

Diferansiyel Geometrik Yapılarda Eğrilik, Solitonlar ve Yapısal Özellikler

$$R_{ij} = R_{gij}$$

$$\nabla \Phi = k\Phi$$

EDİTÖR

PROF. DR. ŞÜKRAN KONCA



BİDGE Yayınları

**Diferansiyel Geometrik Yapılarda Eğrilik, Solitonlar ve
Yapısal Özellikler**

Editör: PROF. DR. ŞÜKRAN KONCA

ISBN: 978-625-372-928-8

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 2025-12-25

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /
Ankara



ÖNSÖZ

Matematik, insanlık tarihinin en köklü ve evrensel bilimlerinden biri olarak, hem kuramsal derinliği hem de geniş uygulama alanlarıyla bilimsel ilerlemenin temel dinamiklerinden biri olmayı sürdürmektedir. Diferansiyel geometri, hem modern matematiğin kurucu alanlarından biri hem de fizik, mühendislik ve veri bilimi gibi pek çok disiplin için temel bir araçtır. Bu alan, geometrik yapıların eğrilik, simetri ve akış özelliklerini incelemek için bir temel sağlar.

Bu kitap, diferansiyel geometrinin temel kavramlarını farklı bakış açılarından ele alan seçilmiş çalışmaları bir araya getirmektedir. Alfa-kosimplektik manifoldlar, Ricci solitonlar ve yarı-simetrik koşullar üzerine yapılan incelemeler, modern geometrinin güncel araştırma alanlarına ışık tutarken; üç boyutlu Öklid uzayındaki eğri çiftlerine yönelik bölüm ise disiplinin klasik yönünü hatırlatmaktadır. Kitap, konuyla ilgilenen araştırmacılar ve lisansüstü öğrenciler için, farklı geometrik yapıların temel özelliklerine dair genel ve erişilebilir bir kaynak niteliği taşımaktadır.

Bu kitabın, yeni araştırmalara ilham vermesini, mevcut çalışmalara katkıda bulunmasını ve okuyuculara faydalı olmasını dilerim. Editör olarak, bu eserin hazırlanmasında bilimsel katkı sunan tüm yazarlarımıza ve yayın sürecinde emeği geçen tüm paydaşlara teşekkür ederim.

Prof. Dr. Şükran KONCA
İzmir Bakırçay Üniversitesi

İÇİNDEKİLER

ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFODLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLARLA İLGİLİ BAZI HATIRLATIMLAR	1
---	---

SERMİN ÖZTÜRK

BAZI FARKLI YARI-SİMETRİK KOŞULLARI SAĞLAYAN ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFODLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR	20
---	----

SERMİN ÖZTÜRK

RİCCİ SOLİTONLU ALFA-KOSİMPLEKTİK YAPILAR ÜZERİNDE FARKLI YARI-SİMETRİK ÖZELLİKLER	40
---	----

HAKAN ÖZTÜRK

BAZI YARI-SİMETRİK ŞARTLARI SAĞLAYAN RİCCİ SOLİTONLU ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR	61
---	----

HAKAN ÖZTÜRK

E3 ÖKLİD UZAYINDA İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ	80
--	----

MUSTAFA BİLİCİ

BÖLÜM 1

ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLARLA İLGİLİ BAZI HATIRLATMALAR

Sermin ÖZTÜRK¹

Giriş

Bir uzayın (manifoldun) eğriliğinin ayrıntılı anlatımı, Riemann eğrilik tensörü R ile ifade edilir. Ancak bu anlatım son derece karmaşık olup hem uzayın şekil bozukluğunu temsil eden Weyl konformal parçacını hem de madde-enerji dağılımının yol açtığı eğriliği temsil eden Ricci kısmını içerir. Matematikçiler ve fizikçiler, bu durumun belirli bölümlerini izole etmek istemektedir. Riemann eğrilik tensör alanını R çeşitli izdüşümler ve dönüşümler aracılığıyla farklı geometrik yapıların ve fiziksel olayların incelenmesinde bazı araçlar sunar. Bu araçların öne çıkan iki temsilcisi olan konformal (Weyl) eğrilik tensörü ile konharmonik eğrilik tensörü, eğriliğin değişik yönlerini izole eder. Bu da uzayın yapısal özelliklerini farklı metotlarla ortaya koyar. Weyl eğrilik tensör alanı, bir metrik ölçeğin keyfi olarak değiştirilmesine karşı değişmezliğini koruyarak konformal yapının özünü ve açısal bozulmaları inceler. Konharmonik eğrilik tensör alanı ise, harmonik haritaların geneller. Her iki tensör alanı da uzayın düzlük ölçüsünü belirlemeye çalışır. Konharmonik haritalar bu harmonik denge durumunun bir tür esnek veya ölçekli genişlemesidir. Bir anlamda, harmonikliği daha geniş bir simetri

¹Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak., Matematik Böl., ssahin@aku.edu.tr, ORCID: 0000-0002-8535-0792

grubu altında korumaya çalışan haritalardır. İşte konharmonik eğrilik tensörü, tam da bu tür haritaların var olabilmesi için uzayın (manifoldun) sahip olması gereken veya engel teşkil eden eğrilik yapısını ölçen bir araçtır.

Yarı-simetriyi simetrik uzayların doğal deformasyonları olarak ele alabiliriz. Bir simetrik uzayın homojen yapısını bozduğunuzda, eğrilik artık sabit kalmayacaktır. Fakat değişim belirli bir düzene uyacaktır. Yani, yarı-simetri, bu düzeni matematiksel olarak temsil eder. Bir Riemann manifoldunun yarı-simetrik olması için, manifold üzerinde tanımlı herhangi X ve Y vektör alanlarına karşılık, $R(X, Y) \cdot R = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu denklemde R eğrilik tensörü, bir cebirsel operatör gibi davranarak uzayın geometrik yapısını kodlar. Bu tür uzaylara yarı-simetrik denilmesinin nedeni, herhangi bir q noktasında manifoldun eğrilik tensörünün, klasik simetrik uzaylardaki eğrilik tensörüyle örtüşebilmesidir. Ancak bu uyum, noktadan noktaya değişiklik gösterebilen bir özelliktir. Lokal simetrik uzaylar ise daha katı bir simetri koşulu getirir, yani; $\nabla R = 0$ ile tanımlıdır. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonunu temsil eder. Bu koşul, eğrilik tensörünün manifold boyunca sabit kaldığını ifade eder. Yarı-simetrik uzayların sistematik sınıflandırması, Szabó'nun 1982 yılındaki çalışmasında ortaya çıkmıştır (Szabó, 1982). Fakat bu tanımlama Nomizu'nun 1968 yılında kullandığı $R \cdot R = 0$ tensörel koşulundan kaynaklanmaktadır (Nomizu, 1968).

Kenmotsu manifoldları değme geometrisi ile hemen hemen Kaehler geometrisinin kesişiminde doğan özel yapılardır. Bu manifoldlar, adını Katsuei Kenmotsu'dan alır ve hemen hemen değme yapıların sınıflandırılmasında tamamen farklı bir karakter ortaya koyar (Kenmotsu, 1972). Sasakian manifoldlar sabit eğrilik ortaya koyarken, Kenmotsu manifoldlar sabit olmayan, ancak kontrollü bir şekilde değişen bir eğrilik yapısı sunarlar.

Esasen bir Kenmotsu manifoldu, bir hemen hemen değme metrik yapı ile donatılmıştır, ancak burada kritik fark, temel 2-formun özdeş olarak sıfır olmaması ve bunun yerine dış türevinin temel 2-formun kendisiyle orantılı olmasıdır. Bu özellik, bu tür manifoldlara benzersiz bir davranış kazandırır. Lokal olarak bir katlı çarpım şeklinde ifade edilebilirler. Özellikle konformal olarak düz olanlar, bir reel doğrunun sabit eğrilikli bir manifold ile katlı çarpımına eşittir. Yani, Kenmotsu yapılar değme dağılımına teğet yönde standart bir Sasakian benzeri yapıyı korurken, diğer yandan reeb vektör alanı boyunca bir üstel genişleme veya büzülme meydana getirirler. Hemen hemen Kenmotsu yapıların α parametresiyle genelleştirerek hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılmasını Janssens ve Vanhecke sağlamıştır (Janssens & Vanhecke, 1981). Bunu takiben, Kim ve Pak bu gelişmeyi bir adım öteye taşıyarak, hemen hemen alfa-Kenmotsu yapılar ile hemen hemen kosimplektik yapıları birleştirerek yeni bir sınıf tanımlamışlardır (Kim & Pak, 2005). Hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılan bu yapılar, hemen hemen değme metrik manifoldlar ailesinin önemli bir alt sınıfını oluşturmaktadır.

Ricci akışı, bir manifoldun metrik yapısının zaman içinde Ricci eğriliğine göre nasıl evrimleştiğini tanımlayan, doğal bir parabolik kısmi diferensiyel denklemdir. Fiziksel bir benzetmeyle, bu akış başlangıçtaki karmaşık ve düzensiz bir şekli (manifoldu) ısıyı eşit dağıtan bir süreç gibi onun içsel eğriliğini yavaşça yumuşatarak ve düzelterek daha homojen bir forma doğru değiştirir. İlk bakışta teknik görünse de bu akışın en büyük katkısı Poincaré hipotezinin ispatında kilit rol oynamasıdır. Ricci akışının özel ve dengeli çözümleri olan Ricci solitonları ise bu evrim sürecinde ölçek değişimine karşın şekli korunan adeta hareketsiz gibi görünen hareketlerdir. Sabit, genişleyen ve büzülen (daralan) olarak sınıflandırılan bu yapılar Ricci akışının sabit noktaları gibi

davranırlar ve akışın dinamiğini anlamak için temel yapı taşlarıdır. Böylece Ricci solitonları geometrinin dilinde evrimin durağan anlarını simgeleyen özel ve zarif nesneler olarak karşımıza çıkar. Ricci akışı, Richard Hamilton'ın 1982 yılındaki öncü çalışmasıyla matematik dünyasına kazandırılmıştır (Hamilton, 1982). Hamilton'un 1988 yılında yüzeyler üzerindeki Ricci akışını detaylıca incelemesi, sürecin temel özelliklerini ortaya çıkarmıştır (Hamilton, 1988). Ancak bu çalışmalar, akış sırasında ortaya çıkan ve eğriliğin sonsuza ıraksadığı metrik tekilliklerin varlığını da göstermiştir. Grigori Perelman'ın 2002 yılındaki çalışması, 3-boyutlu manifoldlarda Ricci akışının tekilliklerini sistematik olarak sınıflandırarak bu sorunu aşmayı başarmıştır (Perelman, 2002).

Bu çalışmada, Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı yarı-simetrik şartlar incelenmiştir. Özellikle, konformal ve konharmonik eğrilik tensör alanları yardımıyla, $R \cdot C = 0$ ve $C \cdot H = 0$ koşulları araştırılmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Burada farklı yarı-simetrik yapıda olan $C \cdot H = 0$ koşulu daha çok önem arz etmektedir.

Temel Kavramlar

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir manifold M olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için; ϕ , $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η , 1-form olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (1)$$

$$\eta(\xi) = 1, \phi(\xi) = 0, \eta \circ \phi = 0 \quad (2)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (4)$$

deklemleriyle verilen g metrik tensörü ile donatılmış (M, ϕ, ξ, η, g) yapısına bir hemen hemen değme metrik manifold denir. Burada

$g(\xi, \xi) = 1$ dir. Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapının temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (5)$$

şeklinde tanımlanır (Blair, 1976). (1,3)-tipli Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (6)$$

şeklinde tanımlıdır. Bundan başka, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde (0,2)-tipli Ricci tensörü ve Ricci operatörü, sırasıyla,

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^{2n+1} g(R(E_j, X)Y, E_j) \quad (7)$$

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (8)$$

ile verilir. Burada $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal bir tabandır (Yano & Kon, 1984). $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünersek, her vektör alanı X için, $(X, f \frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (9)$$

ile verilir. Eğer J integrallenebilirse o zaman, hemen hemen değme metrik (M, ϕ, ξ, η) -yapısı normaldir. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad (10)$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifoldu

$$d\eta = 0, d\Phi = 0 \quad (11)$$

şartlarını sağlıyorsa, M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir. M nin bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Olszak, 1981). Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (12)$$

denklemleri sağlanıyorsa, M ye bir hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold denir (Janssens & Vanhecke, 1981). Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1972). (M, ϕ, ξ, η, g) normal ise o zaman alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, (11) denklemleri sağlanıyorsa, M ye hemen hemen alfa-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik manifold, $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Eğer hemen hemen değme metrik yapı (M, ϕ, ξ, η, g) Kaehler yapıya sahipse o zaman α reel sayısı için M ye alfa-kosimplektik manifold denir. Yani, $\alpha = 0$ için (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ için alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Kim & Pak, 2005).

Önerme 1. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. M nin bir alfa-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \quad (13)$$

dir (Öztürk, 2021).

Önerme 2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha\eta(X)\xi \quad (14)$$

$$R(X, Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (15)$$

$$R(X, \xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \quad (16)$$

$$R(X, \xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \quad (17)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)] \quad (18)$$

$$S(X, \xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X) \quad (19)$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \quad (20)$$

denklemleri sağlanır. Burada α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Tanım 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n-1}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\ - g(X, Z)QY + g(Y, Z)QX] + \frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \end{aligned} \quad (21)$$

ve

$$\begin{aligned} H(Y, Z)W = R(Y, Z)W \\ - \frac{1}{2n-1}[S(Z, W)Y - S(Y, W)Z + g(Z, W)QY - g(Y, W)QZ] \end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ -tipli C ve H tensör alanlarına sırasıyla, konformal ve konharmonik eğrilik tensör alanları denir (Yano ve Kon, 1984).

Ricci Solitonlarla İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde bulgular bölümünde kullanılacak temel kavramlar ve temel eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 2. (M, g_0) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(t)) + 2S(g(t)) = 0, \quad g(0) = g_0 \quad (23)$$

kısmi türevli diferensiyel denklemine g metrik tensörünü eviren Ricci akışı denir (Hamilton, 1982). Burada t zaman parametresidir.

Tanım 3. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfî vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (24)$$

denklemini sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ değerinin $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (25)$$

dır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 5. (M, g, V, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı Killing vektör alanı ($L_V g = 0$) ise o zaman (M, g, V, λ) ye basit Ricci soliton adı verilir (Chen 2015).

Tanım 6. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa, (M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 3. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (26)$$

denklemini sağlar. Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 4. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \quad (27)$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \quad (28)$$

$$Q\xi = -\lambda\xi \quad (29)$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \quad (30)$$

$$r = \alpha - (2n + 1)(\alpha + \lambda). \quad (31)$$

Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Ana Sonuçlar

Bu bölümde, konformal yarı-simetrik şartı olan $R \cdot C = 0$ ve farklı yarı simetrik koşulu olan $C \cdot H = 0$ koşulları incelenmiştir. Bu koşullar altında Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir. İncelemeye başlamadan önce yarı-simetrik manifold tanımını verelim:

Tanım 7. M bir (yarı) Riemann manifoldu olsun. T_1 ve T_2 (0,4)-tipli tensör alanları olmak üzere, eğer M üzerinde keyfi vektör alanları U ve V için,

$$T_1(U, V) \cdot T_2 = 0 \quad (32)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye T_2 yarı-simetrik tipli manifold denir. Burada $T_1(U, V), T_2$ üzerindeki tensör cebirinin türevi olarak etki eder. Bu tanım genel olarak,

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad (33)$$

şeklinde yazılır. Özel olarak, $T_1 = T_2 = R$ olarak alınırsa, manifold yarı-simetrik olarak adlandırılır (Szabó 1982).

