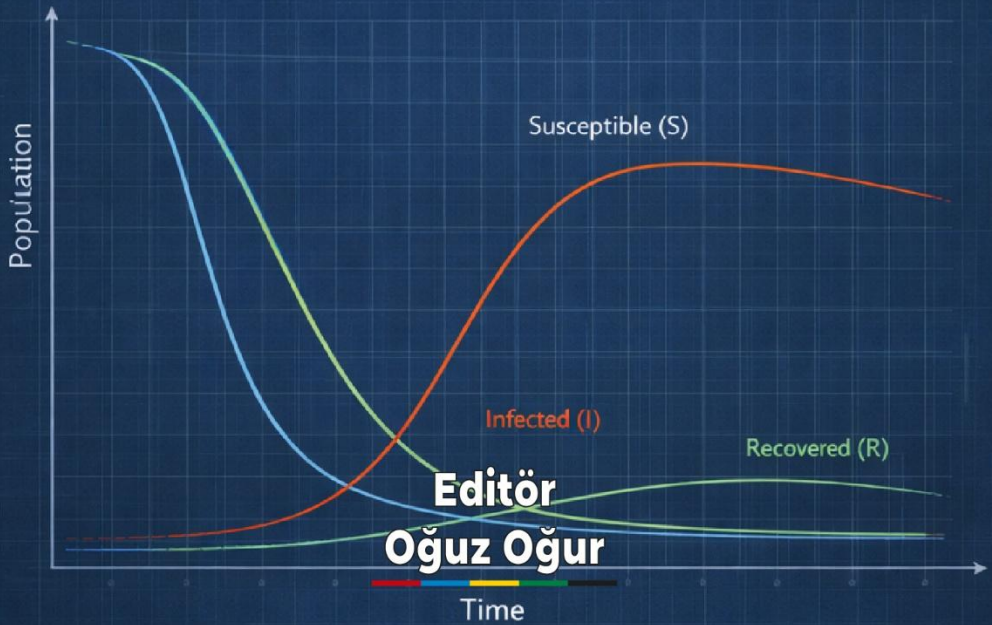


Güncel Araştırmalarda Matematiksel Modelleme Yaklaşımları



BİDGE Yayınları

Güncel Araştırmalarda Matematiksel Modelleme Yaklaşımları

Editör: Oğuz Oğur

ISBN: 978-625-8673-14-2

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 25.12.2025

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /
Ankara



İÇİNDEKİLER

YÜKSEK KONTRASTLI BİLEŞİK KİRİŞLERDE RİJİT CİSİM MODLARININ ASİMPTOTİK MODELLEMESİ	4
Onur ŞAHİN	4
KURT VE VAŞAĞIN YABAN KEÇİSİ ÜZERİNDEKİ DOLAYLI REKABETİNİN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ.....	26
Mahir DEMİR	26
AŞILAMA ORANI İLE COVID-19 YAYILIMI ARASINDAKİ İLİŞKİ	47
Mahir DEMİR	47
ÇARPIMSAL ÖLÇÜ VE ÖLÇÜYE BAĞLI MODELLER.....	72
Oğuz OĞUR.....	72

YÜKSEK KONTRASTLI BİLEŞİK KİRİŞLERDE RİJİT CİSİM MODLARININ ASİMPTOTİK MODELLEMESİ

Onur ŞAHİN¹

Giriş

Malzeme özellikleri uzaysal olarak değişen kirişlerin titreşim analizi, yapı mekaniğinde uzun bir geçmişe sahiptir. Homojen olmayan çubuklar ve kirişler üzerine yapılan erken dönem çalışmalar, rijitlik ya da yoğunluktaki görece orta düzeydeki değişimlerin bile, homojen yapılara kıyasla doğal frekanslar ve mod şekilleri üzerinde önemli farklılıklara yol açabildiğini göstermiştir (örneğin bkz. Horgan ve Chan, 1999; Elishakoff, 2004; Elishakoff, 2005). Bu çalışmalar, malzeme heterojenliğinin spektral özellikler üzerindeki etkilerinin anlaşılması açısından temel bir zemin oluşturmuş olmakla birlikte, güçlü malzeme kontrastı ile ilişkili tekil etkileri henüz ele almamıştır.

Tabakalı ve sandviç yapılar bağlamında, sert bileşenlerin neredeyse rijit cisim gibi hareket etme eğiliminde olduğu, buna

¹Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi, Giresun, Türkiye, ORCID: 0000-0001-5389-9855

karşılık yumuşak bileşenlerin deformasyonun büyük kısmını üstlendiği uzun zamandır bilinmektedir. Bu fikir, klasik sandviç kiriş ve plaka teorilerinin merkezinde yer almaktadır (örneğin bkz. Zenkert, 1995; Sorokin, 2004; Chapman, 2013); bu teorilerde yumuşak bir çekirdek, sert yüzeyler arasında zayıf bir elastik bağlanma sağlar. Söz konusu çalışmalar ağırlıklı olarak eğilme veya dalga yayılımına odaklansa da, bileşik yapılardaki düşük frekanslı dinamiğin, rijit cisim hareketine yakın davranışlarla yakından ilişkili olduğunu ortaya koymaktadır.

Güçlü biçimde homojen olmayan elastik sistemlerde düşük frekanslı titreşimler için sistematik bir asimptotik çerçeve, yüksek kontrastlı çubuklar literatüründe geliştirilmiştir. Kaplunov, Prikazchikov ve çalışma arkadaşları, belirgin bir rijitlik kontrastının varlığı durumunda, en düşük öz modların yumuşak bölgelerde kuazi-statik deformasyon ve sert bölgelerde ise neredeyse rijit cisim hareketi ile karakterize edildiğini göstermiştir (Kaplunov ve diğ., 1998; Kaplunov ve diğ., 2016). Bu rejimde, karşılık gelen homojen yapının rijit cisim modları, kontrasta bağlı küçük frekanslara pertürbe edilmekte ve böylece küresel bir düşük frekans spektrumu ortaya çıkmaktadır. Benzer fikirler, yüksek kontrastlı periyodik ortamların homojenleştirme teorisinde de görülmektedir; bu bağlamda sınırlı deformasyonlar, sert bileşenlerin rijit cisim hareketleri etrafında yoğunlaşmaktadır (Cherednichenko ve diğ., 2006; Smyshlyaev, 2009; Cherdantsev, 2014).

Bu gelişmeler ışığında, yakın dönem çalışmalarda çubuklar için geliştirilen asimptotik teknikler, yumuşak ve sert bileşenlerin ardışık olarak yer aldığı Euler–Bernoulli kirişlere genişletilmiştir (Şahin, 2019; Şahin, 2020; Şahin, 2021). Bu çalışmalarda, güçlü biçimde homojen olmayan kirişlerin en düşük öz frekanslarının, boyutu sert bileşenlerin sayısı tarafından belirlenen sonlu boyutlu cebirsel sistemler ile tanımlanabildiği ve sınır koşullarının düşük

frekanslı modların varlığı ve çokluğu üzerinde belirleyici bir rol oynadığı gösterilmiştir. Ancak mevcut sonuçların büyük bir kısmı, simetrik konfigürasyonlarla ya da serbest–serbest veya ankastre–ankastre gibi klasik sınır koşullarıyla sınırlıdır.

