır. LR modelinin duyarlılığı özellikle daha düşük olup, bu da modelin çoğunlukla pozitif hastalık vakalarını tespit etmede zayıf olduğunu gösteriyor. LR'nin F1 skoru 0.21, KNN'ninki ise 0.70 tir. Bu değerler de LR modelinin pozitif sınıfları doğru şekilde sınıflandırma konusunda zayıf olduğunu ortaya koyuyor. F1 skoru, özellikle sınıf dengesizliği olan veri setlerinde daha düşük çıktığı zaman modelin performansının iyileştirilmesi için veri setinin homojen seçilmesi gerektiğini işaret eder. Her iki modelin performansını değerlendirmek için ROC (Receiver Operating Characteristic) eğrileri Şekil 7 ve Şekil 8 'da gösterilmiştir.



Şekil 7 LR modeli ROC eğrisi



*Şekil 8 KNN modeli ROC eğrisi*

ROC eğrisi, modelin *TPR* ve *FPR* oranlarını, değişen eşik değerleri ile sırasıyla *y*-ekseni ve *x*-ekseni boyunca gösterir. Bu eğri sayesinde, modelin çeşitli eşik değerlerinde ne kadar iyi performans gösterdiği gözlemlenebilir.

Ayrıca her iki model için, ROC eğrisinin altında kalan alanı ifade eden ve modellerin sınıflandırma performansını özetleyen bir ölçüt olan AUC değerleri (Area Under the Curve) hesaplandığında; LR, 0.8781'lik yüksek AUC değeriyle sınıfları oldukça iyi ayırarak iyi bir performans sergilerken, KNN modeli de LR 'ye yakın 0.8613'lük AUC değeriyle LR 'ye yakın bir performans gösteriyor. KNN modelindeki yüksek doğruluk (0.94), çoğunlukla negatif sınıfın (sağlıklı bireyler) doğru sınıflandırılmasından kaynaklanabilir, bu da modelin pozitif sınıfı (gut hastalığı) doğru tespit etmede LR modeline kıyasla görece zayıf olduğunu gösteriyor. Sonuç olarak, Lojistik Regresyon, gut hastalığının sınıflandırılmasında daha güvenilir bir model olarak öne çıkmaktadır.

Bunlara ek olarak, Tablo 4'te cinsiyet, yaş ve ürik asit değişkenlerine bağlı gut hastalığı LR modelinin parametrelerine ait istatistikleri verilmiştir.

Tablo 4 Cinsiyet, yaş ve ürik asit miktarına bağlı gut hastalığı LR verileri

| Değişken            | Tahmin  | Standart Hata | $t$ İstatistiği | $p$ Değeri |
|---------------------|---------|---------------|-----------------|------------|
| Yineleme Terimi     | -7.7798 | 0.9742        | -7.9862         | 1.3922e-15 |
| Cinsiyet ( $x_1$ )  | 0.4620  | 0.4348        | 1.0625          | 0.2880     |
| Yaş ( $x_2$ )       | 0.0560  | 0.0161        | 3.4784          | 0.0005     |
| Ürik Asit ( $x_3$ ) | 0.4641  | 0.1204        | 3.8536          | 0.0001     |

Lojistik regresyon modeli sonuçlarına göre, cinsiyet, yaş ve ürik asit değişkenleri gut hastalığının olasılığı üzerinde farklı düzeylerde etkiler göstermektedir. Modelin yineleme terimi  $-7.7798$  oldukça anlamlı olup  $p$  değeri ( $p < 0.001$ ) olduğundan gut hastalığı olasılığının düşük olduğunu göstermektedir.

$x_1$  değişkeninin parametre tahmini 0.4620 olmakla birlikte,  $p$  değeri 0.2880 istatistiksel olarak anlamlı değildir. Bu sonuç, bu model kapsamında cinsiyetin gut hastalığı üzerinde birincil olarak belirgin ve bağımsız bir etkisinin bulunmadığını göstermektedir.

$x_2$  değişkeninin parametre tahmini 0.0560 olup  $t=3.4784$  ve  $p=0.0005$  değerleri, yaşın gut hastalığı riskini istatistiksel olarak anlamlı bir biçimde artırdığını ortaya koymaktadır. Bu bulgu, ileri yaşın gut hastalığı için önemli bir risk faktörü olduğunu doğrulamaktadır.

$x_3$  değişkeninin parametre tahmini 0.4641 olup  $t=3.8536$  ve  $p=0.0001$  değerleri, ürik asit düzeyinin gut hastalığı olasılığı üzerinde güçlü ve anlamlı bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir.