Lemma 1. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Bu durumda, konformal ve konharmonik eğrilik tensör alanları için,

$$\begin{aligned} \eta(C(U, V)W) = & \left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{\alpha^2}{2n-1} \right] [g(V, W)\eta(U)g(U, W)\eta(V)] \\ & - \frac{1}{2n-1} [S(V, W)\eta(U) - S(U, W)\eta(V)] \end{aligned} \quad (34)$$

ve

$$\begin{aligned} \eta(H(U, V)W) = & \frac{\alpha^2}{2n-1} [g(V, W)\eta(U) - g(U, W)\eta(V)] \\ & - \frac{1}{2n-1} [S(V, W)\eta(U) - S(U, W)\eta(V)] \end{aligned} \quad (35)$$

denklemleri sağlanır.

İspat. (21) ve (22) nolu eşitlikler birlikte kullanılırsa (34) ve (35) nolu eşitliklerin ispatları aşıkardır.

Önerme 5. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde $R \cdot C = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman keyfî vektör alanları için, (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu

$$S(Y, Z) = [\alpha^2 + \frac{r}{2n}]g(Y, Z) \quad (36)$$

ve

$$r = -2n(2n + 1)\alpha^2 \quad (37)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. M üzerinde alfa-kosimplektik manifoldunun $R \cdot C = 0$ tensörel çarpımını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(R(U, V) \cdot C)(W, Y)Z = 0 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & R(\xi, V)C(W, Y)Z - C(R(\xi, V)W, Y)Z \\ & - C(W, R(\xi, V)Y)Z - C(W, Y)R(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \eta(R(\xi, V)C(W, Y)Z) - \eta(C(R(\xi, V)W, Y)Z) \\ & - \eta(C(W, R(\xi, V)Y)Z) - \eta(C(W, Y)R(\xi, V)Z) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (36) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(E_j, Y)R(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(E_j, R(\xi, E_j)Y)Z) \\ & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(R(\xi, E_j)E_j, Y)Z) + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(\xi, E_j)C(E_j, Y)Z) \end{aligned} \quad (41)$$

elde edilir. (41) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (38)-(40) nolu eşitlikler kullanılarak hesap yapılırsa,

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(E_j, Y)R(\xi, E_j)Z) \\ & = 2n\alpha^2 \left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{n\alpha^2}{n-2} \right] \eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(E_j, R(\xi, E_j)Y)Z) \\ & = -\alpha^2 \left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{\alpha^2}{2n-1} \right] (g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned}$$

$$+\frac{\alpha^2}{2n-1}[S(Y,Z) + 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(Z)] \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(R(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ & = -2n\alpha^2 \left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{\alpha^2}{2n-1} \right] (-g(Y,Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \\ & \quad - \frac{2n\alpha^2}{2n-1} [S(Y,Z) + 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(Z)] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(\xi, E_j)C(E_j, Y)Z) \\ & = \alpha^2 \left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{\alpha^2}{2n-1} \right] (g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \\ & \quad + \frac{2\alpha^2 r}{2n-1} g(Y,Z) - \frac{\alpha^2}{2n-1} [S(Y,Z) + 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(Z)] \end{aligned} \quad (45)$$

bulunur. Son olarak, (42)-(45) nolu eşitlikler birlikte göz önüne alınırsa (41) nolu eşitlik

$$S(Y,Z) = \frac{r}{2n} g(Y,Z) + \alpha^2 g(Y,Z)$$

haline indirgenir. Bu da (36) nolu eşitliği doğrular. Böylece (36) nolu eşitliğin ispatı sonlanır. Ayrıca, bu son denklemin her iki tarafının $Y = Z = E_j$ için, $1 \leq j \leq 2n + 1$ olmak üzere, izi alınır,

$$2nr - r(2n + 1) = 2n(2n + 1)\alpha^2 \quad (46)$$

bulunur. (46) nolu eşitlik düzenlenirse skalar eğrilik bulunur. Kosimplektik durumda ($\alpha = 0$) kesit eğriliği de özdeş olarak sıfır olacaktır. Yani, $\alpha^2 \neq 0$ (alfa-Kenmotsu durumu) için skalar eğrilik değeri geçerlidir. Böylece ispat sona erer.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde $R \cdot C = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir,

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, (27) nolu eşitlik göz önüne alınarak,

$$S(Y, \xi) = -\lambda\eta(Y)$$

yazılır. Ayrıca, (36) nolu denklem $Z = \xi$ için,

$$S(Y, \xi) = [\alpha^2 + \frac{r}{2n}]\eta(Y)$$

elde edilir. Bu son iki denklemin sağ taraflarının eşitliğinden

$$\lambda = 2n\alpha^2 \quad (47)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\xi(\alpha) = 0$ seçildiğinden α reel bir sabit olarak alınabilir. Böylece (47) nolu denklem $\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$ durumları altında sırasıyla, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ haline dönüşür. Bu nedenle (a) ve (b) şıklarının ispatı Ricci soliton tanımından açıktır.

Sonuç 1. (M, ϕ, ξ, η, g) üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $R \cdot C = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu asla küçülen (daralan) durumda değildir.

Önerme 6. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Eğer M üzerinde $C \cdot H = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa, o zaman keyfî vektör alanları için,

$$\begin{aligned} & [r - \alpha^2(4n^2 + 2n - 1)]S(Y, Z) \\ & = [(\alpha^2 + \frac{r}{2n})r - 2n\alpha^4 + \sum_{j=1}^{2n+1} \|QE_j\|^2]g(Y, Z) \end{aligned} \quad (48)$$

denklemini sağlanır.

İspat. (M, ϕ, ξ, η, g) alfa-kosimplektik manifoldunun $C \cdot H = 0$ tensörel çarpımını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde,

$$(C(U, V) \cdot H)(W, Y)Z = 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & C(\xi, V)H(W, Y)Z - H(C(\xi, V)W, Y)Z \\ & - H(W, C(\xi, V)Y)Z - H(W, Y)C(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \eta(C(\xi, V)H(W, Y)Z) - \eta(H(C(\xi, V)W, Y)Z) \\ & - \eta(H(W, C(\xi, V)Y)Z) - \eta(H(W, Y)C(\xi, V)Z) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (51) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapıldığında (toplam alınırsa),

$$\begin{aligned} 0 = & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, Y)C(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, C(\xi, E_j)Y)Z) \\ & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(C(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ & + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(\xi, E_j)H(E_j, Y)Z) \end{aligned} \quad (52)$$

elde edilir. (52) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (15)-(18) ve (35) nolu eşitlikler kullanılarak,

$$- \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, Y)C(\xi, E_j)Z) = \left(\frac{2n\alpha^2 r}{(2n-1)^2} \right) \eta(Y)\eta(Z) \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, C(\xi, E_j)Y)Z) \\ & = \frac{1}{2n-1} [\alpha^2 \eta(C(\xi, Z)Y) - \eta(C(\xi, QZ)Y)] \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(C(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ & = - \left(\frac{2r}{(2n-1)^2} \right) [2n\alpha^2 \eta(Y)\eta(Z) + S(Y, Z)] \end{aligned}$$

$$-\frac{2\alpha^2 r}{(2n-1)^2}(-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(\xi, E_j)H(E_j, Y)Z) \\ &= -\left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{\alpha^2}{2n-1}\right]\left[\frac{r}{2n-1}g(Y, Z) + \eta(H(\xi, Z)Y)\right] \\ & \quad + \frac{1}{2n-1}\left[\eta(H(Q\xi, Z)Y) - \frac{2n+1}{2n-1}S(QY, Z)\right. \\ & \quad \left.+ \frac{1}{2n-1}(\sum_{j=1}^{2n+1} \|QE_j\|^2 g(Y, Z) + rS(Y, Z))\right] \quad (56) \end{aligned}$$

bulunur. (53)-(56) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa (52) nolu eşitlik

$$\begin{aligned} & 2nS(QY, Z) + (r - (2n - 1)\alpha^2)S(Y, Z) \\ &= \left[\left(\alpha^2 + \frac{r}{2n}\right)r - 2n\alpha^4 + \sum_{j=1}^{2n+1} \|QE_j\|^2\right]g(Y, Z) \quad (57) \end{aligned}$$

haline indirgenir. (57) nolu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa (48) denkleminde ulaşılır. Bundan sonra kısalık olarak

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \|QE_j\|^2 = \sum_{j=1}^{2n+1} g(QE_j, QE_j) = \|Q\|^2$$

şeklinde alalım. Böylece ispat sonlanır.

Teorem 2. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, $(n \geq 1)$ eğer M üzerinde $C \cdot H = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde hem genişleyen hem daralan Ricci solitonlar vardır.

önergeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) , Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Hatırlatmalıyız ki,

$$S(QY, Z) = S^2(Y, Z) = S(-2n\alpha^2 Y, Z) = -2n\alpha^2 S(Y, Z) \quad (58)$$

eşitliği yazılabilir. (27)-(30), (48) ve (58) nolu eşitlikleri kullanılarak, $Y = Z = \xi$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 2n(-\lambda S(\xi, \xi)) &= [(2n - 1)\alpha^2 - r]S(\xi, \xi) \\ &+ [(\alpha^2 + \frac{r}{2n})r - 2n\alpha^4 + \|Q\|^2] \end{aligned} \quad (59)$$

bulunur. (59) nolu eşitlik yardımıyla,

$$\|Q\|^2 = 2n\lambda^2 + 2n\alpha^2\lambda - \lambda\alpha^2 - r\lambda - \alpha^2r - \frac{r^2}{2n} + 2n\alpha^4 \quad (60)$$

şeklinde yazılır. Bundan başka, (48) nolu eşitliğin izi alınır, o zaman

$$\|Q\|^2 = 2n(2n + 1)\alpha^4 - 4n\alpha^2r - \frac{r^2}{2n} \quad (61)$$

elde edilir. (60) ve (61) nolu denklemler kullanılarak, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) ve $r = -2n(2n + 1)\alpha^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 2n\lambda^2 + (\alpha^2[2n - 1] - r)\lambda \\ - \alpha^2(r[1 - 4n] + 4n^2\alpha^2) = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

denklemi bulunur. Şimdi, (62) nolu denklem ile verilen ikinci dereceden kuadratik denklemin reel çözümünün olup olmadığını araştıralım. Bu durumda,

$$\Delta = \alpha^4[(4n^2 + 4n - 1)^2 + 8n(16n^3 + 8n^2 - 2n)]$$

dır. Burada $\Delta \geq 0$ olduğu görülür. O halde, (62) nolu denklemin iki farklı reel kökü aşağıdaki verilmiştir:

$$\lambda = \frac{-(4n^2 + 4n - 1)\alpha^2 \pm \alpha^2 \sqrt{\Delta}}{4n} \quad (63)$$

Ricci soliton sadece reel kökler varsa mevcuttur. (62) nolu denklem $\alpha = 0$ için $\lambda = r/2n$ değerini alır. Bu nedenle, $r = 0$ olduğundan $\lambda = 0$ dır. Bu durumda, Ricci soliton sabittir (metrik zamanla değişmez, akış sabittir). Diğer yandan, $\alpha \neq 0$ şartı altında (63) nolu denklem α^2 ve n ye bağlı iki farklı reel çözümü mevcuttur. Bu çözümlerden biri pozitif diğeri de negatiftir (simetrik çözüm). Manifold hem daralan hem de genişleyen Ricci soliton taşır. Böylece teoremin iki şıkkının da ispatı sonlanır.

Sonuç 2. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $C \cdot H = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu sabit değildir.

Kaynakça

Besse, A. L. (1987). *Einstein manifolds*. NY: Springer Science and Business Media.

Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. NY: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Press.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255-306.

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986). *Contemporary Mathematics*, 71, 301-307.

Janssens, D. & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 1-27.

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Mathematical Journal.*, 24, 93-103.

Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica*, 21, 841-846.

Nomizu, K. (1968). On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. *Tôhoku Mathematical Journal*, 20, 46-69.

Olszak, Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 239-250.

Öztürk, H., Aktan, N. & Murathan, C. (2010). On α -Kenmotsu manifolds satisfying certain conditions. *Applied Sciences*, 12, 115-126.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α -cosymplectic manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 9277175, 1-9.

Öztürk, H., Mısırlı, İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α -cosymplectic manifolds with η -parallel tensor fields, *Academic Journal of Science*, 7(3), 605-612.

Öztürk, S. (2022). A study on α -Kenmotsu manifolds. Canan Demir (Ed.), *Science and mathematics sciences, theory, current researches and new trends 5* içinde (s. 45-58). Montenegro: Iype.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2023). Three-dimensional semi-symmetric almost α -cosymplectic manifolds, *Symmetry* 2023, 15, 2022, 1-17.

Öztürk, H. & Yadav, S. K. (2023). A note on Ricci and Yamabe solitons on almost Kenmotsu manifolds, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 53(2), 223-239.

Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar. İlker Eryılmaz (Ed.), *Modern matematikte yeni yaklaşımlar* içinde (s. 22-43). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. & Çelik, O. (2025). Ricci solitona sahip α -kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar. Gülnur Şaffak Atalay (Ed.), *Matematiksel yapılar: Analiz ve geometri perspektifiyle* içinde (s. 27-39). Ankara: BİDGE Yayınları.

Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*.

Szabó, Z. I. (1982). Structure theorem on Riemannian spaces satisfying $R \cdot R = 0$. *Journal of Differential Geometry*, 17, 531-582.

Yadav, S. K. & Öztürk, H. (2019). On (ε) -almost paracontact metric manifolds with conformal η -Ricci solitons, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 21, 202-215.

Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

BÖLÜM 2

BAZI FARKLI YARI-SİMETRİK KOŞULLARI SAĞLAYAN ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

Sermin ÖZTÜRK¹

Giriş

Konsirküler ve konharmonik eğrilik tensörleri, Riemann eğrilik tensörünün konformal veya projektif dönüşümler altında ortaya çıkan özel bileşenleridir. Konsirküler eğrilik tensörü, bir Riemann manifoldunda eğrilik yapısını, sabit eğrilikli uzaydan olan sapmasını olduğu gibi izole edecek şekilde ölçen doğal bir tensör alanıdır. Konformal geometri bağlamında ortaya çıkan bu tensör, esasen Riemann eğrilik tensörünün içerdiği skaler kökenli ve homojen sabit eğrilik bileşenlerini çıkararak, uzayın gerçek anlamda şekil değiştirici eğrilik yapısını ortaya çıkarmayı sağlar. Konsirküler eğrilik tensör alanının özdeş olarak sıfır olması, manifoldun lokal olarak sabit eğrilikli bir uzay (uzay formu) olduğuna eşdeğer kabul edilir. Diğer yandan, konharmonik eğrilik tensörü, bir Riemann manifoldundaki eğrilik yapısının belirli bir geometrik dönüşüm sınıfı altında invariant kalan temel bileşenini izole eden bir ölçüttür. Weyl konformal eğrilik tensörüne yakın bir yapıya sahip olmakla birlikte ondan skaler eğrilik terimiyle ayrışır. En kritik özelliği, konharmonik

¹Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak., Matematik Böl., ssahin@aku.edu.tr, ORCID: 0000-0002-8535-0792

dönüşümler altında tam bir değişmez olması ve her yöndeki ortalama eğriliği sıfır olacak şekilde izsiz olmasıdır. Bu yapısıyla uzayın biçimini veya büyüklüğünü değil, yalnızca iç geometrisinin bozulma derecesini inceler. Dolayısıyla uzayın ölçeklendirilmesiyle ilgisiz olan saf şekil bozukluğunu taşır. Konharmonik eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır olması, uzayın bu özel dönüşümler açısından düz kabul edilmesine karşılık gelir.