Karma sınır koşulları ve yumuşak–sert bileşenlerin asimetrik düzenlenişleri ise, pratik önemlerine rağmen görece daha az incelenmiştir. Homojen kirişlerde bu tür konfigürasyonlar genellikle birden fazla rijit cisim moduna izin verirken, bileşik kirişlerde bu modlar, malzeme kontrastı ile sınır kısıtları arasındaki etkileşime bağlı olarak kısmen korunabilir ya da ortadan kalkabilir. Bu etkileşimin anlaşılması, tam spektral analiz ile asimptotik yöntemlerin birlikte kullanılmasını gerektirmektedir.

Bu bölümde, söz konusu sorunlar iki temsili model problem üzerinden ele alınmaktadır. İlk olarak, yumuşak ve sert olmak üzere iki bileşenden oluşan bir kiriş incelenmekte; bu yapıda yumuşak uç basit mesnetli, sert uç ise serbesttir. Homojen kiriş iki adet rijit cisim moduna sahipken, bu çalışmada yumuşak bileşenin varlığının bu yapıyı pertürbe ettiği, bir sıfır frekansın korunduğu ve diğerinin ise küçük fakat sıfırdan farklı bir değere yükseltildiği gösterilmektedir. İkinci olarak, sınır koşulları sırasıyla ankastre ve basit mesnet olan üç bileşenli yumuşak–sert–yumuşak bir kiriş analiz edilmektedir. Bu durumda, homojen konfigürasyona ait iki sıfır frekans, iki farklı küçük frekansa dönüşmektedir. Her iki problem için de tam çözümler elde edilmiş ve bunlar asimptotik yaklaşımlarla karşılaştırılmış; hem öz frekanslar hem de yer değiştirme profilleri açısından mükemmel bir uyum gözlemlenmiştir.

Bu sonuçlar, yüksek kontrastlı elastik yapılar literatürü bağlamına yerleştirildiğinde, yumuşak bileşenlerin rijit cisim hareketlerini nasıl düzenlediği ve küçük frekanslı dinamiklerin nasıl ortaya çıktığına dair ek içgörüler sunmaktadır. Sunulan analiz, mevcut asimptotik teorileri, daha önce ayrıntılı biçimde ele

alınmamış olan karma sınır koşulları ve asimetrik konfigürasyonlara genişletmektedir.

Problemin İfadesi

Bu bölümde, farklı uç koşullarına sahip, uzunlukları keyfi olan yumuşak ve sert parçalardan oluşan elastik bir kirişin zaman-harmonik titreşim problemi için korunum denklemleri sunulmaktadır. Ayrıca, kirişin her bir bileşeninin kendine ait yerel koordinatlara sahip olduğu ve ara yüzlerde süreklilik koşullarının sağlandığı varsayılmaktadır. Bu doğrultuda, n bileşenli bir kiriş için hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{d^4 y_i}{dx^4} - \frac{\omega^2}{a_i} y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Burada;

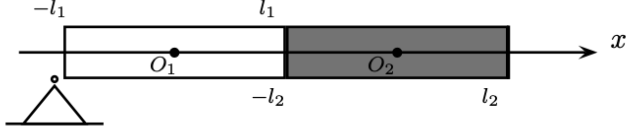
$$a_i = \sqrt{D_i/m_i}, \quad (2)$$

y_i yer değiştirmeleri, x_i yerel koordinatları, ω açısal frekansı göstermektedir. Ayrıca E_i , I , A ve ρ sırasıyla Young modülü, atalet momenti, kesit alanı ve malzeme yoğunluğu olmak üzere $D_i = E_i I$ eğilime rijitliği ve m_i cismin kütlesidir.

Basit mesnet ve serbest uçlu iki bileşenli kiriş

Şimdi, Şekil 1’de gösterildiği üzere, biri yumuşak diğeri sert olmak üzere iki bileşenden oluşan, bir ucu basit mesnet diğeri ucu serbest olan elastik bir kiriş ele alınmaktadır. Burada yumuşak ve sert kısımlar sırasıyla beyaz ve siyah renklerle belirtilmiştir.

Şekil 1. Yumuşak ve sert parçalardan oluşan iki bileşenli kiriş



Süreklilik ve uç koşulları;

$$\begin{aligned} y_1(l_1) &= y_2(-l_2) \\ y_1'(l_1) &= y_2'(-l_2), \\ d_1 y_1''(l_1) &= D_2 y_2''(-l_2), \\ d_1 y_1'''(l_1) &= D_2 y_2'''(-l_2) \end{aligned} \quad (3)$$

ve

$$\begin{aligned} y_1(-l_1) &= 0, & y_2''(l_2) &= 0, \\ y_1'(-l_1) &= 0, & y_2'''(l_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde yazılır. Şimdi, yerel boyutsuz koordinatları ve ölçeklendirilmiş frekansları aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\xi_i = \frac{x}{l_i} \quad \text{and} \quad \Omega_i = l_i \sqrt{\frac{\omega}{a_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Dolayısıyla, hareket denklemi (1), süreklilik koşulları (3) ve uç koşulları (4), yeni değişkenler cinsinden sırasıyla

$$\frac{d^4 y_i}{d \xi_i^4} - \Omega_i^4 y_i = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
y_1(1) &= y_2(-1), \\
y_1'(1) &= \frac{l_1}{l_2} y_2'(-1), \\
d_1 y_1''(1) &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 D_2 y_2''(-1), \\
d_1 y_1'''(1) &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 D_2 y_2'''(-1)
\end{aligned} \tag{7}$$

ve

$$\begin{aligned}
y_1(-1) &= 0, & y_2''(1) &= 0, \\
y_1''(-1) &= 0, & y_2'''(1) &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde yazılır. Son olarak

$$\varepsilon = \frac{D_1}{D_2} \ll 1 \tag{9}$$

ile küçük bir parametre tanımlayalım ki bu sert kısımların Young modülünün, yumuşak kısmın Young modülüne kıyasla çok daha büyük olduğunu ifade etmektedir.