Bu analiz, ürik asit düzeyi ve yaşın modeldeki en önemli değişkenler olduğunu ve gelecekteki tahminler için bu değişkenlerin dikkate alınmasının gerekli olduğunu göstermektedir.

## Sonuçlar ve Öneriler

Ele alınan veri setinde cinsiyet değişkeninde kadın erkek sayısı arasında dengesizlik görülmektedir. Dünya genelinde gut hastalığına yakalanma cinsiyet oranı, (kadın/erkek) 1/3 sabit kalmıştır, ancak küresel gut insidansı zaman içinde her iki cinsiyette de artmaktadır (He & ark., 2023). Bu da veri setinin % 63 'ünün kadınlardan oluştuğu göz önüne alındığında hasta sayısının az olma nedeni olarak açıklanabilir.

Sonuçlar bağlamında bir değerlendirme yapılırsa, her iki modelin de güçlü yönleri bulunmaktadır. LR modeli yanlış pozitif oranını minimize ederek güvenilirlik sağlarken, KNN modeli daha yüksek duyarlılık ve F1 skorları ile klinik açıdan daha etkin bir performans sunmaktadır. Bu bulgular, gut hastalığının sınıflandırılmasında KNN 'nin pratik uygulamalarda daha avantajlı olabileceğini, ancak LR 'nin de özellikle yanlış pozitiflerin kritik önem taşıdığı durumlarda değerli bir alternatif olarak öne çıktığını göstermektedir. Model iyileştirmeleri ve daha iyi sonuçlar için örneklem dengesizliğini gidermek veya farklı metrikler kullanmak (örneğin, sınıf ağırlıklarıyla yeniden eğitim) gerekebilir.

Tanımlayıcı istatistikler incelendiğinde, gut hastalığının kadınlarda düşük bir oranda, erkeklerde ise daha yüksek bir oranda görüldüğü saptanmıştır. Ayrıca erkek grubunda yaş ortalamasının kadınlara kıyasla daha yüksek olduğu, bunun yanında ürik asit düzeylerinin de erkeklerde belirgin şekilde daha yüksek seyrettiği görülmüştür. Bu literatürde gut hastalığının özellikle orta yaş ve üzerindeki erkeklerde yaygınlığına dair çalışmalarla örtüşmektedir.

Lojistik regresyon analizine göre, cinsiyet değişkeninin gut hastalığı ile ilişkisi istatistiksel açıdan anlamlı bulunmamıştır. Buna karşın yaş ve ürik asit düzeyleri gut hastalığının önemli belirleyicileri olarak öne çıkmıştır. Özellikle ürik asit düzeyi, istatistiksel olarak son derece anlamlı bulunmuş ve gut hastalığının en güçlü biyokimyasal belirleyicisi olduğunu göstermiştir. Yaş değişkeni de benzer şekilde anlamlı düzeyde bir katkı sağlamış ve hastalığın ilerleyen yaşlarda daha sık görülme eğilimini

desteklemiştir. Bu sonuçlar, gut hastalığının tespitinde temel değişkenin ürik asit düzeyi olduğunu, yaş faktörünün ise ek bir risk artırıcı unsur olarak rol oynadığını ortaya koymaktadır.

Elde edilen bulgular, literatürdeki genel kabul ile uyumludur: gut hastalığının en güçlü belirleyicisi hiperürisemi olup, yaş ile hastalık riski artmaktadır. Cinsiyet ise özellikle erkeklerde daha yüksek bir görülme sıklığına işaret etse de, model bazında bağımsız bir belirleyici olarak anlamlı bulunmamıştır. Bu sonuç, cinsiyetin ürik asit düzeyi üzerinden dolaylı bir etkide bulunduğunu düşündürmektedir.

Sonuç olarak, çalışma kapsamında yapılan analizler, gut hastalığının tanı ve risk değerlendirmesinde ürik asit düzeyinin merkezi rolünü doğrulamaktadır. Ayrıca yaş faktörünün dikkate alınmasının, özellikle ileri yaş gruplarında tarama ve erken tanı açısından kritik öneme sahip olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda geliştirilecek klinik ve epidemiyolojik modellerde ürik asit düzeyi ve yaş değişkenlerinin birincil öncelikli parametreler olarak değerlendirilmesi önerilmektedir.