Yarı-simetriyi simetrik uzayların doğal deformasyonları olarak ele alabiliriz. Bir simetrik uzayın homojen yapısını bozduğunuzda, eğrilik artık sabit kalmayacaktır. Fakat değişim belirli bir düzene uyacaktır. Yani, yarı-simetri, bu düzeni matematiksel olarak temsil eder. Bir Riemann manifoldunun yarı-simetrik olması için manifold üzerinde tanımlı herhangi X ve Y vektör alanlarına karşılık, $R(X,Y) \cdot R = 0$ tensörel çarpımının sağlanması gerekir. Bu denklemde R eğrilik tensörü, bir cebirsel operatör gibi davranarak uzayın geometrik yapısını kodlar. Bu tür uzaylara yarı-simetrik denilmesinin nedeni, herhangi bir q noktasında manifoldun eğrilik tensörünün, klasik simetrik uzaylardaki eğrilik tensörüyle örtüşebilmesidir. Ancak bu uyum, noktadan noktaya değişiklik gösterebilen bir özelliktir. Lokal simetrik uzaylar ise daha katı bir simetri koşulu getirir, yani; $\nabla R = 0$ ile tanımlıdır. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonunu temsil eder ve bu koşul, eğrilik tensörünün manifold boyunca sabit kaldığını ifade eder. Yarı-simetrik uzayların sistematik sınıflandırması, Szabó'nun 1982 yılındaki çalışmasıyla yeni bir aşamaya ulaşmıştır (Szabó, 1982). Fakat bu tanımlama, Nomizu'nun 1968 yılında ifade ettiği $R \cdot R = 0$ tensörel çarpımına dayanmaktadır (Nomizu, 1968).

Kenmotsu manifoldları değme geometrisi ile hemen hemen Kaehler geometrisinin kesişiminde doğan özel yapılardır (Kenmotsu, 1972). Sasakian manifoldlar sabit eğrilik ortaya koyarken, Kenmotsu manifoldlar sabit olmayan, ancak kontrollü bir şekilde değişen bir eğrilik yapısı sunarlar.

Bir Kenmotsu manifoldu, bir hemen hemen değme metrik yapı ile donatılmıştır, ancak burada kritik fark, temel 2-formun özdeş olarak sıfır olmaması ve bunun yerine dış türevinin temel 2-formun kendisiyle orantılı olmasıdır. Bu özellik, bu tür manifoldlara benzersiz bir davranış kazandırır. Lokal olarak bir katlı çarpım şeklinde ifade edilebilirler. Özellikle konformal olarak düz olanlar, bir reel doğrunun sabit eğrilikli bir manifold ile katlı çarpımına eşittir. Yani, Kenmotsu yapılar değme dağılımına teğet yönde standart bir Sasakian benzeri yapıyı korurken, diğer yandan reeb vektör alanı boyunca bir üstel genişleme veya büzülme meydana getirirler.

Hemen hemen Kenmotsu yapılar α parametresiyle genelleştirilerek hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır (Janssens & Vanhecke, 1981). Ayrıca, Kim ve Pak bu gelişmeyi bir adım öteye taşıyarak, hemen hemen alfa-Kenmotsu yapılar ile hemen hemen kosimplektik yapıları birleştirilerek yeni bir sınıf olan hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldları tanımlamışlardır (Kim & Pak, 2005).

Kosimplektik yapı, bir manifold üzerinde, hem bir simplektik yapı (kapalı ve dejenere olmayan 2-form) hem de uyumlu bir Riemann metriğini ilave eden geometrik bir yapıdır. Bilindiği üzere manifold teorisinde iki büyük alan vardır. Bunlar, simplektik ve kompleks geometridir. Kosimplektik yapı, bu iki alt disiplini birleştirilerek, her birinin özelliklerini diğerine aktarmasını sağlar. Bu yapılar, sadece matematiksel fizikteki uygulamalarıyla değil, aynı zamanda manifoldların topolojik karakterizasyonu ve holonomi teorisindeki merkezi rolleriyle de dikkat çekerler. Kosimplektik yapının özel bir hali olan Kaehler manifoldları, Hodge teorisi ve cebirsel geometri ile derin bağlantılar içerir. Hemen hemen kosimplektik manifoldlar ise simplektik geometri ile değme geometri arasında köprü oluşturarak mekanik sistemlerin genişletilmiş bir çerçevede incelenmesine olanak tanır.

Ricci akışı, bir manifoldun metrik yapısının zaman içinde Ricci eğriliğine göre nasıl evrimleştiğini tanımlayan, doğal bir parabolik kısmi diferensiyel denklemdir. Fiziksel bir benzetmeyle, bu akış başlangıçtaki karmaşık ve düzensiz bir şekli (manifoldu) ısıyı eşit dağıtan bir süreç gibi onun içsel eğriliğini yavaşça yumuşatarak ve düzelterek daha homojen bir forma doğru değiştirir. Bu akışın en büyük çıktısı Poincaré hipotezinin ispatındaki önemidir. Ricci akışının özel ve dengeli çözümleri olan Ricci solitonları ise bu evrim sürecinde ölçek değişimine karşın şekli korunan adeta hareketsiz gibi görünen hareketlerdir. Sabit, genişleyen ve büzülen (daralan) olarak sınıflandırılan bu yapılar Ricci akışının sabit noktaları gibi davranırlar ve akışın dinamiğini anlamak için temel yapı taşlarıdır. Böylece Ricci solitonları geometrinin dilinde evrimin durağan anlarını simgeleyen özel ve zarif nesneler olarak karşımıza çıkar. Richard Hamilton'ın 1982 yılındaki çalışmasıyla matematik dünyasına hediye edilmiştir (Hamilton, 1982). Hamilton'un 1988 yılında yüzeyler üzerindeki Ricci akışını detaylıca incelemesi, sürecin temel özelliklerini ortaya çıkarmıştır (Hamilton, 1988). Ancak bu çalışmalar, akış sırasında ortaya çıkan ve eğriliğin sonsuza ıraksadığı metrik tekilliklerin varlığını da göstermiştir. Grigori Perelman'ın 2002 yılındaki çalışması, 3-boyutlu manifoldlarda Ricci akışının tekilliklerini sistematik olarak sınıflandırarak bu sorunu aşmayı başarmıştır (Perelman, 2002).

Bu çalışmada, Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı farklı yarı-simetrik şartlar incelenmiştir. Özellikle, konsirküler ve konharmonik eğrilik tensör alanları kullanılarak $\bar{C} \cdot H = 0$ ve $H \cdot H = 0$ koşulları araştırılmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Temel Kavramlar

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir manifold M olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için; ϕ , $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η , 1-form olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (1)$$

$$\eta(\xi) = 1, \phi(\xi) = 0, \eta \circ \phi = 0 \quad (2)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (4)$$

deklemleriyle verilen g metrik tensörü ile donatılmış (M, ϕ, ξ, η, g) yapısına bir hemen hemen değme metrik manifold denir. Burada $g(\xi, \xi) = 1$ dir. Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapının temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (5)$$

şeklinde tanımlanır (Blair, 1976). $(1,3)$ -tipli Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (6)$$

şeklinde tanımlıdır. Bundan başka, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde $(0,2)$ -tipli Ricci tensörü ve Ricci operatörü, sırasıyla,

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^{2n+1} g(R(E_j, X)Y, E_j) \quad (7)$$

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (8)$$

ile verilir. Burada $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal bir tabandır (Yano & Kon, 1984). $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünersek, her vektör alanı X için, $(X, f \frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir

fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (9)$$

ile verilir. Eğer J integrallenebilirse o zaman, hemen hemen değme metrik (M, ϕ, ξ, η) -yapısı normaldir. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad (10)$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifoldu

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 0 \quad (11)$$

şartlarını sağlıyorsa, M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir. M nin bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Olszak, 1981). Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (12)$$

denklemleri sağlanıyorsa, M ye bir hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold denir (Janssens & Vanhecke, 1981). Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1972). (M, ϕ, ξ, η, g) normal ise o zaman alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, (11) denklemleri sağlanıyorsa, M ye hemen hemen alfa-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik manifold, $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Eğer hemen hemen değme metrik yapı (M, ϕ, ξ, η, g) Kaehler yapıya sahipse o zaman α reel sayısı için M ye alfa-kosimplektik manifold denir. Yani, $\alpha = 0$ için

(M, ϕ, ξ, η, g) yapısı kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ için alfa-Kenmotsu olarak adlandırılır (Kim & Pak, 2005).

Önerme 1. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. M nin bir alfa-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \quad (13)$$

dir (Öztürk, 2021).

Önerme 2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha \eta(X)\xi \quad (14)$$

$$R(X, Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (15)$$

$$R(X, \xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \quad (16)$$

$$R(X, \xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \quad (17)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)] \quad (18)$$

$$S(X, \xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X) \quad (19)$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \quad (20)$$

denklemleri sağlanır. Burada α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Tanım 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} \bar{C}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\ &- \frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \end{aligned} \quad (21)$$

ve

$$H(Y, Z)W = R(Y, Z)W \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2n-1}[S(Z, W)Y - S(Y, W)Z + g(Z, W)QY - g(Y, W)QZ]$$

şeklinde tanımlanan (1,3)-tipli $\bar{C}$ ve H tensör alanlarına sırasıyla, konsirküler ve konharmonik eğrilik tensör alanları denir (Yano ve Kon, 1984).

Ricci Solitonlar

Bu bölümde, bulgular bölümünde kullanılacak temel tanımlar ve eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 2. (M, g_0) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(t)) + 2S(g(t)) = 0, \quad g(0) = g_0 \quad (23)$$

kısmi türevli diferensiyel denklemine g metrik tensörünü eviren Ricci akışı denir (Hamilton, 1982). Burada t zaman parametresidir.

Tanım 3. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfî vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (24)$$

denklemi sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ değerinin $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (25)$$

dır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 5. (M, g, V, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı Killing vektör alanı ($L_V g = 0$) ise o zaman (M, g, V, λ) ye basit Ricci soliton adı verilir (Chen 2015).

Tanım 6. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa, (M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 3. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (26)$$

denklemini sağlar. Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 4. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \quad (27)$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \quad (28)$$

$$Q\xi = -\lambda\xi \quad (29)$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \quad (30)$$

$$r = \alpha - (2n + 1)(\alpha + \lambda). \quad (31)$$

Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Bulgular

Bu bölümde, $\bar{C} \cdot H = 0$ ve $H \cdot H = 0$ farklı yarı-simetrik tensör koşulları incelenmiştir. Bu koşullar altında Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım7. M bir (yarı) Riemann manifoldu olsun. T_1 ve T_2 (0,4)-tipli tensör alanları olmak üzere, eğer M üzerinde keyfi vektör alanları U ve V için,

$$T_1(U, V) \cdot T_2 = 0 \quad (32)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye T_2 yarı-simetrik tipli manifold denir. Burada $T_1(U, V), T_2$ üzerindeki tensör cebirinin türevi olarak etki eder. Bu tanım genel olarak,

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad (33)$$

şeklinde yazılır. Özel olarak, $T_1 = T_2 = R$ olarak alınırsa, manifold yarı-simetrik olarak adlandırılır (Szabó 1982).

Lemma 1. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Bu durumda, konformal ve konharmonik eğrilik tensör alanları için,

$$\eta(\bar{C}(U, V)W) = -\left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2\right] \\ [g(V, W)\eta(U) - g(U, W)\eta(V)] \quad (34)$$

ve

$$\eta(H(U, V)W) = \frac{\alpha^2}{2n-1} [g(V, W)\eta(U) - g(U, W)\eta(V)] \\ - \frac{1}{2n-1} [S(V, W)\eta(U) - S(U, W)\eta(V)] \quad (35)$$

denklemleri sağlanır.

İspat. (21) ve (22) nolu eşitlikler birlikte kullanılırsa (34) ve (35) nolu eşitliklerin ispatları aşıkardır.

Önerme 5. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold ve $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Eğer M üzerinde $\bar{C} \cdot H = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa, o zaman keyfî vektör alanları için,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] 2nS(Y, Z) = \\ & \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] (2n\alpha^2 + r)g(Y, Z) \\ & \left[-(2n\alpha^2 + r) \frac{r}{2n(2n+1)} + 4n^2\alpha^4 \right] \eta(Y)\eta(Z) \\ & + \left[-4n^2\alpha^2 \left(\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right) \right] \eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \quad (36)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. M üzerinde alfa-kosimplektik manifoldunun $\bar{C} \cdot H = 0$ tensörel çarpımını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(\bar{C}(U, V) \cdot H)(W, Y)Z = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \bar{C}(\xi, V)H(W, Y)Z - H(\bar{C}(\xi, V)W, Y)Z \\ & - H(W, \bar{C}(\xi, V)Y)Z - H(W, Y)\bar{C}(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \eta(\bar{C}(\xi, V)H(W, Y)Z) - \eta(H(\bar{C}(\xi, V)W, Y)Z) \\ & - \eta(H(W, \bar{C}(\xi, V)Y)Z) - \eta(H(W, Y)\bar{C}(\xi, V)Z) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (39) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned}
0 = & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, Y) \bar{C}(\xi, E_j) Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, \bar{C}(\xi, E_j) Y) Z) \\
& - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(\bar{C}(\xi, E_j) E_j, Y) Z) \\
& + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(\bar{C}(\xi, E_j) H(E_j, Y) Z) \quad (40)
\end{aligned}$$

elde edilir. (40) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (37)-(39) nolu eşitlikler kullanılarak hesap yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, Y) \bar{C}(\xi, E_j) Z) \\
= & -\frac{1}{2n-1} \left[-\frac{r}{2n(2n+1)} (2n\alpha^2 + r) + 4n^2\alpha^4 \right. \\
& \left. + 2n\alpha^2 \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] \right] \eta(Y) \eta(Y) \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, \bar{C}(\xi, E_j) Y) Z) \\
= & \frac{1}{2n-1} [\eta(C(\xi, QZ) Y) - \alpha^2 \eta(C(\xi, Z) Y)] \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(\bar{C}(\xi, E_j) E_j, Y) Z) \\
= & \frac{-2n\alpha^2}{2n-1} \left[\frac{r}{2n(2n-1)} + \alpha^2 \right] (g(Y, Z) - \eta(Y) \eta(Z)) \\
& + \frac{2n}{2n-1} \left[\frac{r}{2n(2n-1)} + \alpha^2 \right] [2n\alpha^2 \eta(Y) \eta(Z) + S(Y, Z)] \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(\bar{C}(\xi, E_j) H(E_j, Y) Z) \\
= & \left[\frac{r}{2n(2n-1)} + \alpha^2 \right] \left[\frac{r}{2n(2n-1)} g(Y, Z) + \eta(H(\xi, Z) Y) \right] \quad (44)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, (41)-(44) nolu eşitlikler birlikte göz önüne alınırsa (36) nolu eşitliğe ulaşılır. Böylece ispat sonlanır.

Önerme 6. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold, $\xi(\alpha) = 0$ ve M üzerinde $\bar{C} \cdot H = 0$ tensörel çarpımı mevcut olsun. Eğer $r \neq -2n(2n + 1)\alpha^2$ ise o zaman M bir η -Einstein manifoldudur.

İspat. Öncelikle η -Einstein manifold tanımını verelim:

Tanım 8. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = \mu_1 g(X, Y) + \mu_2 \eta(X)\eta(Y) \quad (45)$$

koşulu sağlanıyorsa, M ye bir η -Einstein manifoldu denir, burada μ_1 ve μ_2 , M üzerindeki keyfi fonksiyonlardır. Özel olarak, $\mu_2 = 0$ alındığında M bir Einstein manifoldu olur (Blair, 1976).

(36) nolu eşitlikte $Y = Z = \xi$ alınırsa,

$$r\alpha^2 = -2n(2n + 1)\alpha^4$$

bulunur. (45) nolu eşitlikteki $(\eta \otimes \eta)$ tensörel çarpım kısmının özdeş olarak sıfır olmaması için $r \neq -2n(2n + 1)\alpha^2$ olmalıdır. Böylece ispat sonlanır.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde $\bar{C} \cdot H = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir,

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) Ricci solitona sahip alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, (27) nolu denklem yardımıyla $Y = Z = \xi$ için, (36) nolu denklem

$$\left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] (4n^2\alpha^2 - 2n\lambda) = 2n\alpha^4 + \alpha^2 r + 4n^2\alpha^4 \quad (46)$$

formuna indirgenir. λ ya göre birinci dereceden denklemin $r = -2n(2n+1)\alpha^2$, $\alpha \in IR, n \geq 1$ için çözümü

$$\lambda = 2n\alpha^2$$

olarak bulunur. $\alpha = 0$ için $\lambda = 0$ ve $\alpha^2 > 0$ için $\lambda > 0$ çözümleri geçerlidir. (a) ve (b) şıklarının ispatı Ricci soliton tanımından açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 1. (M, ϕ, ξ, η, g) üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $\bar{C} \cdot H = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu asla küçülen (daralan) durumda değildir.