Tam çözüm

Her bir kiriş bileşen için hareket denklemlerinin analitik çözümlerini belirleyelim. Bunun için ilk olarak

$$D = \frac{D_1}{D_2}, \quad m = \frac{m_1}{m_2}, \quad a = \frac{a_1}{a_2} \tag{10}$$

boyutsuz büyüklüklerini tanımlayalım. Denklem (6)'nın çözümünün;

$$\begin{aligned}
y_i(\xi_i) &= a_i \cos(\Omega_i \xi_i) + b_i \sin(\Omega_i \xi_i) \\
&+ c_i \cosh(\Omega_i \xi_i) + d_i \sinh(\Omega_i \xi_i), \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{11}$$

şeklinde trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar cinsinden ifade edildiği bilinmektedir. Süreklilik koşulları (7) ve sınır koşulları (8) uygulandığında, a_i, b_i, c_i, d_i , katsayıları için bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi

için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir. Dolayısıyla bu determinanttan

$$\Delta(\Omega_{1,0}, \Omega_{2,0}) := \det K(\Omega_{1,0}, \Omega_{2,0}) = 0 \quad (12)$$

frekans denklemi elde edilir. Burada $K(\Omega_{1,0}, \Omega_{2,0})$;

$$\begin{aligned} C_1 &:= \cos \Omega_{1,0}, & S_1 &:= \sin \Omega_{1,0}, \\ Ch_1 &:= \cosh \Omega_{1,0}, & Sh_1 &:= \sinh \Omega_{1,0}, \\ C_2 &:= \cos \Omega_{2,0}, & S_2 &:= \sin \Omega_{2,0}, \\ Ch_2 &:= \cosh \Omega_{2,0}, & Sh_2 &:= \sinh \Omega_{2,0} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} C_1 & S_1 & Ch_1 & Sh_1 & -C_2 & S_2 & -Ch_2 & Sh_2 \\ -\frac{S_1}{\sqrt{a}} & \frac{C_1}{\sqrt{a}} & \frac{Sh_1}{\sqrt{a}} & \frac{Ch_1}{\sqrt{a}} & -S_2 & -C_2 & Sh_2 & -Ch_2 \\ -\frac{M C_1}{a} & -\frac{M S_1}{a} & \frac{M Ch_1}{a} & \frac{M Sh_1}{a} & C_2 & -S_2 & -Ch_2 & Sh_2 \\ \frac{M S_1}{a\sqrt{a}} & -\frac{M C_1}{a\sqrt{a}} & \frac{M Sh_1}{a\sqrt{a}} & \frac{M Ch_1}{a\sqrt{a}} & S_2 & C_2 & Sh_2 & -Ch_2 \\ C_1 & -S_1 & Ch_1 & -Sh_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & S_1 & Ch_1 & -Sh_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & -S_2 & Ch_2 & Sh_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 & -C_2 & Sh_2 & Ch_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde 8x8 tipindeki matristir.

Yumuşak robotik yapılar gibi dikkat çekici örneklerin ortaya çıkmasıyla birlikte, malzeme tasarımındaki gelişmeler çok açıklıklı kiriş problemlerine olan ilgiyi yeniden canlandırmıştır. Bu tür sistemlerin temel bir özelliği, rijit cisim davranışına yakın hareketlerle ilişkili düşük frekanslı rezonansların varlığıdır; söz konusu rezonanslar, kararlılık ve dinamik tepki üzerinde belirgin bir etkiye sahip olabilmektedir (Kaplunov ve diğ., 2016, 2019; Rus ve Tolley, 2015; Majidi, 2014). Bu nedenle, bu bölümdeki analiz, (9)'da tanımlanan küçük parametre kullanılarak gerçekleştirilmektedir.

Asimptotik Analiz

İlgili frekans ve yer değiştirme alanları için tam analitik çözümler genellikle elde edilmesi güç olduğundan, bu bölümde hareket denklemleri, çözümleri elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilen daha basit sınır değer problemlerinden oluşan bir yapıya indirgemek amacıyla bir pertürbasyon yaklaşımı sunulmaktadır. (9)'da tanımlanan küçük parametrenin dikkate alınmasıyla, frekanslar ve yer değiştirme alanları

$$\begin{aligned}\Omega_i^4 &= \varepsilon(\Omega_{i,0}^4 + \varepsilon\Omega_{i,1}^4 + \varepsilon^2\Omega_{i,2}^4 + \cdots), \\ y_i &= y_{i,0} + \varepsilon y_{i,1} + \varepsilon^2 y_{i,2} + \cdots, i = 1,2\end{aligned}\quad (13)$$

şeklinde asimptotik seriler halinde yazılabilir ki bu , küresel düşük frekans davranışını, yani $\Omega_1^4 \sim \Omega_2^4 \sim \varepsilon$ şeklinde ifade edilen ilişkiyi yansıtmaktadır. Burada ayrıca

$$\varepsilon \frac{m_1}{m_2} = m_*, \quad m_* \sim 1 \quad (14)$$

kabulü yapılacaktır. Dolayısıyla, (7)–(8)'de başlangıçta verilen süreklilik ve uç koşulları

$$\begin{aligned}y_1(1) &= y_2(-1), \\ y'_1(1) &= \delta_{12}y'_2(-1), \\ y''_1(1) &= \varepsilon\delta_{12}^2y''_2(-1), \\ y'''_1(1 + h_1) &= \varepsilon\delta_{12}^3y'''_2(h_2)\end{aligned}\quad (15)$$

ve

$$y_1(-1) = y''_1(-1) = 0, y''_3(1) = y'''_3(1) = 0 \quad (16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\delta_{12} = \frac{l_1}{l_2} \quad (17)$$

olarak tanımlıdır. (13) ile verilen asimptotik açılımların, (6) hareket denklemlerinde yerine yazılması ile, aşağıda verilen baskın mertebeden (leading-order) yaklaşım elde edilir:

$$\frac{d^4 y_{i,0}}{d\xi_i^4} = 0, i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Benzer şekilde baskın mertebede, süreklilik ve sınır koşulları

$$y_1(1) = y_2(-1), y'_1(1) = \delta_{12} y'_2(-1), \quad (19)$$

ve

$$y_1(-1) = y''_1(-1) = 0, y''_3(1) = y'''_3(1) = 0 \quad (20)$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla, (18) ve (20) numaralı sınır değer problemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= a_1 \xi_1^3 + b_1 \xi_1^2 + c_1 \xi_1 + d_1, \\ y_{2,0} &= a_2 \xi_2 + b_2 \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde ifade edilebilir. (19)'u uygularsak katsayılar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{16} ((1 + 2\delta_{12})a_2 - b_2), b_1 = \frac{3}{16} ((1 + 2\delta_{12})a_2 - \\ c_1 &= -\frac{1}{16} ((9 + 2\delta_{12})a_2 - 9b_2), d_1 = -\frac{1}{16} ((11 + 6\delta_{12})a_2 \end{aligned} \quad (22)$$

Şimdi, bir sonraki mertebe analizine geçelim. Birinci sert bileşen için hareket denklemleri

$$\frac{d^4 y_{2,1}}{d\xi_1^4} - \Omega_{2,0}^2 y_{1,0} = 0 \quad (23)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda süreklilik ve sınır koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{2,1}}{d\xi_2^2} \Big|_{\xi_2=-1} &= \frac{1}{\delta_{12}^2} \frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi_1^2} \Big|_{\xi_1=1}, \\ \frac{d^3 y_{2,1}}{d\xi_2^3} \Big|_{\xi_2=-1} &= \frac{1}{\delta_{12}^3} \frac{d^3 y_{1,0}}{d\xi_1^3} \Big|_{\xi_1=1} \end{aligned} \quad (24)$$

ve

$$y_{2,1}(1) = \frac{dy_{2,1}}{d\xi_1} \Big|_{\xi_1=1} = 0 \quad (25)$$

şeklindedir. (21₂)'de verilen $y_{2,0}$ ifadesinin (23) numaralı denkleme yerine yazılması ve ardından $\xi_1 \in (-1, 1)$ aralığında integralinin alınmasıyla

$$3a_1 + \delta_{12}^2 \Omega_{2,0}^4 b_2 = 0 \quad (26)$$

elde edilir. Daha sonra, (23)'ün ξ_1 ile çarpılıp tekrar aynı aralıkta ξ_1 'e göre integralinden

$$9a_1 + 3\delta_{12}(a_1 + b_1) - \delta_{12}^3 \Omega_{2,0}^4 a_2 = 0 \quad (27)$$