## Kaynakça

Aktaş, C., & Erkuş, O. (2009). Lojistik regresyon analizi ile Eskişehir'in sis kestiriminin incelenmesi. İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 8(16), 47–59.

Aha, D. W., Kibler, D., & Goldstone, R. L. (1991). Instance-based learning algorithms. Machine Learning, 6, 37–66.

Aydemir, E. (2018). Weka ile yapay zekâ (1. baskı). Seçkin Yayınevi.

Başer Özlüer, B., Yangın, M., & Sarıdaş, E. S. (2021). Makine öğrenmesi teknikleriyle diyabet hastalığının sınıflandırılması. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 25(1), 112–120.

Bhatia, N., & Vandana. (2010). Survey of nearest neighbor techniques. International Journal of Computer Science and Information Security, 8(2), 302–305.

Borghi, C., Agabiti-Rosei, E., Johnson, R. J., Kielstein, J. T., Lurbe, E., & Mancina, G. (2020). Hyperuricaemia and gout in cardiovascular, metabolic and kidney disease. European Journal of Internal Medicine, 80, 1–11.

Brikman, S., Serfaty, L., Abuhasira, R., Schlesinger, N., Bieber, A., & Rappoport, N. (2024). A machine learning-based prediction model for gout in hyperuricemics: A nationwide cohort study. Rheumatology, keae273.

Cao, S., & Hu, Y. (2024). Interpretable machine learning framework to predict gout associated with dietary fiber and triglyceride-glucose index. Nutrition & Metabolism, 21(25). <https://doi.org/10.1186/s12986-024-00802-2>

Chrystal, R. C. (2025). Machine learning types. IBM. <https://www.ibm.com/think/topics/machine-learning-types>

Cover, T., & Hart, P. (1967). Nearest neighbor pattern classification. IEEE Transactions on Information Theory, 13, 21–27.

Duda, R. O., Hart, P. E., & Stork, D. G. (2000). Pattern classification.

John Wiley & Sons.

Fix, E., & Hodges, J. L. (1951). Discriminatory analysis, nonparametric discrimination: Consistency properties (Technical Report No. 4). USAF School of Aviation Medicine.

He, Q., Mok, T., Sin, T., Yin, J., Li, S., Yin, Y., Ming, W., & Feng, B. (2023). Global, regional, and national prevalence of gout from 1990 to 2019: Age-period-cohort analysis with future burden prediction. *JMIR Public Health and Surveillance*, 9, e45943.

Hosmer, D. W., Lemeshow, S., & Sturdivant, R. X. (2013). *Applied logistic regression* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Hou, R., Xiao, Y., & Zhu, Y. (2020). Prediction of hyperuricemia risk based on medical examination report analysis. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 29, 468–503.

Ichikawa, D., Saito, T., Ujita, W., & Oyama, H. (2016). How can machine-learning methods assist in virtual screening for hyperuricemia? *Journal of Biomedical Informatics*, 64, 20–24.

Işık, K., & Ulusoy, S. K. (2021). Determining the factors that affect the production time in metal industry utilizing data mining methods. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 36(4), 1949–1962.

Kumar, M. S., Hudson, B., Priya, V., Kumar, V. A., Tharun, C., & Saran, R. S. (2022). Determination of gout disease using machine learning. In *Proceedings of the 1st International Conference on Computational Science and Technology* (pp. 11–15). IEEE.

Kuyucu, Y. E. (2012). *Lojistik regresyon analizi, yapay sinir ağları ve CART yöntemlerinin karşılaştırılması ve tıp alanında bir uygulama (Yüksek lisans tezi)*. Gaziosmanpaşa Üniversitesi.

Liu, H., & Zhang, S. (2012). Noisy data elimination using mutual k-nearest neighbor for classification mining. *Journal of Systems and Software*, 85(5), 1067–1074.

Shmueli, G., Patel, N. R., & Bruce, P. C. (2010). *Data mining for business intelligence*. John Wiley & Sons.

Syriopoulos, P. K., Kalampalikis, N. G., & Kotsiantis, S. B. (2023). KNN classification: A review. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*.

Zhang, Y., Chen, S., Yuan, M., Xu, Y., & Xu, H. (2022). Gout and diet: A comprehensive review of mechanisms and management. *Nutrients*, 14(17), 3525. <https://doi.org/10.3390/nu14173525>

Zhao, L., Yuhuan, C., & Schaffner, D. W. (2001). Comparison of logistic regression and linear regression in modeling percentage data. *Applied and Environmental Microbiology*, 67(5), 2129–2135.