Teorem 2. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n+1)$ -boyutlu bir alfa-Kenmotsu manifold ve α , ξ boyunca paralel olsun. Eğer $n \geq 1$ ve $r \neq -2n(2n+1)\alpha^2$ için, M üzerinde $\bar{C} \cdot H = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa o zaman M η -Einstein manifoldu üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu daralan durumdadır.

İspat. (M, g, ξ, λ) Ricci solitona sahip η -Einstein alfa-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda, (27) nolu denklem yardımıyla $Y = Z = \xi$ ve $r \neq -2n(2n+1)\alpha^2$ için, (36) nolu denklem

$$\lambda(-r - 4n^2\alpha^2 - 2n\alpha^2) = \alpha^2(2n\alpha^2 + 4n^2\alpha^2 + r)$$

formuna indirgenir. λ ya göre birinci dereceden denklemin $r \neq -2n(2n+1)\alpha^2, \alpha^2 > 0, n \geq 1$ için çözümü

$$\lambda = -\alpha^2$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\lambda < 0$ çözümü geçerlidir. Ricci soliton tanımından ispat tamamlanır.

Önerme 7. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Eğer M üzerinde $H \cdot H = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa, o zaman keyfi vektör alanları için,

$$\begin{aligned} & -S(QY, Z) + \frac{(2n-1)\alpha^2}{2n} S(Y, Z) \\ & = [\alpha^4 - \frac{\|Q\|^2}{2n}]g(Y, Z) \end{aligned} \quad (47)$$

denklemini sağlar.

İspat. (M, ϕ, ξ, η, g) alfa-kosimplektik manifoldunun $H \cdot H = 0$ tensörel çarpımını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde,

$$(H(U, V) \cdot H)(W, Y)Z = 0 \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & H(\xi, V)H(W, Y)Z - H(H(\xi, V)W, Y)Z \\ & -H(W, H(\xi, V)Y)Z - H(W, Y)H(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \eta(H(\xi, V)H(W, Y)Z) - \eta(H(H(\xi, V)W, Y)Z) \\ & -\eta(H(W, H(\xi, V)Y)Z) - \eta(H(W, Y)H(\xi, V)Z) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (50) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapıldığında (toplam alınırsa),

$$\begin{aligned} 0 = & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, Y)H(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, H(\xi, E_j)Y)Z) \\ & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(H(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ & + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(\xi, E_j)H(E_j, Y)Z) \end{aligned} \quad (51)$$

elde edilir. (51) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (15)-(18) ve (35) nolu eşitlikler kullanılarak,

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, Y)H(\xi, E_j)Z) = -\left(\frac{n\alpha^2 r}{(2n-1)^2}\right) \eta(Y)\eta(Z) \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(E_j, H(\xi, E_j)Y)Z) \\ &= \frac{1}{2n-1} [\eta(H(\xi, QZ)Y)] - \frac{\alpha^2}{2n-1} \eta(H(\xi, Z)Y) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(H(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ &= \left(\frac{r}{(2n-1)^2}\right) [2n\alpha^2 \eta(Y)\eta(Z) + S(Y, Z)] \\ & \quad + \frac{\alpha^2 r}{(2n-1)^2} (-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(\xi, E_j)H(E_j, Y)Z) \\ &= \frac{1}{2n-1} \left[\eta(H(Q\xi, Z)Y) - \frac{2n+1}{2n-1} S(QY, Z) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2n-1} (\sum_{j=1}^{2n+1} \|QE_j\|^2 g(Y, Z) + rS(Y, Z)) \right] \\ & \quad - \frac{\alpha^2}{2n-1} \left[\frac{r}{2n-1} g(Y, Z) + \eta(H(\xi, Z)Y) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

yazılır. (52)-(55) nolu eşitlikler birlikte hesaba katılırsa (51) nolu eşitlik

$$S(QY, Z) = \frac{(2n-1)\alpha^2}{2n} S(Y, Z) - \left[\alpha^4 - \frac{\|Q\|^2}{2n}\right] g(Y, Z)$$

haline indirgenir. Yukarıdaki eşitlik düzenlenirse (47) nolu denkleme ulaşılır. Burada kısalık açısından

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \|QE_j\|^2 = \sum_{j=1}^{2n+1} g(QE_j, QE_j) = \|Q\|^2$$

alınmıştır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, $(n \geq 1)$ eğer M üzerinde $H \cdot H = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde genişleyen Ricci solitonlar vardır,

önergeleri sağlanır.

İspat. (M, g, ξ, λ) , Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Ricci operatörü tanımından

$$S(QY, Z) = S^2(Y, Z) = S(-2n\alpha^2 Y, Z) = -2n\alpha^2 S(Y, Z) \quad (56)$$

yazılabilir. (47) ve (56) nolu eşitlikler yardımıyla

$$-\alpha^2 \left(\frac{4n^2 + 2n - 1}{2n} \right) S(Y, Z) = [-\alpha^4 + \frac{\|Q\|^2}{2n}]g(Y, Z) \quad (57)$$

yazılır. $Y = Z = \xi$ için (57) nolu eşitlik (27) ve (30) nolu eşitliklerle birlikte kullanılırsa,

$$-\alpha^4 + \frac{\|Q\|^2}{2n} = \alpha^2 \lambda \left(\frac{4n^2 + 2n - 1}{2n} \right) \quad (58)$$

bulunur. (58) nolu eşitlik sayesinde

$$\|Q\|^2 = 2n\alpha^4 + \alpha^2 \lambda (4n^2 + 2n - 1) \quad (59)$$

elde edilir. Bundan başka, (47) nolu eşitliğin izi alınır, o zaman

$$\|Q\|^2 = 2n\alpha^4 - \frac{\alpha^2 r (4n^2 + 2n - 1)}{2n + 1} \quad (60)$$

denklemine ulaşılır. (59) ve (60) nolu denklemler kullanılarak, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) ve $r = -2n(2n + 1)\alpha^2$, $\alpha^2 > 0$ olmak üzere,

$$\lambda = 2n\alpha^2$$

denkleminde ulaşılır. Burada (b) şikkının ispatı aşıkardır. Bu denklem tüm λ değeri için doğrudur, ama Ricci solitonun geometrik yorumunu kullanarak $\lambda = 0$ alınabilir. Fakat $\alpha = 0$ olduğunda, potansiyel vektör alanı sıfır ya da

$$L_{\xi}g = 0$$

dır. Tüm hesaplamalarda potansiyel vektör alanını ξ olarak almıştık. Dolayısıyla $S = 0$ ve $r = 0$ olur. Bu nedenle manifold üzerinde basit sabit Ricci soliton mevcuttur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 2. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $H \cdot H = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci soliton asla daralan durumda değildir.

Kaynakça

Besse, A. L. (1987). *Einstein manifolds*. NY: Springer Science and Business Media.

Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. NY: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Press.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255-306.

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986). *Contemporary Mathematics*, 71, 301-307.

Janssens, D. & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 1-27.

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Mathematical Journal*, 24, 93-103.

Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica*, 21, 841-846.

Nomizu, K. (1968). On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. *Tôhoku Mathematical Journal*, 20, 46-69.

Olszak, Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 239-250.

Öztürk, H. (2016). On almost α -Kenmotsu manifolds with some tensor fields. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, 16, 256-264.

Öztürk, H. (2017). On α -Kenmotsu manifolds satisfying semi-symmetric conditions. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5, 192-206.

Öztürk, H., Mısırlı, İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α -cosymplectic manifolds with η -parallel tensor fields, *Academic Journal of Science*, 7(3), 605-612.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α -cosymplectic manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 9277175, 1-9.

Öztürk, S. (2022). A study on α -Kenmotsu manifolds. Canan Demir (Ed.), *Science and mathematics sciences, theory, current researches and new trends 5* içinde (s. 45-58). Montenegro: Iype.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2023). Three-dimensional semi-symmetric almost α -cosymplectic manifolds, *Symmetry* 2023, 15, 2022, 1-17.

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2023). Almost α -Kenmotsu pseudo-Riemannian manifolds with CR-Integrable Structure, *Symmetry* 2023, 15, 353, 1-13.

Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar. İlker Eryılmaz (Ed.), *Modern matematikte yeni yaklaşımlar* içinde (s. 22-43). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. & Çelik, O. (2025). Ricci solitona sahip α -kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar. Gülnur Şaffak Atalay (Ed.), *Matematiksel yapılar: Analiz ve geometri perspektifiyle* içinde (s. 27-39). Ankara: BİDGE Yayınları.

Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*.

Szabó, Z. I. (1982). Structure theorem on Riemannian spaces satisfying $R \cdot R = 0$. *Journal of Differential Geometry*, 17, 531-582.

Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Singapore: World Scientific Publishing C.

BÖLÜM 3

RİCCİ SOLİTONLU ALFA-KOSİMPLEKTİK YAPILAR ÜZERİNDE FARKLI YARI-SİMETRİK ÖZELLİKLER

Hakan ÖZTÜRK¹

Giriş

Riemann geometrisinin özünde, bir manifoldun şeklini ve eğriliğini kodlayan Riemann eğrilik tensörü R önemli rol oynar. Bu tensörün diferensiyel özellikleri, uzayın simetri ve homojenlik derecesini kavramada çok önemlidir. $\nabla R = 0$ koşulunu sağlayan lokal simetrik uzaylar eğriliğin paralel taşıma ile değişmediğini gösteren yapılardır. Bir manifoldun eğrilik tensörü R , Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile kovaryant türevi alındığında, ortaya çıkan ∇R tensörü ile orijinal R tensörü arasında belirli bir lineer ilişki varsa, bu uzaya yarı-simetrik adı verilir. Başka bir deyişle, eğrilik, tam sabit olmasa bile, kendi yapısıyla uyumlu bir şekilde değişir.

Yarı-simetriyi simetrik uzayların doğal deformasyonları olarak göz önüne alabiliriz. Bir simetrik uzayın homojen yapısını bozduğunuzda, eğrilik artık sabit kalmayacaktır. Fakat değişim belirli bir düzene uyacaktır. Yani, yarı-simetri, bu düzeni matematiksel olarak temsil eder. Başka bir ifadeyle, eğriliğin değişim hızı, eğriliğin kendisi ile orantılıdır veya ondan lineer olarak üretilir. Bu özellik, fizikte dile getirilen öz-benzerlik

¹Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, hakser23@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1299-3153

durumuyla açıklanabilir. O halde, uzayın her noktasındaki eğriliğinin kendi komşuluğuyla belirli bir lineer ilişki içerisinde olduğunu söyleyebiliriz. Yarı-simetrik uzaylar araştırılırken bazı problemler merkeze alınır. Örnek olarak, acaba hangi doğal geometrik yapılar (Kaehler, değme, hemen hemen değme vb.) yarı-simetri ile uyum halindedir? Ricci tensörü S için benzer bir denklem yazılacak olursa Ricci yarı-simetrik uzaylar elde edilir. Acaba bu iki kavram ne zaman, hangi durumlarda örtüşür? Yarı-simetrik olup simetrik olmayan somut örnekler var mıdır? (Katlı çarpım ve homojen uzaylar vb.) Yarı-simetri, sabit eğrilikli veya Einstein manifoldlarında hangi özellikleri gösterir. Acaba fizikteki genel görelilikte kullanılan çözüm uzayları yarı-simetrik bir form içerisinde olurlar mı? Ayrıca, Kenmotsu ve kosimplektik yapılar ile yarı-simetri arasındaki etkileşim, değme geometri ve Riemann geometrisi kesişiminde zengin bir araştırma alanı ortaya çıkarmıştır.

Bir Riemann manifoldunun yarı-simetrik olarak nitelendirilebilmesi için, manifold üzerinde tanımlı herhangi X ve Y vektör alanlarına karşılık, $R(X,Y) \cdot R = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu denklemde R eğrilik tensörü, bir cebirsel operatör gibi davranarak uzayın geometrik yapısını kodlar. Bu tür uzaylara yarı-simetrik denilmesinin nedeni, herhangi bir q noktasında manifoldun eğrilik tensörünün, klasik simetrik uzaylardaki eğrilik tensörüyle örtüşebilmesidir. Ancak bu uyum, noktadan noktaya değişiklik gösterebilen bir özelliktir. Lokal simetrik uzaylar ise daha katı bir simetri koşulu getirir, yani; $\nabla R = 0$ ile tanımlıdır. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonunu temsil eder ve bu koşul, eğrilik tensörünün manifold boyunca sabit kaldığını ifade eder. Yarı-simetrik uzayların sistematik sınıflandırması, Szabó'nun 1982 yılındaki çalışmasıyla yeni bir aşamaya ulaşmıştır (Szabó, 1982). Fakat bu alandaki ilk çalışma, Nomizu'nun 1968 yılında tanımladığı $R \cdot R = 0$ tensörel şartında saklıdır (Nomizu, 1968).

Kenmotsu manifoldları, değme geometrisinin önemli bir alt sınıfını oluşturan, hemen hemen değme metrik manifoldların özel bir türüdür (Kenmotsu, 1972). Kenmotsu manifoldlarında katlı çarpım yapısı ile yarı-simetrisinin uyumu ve eğrilik sınıflandırmaları çok önemli yer kaplar. Janssens ve Vanhecke, Kenmotsu yapıların α parametresiyle genelleştirerek hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldlar kavramını geometri literatürüne kazandırmışlardır (Janssens & Vanhecke, 1981). Daha sonra, Kim ve Pak bu gelişmeyi bir adım öteye taşıyarak, hemen hemen alfa-Kenmotsu yapıları ile hemen hemen kosimplektik yapıları sentezleyen yeni bir sınıf tanımlamışlardır (Kim & Pak, 2005). Hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılan bu yapılar, hemen hemen değme metrik manifoldlar ailesinin önemli bir alt sınıfını oluşturmaktadır. Kosimplektik manifoldlarda yarı-simetri için en önemli kavram paralel reeb vektörüdür.

Çalışmamızda manifold üzerinde tanımlayacağımız Ricci akışı, Riemann manifoldlarındaki metrik yapının zamana bağlı evrimini modelleyen güçlü bir araç olarak karşımıza çıkmıştır. Richard Hamilton'ın 1982 yılındaki öncü çalışmasıyla matematik dünyasına kazandırılan bu yöntem, topolojinin en zorlu problemlerinden biri olan Poincaré hipotezine giden yolu açmıştır (Hamilton, 1982). Hamilton'un 1988 yılında yüzeyler üzerindeki Ricci akışını detaylıca incelemesi, sürecin temel özelliklerini ortaya çıkarmıştır (Hamilton, 1988). Ancak bu çalışmalar, akış sırasında ortaya çıkan ve eğriliğin sonsuza ıraksadığı metrik tekilliklerin varlığını da göstermiştir. Grigori Perelman'ın 2002 yılındaki çalışması, 3-boyutlu manifoldlarda Ricci akışının tekilliklerini sistematik olarak sınıflandırarak bu sorunu aşmayı başarmıştır (Perelman, 2002). Perelman'ın geliştirdiği entropi tabanlı yaklaşım, akışın tekilliklerden arındırılmasını sağlamış ve nihayetinde Poincaré hipotezinin ispatlanmasıyla sonuçlanmıştır.

Bu çalışmada, Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde farklı yarı-simetrik şartlar incelenmiştir. Özellikle, konsirküler ve konharmonik eğrilik tensör alanları yardımıyla, $\bar{C} \cdot R = 0$ ve $H \cdot R = 0$ koşulları araştırılmış ve bazı sonuçlar bulunmuştur.