(22) ile verilen katsayılar arasındaki ilişki kullanılarak (26) ve (27) denklemleri a_2 and b_2 için

$$\begin{aligned} \frac{3}{16}(1 + 2\delta_{12})a_2 - \left(\frac{3}{16} - \delta_{12}^3 \Omega_{2,0}^4\right)b_2 &= 0, \\ \frac{9}{16}((1 + 2\delta_{12})^2 - \delta_{12}^3 \Omega_{2,0}^4)a_2 - \frac{9}{16}(1 + 2\delta_{12})\Omega_{2,0}^4 b_2 & \end{aligned} \quad (28)$$

denklem sistemine indirgenir. Söz konusu doğrusal denklem sisteminin sıfır olmayan çözümleri, karşılık gelen katsayılar matrisinin determinantın sıfır olmasına bağlı olup buradan;

$$\delta_{12}^3 \Omega_{2,0}^4 (4\delta_{12}^3 \Omega_{2,0}^4 - 3(3\delta_{12}(1 + \delta_{12}) + 1)) = 0 \quad (29)$$

frekans denklemi elde edilir. Söz konusu son denklemin çözümünden hareketle, kirişin ikinci bileşenine karşılık gelen frekans aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\Omega_{2,0}^4 = 0, \quad \Omega_{2,0}^4 = \frac{3(3\delta_{12}^2 + 3\delta_{12} + 1)}{4\delta_{12}^3}. \quad (30)$$

Serbest uçlara sahip bir kirişin, rijit cisim ötelemesi ve dönmesine karşılık gelen iki adet sıfır öz frekansa sahip olduğu iyi bilinmektedir. Bu çalışmada elde edilen sonuç ise, yumuşak bir bileşenin sert bir bileşenle temasının, bu sıfır öz frekanslardan birini neredeyse rijit dönme ile ilişkili en düşük öz frekansa pertürbe ettiğini göstermektedir.

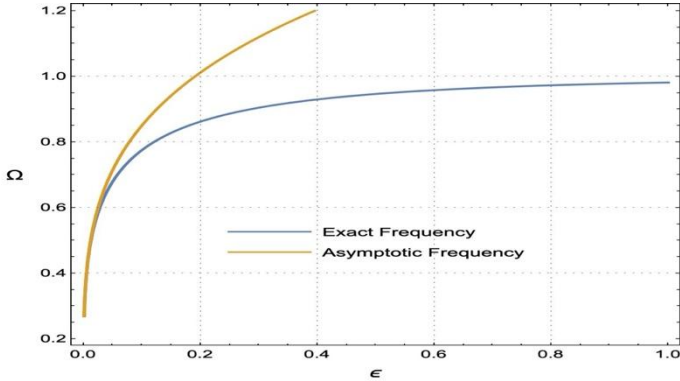
Sayısal sonuçlar

Bu bölümde, önerilen pertürbasyon yaklaşımının doğruluğunu ve etkinliğini değerlendirmek amacıyla sayısal

sonuçlar sunulmaktadır. Özellikle, tam çözümden elde edilen öz frekanslar (12), pertürbasyon yöntemi kullanılarak türetilen karşılık gelen asimptotik öz frekanslar (29) ile karşılaştırılmaktadır. Buna ek olarak, her iki yaklaşım çerçevesinde hesaplanan öz şekiller grafiksel olarak gösterilmekte ve karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırma, asimptotik yaklaşımın geçerliliğine ve tam çözümün temel özelliklerini yakalama yeteneğine dair açık bir öngörü sağlamaktadır.

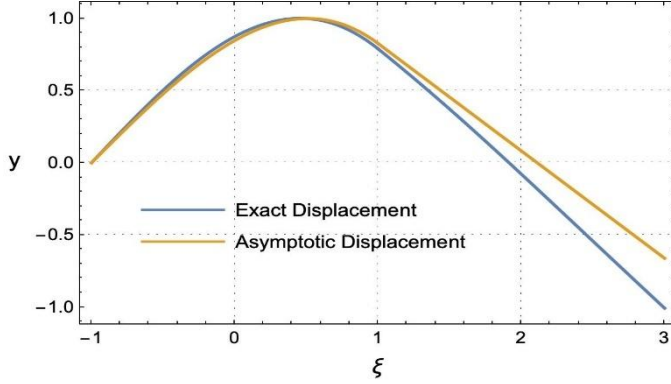
Şekil 2’de, $\delta_{12} = 0.99$ için öz frekansların karşılaştırması sunulmaktadır. Elde edilen sonuçlar, önerilen yöntemin geçerliliğinin küçük parametre ε ’na bağlı olduğunu açıkça göstermektedir. Buna göre, ε küçüldükçe asimptotik frekansların tam frekanslarla mükemmel bir uyum sergilediği, ε ’nın artmasıyla birlikte ise sapmaların giderek büyüdüğü gözlemlenmektedir.

Şekil 2. (12) tam ve (29) asimptotik frekans denklemlerinin $\delta_{12} = 0.99$ için karşılaştırılması

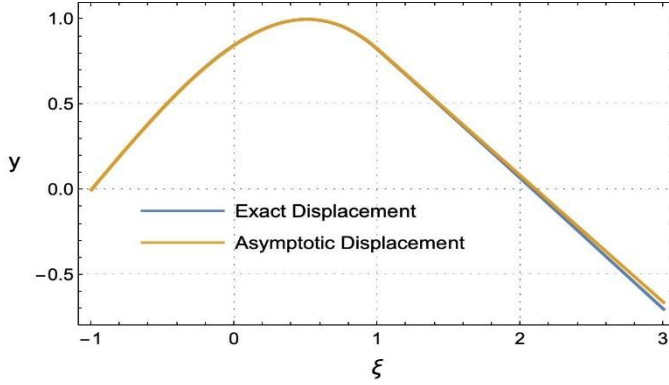


Şekil 3 ve Şekil 4’te, $\delta_{12} = 0.99$ için sırasıyla $\varepsilon = 0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ değerlerinde elde edilen tam ve asimptotik yer değiştirme alanlarının karşılaştırmaları sunulmaktadır. Görüldüğü üzere, $\varepsilon = 0.1$ için dahi yaklaşık çözüm tam çözümle oldukça iyi bir uyum sergilerken, $\varepsilon = 0.01$ durumunda iki çözüm neredeyse ayırt edilemez hâle gelmektedir.