Ön Hazırlık Bilgileri

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir manifold M olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için; ϕ , $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η , 1-form olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (1)$$

$$\eta(\xi) = 1, \phi(\xi) = 0, \eta \circ \phi = 0 \quad (2)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3)$$

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (4)$$

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (5)$$

deklemleriyle verilen g metrik tensörü ile donatılmış (M, ϕ, ξ, η, g) yapısına bir hemen hemen değme metrik manifold denir. Burada $g(\xi, \xi) = 1$ dir. Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapının temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır (Blair, 1976). $(1,3)$ -tipli Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (7)$$

şeklinde tanımlıdır. Bundan başka, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde $(0,2)$ -tipli Ricci tensörü ve Ricci operatörü, sırasıyla,

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^{2n+1} g(R(E_j, X)Y, E_j) \quad (8)$$

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (9)$$

ile verilir. Burada $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal bir tabandır (Yano & Kon, 1984). $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünersek, her vektör alanı X için, $(X, f \frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (10)$$

ile verilir. Eğer J integrallenebilirse o zaman, hemen hemen değme metrik (M, ϕ, ξ, η) -yapısı normaldir. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad (11)$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifoldu

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 0 \quad (12)$$

şartlarını sağlıyorsa, M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir. M nin bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Olszak, 1981). Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (13)$$

denklemleri sağlanıyorsa, M ye bir hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold denir (Janssens & Vanhecke, 1981). Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1972). (M, ϕ, ξ, η, g) normal ise o zaman alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı

için, (11) denklemleri sağlanıyorsa, M ye hemen hemen alfa-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik manifold, $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Eğer hemen hemen değme metrik yapı (M, ϕ, ξ, η, g) Kaehler yapıya sahipse o zaman α reel sayısı için M ye alfa-kosimplektik manifold denir. Yani, $\alpha = 0$ için (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ için alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır (Kim & Pak, 2005).

Önerme 1. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. M nin bir alfa-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \quad (14)$$

dir (Öztürk, 2021).

Önerme 2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha \eta(X)\xi \quad (15)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] \quad (16)$$

$$R(X, Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (17)$$

$$R(X, \xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \quad (18)$$

$$R(X, \xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \quad (19)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)] \quad (20)$$

$$S(X, \xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X) \quad (21)$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \quad (22)$$

denklemleri sağlanır. Burada α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Tanım 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\bar{C}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\ -\frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] &\end{aligned}\quad (23)$$

ve

$$\begin{aligned}H(Y, Z)W &= R(Y, Z)W \\ -\frac{1}{2n-1}[S(Z, W)Y - S(Y, W)Z + g(Z, W)QY - g(Y, W)QZ] &\end{aligned}\quad (24)$$

şeklinde tanımlanan (1,3)-tipi $\bar{C}$ ve H tensör alanlarına sırasıyla, konsirküler ve konharmonik eğrilik tensör alanları denir (Yano ve Kon 1984).

Alfa-Kosimplektik Yapılar Üzerinde Ricci Solitonlar

Bu bölümde bulgular bölümünde kullanılacak temel kavramlar ve temel eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 2. (M, g_0) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(t)) + 2S(g(t)) = 0, \quad g(0) = g_0 \quad (25)$$

kısmi türevli diferensiyel denklemine g metrik tensörünü eviren Ricci akışı denir (Hamilton, 1982). Burada t zaman parametresidir.

Tanım 3. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfi vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (26)$$

denklemi sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ değerinin $\lambda < 0, \lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan,

değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (27)$$

dır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 5. (M, g, V, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı Killing vektör alanı ($L_V g = 0$) ise o zaman (M, g, V, λ) ye basit Ricci soliton adı verilir (Chen 2015).

Tanım 6. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa, (M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 3. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (28)$$

denklemini sağlar. Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 4. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \quad (29)$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \quad (30)$$

$$Q\xi = -\lambda\xi \quad (31)$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \quad (32)$$

$$r = \alpha - (2n + 1)(\alpha + \lambda). \quad (33)$$

Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Bulgular

Bu bölümde, $\bar{C} \cdot R = 0$ ve $H \cdot R = 0$ koşulları incelenmiş ve Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir. Öncelikle genel anlamda yarı-simetrik manifoldu tanımlayalım:

Tanım7. M bir (yarı) Riemann manifoldu olsun. T_1 ve T_2 (0,4)-tipli tensör alanları olmak üzere, eğer M üzerinde keyfi vektör alanları U ve V için,

$$T_1(U, V) \cdot T_2 = 0 \quad (34)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye T_2 yarı-simetrik tipli manifold denir. Burada $T_1(U, V), T_2$ üzerindeki tensör cebirinin türevi olarak etki eder. Bu tanım genel olarak,

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad (35)$$

şeklinde yazılır. Özel olarak, $T_1 = T_2 = R$ olarak alınırsa, manifold yarı-simetrik olarak adlandırılır (Szabó 1982). Yarı-simetrik uzaylar ve farklı yarı-simetrik özellikler hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak için Özgür ve Tripathi (2007), Shaikh ve Baishya (2005), Shaikh ve Kundu (2014) ve Szabó (1984) referanslarına bakabilirsiniz.

Yardımcı Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Bu durumda, konsirküler ve konharmonik eğrilik tensör alanları için,

$$\eta(\bar{C}(U, V)W) = - \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] [g(V, W)\eta(U) - g(U, W)\eta(V)] \quad (36)$$

ve

$$\begin{aligned} \eta(H(U, V)W) &= \frac{\alpha^2}{2n-1} [g(V, W)\eta(U) - g(U, W)\eta(V)] \\ &\quad - \frac{1}{2n-1} [S(V, W)\eta(U) - S(U, W)\eta(V)] \end{aligned} \quad (37)$$

denklemleri sağlanır.

İspat. (23) ve (24) nolu eşitlikler birlikte hesaba katılırsa (36) ve (37) nolu eşitliklerin ispatları açıktır.

Önerme 5. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n+1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde $\bar{C} \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman keyfî vektör alanları için, (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu

$$S(Y, Z) = -2n\alpha^2 g(Y, Z) \quad (38)$$

ve

$$r = -2n(2n+1)\alpha^2 \quad (39)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. M üzerinde alfa-kosimplektik manifoldunun $\bar{C} \cdot R = 0$ tensörel çarpımını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(\bar{C}(U, V) \cdot R)(W, Y)Z = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &\bar{C}(\xi, V)R(W, Y)Z - R(\bar{C}(\xi, V)W, Y)Z \\ &- R(W, \bar{C}(\xi, V)Y)Z - R(W, Y)\bar{C}(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\eta(\bar{C}(\xi, V)R(W, Y)Z) - \eta(R(\bar{C}(\xi, V)W, Y)Z)$$

$$- \eta(R(W, \bar{C}(\xi, V)Y)Z) - \eta(R(W, Y)\bar{C}(\xi, V)Z) = 0 \quad (42)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (36) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)\bar{C}(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, \bar{C}(\xi, E_j)Y)Z) \\ & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(\bar{C}(\xi, E_j)E_j, Y)Z) + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(\bar{C}(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \end{aligned} \quad (43)$$

elde edilir. (43) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (40)-(42) nolu eşitlikler kullanılarak hesap yapılırsa,

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)\bar{C}(\xi, E_j)Z) \\ & = -2n\alpha^2 \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] \eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, \bar{C}(\xi, E_j)Y)Z) \\ & = \alpha^2 \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] (g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(\bar{C}(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ & = 2n\alpha^2 \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] (-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(\bar{C}(\xi, E_j) R(E_j, Y) Z) \\ = \left[\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right] [-S(Y, Z) - \alpha^2(g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z))] \quad (47)$$

bulunur. Son olarak, (44)-(47) nolu eşitlikler birlikte göz önüne alınırsa (43) nolu eşitlik

$$S(Y, Z) = -2n\alpha^2 g(Y, Z)$$

haline dönüşür. Böylece (38) nolu eşitliğin ispatı tamamlanır. Ayrıca, bu son denklemin her iki tarafının $Y = Z = E_j$ için, $1 \leq j \leq 2n + 1$ olmak üzere, izi alınırsa (39) nolu eşitliğin ispatına ulaşılır.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M üzerinde $\bar{C} \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir,

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, (29) nolu denklem yardımıyla

$$S(Y, \xi) = -\lambda\eta(Y)$$

yazılır. Ayrıca, (32) nolu denklem $Z = \xi$ için,

$$S(Y, \xi) = -2\alpha^2 n\eta(Y)$$

elde edilir. Bu son iki denklemin sağ taraflarının eşitliğinden

$$\lambda = 2n\alpha^2 \quad (48)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\xi(\alpha) = 0$ seçildiğinden α reel bir sabit olarak alınabilir. Böylece (48) nolu denklem $\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$

durumları altında sırasıyla, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ haline dönüşür. Bu nedenle (a) ve (b) şıklarının ispatı Ricci soliton tanımından açıktır.

Sonuç 1. (M, ϕ, ξ, η, g) üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $\bar{C} \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu asla daralan durumda değildir.

Önerme 6. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Eğer M üzerinde $H \cdot R = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa, o zaman keyfi vektör alanları için,

$$\begin{aligned} S(QY, Z) &= 2\alpha^2 S(Y, Z) \\ -\alpha^2(-2n\alpha^2 + r)g(Y, Z) \end{aligned} \quad (49)$$

ve

$$r = -2n(2n + 1)\alpha^2$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. Alfa-kosimplektik manifold M aşağıdaki tensörel çarpım ile verilsin. Bu durumda,

$$(H(U, V) \cdot R)(W, Y)Z = 0 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} H(\xi, V)R(W, Y)Z - R(H(\xi, V)W, Y)Z \\ - R(W, H(\xi, V)Y)Z - R(W, Y)H(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \eta(H(\xi, V)R(W, Y)Z) - \eta(R(H(\xi, V)W, Y)Z) \\ - \eta(R(W, H(\xi, V)Y)Z) - \eta(R(W, Y)H(\xi, V)Z) = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (52) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapıldığında (toplam alınırsa),

$$\begin{aligned}
0 = & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)H(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, H(\xi, E_j)Y)Z) \\
& - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(H(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\
& + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \quad (53)
\end{aligned}$$

elde edilir. (53) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (17)-(19) ve (37) nolu eşitlikler kullanılarak,

$$-\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)H(\xi, E_j)Z) = -\frac{\alpha^2 r}{2n-1} \eta(Y)\eta(Z) \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, H(\xi, E_j)Y)Z) \\
& = -\left[\frac{\alpha^4}{2n-1}\right](g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \\
& + \frac{\alpha^2}{2n-1} [2n\alpha^2 \eta(Y)\eta(Z) + S(Y, Z)] \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(H(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\
& = \frac{\alpha^2 r}{2n-1} (-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(H(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \\
& = \left[\frac{\alpha^2}{2n-1}\right](-\alpha^2[-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)] - S(Y, Z)) \\
& + \frac{1}{2n-1} [2n\alpha^4(g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) - S(QY, Z)] \quad (57)
\end{aligned}$$

elde edilir. (54)-(57) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa (53) eşitliği

$$S(QY, Z) = 2\alpha^2 S(Y, Z) + \alpha^2(2n\alpha^2 - r)g(Y, Z)$$

formuna dönüşür. Burada hatırlatalım ki,

$$S(QY, Z) = S^2(Y, Z) = S(-2n\alpha^2 Y, Z) = -2n\alpha^2 S(Y, Z) \quad (58)$$

ve

$$QY = -2n\alpha^2 Y$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece (49) nolu denklemin ispatına ulaşılır. Son olarak, (49) nolu eşitlikte $Y = Z = \xi$ seçilirse,

$$4n^2\alpha^4 = -4n\alpha^4 + 2n\alpha^4 - r\alpha^2 \quad (59)$$

bulunur. (59) nolu eşitliğin düzenlenmesiyle istenen skalar eğrilik bulunur. Kosimplektik durumda ($\alpha = 0$) kesit eğriliği de özdeş olarak sıfır olacaktır. Yani, $\alpha^2 \neq 0$ (alfa-Kenmotsu durumu) için skalar eğrilik değeri geçerlidir. Bu ispatı sonlandırır.

Teorem 2. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, $(n \geq 1)$ eğer M üzerinde $H \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde hem genişleyen hem daralan Ricci solitonlar vardır.

önergeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) , Ricci solitona sahip alfa-kosimplektik manifold olsun. (29), (32), (49) ve (58) nolu eşitlikler yardımıyla,

$$\begin{aligned} & 2\alpha^2 S(Y, \xi) + \alpha^2(2n\alpha^2 - r)g(Y, \xi) \\ & = \alpha\eta(Y)S(\xi, \xi) - (\alpha + \lambda)S(Y, \xi) \end{aligned} \quad (60)$$

ve

$$\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda - \alpha^2(2n\alpha^2 - r) = 0 \quad (61)$$

denklemleri yazılır. (61) nolu eşitlik $r = -2n(2n + 1)\alpha^2$ için düzenlenirse,

$$\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda - 4n\alpha^4(n + 1) = 0$$

denklemini elde edilir. Burada $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) dir. Şimdi, (61) nolu denklem ile verilen ikinci dereceden kuadratik denklemin reel çözümünün olup olmadığını araştıralım. Bu durumda,

$$\Delta = \alpha^4(16n^2 + 16n + 4)$$

ve

$$\lambda = \alpha^2(-1 \pm \sqrt{4n^2 + 4n + 1}) \quad (62)$$

elde edilir. Denklemin reel köklerinin olması için $\Delta \geq 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$\lambda_1 = 2n\alpha^2, \lambda_2 = -2(n+1)\alpha^2 \quad (63)$$

reel kökleri bulunur. Şimdi, bu köklerin Ricci soliton bağlamında ne anlama geldiğini açıklamaya çalışalım. (63) denklemini $\alpha = 0$ için $\lambda = 0$ değerini alır. Bu durumda, Ricci soliton sabittir. Diğer yandan, $\alpha \neq 0$ şartı altında (63) denkleminin α ve n ye bağlı iki farklı reel çözümü mevcuttur. O halde, $\alpha^2 \neq 0$ olmak üzere, (63) denkleminin iki farklı çözümü vardır. Yani,

$$\lambda_1 = 2n\alpha^2 > 0$$

veya

$$\lambda_2 = -2(n+1)\alpha^2 < 0$$

şeklinde. Bunlar geometrik olarak iki farklı soliton çözümüne karşılık gelir. $\lambda_1 > 0$ olduğunda Ricci soliton zamanla genişleyen bir manifold üzerindedir. Genellikle negatif Ricci eğriliğe sahip geometrilerle ilişkilidir. Örnek olarak, evrenin genişlemesi gibi süreçlerde benzer matematiksel yapılar görülür. Evrenin büyük patlamadan sonra genişlemesi gibi bir model olarak düşünülebilir. $\lambda_2 < 0$ şartı altında Ricci soliton zamanla hacmi küçülen (daralan) bir manifold üzerindedir. Örnek olarak, küresel simetriye sahip, başlangıçta büyük ama giderek küçülen (daralan) manifold tipleri

düşünülebilir. Genellikle pozitif Ricci eğriliğe sahip yerlerde görülür ve $S \approx \lambda g$ biçiminde Einstein metriğine yakın bir davranış sergiler. Sonuç olarak, aynı manifoldun iki farklı zaman skalasında iki farklı Ricci soliton durumu mevcut olabilir. Ayrıca, aynı metrik altında iki farklı potansiyel fonksiyonla tanımlanmış soliton çözümleri olabilir. Dolayısıyla Ricci soliton denklemlerinin çift köklü simetrik yapıya sahiptir. Bu çözümde $\alpha \in \mathbb{R}$ olduğundan hem genişleyen hem daralan solitonlar mümkündür. Bu durum sistemin zaman içinde geri dönüşümlü (reversible) dinamiklere de sahip olabileceğini gösterir.

Sonuç 2. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $H \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu sabit değildir.

Kaynakça

Besse, A. L. (1987). *Einstein manifolds*. NY: Springer Science and Business Media.

Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. NY: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Press.

Chen, B. (2015). Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(5), 1535-1547.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255-306.

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986). *Contemporary Mathematics*, 71, 301-307.