Şekil 3. (11) tam ve (41) asimptotik yer değıştirmelerin $\varepsilon = 0.1$ ve $\delta_{12} = 0.99$ için karşılaştırılması.



Şekil 4. (11) tam ve (41) asimptotik yer değıştirmelerin $\varepsilon = 0.01$ ve $\delta_{12} = 0.99$ için karşılaştırılması.

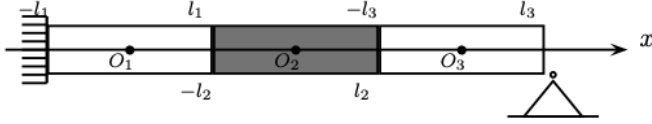


Ankastre ve basit mesnet uçlu üç bileşenli kiriş

Şimdi, sol ucu ankastre, sağ ucu ise basit mesnetli, yumuşak–sert–yumuşak bileşenlerden oluşan üç parçalı bir elastik kiriş ele alınmaktadır. Kirişin konfigürasyonu, sert ve yumuşak bileşenlerin sırasıyla siyah ve beyaz bölgelerle gösterildiği Şekil 5’te sunulmaktadır. Bu konfigürasyon, daha önce incelenen iki bileşenli kiriş modelinin bir genellemesini oluşturmakta ve belirgin bir

malzeme kontrastına sahip bir yapının temsili bir örneğini sunmaktadır. Özellikle, iki yumuşak bileşen arasına yerleştirilmiş sert bir bileşenin varlığı, sistemin düşük frekanslı dinamik tepkisi üzerinde önemli bir etkiye sahiptir.

Şekil 5. Yumuşak sert ve yumuşak parçalardan oluşan üç bileşenli kiriş.



Ardışık bileşenler arasındaki ara yüzlerde, yer değiştirme, eğim, eğilme momenti ve kesme kuvvetinin sürekliliği sağlanmakta; uçlarda ise basit mesnetli sınır koşulları uygulanmaktadır. Buna göre, süreklilik ve uç koşulları

$$\begin{aligned}
 y_1(1) &= y_2(-1), & y_2(1) &= y_3(-1) \\
 y_1'(1) &= \frac{l_1}{l_2} y_2'(-1), & y_2'(1) &= \frac{l_2}{l_3} y_3'(-1), \\
 D_1 y_1''(1) &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 D_2 y_2''(-1), & D_2 y_2''(1) &= \left(\frac{l_2}{l_3}\right)^2 D_3 y_3''(-1), \\
 D_1 y_1'''(1) &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 D_2 y_2'''(-1), & D_2 y_2'''(1) &= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 D_3 y_3'''(-1).
 \end{aligned} \tag{31}$$

ve

$$\begin{aligned}
 y_1(-1) &= 0, & y_3(1) &= 0, \\
 y_1''(-1) &= 0, & y_3''(1) &= 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

biçiminde ifade edilir.

Tam çözüm

Bu aşamada, yerel boyutsuz koordinatlar ile ölçeklendirilmiş frekanslar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D = \frac{D_k}{D_2}, \quad m = \frac{m_k}{m_2}, \quad a = \frac{a_k}{a_2}, \quad k = 1, 3. \tag{33}$$

İki bileşenli kiriş problemiyle benzerlik kurularak, her bir bileşen için yer değiştirme alanları $i = 1, 2, 3$ olmak üzere (11) biçiminde aranmaktadır. Süreklilik koşulları (31) ile uç koşulları (32)'nin her bir bileşen önerilen çözümlere uygulanması sonucunda, on iki bilinmeyen katsayıya karşılık gelen on iki denklemlik bir sistem elde edilmektedir. Bu sistem, karşılık gelen katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması koşulu altında sıfır olmayan bir çözüme sahiptir ve bu durum problemin frekans denkleminin elde edilmesine yol açmaktadır. Elde edilen bu ifadenin oldukça uzun ve karmaşık olması nedeniyle, frekans denklemi burada verilmemektedir.

Asimptotik analiz

Şimdi, üç bileşenli kiriş probleminin pertürbasyon analizine ele alalım. İki bileşenli konfigürasyon için benimsenen yaklaşıma paralel olarak, hareket denklemleri sert ve yumuşak bileşenler arasındaki malzeme kontrastını karakterize eden küçük bir parametrenin varlığında incelenmektedir. Bu yaklaşım, öz frekanslar ve öz şekiller için asimptotik yaklaşımların türetilmesine olanak sağlamakta ve elde edilen sonuçlar daha sonra tam çözümlerle karşılaştırılmaktadır. Bu nedenle, $\Omega_1^4 \sim \Omega_2^4 \sim \Omega_3^4 \sim \varepsilon$ küresel düşük frekans davranışını yansıtan (13) asimptotik açılımını yeniden ele alalım. Bu durumda boyutsuz nicelikler

$$\delta_{ij} = \frac{l_i}{l_j}, \quad \varepsilon \frac{m_k}{m_2} = m_*, \quad m_* \sim 1, \quad k = 1, 3 \quad (34)$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, (13) ve (34)'ten, frekansların arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \Omega_1^4 &= \Omega_2^4 \delta_{12}^4 m_*, \\ \Omega_3^4 &= \Omega_2^4 \delta_{32}^4 m_* \end{aligned} \quad (35)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda, süreklilik ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y_1(1) &= y_2(-1), & y_2(1) &= y_3(-1), \\ y'_1(1) &= \delta_{12} y'_2(-1), & y'_2(1) &= \delta_{23} y'_3(-1), \\ \varepsilon y''_1(1) &= \delta_{12}^2 y''_2(-1), & y''_2(1) &= \varepsilon \delta_{23}^2 y''_3(-1), \\ \varepsilon y'''_1(1) &= \delta_{12}^3 y'''_2(-1), & y'''_2(1) &= \varepsilon \delta_{23}^3 y'''_3(-1) \end{aligned} \quad (36)$$

ve

$$y_1(-1) = y''_1(-1) = 0, y_3(1) = y''_3(1) = 0, \quad (37)$$

halini alır. (13) asimptotik açılımının (6) hareket denklemlerinde yerine yazılmasıyla baskın mertebe yaklaşımında

$$\frac{d^4 y_{i,0}}{d\xi_i^4} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (38)$$

elde edilir. Benzer şekilde süreklilik ve sınır koşulları da baskın mertebede sırasıyla

$$\begin{aligned} y_{1,0}(1) &= y_{2,0}(-1), & y_{2,0}(1) &= y_{3,0}(-1), \\ y'_{1,0}(1) &= \delta_{12} y'_{2,0}(-1), & y'_{2,0}(1) &= \delta_{23} y'_{3,0}(-1), \\ y''_{2,0}(-1) &= y'''_{2,0}(-1) = 0, & y''_{2,0}(1) &= y'''_{2,0}(1) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

ve

$$y_{1,0}(-1) = y''_{1,0}(-1) = 0, \quad y_{3,0}(1) = y''_{3,0}(1) = 0 \quad (40)$$