Hong, S. & Özgür, C. & Tripathi, M. M. (2006). On some special classes of Kenmotsu manifolds. *Kuwait Journal of Science and Engineering*, 33, 19-32.

Janssens, D. & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 1-27.

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Mathematical Journal*, 24, 93-103.

Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica*, 21, 841-846.

Nomizu, K. (1968). On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. *Tôhoku Mathematical Journal*, 20, 46-69.

Olszak, Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 239-250.

Özgür, C. & Tripathi, M. M. (2007). On P -Sasakian manifolds satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor. *Turkish Journal of Mathematics*, 31, 171-179.

Öztürk, H., Aktan, N. & Murathan, C. (2010). On α -Kenmotsu manifolds satisfying certain conditions. *Applied Sciences*, 12, 115-126.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α -cosymplectic manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 9277175, 1-9.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Almost α -cosymplectic pseudo metric manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 4106025, 1-10.

Öztürk, H., Mısırlı, İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α -cosymplectic manifolds with η -parallel tensor fields, *Academic Journal of Science*, 7(3), 605-612.

Öztürk, S. (2022). A study on α -Kenmotsu manifolds. Canan Demir (Ed.), *Science and mathematics sciences, theory, current researches and new trends 5* içinde (s. 45-58). Montenegro: Ivpe.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2023). Three-dimensional semi-symmetric almost α -cosymplectic manifolds, *Symmetry* 2023, 15, 2022, 1-17.

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2023). Almost α -Kenmotsu Pseudo-Riemannian Manifolds with CR-Integrable Structure, *Symmetry* 2023, 15, 353, 1-13.

Öztürk, H. (2024). Some results on α -Kenmotsu manifolds admitting Ricci Solitons. İlker Eryılmaz (Ed.), *Unified perspectives in mathematics and geometry* içinde (s. 119-141). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. (2024). Ricci solitonlu ϕ -rekürent α -Kenmotsu manifoldlar. Nihan Güngör (Ed.), *Matematikte inovasyon: Modüller, denklemler ve yöntemler içinde* (s. 209-232). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. (2024). Bazı tensör şartlarını sağlayan Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldlar. Nihan Güngör (Ed.), *Matematikte inovasyon: Modüller, denklemler ve yöntemler içinde* (s. 233-255). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. & Yadav, S. K. (2023). A note on Ricci and Yamabe solitons on almost Kenmotsu manifolds, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 53(2), 223-239.

Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar. İlker Eryılmaz (Ed.), *Modern matematikte yeni yaklaşımlar içinde* (s. 22-43). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. & Çelik, O. (2025). Ricci solitona sahip α -kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar. Gülnur Şaffak Atalay (Ed.), *Matematiksel yapılar: Analiz ve geometri perspektifiyle içinde* (s. 27-39). Ankara: BİDGE Yayınları.

Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*.

Shaikh, A. A. & Baishya, K. K. (2005). On (κ, μ) -contact metric manifolds. *Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iași (New Series) Mathematics*, 51(2), 405-416.

Shaikh, A. A. & Kundu, H. (2014). On equivalency of various geometric structures. *Journal of Geometry*, 105, 139-165.

Szabó, Z. I. (1982). Structure theorem on Riemannian spaces satisfying $R \cdot R = 0$. *Journal of Differential Geometry*, 17, 531-582.

Szabó, Z. I. (1984). Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 47, 321-348.

Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Mathematical Journal*, 21, 21-38.

Yadav, S. K. & Öztürk, H. (2019). On (ε) -almost paracontact metric manifolds with conformal η -Ricci solitons, *Differential Geometry- Dynamical Systems*, 21, 202-215.

Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

BÖLÜM 4

BAZI YARI-SİMETRİK ŞARTLARI SAĞLAYAN RİCCİ SOLİTONLU ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Hakan ÖZTÜRK¹

Giriş

Her simetrik uzay, tıpkı bir sanat eseri gibi kendine has geometrik bir kimlik taşır. Kimi Öklid'in katıksız düzenini yansıtır, kimi eliptik geometrinin kıvrımlı zarafetini, kimi de hiperbolik dünyanın genişleyen büyüsunü gösterir. Dahası, bu uzaylar sadece güzel örnekler değil, aynı zamanda güçlü teorik yapılar sunar. Bir yandan paralel eğrilik tensörüyle donanmış Lie grupları olarak karşımıza çıkarken, diğer yandan her noktasında yansıma simetrisi barındıran geometrik mekânlar olarak da düşünülebilirler. Simetrinin bu denli merkezde olduğu bir dünyada, her bakış açısı yeni bir keşif kapısı aralayabilir. Matematiksel geometrinin ilgi çekici bir konusu olan yarı-simetrik uzaylar, temelde lokal simetrik uzay kavramının daha esnek bir versiyonu olarak düşünülebilir. Bir Riemann manifoldunun yarı-simetrik olarak nitelendirilebilmesi için, manifold üzerinde tanımlı herhangi X ve Y vektör alanlarına karşılık, $R(X,Y) \cdot R = 0$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu denklemde R eğrilik tensörü, bir cebirsel operatör gibi davranarak uzayın geometrik yapısını kodlar. Bu tür uzaylara yarı-simetrik denilmesinin nedeni, herhangi bir q noktasında manifoldun eğrilik tensörünün, klasik simetrik uzaylardaki eğrilik tensörüyle

¹Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, hakser23@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1299-3153

örtüşebilmesidir. Ancak bu uyum, noktadan noktaya değişiklik gösterebilen bir özelliktir. Lokal simetrik uzaylar ise daha katı bir simetri koşulu getirir, yani; $\nabla R = 0$ ile tanımlıdır. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonunu temsil eder ve bu koşul, eğrilik tensörünün manifold boyunca sabit kaldığını ifade eder. Bu tür uzaylar, matematiksel fiziğin yanı sıra sayılar teorisi ve cebirsel geometri gibi çeşitli alanlarda doğal olarak ortaya çıkarlar. Yarı-simetrik uzaylar, eğriliğin cebirsel davranışına bir kısıtlama getirirken; lokal simetrik uzaylar, eğriliğin uzayda nasıl değiştiğine (diferensiyel yapısına) bir kısıtlama getirir. Yarı-simetri cebirsel ve lokal simetri ise diferensiyel geometrik bir gerekliliktir.

Matematik literatüründe yarı-simetrik uzayların sistematik sınıflandırması, Szabó'nun 1982 yılındaki çalışmasıyla yeni bir aşamaya ulaşmıştır (Szabó, 1982). Ancak bu alandaki ilk çalışma, Nomizu'nun 1968 yılında ifade ettiği ve günümüzde o isimle anılan $R \cdot R = 0$ koşulunda gizlidir (Nomizu, 1968).

Kenmotsu manifoldları, değme geometrisinin önemli bir alt sınıfını oluşturan, hemen hemen değme metrik manifoldların özel bir türüdür (Kenmotsu, 1972). Bunu takiben, Janssens ve Vanhecke, Kenmotsu yapıların α parametresiyle genelleştirerek hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldlar kavramını geometri literatürüne kazandırmışlardır (Janssens & Vanhecke, 1981). Daha sonra, Kim ve Pak bu gelişmeyi bir adım öteye taşıyarak, hemen hemen alfa-Kenmotsu yapıları ile hemen hemen kosimplektik yapıları sentezleyen yeni bir sınıf tanımlamışlardır (Kim & Pak, 2005). Hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılan bu yapılar, hemen hemen değme metrik manifoldlar ailesinin önemli bir alt sınıfını oluşturmaktadır.

Matematiksel fizik ve diferensiyel geometrinin kesişiminde yer alan Ricci akışı, Riemann manifoldlarındaki metrik yapının zamana bağlı evrimini modelleyen güçlü bir araç olarak karşımıza

çıkmiştir. Richard Hamilton'ın 1982 yılındaki öncü çalışmasıyla matematik dünyasına kazandırılan bu yöntem, topolojinin en zorlu problemlerinden biri olan Poincaré hipotezine giden yolu açmıştır (Hamilton, 1982). Hamilton'un 1988 yılında yüzeyler üzerindeki Ricci akışını detaylıca incelemesi, sürecin temel özelliklerini ortaya çıkarmıştır (Hamilton, 1988). Ancak bu çalışmalar, akış sırasında ortaya çıkan ve eğrilğin sonsuza ıraksadığı metrik tekilliklerin varlığını da göstermiştir. Bu kritik engel, "cerrahi operasyonlar" adı verilen ve manifoldun tekillik bölgelerinin kontrollü bir şekilde çıkarılmasını sağlayan yenilikçi tekniklerin geliştirilmesini gerektirmiştir. Grigori Perelman'ın 2002 yılındaki çığır açıcı çalışması, 3-boyutlu manifoldlarda Ricci akışının tekilliklerini sistematik olarak sınıflandırarak bu sorunu aşmayı başarmıştır (Perelman, 2002). Perelman'ın geliştirdiği entropi tabanlı yaklaşım, akışın tekilliklerden arındırılmasını sağlamış ve nihayetinde Poincaré hipotezinin ispatlanmasıyla sonuçlanmıştır. Bu başarı, modern geometri analizinde Ricci akışının merkezi önemini pekiştirmiş ve matematik tarihinde yeni bir dönüm noktası oluşturmıştır.

Ricci solitonların varlığı, hem geometrik evrimin kritik noktalarını yansıtır hem de manifoldların sabit eğrilikli yapılara nasıl yakınsayabileceğine dair ipuçları verir. Bu nedenlerden dolayı, Ricci solitonlar konusu önemli bir araştırma alanı olarak görülmüştür (Yadav & Öztürk, 2019), (Öztürk & Yadav, 2023), (Öztürk & Bektaş, 2023), (Öztürk & Çelik, 2025),

Bu çalışmada, $R \cdot R = 0$ ve $C \cdot R = 0$ eşitlikleri yardımıyla alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar araştırılmıştır. Özellikle, farklı yarı-simetrik yapıda olan $C \cdot R = 0$ tensörel koşulunu sağlayan Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde sonuçlar bulunmuştur.

Literatür Bilgisi

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir manifold M olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için; ϕ , $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η 1-form olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \phi = 0 \quad (1)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2)$$

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y), \quad \eta(X) = g(X, \xi) \quad (3)$$

eşitliklerini gerçekleyen g metrik tensörü ile donatılmış (M, ϕ, ξ, η, g) yapısına bir hemen hemen değme metrik manifold adı verilir. Burada $g(\xi, \xi) = 1$ dir. Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapının temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (4)$$

şeklinde tanımlanır (Blair, 1976). $(1,3)$ -tipli Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (5)$$

şeklinde tanımlıdır. Bundan başka, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde $(0,2)$ -tipli Ricci tensörü ve Ricci operatörü, sırasıyla,

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^{2n+1} g(R(E_j, X)Y, E_j) \quad (6)$$

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (7)$$

ile verilir. Burada $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal bir tabandır (Yano & Kon, 1984). $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünersek, her vektör alanı X için, $(X, f \frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir

fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (8)$$

ile verilir. Eğer J integrallenebilirse o zaman, hemen hemen değme metrik (M, ϕ, ξ, η) -yapısı normaldir. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad (9)$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifoldu

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 0 \quad (10)$$

şartlarını sağlıyorsa, M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir. M nin bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Olszak, 1981). Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (11)$$

denklemleri sağlanıyorsa, M ye bir hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold denir (Janssens & Vanhecke, 1981). Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu, 1972). (M, ϕ, ξ, η, g) normal ise o zaman alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, (11) denklemleri sağlanıyorsa, M ye hemen hemen alfa-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik manifold, $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır. Eğer hemen hemen değme metrik yapı (M, ϕ, ξ, η, g) Kaehler yapıya sahipse o zaman α reel sayısı için M ye alfa-kosimplektik manifold denir. Yani, $\alpha = 0$ için

(M, ϕ, ξ, η, g) yapısı kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ için alfa-Kenmotsu olarak adlandırılır (Kim & Pak, 2005).

Önerme 1. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. M nin bir alfa-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \quad (12)$$

dir (Öztürk, 2021).

Önerme 2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha \eta(X)\xi \quad (13)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] \quad (14)$$

$$R(X, Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (15)$$

$$R(X, \xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \quad (16)$$

$$R(X, \xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \quad (17)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)] \quad (18)$$

$$S(X, \xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X) \quad (19)$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \quad (20)$$

denklemleri sağlanır. Burada α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Tanım 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2n-1} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\ &\quad - g(X, Z)QY + g(Y, Z)QX] \\ &\quad + \frac{r}{2n(2n-1)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde tanımlanan (1,3)-tipli C ye Weyl konformal eğrilik tensör alanı adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Ricci Solitonlu Alfa-Kosimplektik Yapılar

Bu bölümde ana sonuçlar bölümünde kullanılacak temel kavramlar ve temel eğrilik özellikleri verilmiştir.

Tanım 2. (M, g_0) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(t)) + 2S(g(t)) = 0, \quad g(0) = g_0 \quad (22)$$

kısmi türevli diferansiyel denkleminde g metrik tensörünü eviren Ricci akışı denir (Hamilton, 1982). Burada t zaman parametresidir.

Ricci akışı, Grigori Perelman'ın 2002 yılında Poincaré Sanısı'nı çözmedeki kritik rolüyle matematik tarihine geçen olağanüstü bir araçtır. Temelde, bir manifoldun metrik yapısının zaman içindeki evrimini yöneten bir kısmi diferansiyel denklem olarak görülebilir. Yani, bu akış tıpkı bir heykeltıraşın mermeri şekillendirmesi gibi, uzayın geometrisini Ricci eğriliğine göre yeniden biçimlendirir. Bu denklem, g metrik tensörünün zamana bağlı değişimini, manifoldun eğrilik özelliklerine göre düzenler. Sürecin temel felsefesi, uzayın pürüzlü eğrilik dağılımını adeta bir ütü gibi düzleştirmektir. İlginç olan, bu düzleşme sürecinin eğriliğin işaretine göre farklı davranmasıdır. Pozitif eğrilikli bölgeler (küresel yapılar) zamanla büzülür (küçülür), tıpkı sıcak havayla temas eden bir balonun küçülmesi gibi. Diğer yandan, negatif eğrilikli bölgeler (hiperbolik yapılar) zamanla genişler (büyür) tıpkı bir kâğıdın buruşukluklarının açılmasında olduğu gibi.

Ricci akışı teorisinde özel bir yere sahip olan Ricci solitonları, bu dinamik sürecin sabit formu çözümleridir. Örnek olarak, okyanusta şeklini koruyarak ilerleyen bir dalga gibi, Ricci solitonları da akış boyunca temel geometrik karakterini muhafaza eder. Yani, ya

tamamen değişmez kalır ya da yalnızca ölçek değişikliğine uğrar. Bu yapılar, Ricci akışının uzun vadeli davranışını analiz etmede kilit rol oynar. Soliton terimi, ilk olarak dalga mekaniğinde kendini koruyan lokalize çözümleri tanımlamak için kullanılmıştır. Geometrik manası ise, bir Ricci solitonu metrik tensörün Ricci akışı altındaki öz-benzerlik özelliğini yansıttırmasıdır. Bu durum, akışın zaman evriminde adeta bir dengeli sabit nokta gibi davranan özel metrik konfigürasyonlar sunar.

Tanım 3. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfî vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (23)$$

denklemini sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ değerinin $\lambda < 0, \lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g, V$ yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (24)$$

dır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 5. (M, g, V, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı Killing vektör alanı ($L_V g = 0$) ise o zaman (M, g, V, λ) ye basit Ricci soliton adı verilir (Chen 2015).

Tanım 6. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa,

(M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 3. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (25)$$

denklemini sağlar. Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 4. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \quad (26)$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \quad (27)$$

$$Q\xi = -\lambda\xi \quad (28)$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \quad (29)$$

$$r = \alpha - (2n + 1)(\alpha + \lambda). \quad (30)$$

Burada α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Temel Sonuçlar

Bu bölümde, yarı-simetrik koşul ve $C \cdot R = 0$ tensörel çarpımı yardımıyla verilen Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı için $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Bu durumda, Weyl konformal eğrilik tensör alanı

$$\eta(C(U, V)W) = \left[-\frac{r}{2n(2n-1)} + \frac{\alpha^2}{2n-1} \right] [g(V, W)\eta(U)g(U, W)\eta(V)] \\ - \frac{1}{2n-1} [S(V, W)\eta(U) - S(U, W)\eta(V)] \quad (31)$$

eşitliği ile yazılır.