olur. Böylece (38) ve (40) ile verilen sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= a_1 \xi_1^3 + b_1 \xi_1^2 + c_1 \xi_1 + d_1, \\ y_{2,0} &= a_2 \xi_2 + b_2, \\ y_{3,0} &= a_3 \xi_3^3 + b_3 \xi_3^2 + c_3 \xi_3 + d_3 \end{aligned} \quad (41)$$

halini alır. (39) ve (40)'ın uygulanması ile katsayılar arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}((1 + \delta_{12})a_2 - b_2), \quad b_1 = \frac{\delta_{12}a_2}{4} \\ c_1 &= -\frac{1}{4}(a_2(3 + \delta_{12} - 3b_2)), \\ d_1 &= -\frac{1}{4}(a_2(2 + \delta_{12} - 2b_2)), \\ a_3 &= \frac{b_2\delta_{23} + a_2(2 + \delta_{23})}{16\delta_{23}}, \\ b_3 &= -\frac{3(a_2(2 + \delta_{23}) + b_2\delta_{23})}{16\delta_{23}}, \\ c_3 &= -\frac{9}{16}(a_2 + b_2) - \frac{a_2}{8\delta_{23}}, \\ d_3 &= \frac{11}{16}(a_2 + b_2) + \frac{3a_2}{8\delta_{23}} \end{aligned} \quad (42)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi, bir sonraki mertebe analizine geçelim. Sert bileşen için

$$\frac{d^4 y_{2,1}}{d\xi_1^4} - \Omega_{2,0}^4 y_{1,0} = 0 \quad (43)$$

denklemini

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{2,1}}{d\xi_2^2} \Big|_{\xi_2=-1} &= \frac{1}{\delta_{12}^2} \frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi_1^2} \Big|_{\xi_1=1}, \frac{d^3 y_{2,1}}{d\xi_2^3} \Big|_{\xi_2=-1} = \frac{1}{\delta_{12}^3} \frac{d^3 y_{1,0}}{d\xi_1^3} \Big|_{\xi_1=1}, \\ \frac{d^2 y_{2,1}}{d\xi_2^2} \Big|_{\xi_2=1} &= \delta_{23}^2 \frac{d^2 y_{3,0}}{d\xi_3^2} \Big|_{\xi_3=-1}, \frac{d^3 y_{2,1}}{d\xi_2^3} \Big|_{\xi_2=1} = \delta_{23}^3 \frac{d^3 y_{3,0}}{d\xi_3^3} \Big|_{\xi_3=-1}. \end{aligned} \quad (44)$$

sınır şartları ile yazılır. İki bileşenli problem için uygulanan süreç takip edilirse

$$\begin{aligned} &(-12 - 12\delta_{12} + 6\delta_{12}^3\delta_{23}^2 + 3\delta_{12}^3\delta_{23}^3)a_2 \\ &+ (-12 - 12\delta_{12} + 6\delta_{12}^3\delta_{23}^2 + 3\delta_{12}^3\delta_{23}^3)b_2 = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

ve

$$\begin{aligned} &(36 + \delta_{12}(72 + \delta_{12}(48 + 9\delta_{12}\delta_{23}(2 + \delta_{23})^2 \\ &\quad - 16\delta_{12}\Omega_{2,0}^4)))a_1 \\ &+ 9(-4 - 4\delta_{12} + \delta_{12}^3\delta_{23}^2(2 + \delta_{23})) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

denklemleri elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesinden en düşük öz frekanslar için

$$\Omega_{2,0}^4 = \frac{3}{8\delta_{12}^3}(\alpha - \sqrt{\beta}), \quad \Omega_{2,0}^4 = \frac{3}{8\delta_{12}^3}(\alpha + \sqrt{\beta}) \quad (47)$$

asimptotik formülleri elde edilir. Burada

$$\alpha = 4 + \delta_{12}(6 + \delta_{12}(4 + \delta_{12}\delta_{23}l(3 + \delta_{23}(3 + \delta_{23})))) \quad (48)$$

ve

$$\begin{aligned} \beta &= 16 + \delta_{12}(48 + \delta_{12}(64 + \delta_{12}(48 + 12\delta_{23} - 4\delta_{23}^3 \\ &\quad + 4\delta_{12}(4 + 9\delta_{23} + 6\delta_{23}^2) + \delta_{12}^3\delta_{23}^2(3 + \delta_{23}(3 + \delta_{23})))^2 \\ &\quad + 4\delta_{12}^2\delta_{23}(6 + \delta_{23}(6 + \delta_{23})))) \end{aligned} \quad (49)$$

şeklinde tanımlıdır.

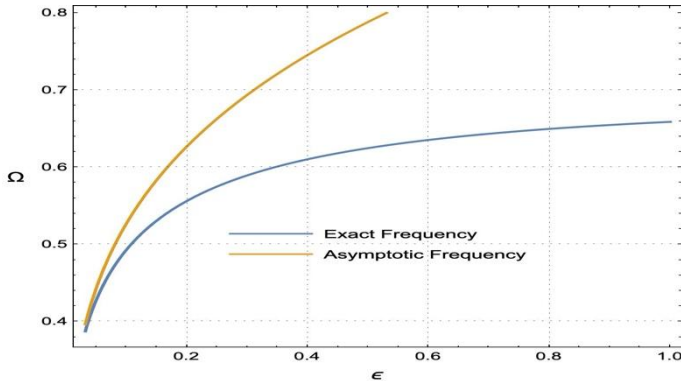
Önceki problemden farklı olarak, mevcut konfigürasyonda iki adet sıfırdan farklı öz frekans elde edilmektedir. Özellikle, sert iç bileşenin uçlarına yumuşak bileşenlerin bağlanması, rijit cisim hareketiyle ilişkili iki sıfır öz frekansı pertürbe ederek, küçük fakat sıfırdan farklı iki öz frekansa dönüştürmektedir. Dolayısıyla, bu konfigürasyon saf rijit cisim hareketini desteklememektedir.

Sayısal sonuçlar

Önceki problem için benimsenen strateji izlenerek, bu bölümde üç bileşenli kirişe ait sayısal sonuçlar sunulmaktadır. Tam ve asimptotik frekanslar ile yer değiştirme alanları, δ_{12} , δ_{23} ve ε 'ın çeşitli değerleri için grafiksel olarak karşılaştırılmakta; böylece asimptotik yaklaşımın doğruluğu sistematik bir biçimde değerlendirilmektedir. Sadelik amacıyla, aşağıdaki şekillerde birinci ve üçüncü bileşenlerin uzunluklarının eşit olduğu, yani $l_1 = l_3$ varsayılmaktadır.

Şekil 6, öz frekansların karşılaştırmasını göstermektedir. ε parametresinin küçülmesiyle birlikte, ilgili eğrilerin giderek birbirine yaklaştığı gözlemlenmektedir.