İspat. (18) ve (21) nolu eşitlikler birlikte hesaba katılırsa (31) nolu eşitliğin ispatı aşıkardır.

Önerme 5. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M yarı-simetrik ise o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu

$$S(Y, Z) = -2\alpha^2 ng(Y, Z) \quad (32)$$

ve

$$r = -2n(2n + 1)\alpha^2 \quad (33)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. M üzerinde yarı-simetrik olarak adlandırılan tensörel çarpım sağlansın. O halde,

$$(R(U, V) \cdot R)(W, Y)Z = 0 \quad (34)$$

$$R(\xi, V)R(W, Y)Z - R(R(\xi, V)W, Y)Z \\ - R(W, R(\xi, V)Y)Z - R(W, Y)R(\xi, V)Z = 0 \quad (35)$$

$$\eta(R(\xi, V)R(W, Y)Z) - \eta(R(R(\xi, V)W, Y)Z) \\ - \eta(R(W, R(\xi, V)Y)Z) - \eta(R(W, Y)R(\xi, V)Z) = 0 \quad (36)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (36) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapılırsa,

$$0 = -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)R(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, R(\xi, E_j)Y)Z) \\ - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(R(\xi, E_j)E_j, Y)Z) + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \quad (37)$$

elde edilir. (37) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (15)-(17) nolu eşitlikler kullanılarak hesaba yapılırsa,

$$-\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)R(\xi, E_j)Z) = -2n\alpha^4 \eta(Y)\eta(Z) \quad (38)$$

$$-\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, R(\xi, E_j)Y)Z) \\ = -\alpha^4(-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \quad (39)$$

$$-\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(R(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\ = 2n\alpha^4(-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \\ = \alpha^2[-S(Y, Z) - \alpha^2(g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z))] \quad (41)$$

bulunur. Son olarak, (38)-(41) nolu eşitlikler birlikte göz önüne alınırsa (37) nolu eşitlik

$$S(Y, Z) = -2n\alpha^2 g(Y, Z)$$

haline dönüşür. Böylece (32) nolu eşitliğin ispatı tamamlanır. Ayrıca, bu son denklemin her iki tarafının $Y = Z = E_j$ için, $1 \leq j \leq 2n + 1$ olmak üzere, izi alınırsa (33) nolu eşitliğinin ispatı da sonlanır.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, eğer M yarı-simetrik ise o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu için ,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda M üzerinde Ricci soliton daima genişleyendir,

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) Ricci solitonlu alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, (26) nolu denklem yardımıyla

$$S(Y, \xi) = -\lambda\eta(Y)$$

yazılır. Ayrıca, (32) nolu denklem $Z = \xi$ için,

$$S(Y, \xi) = -2\alpha^2 n\eta(Y)$$

elde edilir. Bu son iki denklemin sağ taraflarının eşitliğinden

$$\lambda = 2n\alpha^2 \quad (42)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\xi(\alpha) = 0$ seçildiğinden α reel bir sabit olarak alınabilir. Böylece (42) nolu denklem $\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$ durumları altında sırasıyla, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ haline dönüşür. Bu nedenle (a) ve (b) şıklarının ispatı Ricci soliton tanımından aşıkardır.

Sonuç 1. (M, ϕ, ξ, η, g) üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun ($n \geq 1$). Eğer M yarı-simetrik ise o zaman (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu asla daralan durumda olamaz.

Önerme 6. (M, ϕ, ξ, η, g) yapısı üzerinde $\xi(\alpha) = 0$ olsun. Eğer M üzerinde $C \cdot R = 0$ tensörel çarpımı mevcutsa, o zaman keyfi vektör alanları için,

$$\begin{aligned} S(QY, Z) = & -\left(\frac{r}{2n} - 2\alpha^2\right)S(Y, Z) \\ & -2\alpha^2(-n\alpha^2 + r)g(Y, Z) \end{aligned} \quad (43)$$

ve

$$r = -2n(2n + 1)\alpha^2$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. Alfa-kosimplektik manifold M aşağıdaki tensörel çarpım ile verilsin. Bu durumda,

$$(C(U, V) \cdot R)(W, Y)Z = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & C(\xi, V)R(W, Y)Z - R(C(\xi, V)W, Y)Z \\ & - R(W, C(\xi, V)Y)Z - R(W, Y)C(\xi, V)Z = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \eta(C(\xi, V)R(W, Y)Z) - \eta(R(C(\xi, V)W, Y)Z) \\ & - \eta(R(W, C(\xi, V)Y)Z) - \eta(R(W, Y)C(\xi, V)Z) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

yazılır. $\{E_j, j = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (46) nolu eşitliğe $1 \leq j \leq 2n + 1$ ve $V = W = E_j$ için kontraksiyon yapıldığında (toplam alınırsa),

$$\begin{aligned} 0 = & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)C(\xi, E_j)Z) - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, C(\xi, E_j)Y)Z) \\ & - \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(C(\xi, E_j)E_j, Y)Z) + \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \end{aligned} \quad (47)$$

elde edilir. (47) nolu denklemin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı olacak şekilde (15)-(17) nolu eşitlikler kullanılarak hesaba katılırsa,

$$-\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, Y)C(\xi, E_j)Z) = -\frac{2\alpha^2 r}{2n-1} \eta(Y)\eta(Z) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(E_j, C(\xi, E_j)Y)Z) \\ & = \alpha^2 \left[\frac{\alpha^2}{2n-1} - \frac{r}{2n(2n-1)} \right] (g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \\ & - \frac{\alpha^2}{2n-1} [2n\alpha^2 \eta(Y)\eta(Z) + S(Y, Z)] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{2n+1} \eta(R(C(\xi, E_j)E_j, Y)Z) \\
& = \frac{2\alpha^2 r}{2n-1} (-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2n+1} \eta(C(\xi, E_j)R(E_j, Y)Z) \\
& = [\frac{\alpha^2}{2n-1} - \frac{r}{2n(2n-1)}](-\alpha^2[-g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)] - S(Y, Z)) \\
& + \frac{1}{2n-1} [2n\alpha^4(g(Y, Z) + \eta(Y)\eta(Z)) - S(QY, Z)] \quad (51)
\end{aligned}$$

elde edilir. (48)-(51) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa (47) eşitliği

$$S(QY, Z) = (-\frac{r}{2n} + 2\alpha^2)S(Y, Z) + 2\alpha^2(n\alpha^2 - r)g(Y, Z)$$

formuna dönüşür. Burada hatırlatalım ki,

$$S(QY, Z) = S^2(Y, Z) = S(-2n\alpha^2 Y, Z) = -2n\alpha^2 S(Y, Z) \quad (52)$$

ve

$$QY = -2n\alpha^2 Y$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece (43) nolu denklemin ispatına ulaşılır. Son olarak, (43) nolu eşitlikte $Y = Z = \xi$ seçilirse,

$$-2n\alpha^2[2\alpha^2 - (r/(2n)) + 2n\alpha^2] = 2\alpha^2[r - n\alpha^2]$$

bulunur. Bu son eşitliğin düzenlenmesiyle,

$$-r\alpha^2 - 2n\alpha^4 - 4n^2\alpha^4 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu son eşitlik istenen skalar eğrilik sonucunu doğrular. Kosimplektik durumda ($\alpha = 0$) kesit eğriligi de özdeş olarak sıfır olacaktır. Yani, $\alpha^2 \neq 0$ (alfa-Kenmotsu durumu) için skalar eğrilik değeri geçerlidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2. (M, ϕ, ξ, η, g) bir $(2n + 1)$ -boyutlu alfa-kosimplektik manifold olsun. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, $(n \geq 1)$ eğer M üzerinde $C \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman (g, ξ, λ) Ricci solitonu için,

(a) $\alpha = 0$ olduğunda M üzerinde basit sabit Ricci soliton vardır,

(b) $\alpha \neq 0$ olduğunda Ricci soliton taşıyan bir alfa-Kenmotsu manifoldu yoktur,

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (M, g, ξ, λ) , Ricci solitona sahip alfa-kosimplektik manifold olsun. (43) ve (52) nolu eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{r}{2n} + 2\alpha^2\right)S(Y, \xi) + 2\alpha^2(n\alpha^2 - r)g(Y, \xi) \\ &= \alpha\eta(Y)S(\xi, \xi) - (\alpha + \lambda)S(Y, \xi) \end{aligned} \quad (53)$$

bulunur. (26) ve (29) nolu eşitlikler yardımıyla (53) nolu eşitlik

$$\lambda^2 + 2\lambda\alpha^2 - (r/2n)\lambda - 2\alpha^2(n\alpha^2 - r) = 0 \quad (54)$$

şekline indirgenir. (54) nolu eşitlik $r = -2n(2n + 1)\alpha^2$ için düzenlenirse,

$$\lambda^2 + \alpha^2(2n + 3)\lambda + 2n\alpha^4(4n + 1) = 0 \quad (55)$$

denklemi elde edilir. Burada $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) dir. Şimdi, (55) nolu denklem ile verilen ikinci dereceden kuadratik denklemin reel çözümünün olup olmadığını araştıralım. Bu durumda,

$$\Delta = \alpha^4(-28n^2 + 4n + 9)$$

ve

$$\lambda = \frac{-\alpha^2(2n+3) \pm \alpha^2 \sqrt{-28n^2 + 4n + 9}}{2} \quad (56)$$

elde edilir. Denklemin reel köklerinin olması için $\Delta \geq 0$ olmalıdır. Bu kuadratik fonksiyonun maksimum noktası (tepe noktası)

$$n = -\frac{4}{2(-28)} = \frac{1}{14}$$

olur. Yani, bu fonksiyon kolları aşağı doğru açılan bir paraboldür. Ayrıca, en büyük değerini $n = 1/14$ için alır. $n \geq 1$ şartı altında

$$-28n^2 + 4n + 9 < 0$$

önermesi geçerlidir. Dolayısıyla (56) nolu denklem $\alpha = 0$ için $\lambda = 0$ değerini alır. Bu nedenle, Ricci soliton sabittir. Benzer olarak, $\alpha \neq 0$ şartı altında (56) nolu denklemin reel kökleri mevcut değildir. Böylece alfa-Kenmotsu manifoldu üzerinde bir Ricci soliton taşınamaz.

Sonuç 2. (M, ϕ, ξ, η, g) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir alfa-Kenmotsu manifold ve α, ξ boyunca paralel olsun ($n \geq 1$). Eğer M üzerinde $C \cdot R = 0$ tensörel çarpımı sağlanıyorsa, o zaman M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu yoktur.

Kaynakça

Besse, A. L. (1987). *Einstein manifolds*. NY: Springer Science and Business Media.

Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. NY: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg Press.

Chen, B. (2015). Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(5), 1535-1547.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255-306.

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986). *Contemporary Mathematics*, 71, 301-307.

Janssens, D. & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 1-27.

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Mathematical Journal*, 24, 93-103.

Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica*, 21, 841-846.

Nomizu, K. (1968). On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. *Tôhoku Mathematical Journal*, 20, 46-69.

Olszak, Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 4, 239-250.

Öztürk, H., Aktan, N. & Murathan, C. (2010). On α -Kenmotsu manifolds satisfying certain conditions. *Applied Sciences*, 12, 115-126.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α -cosymplectic manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 9277175, 1-9.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Almost α -cosymplectic pseudo metric manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 4106025, 1-10.

Öztürk, H., Mısırlı, İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α -cosymplectic manifolds with η -parallel tensor fields, *Academic Journal of Science*, 7(3), 605-612.

Öztürk, S. (2022). A study on α -Kenmotsu manifolds. Canan Demir (Ed.), *Science and mathematics sciences, theory, current researches and new trends 5* içinde (s. 45-58). Montenegro: Iype.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2023). Three-dimensional semi-symmetric almost α -cosymplectic manifolds, *Symmetry* 2023, 15, 2022, 1-17.

Öztürk, H. (2024). Some results on α -Kenmotsu manifolds admitting Ricci Solitons. İlker Eryılmaz (Ed.), *Unified perspectives in mathematics and geometry* içinde (s. 119-141). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. (2024). Ricci solitonlu ϕ -rekürent α -Kenmotsu manifoldlar. Nihan Güngör (Ed.), *Matematikte inovasyon: Modüller, denklemler ve yöntemler* içinde (s. 209-232). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. (2024). Bazı tensör şartlarını sağlayan Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldlar. Nihan Güngör (Ed.), *Matematikte inovasyon: Modüller, denklemler ve yöntemler* içinde (s. 233-255). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. & Yadav, S. K. (2023). A note on Ricci and Yamabe solitons on almost Kenmotsu manifolds, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 53(2), 223-239.

Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar. İlker Eryılmaz (Ed.), *Modern matematikte yeni yaklaşımlar* içinde (s. 22-43). Ankara: BİDGE Yayınları.

Öztürk, H. & Çelik, O. (2025). Ricci solitona sahip α -kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar. Gülnur Şaffak Atalay (Ed.), *Matematiksel yapılar: Analiz ve geometri perspektifiyle* içinde (s. 27-39). Ankara: BİDGE Yayınları.

Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*.

Szabó, Z. I. (1982). Structure theorem on Riemannian spaces satisfying $R \cdot R = 0$. *Journal of Differential Geometry*, 17, 531-582.

Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Mathematical Journal*, 21, 21-38.

Yadav, S. K. & Öztürk, H. (2019). On (ε) -almost paracontact metric manifolds with conformal η -Ricci solitons, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 21, 202-215.

Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

BÖLÜM 5

E³ ÖKLİD UZAYINDA İNVLÜT–EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Mustafa BİLİCİ¹

Giriş

İnvolüt–evolüt eğri çifti, diferansiyel geometrinin klasik fakat güncelliğini koruyan konuları arasında yer almaktadır. Bir eğrinin involütü, söz konusu eğrinin tanjant doğrultusuna diklik koşulu altında tanımlanırken; evolüt eğrisi, bu ilişkinin tersini ifade eder. Bu eğriler arasındaki bağ, yalnızca eğrilerin konumsal ilişkileriyle sınırlı olmayıp, Frenet çatıları, eğrilik–burulma fonksiyonları ve Darboux vektörleri üzerinden daha derin geometrik anlamlar barındırmaktadır. Bu bölümde, Öklid uzayında tanımlı involüt–evolüt eğri çiftlerinin geometrik özellikleri bütüncül bir bakış açısıyla ele alınmaktadır. Özellikle, eğrinin Frenet vektörlerinden biri olan binormal vektör B ile Darboux vektörü W arasındaki açının

¹ Prof. Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Samsun, Türkiye, Orcid: 0000-0002-3502-5027

varlığı temel alınarak, söz konusu çatılar arasındaki geometrik bağıntılar farklı bir yaklaşımla incelenmiştir. Bu yaklaşım sayesinde, involüt ve evolüt eğrilerinin birbirleriyle olan ilişkileri klasik yöntemlerden farklı bir bakış açısıyla ortaya konulmuş ve eğri çiftine ilişkin çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Aşağıda verilen temel tanım ve teoremler, (Hacısalıhoğlu, 1983), (O'Neill, 1996), (Fenchel, 1951) kaynaklarında sunulan kuramsal çerçeve esas alınarak üç boyutlu vektör uzayı için ele alınmıştır.