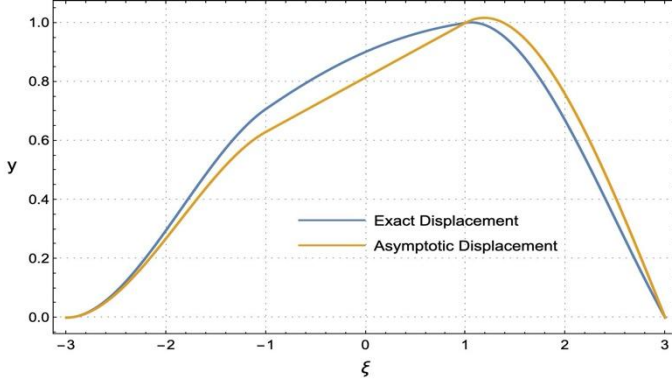
Şekil 6. Tam ve asimptotik frekans denklemlerinin $4l_1 = 4l_3 = 5l_2$ için karşılaştırması.



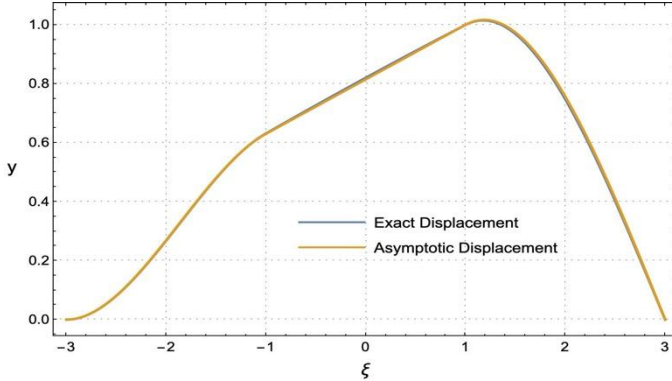
Şekil 7 ve Şekil 8'de, (51) ile verilen birinci öz frekansa karşılık gelen tam ve asimptotik yer değiştirme alanlarının, sırasıyla

$\varepsilon = 0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için karşılaştırmaları sunulmaktadır. Şekil 7’de gözlemlenen uyum halihazırda iyi olmakla birlikte, ε ’ın daha da küçülmesi durumunda iki çözüm arasındaki eşleşmenin neredeyse kusursuz hâle geldiği, Şekil 8’de açıkça görülmektedir.

Şekil 7. (51)’deki birinci öz frekansa karşılık gelen tam ve asimptotik yer değiştirmelerin $\varepsilon = 0.1$ ve $4l_1 = 4l_3 = 5l_2$ için karşılaştırması.



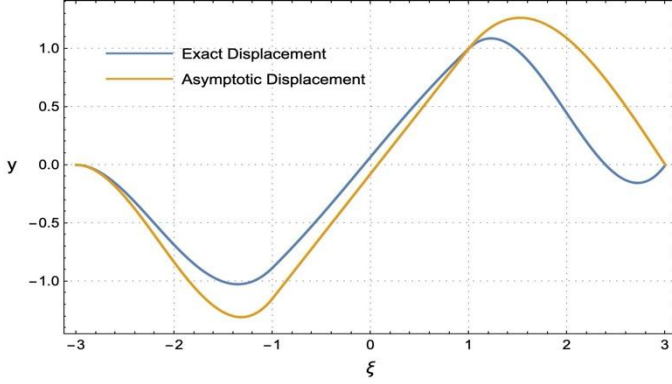
Şekil 8. (51)’deki birinci öz frekansa karşılık gelen tam ve asimptotik yer değiştirmelerin $\varepsilon = 0.01$ ve $4l_1 = 4l_3 = 5l_2$ için karşılaştırması.



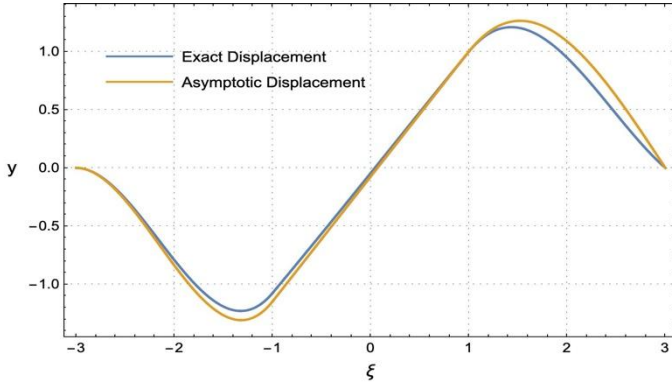
Benzer şekilde, Şekil 9 ve Şekil 10’da, (51) ile verilen ikinci öz frekansa karşılık gelen tam ve asimptotik yer değiştirme alanlarının grafiksel karşılaştırmaları sunulmaktadır. Önceki

durumda olduğu gibi, her iki çözüm arasındaki uyumun oldukça iyi olduğu görülmektedir.

Şekil 9. (51)'deki ikinci öz frekansa karşılık gelen tam ve asimptotik yer değiştirmelerin $\varepsilon = 0.1$ ve $4l_1 = 4l_3 = 5l_2$ için karşılaştırması.



Şekil 10. (51)'deki ikinci öz frekansa karşılık gelen tam ve asimptotik yer değiştirmelerin $\varepsilon = 0.01$ ve $4l_1 = 4l_3 = 5l_2$ için karşılaştırması.



Sonuçlar ve Değerlendirme

Bu çalışmada, sert ve yumuşak bileşenlerden oluşan elastik kirişlerin düşük frekanslı dinamik davranışı, pertürbasyona dayalı bir asimptotik yaklaşım kullanılarak incelenmiştir. Farklı uç koşullarına sahip iki bileşenli ve üç bileşenli kiriş konfigürasyonları

ele alınmış; elde edilen asimptotik çözümler, tam analitik sonuçlarla sistematik bir biçimde karşılaştırılmıştır.

İki bileşenli giriş için, sert ve yumuşak bileşenler arasındaki etkileşimin, rijit cisim hareketiyle ilişkili çift sıfır öz frekansları pertürbe ederek küçük fakat sonlu öz frekansların ortaya çıkmasına yol açtığı gösterilmiştir. Türetilen asimptotik yaklaşımlar, düşük frekans rejiminde bu davranışı başarıyla yakalamakta olup, pertürbasyon parametresinin yeterince küçük değerleri için mükemmel bir uyum gözlemlenmiştir.

Sayısal sonuçlar, küçük parametrenin küçülmesiyle birlikte asimptotik yaklaşımların doğruluğunun belirgin biçimde arttığını göstermektedir. Özellikle, tam ve asimptotik yer değiştirme alanlarının grafiksel karşılaştırmaları, pertürbasyon parametresinin orta düzeydeki değerleri için dahi oldukça iyi bir uyum sergilerken, daha küçük değerler için iki çözümün neredeyse ayırt edilemez hâle geldiğini ortaya koymaktadır. Bu bulgular, önerilen pertürbasyon yaklaşımının yüksek kontrastlı çok bileşenli giriş sistemlerinin hem öz frekanslarını hem de öz şekillerini başarıyla yakalayabildiğini doğrulamaktadır.