Tanım 1. A boş olmayan bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$$\begin{aligned}\psi : A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow \psi(P, Q)\end{aligned}$$

dönüşümü için aşağıdaki iki aksiyom sağlanırsa, A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$(A_1) \quad \forall P, Q, R \in A \quad \psi(P, R) = \psi(P, Q) + \psi(Q, R) ,$$

$(A_2) \quad \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\psi(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Burada P noktasına başlangıç ve Q noktasına da uç noktası denir. Diğer taraftan A nın boyutu

$$boy A = boy V$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2. $\Re$ reel sayılar cismi ve V bir reel vektör uzayı olmak üzere, üzerinde

$$\begin{aligned}\langle , \rangle : V \times V &\rightarrow \Re \\ (P, Q) &\rightarrow \langle P, Q \rangle = \langle P, Q \rangle\end{aligned}$$

biçiminde iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına reel iç-çarpım uzayı denir.

Tanım 3. V bir reel iç-çarpım uzayı olsun. ile birleşen bir A afin uzayına Öklid uzayı denir ve genellikle E^3 ile gösterilir.

Tanım 4. E^3 3-boyutlu Öklid uzayı olsun.

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}, 1 \leq i \leq 3$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna, E^3 Öklid uzayı üzerinde uzaklık fonksiyonu ve $d(X, Y) = \|\overline{XY}\|$ reel sayısına da $X, Y \in E^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 5. $I \subset \mathfrak{R}$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlanan diferensiyellenebilir fonksiyona E^3 de bir eğri denir. Burada, I ya eğrinin parametre aralığı denir.

Tanım 6. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\|\alpha'(t)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. Eğer M eğrisinin her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise de bu eğriye regüler eğri adı verilir.

Tanım 7. Bir $M \subset E^3$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı genellikle $\{T, N, B\}$ ile gösterilir. Bu yapıda T' ye teğet vektör alanı, N' ye asli normal vektör alanı, B' ye de binormal vektör alanı denir. Ayrıca M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki birinci ve ikinci

eğrilikleri κ ve τ ile gösterilir. κ ya M nin eğriliği τ ya da burulması denir. Bu halde Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa N + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases} \quad (1)$$

şeklindedir.

Tanım 8. $M \subset E^3$ eğrisi üzerindeki bir $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken T, N, B vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B = N \wedge N' \quad (2)$$

olup, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır. $W = N \wedge N'$ olduğu,

$$N \wedge N' = \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{vmatrix}$$

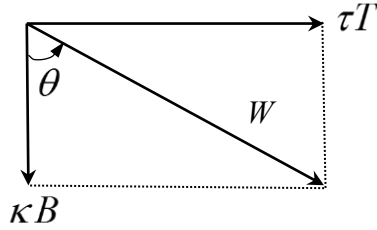
ifadesinden açıktır.

B binormal vektör alanı ile W Darboux vektörü arasındaki açı θ ile gösterilirse,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cos \theta \\ \tau = \|W\| \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

olduğu kolayca görülür (Şekil 1).

Şekil 1 Darboux vektörü



W Darboux vektörü yönündeki birim vektörü C ile gösterirsek, $\|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \geq 0$ olmak üzere

$$C = \sin \theta T + \cos \theta B \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 9. $M \subset E^3$, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve M nin $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasındaki 1. ve 2. eğrilikleri κ ve τ olsun. Bu takdirde,

$$H_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow H_1(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, M nin 1-inci harmonik eğriliği denir.

Tanım 10. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(s)$ ve U da sabit bir vektör olsun. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ ile U arasındaki açı sabit ise M ye bir eğilim çizgisi (helis), $Sp\{U\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim eksenidir.

Teorem 1. Bir $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin bir eğilim çizgisi (helis) olması için gerek ve yeter şart 1-inci harmonik eğriliğinin sabit olmasıdır.

Teorem 2. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı

1) Eğer $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s), \\ N(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s), \\ B(s) = T(s) \times N(s). \end{cases} \quad (5)$$

2) Eğer $s \in I$ yay parametresi değil ise

$$\begin{cases} T(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s), \\ N(s) = B(s) \times T(s), \\ B(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \times \alpha''(s)). \end{cases} \quad (6)$$

şeklinde dir.

Teorem 3. M, E^3 de eğriliği pozitif olan birim hızlı bir eğri olsun. M eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır.

Teorem 4. M, E^3 de bir birim hızlı eğri olsun. M eğrisinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır.

Tanım 11. $M_1, M_2 \subset E^3$ iki eğri olsun. M_1 ve M_2 , sırası ile, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M_1 ve M_2 nin Frenet 3-ayaklıları, sırası ile,

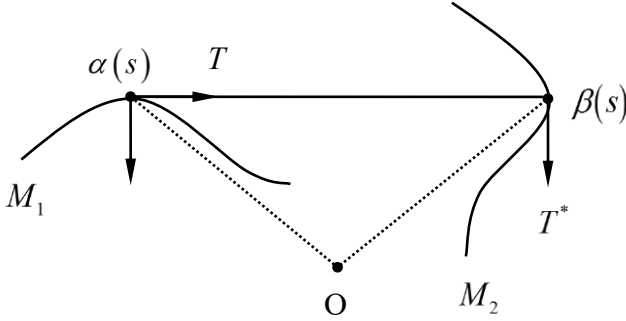
$$\{T, N, B\} \quad \text{ve} \quad \{T^*, N^*, B^*\}$$

olmak üzere

$$\langle T, T^* \rangle = 0$$

ise M_2 ye M_1 in involütü, M_1 e de M_2 nin evolütü denir (Şekil 2).

Şekil 2 İnvolut-evolüt eğri çifti



Teorem 5. $M_1, M_2 \subset E^3$ eğrileri (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer M_2 , M_1 in involütü ise $\forall s \in I$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = (c - s), c = \text{sabit}$$

dir.

Teorem 6. $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğrileri, (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 nin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırası ile

$$\{T, N, B\} \quad \text{ve} \quad \{T^*, N^*, B^*\}$$

M_1 ve M_2 nin eğrilik ve burulmaları κ, τ ve κ^*, τ^* ise

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2 (c - s)^2} \quad \text{ve} \quad \tau^* = \frac{\kappa \dot{\tau} - \dot{\kappa} \tau}{\kappa (c - s) (\kappa^2 + \tau^2)}$$

dir.

İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri ve Frenet Çatıları

Bu bölümde, involüt-evolüt eğri çiftlerinin Frenet çatıları arasındaki ilişkiler, binormal vektör B ile Darboux vektörü W arasındaki θ açısı esas alınarak açısal bir yaklaşımla ifade edilmiştir.

Teorem 7. $M_1, M_2 \subset E^3$ eğri çifti, sırası ile, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer M_2 , M_1 in involütü ise,

$s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & c \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (7)$$

bağıntısı vardır. Burada $\angle(B, W) = \theta$ dir.

İspat. M_2 , M_1 in involütü olduğundan

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s), \lambda \in \mathfrak{R} \quad (8)$$

yazılabilir. Teorem 5. den dolayı $\lambda = d(\alpha(s), \beta(s)) = c - s$ olduğu gözönüne alınarak (8) ifadesinde her iki tarafın da s ye göre türevi alınır,

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} T + \lambda \kappa N \quad (9)$$

olur. β nın s parametresine göre türevini $\dot{\beta}$ ile gösterelim. Diğer yandan

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = T^* \frac{ds^*}{ds}$$

yazılabilir. Bu son ifadeyi (9) ile mukayese edersek

$$\dot{\beta} = T^* \frac{ds^*}{ds} = \lambda \kappa N \quad (10)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \lambda \kappa$$

bulunur. Bu netice (10) denkleminde yerine yazılırsa

$$T^* = N \quad (11)$$

elde edilir. (10) denkleminden $\dot{\beta} = \lambda \kappa N$ olduğundan

$$\ddot{\beta} = -\lambda \kappa^2 T + (\lambda \kappa' - \kappa) N + \lambda \kappa \tau B$$

ve

$$\dot{\beta} \times \ddot{\beta} = \lambda^2 \kappa^2 \tau T + \lambda^2 \kappa^3 B$$

dir. İnvölüt eğrisi için $s \in I$ yay parametresi olmadığından, (6) denkleminde binormal vektör

$$B^* = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

olur. (4) denklemleri kullanılarak

$$B^* = s \sin \theta T + c \cos \theta B \quad (12)$$

olur. $N^* = B^* \times T^*$ olduğundan

$$N^* = -c \cos \theta T + s \sin \theta B \quad (13)$$

elde edilir. Bu durumda (11), (12), (13) denklemleri matris formunda ifade edilirse ispat tamamlanır.

İnvölüt–Evolüt Eğri Çiftlerinin Darboux vektörleri

Teorem 8. $M_1, M_2 \subset E^3$ invölüt–evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin Darboux vektörleri, sırası ile, W ve W^* olmak üzere W ve W^* arasında

$$W^* = \frac{I}{\kappa(c-s)} (W + \dot{\theta} N)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2) bağıntısından

$$W = \tau T + \kappa B$$

ve

$$W^* = \tau^* T^* + \kappa^* B^*$$

dır. Teorem 6, (11) ve (12) den

$$W^* = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa(c-s)} (s \sin \theta T + c \cos \theta B) + \frac{\kappa \dot{\tau} - \dot{\kappa} \tau}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)} N,$$

şeklinde olur. (3) denklemi bu son denklem ile birleştirilirse,

$$W^* = \frac{\tau}{\kappa(c-s)} T + \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) \kappa^2}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)} + \frac{\kappa}{\kappa(c-s)} B ,$$

$$W^* = \frac{I}{\kappa(c-s)} (\tau T + \kappa B + \dot{\theta} N)$$

olur ve (2) denklemi kullanılarak

$$W^* = \frac{I}{\kappa(c-s)} (W + \dot{\theta} N) \quad (14)$$

elde edilir.

Teorem 9. $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğri çifti olsun. (M_1, M_2) eğri çiftinin Darboux vektörleri yönündeki birim vektörleri C ve C^* olsun. C ve C^* arasında

$$C^* = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \kappa^2 + \tau^2}} N + \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \kappa^2 + \tau^2}} C$$

bağıntısı vardır.

İspat. (4) bağıntısından

$$C = \sin \theta T + \cos \theta B$$

ve B^* ile W^* Darboux vektörü arasındaki açı θ^* olmak üzere

$$C^* = \sin \theta^* T^* + \cos \theta^* B^* \quad (15)$$

dır. Şimdi $\sin \theta^*$ ve $\cos \theta^*$ değerlerini hesaplayalım. (2) denklemden

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cos \theta \\ \tau = \|W\| \sin \theta \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \kappa^* = \|W^*\| \cos \theta^* \\ \tau^* = \|W^*\| \sin \theta^* \end{cases} \quad (16)$$

dır. Teorem 6 ve (14) deki neticeler (16) da yerine yazılırsa,

$$\sin \theta^* = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \kappa^2 + \tau^2}}, \quad (17)$$

$$\cos \theta^* = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \kappa^2 + \tau^2}} \quad (18)$$

olur. (17) ve (18) denklemleri (15) denkleminde yerine yazılırsa

$$C^* = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \kappa^2 + \tau^2}} N + \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \kappa^2 + \tau^2}} C \quad (19)$$

elde edilir.

Sonuç 1. $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğri çifti olsun. Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise

a. M_2 involüt eğrisinin Darboux vektörü W^* ile binormal vektörü B^* lineer bağımlıdır.

b. $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğri çiftinin Darboux vektörleri yönündeki birim vektörleri aynıdır.

İspat. a. Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise Teorem 3.2.2 den

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

dir. (3) denklemini gözönüne alınırsa

$$\begin{cases} tg\theta = sabit \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

bulunur. Bu son netice (17) ve (18) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\sin\theta^* = 0, \quad (21)$$

$$\cos\theta^* = 1 \quad (22)$$

olur. (21) ve (22) denklemleri birlikte düşünülürse

$$\theta^* = 0 \quad (23)$$

olduğu görülür. O halde W^* vektörü B^* Frenet vektörü yönündedir. Yani W^* ile B^* lineer bağımlıdır.

b. (20) deki $\dot{\theta} = 0$ neticesi (19) denkleminde yerine yazılırsa

$$C^* = C$$

olduğu görülür.

Özel Durum: İnvolut Eğrisinin Düzlemsel Olma Koşulu

Teorem 10. $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğri çiftinin eğrilik ve burulması, sırası ile, κ, τ ve κ^*, τ^* olsun. $\kappa \neq 0$ olmak üzere M_1 eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart M_2 eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat. M_1 eğrisi bir helis olsun. Teorem 1 den

$$\frac{\tau}{\kappa} = sabit$$

ve

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) = 0 \quad (24)$$

dır. Diğer taraftan Teorem 6 dan

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\frac{\kappa \dot{\tau} - \dot{\kappa} \tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)(c-s)}}{\frac{\frac{1}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}}{\kappa(c-s)}},$$

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa}\right)}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

olur. (24), (25) de yerine yazılırsa

$$\tau^* = 0$$

bulunur. O halde M_2 eğrisi düzlemseldir.

Şimdiye kadar verilen teorik sonuçlar, seçilen bir örnek yardımıyla uygulamaya aktarılacak ve bölüm bu şekilde tamamlanacaktır.

Örnek. Öklid 3-uzayında s yay parametresi ile verilen aşağıdaki eğriyi ele alalım:

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \quad s > 0.$$

Bu eğri için $\kappa = \tau = \frac{1}{2}$ olduğundan α eğrisi birim hızlı bir dairesel helistir. α eğrisinin Frenet vektörlerini hesaplarsak,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1 \right), \\ N = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right), \\ B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1 \right). \end{cases}$$

bulunur. Diğer yandan yay parametresi ile verilen α eğrisi için involüt tanımı gereği

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c-s)T(s)$$

yazılabilir. Kolaylık olsun diye $c = 0$ alırsak,

$$\beta(s) = \alpha(s) - sT(s)$$

olur. O halde involüt eğrisi açık biçimde

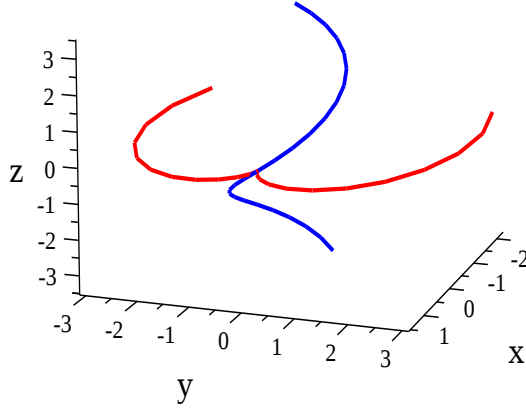
$$\beta(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right) - s \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 1 \right)$$

ve buradan

$$\beta(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{s}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{s}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

şeklinde elde edilir. Bu son denklemde üçüncü bileşen $\beta_3(s) = 0$ olduğundan involüt eğrisinin düzlemsel bir eğri olduğu kolaylıkla görülür. (Şekil 3)

Şekil 3 α helis eğrisi (mavi) ve β düzlemsel involütü (kırmızı)



Helis için Darboux vektörü $\kappa = \tau = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$W = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}B$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olup sabit büyüklüklüdür. Bu durum, helisin uzaydaki dönme ekseninin değişmediğini gösterir. Ayrıca

$$\theta = \angle(W, B) = 45^\circ$$

olup sabittir. Buradan Teorem 3 yardımıyla $\alpha, \beta \subset E^3$ eğrilerinin Frenet vektörleri arasında aşağıda verilen matrisel eşitlik vardır.

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

İnvolüt eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau^* = 0$ ve involüt eğrisinin Darboux vektörü

$$W^* = \kappa^* B^*$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\angle(W^*, B^*) = 0^\circ$$

yani involüt eğrisinin Darboux vektörü yalnızca binormal vektör doğrultusundadır. Teorem 9 un ifadesi, involüt-evolüt eğri çiftinin Darboux vektörleri yönündeki birim vektörleri eşit olup Sonuç 1. gerçekleşir.

Kaynakça

- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel geometri*. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- O'Neill, B. (1996). *Elementary differential geometry*. Academic Press.
- Çalışkan, M., & Bilici, M. (2002). Some characterizations for the pair of involute–evolute curves in Euclidean space E^3 . *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 21(2), 289–294.
- Fenchel, W. (1951). On the differential geometry of closed space curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57, 44–54.