Bu çalışmada geliştirilen yöntem, güçlü malzeme kontrastına sahip bileşik giriş yapılarının düşük frekanslı dinamiğini incelemek için sistematik ve etkin bir çerçeve sunmaktadır. Yöntem, daha karmaşık konfigürasyonlara kolaylıkla genişletilebilir ve sert–yumuşak malzeme kombinasyonlarını içeren mühendislik yapılarının tasarımı ve değerlendirilmesi için yararlı bir analitik araç olarak hizmet edebilir.

Kaynakça

Chapman, C. H. (2013). An asymptotic decoupling method for waves in layered media. *Proceedings of the Royal Society A*, 469, 20120659.

Cherdantsev, M., Cherednichenko, K. & Neukamm, S. (2013). Homogenisation in finite elasticity for composites with a high contrast in the vicinity of rigid-body motions. *arXiv preprint*, arXiv:1303.1224.

Cherednichenko, K., Smyshlyaev, V. P. & Zhikov, V. V. (2006). Non-local homogenised limits for composite media with highly anisotropic periodic fibres. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A*, 136, 87–114.

Elishakoff, I. (2004). *Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-Form Solutions*. CRC Press.

Elishakoff, I. & Perez, J. (2005). Design of a polynomially inhomogeneous bar for specified natural frequency. *Journal of Sound and Vibration*, 287, 1004–1012.

Horgan, C. O. & Chan, A. M. (1999). Vibration of inhomogeneous strings, rods and membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 225, 503–513.

Kaplunov, J., Kossovich, L. Y. & Nolde, E. (1998). *Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies*. Academic Press.

Kaplunov, J., Prikazchikov, D. A. & Sergushova, O. (2016). Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods. *Journal of Sound and Vibration*, 366, 264–276.

Kaplunov, J., Prikazchikov, D. A. & Sergushova, O. (2019). Lowest eigenfrequencies of elastic structures with high material contrast. *Proceedings of the Royal Society A*, 475, 20190036.

Majidi, C. (2014). Soft robotics: A perspective—current trends and prospects for the future. *Soft Robotics*, 1, 5–11.

Rus, D. & Tolley, M. T. (2015). Design, fabrication and control of soft robots. *Nature*, 521, 467–475.

Şahin, S. (2019). The effect of boundary conditions on the lowest vibration modes of strongly inhomogeneous beams. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 14, 567–585.

Şahin, S. (2020). The lowest vibration modes of an elastic beam composed of alternating stiff and soft components. *Archive of Applied Mechanics*, 90, 111–129.

Şahin, S. (2021). On the lowest frequencies of strongly inhomogeneous multi-component beams. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 44(11), 9302-9314.

Smyshlyaev, V. P. (2009). Propagation and localization of elastic waves in highly anisotropic periodic composites via two-scale homogenization. *Mechanics of Materials*, 41, 434–447.

Sorokin, S. V. (2004). Wave propagation in sandwich plates with and without heavy fluid loading. *Journal of Sound and Vibration*, 271, 1039–1062.

Zenkert, D. (1995). *An Introduction to Sandwich Structures*. Emas Publishing

KURT VE VAŞAĞIN YABAN KEÇİSİ ÜZERİNDEKİ DOLAYLI REKABETİNİN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

Mahir DEMİR¹

Giriş

Doğal ekosistemlerde av-avcı ilişkileri, ekolojik toplulukların işleyişini ve besin ağlarının kararlılığını belirleyen temel süreçlerin başında gelmektedir. Bu ilişkiler çok katmanlı olup türlerin davranışlarını, popülasyon dinamiklerini, besin zincirlerinin yapısını ve habitat kullanım örüntülerini doğrudan şekillendirir (Begon vd., 2006). Avcı türlerin av popülasyonları üzerindeki baskısı yalnızca ekosistemin trofik yapısını belirlemekle kalmaz; aynı zamanda avcı türlerin birbirleriyle olan ilişkilerini ve rekabet düzeylerini de derinden etkiler. Özellikle aynı yaşam alanını paylaşan ve benzer av türlerini tüketen yırtıcılar arasında ortaya çıkan rekabet, ekolojik nişlerin düzenlenmesi ve türlerin uzun vadeli sürdürülebilirliği açısından kritik önem taşır (Schoener, 1974; Demir, 2024).

¹Doç. Dr. Mahir DEMİR, Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi, Giresun, Türkiye, ORCID: 0000-0002-9670-5210

Schoener (1974), ekolojik niş kavramı çerçevesinde türler arası rekabetin çoğunlukla kaynak paylaşımına dayandığını ve türlerin aynı kaynağı kullanma derecelerine bağlı olarak rekabetin şekillendiğini vurgulamaktadır. Bu yaklaşım, farklı avcı türlerin av tercihleri, avlanma stratejileri ve mekânsal dağılımları arasındaki örtüşmenin rekabet düzeyinin temel belirleyicisi olduğu fikrine dayanmaktadır. Linnell ve Strand (2000) ise büyük yırtıcılar arasındaki rekabetin yalnızca besin üzerinden değil, aynı zamanda mekan seçimi, zamansal aktivite düzeni ve davranışsal kaçınma stratejileri üzerinden de gerçekleşebileceğini ifade etmektedir. Bu durum, avcı türlerin karşılıklı etkileşimlerini oldukça dinamik ve karmaşık bir hâle getirmektedir.

Türkiye'de geniş dağılıma sahip olan iki büyük yırtıcı tür olan kurt (*Canis lupus*) ve vaşak (*Lynx lynx*), özellikle ormanlık ve dağlık bölgelerde habitatlarının büyük oranda çakışması nedeniyle bu tür bir rekabet dinamiğinin önemli bir örneğini temsil etmektedir. Her iki türün de yüksek enerji içeriği sunan büyük memeli avlarına yöneldiği bilinmektedir. Bu bağlamda yaban keçisi (*Capra aegagrus*), hem kurt hem de vaşak için önemli bir av türü konumundadır. Av kompozisyonunda ve predasyon baskısında yaban keçisinin önemli yer tuttuğu, özellikle Anadolu'nun dağlık sistemlerinde yapılan çalışmalarla ortaya konmuştur (Mengüllüoğlu vd., 2019).

Mengüllüoğlu ve çalışma arkadaşlarının (2019) Türkiye'deki büyük yırtıcılarla ilgili kapsamlı saha çalışmaları, kurt ve vaşakın av tercihlerinin belirli koşullarda yüksek oranda örtüşebildiğini göstermiştir. Bu durum, söz konusu iki tür arasında dolaylı rekabeti artırmakta ve bu rekabetin avın bulunduğu mikro habitatların kullanımına, avlanma stratejilerine ve hareket ekolojisine yansıdığı düşünülmektedir. Özellikle yaban keçisinin hem dik yamaçlarda hem yüksek rakımlarda bulunması, vaşakın bu

ortamlarda daha etkili bir avcı olmasına karşın, kurtların daha geniş grup yapısı ve yüksek mobilitesinin av üzerindeki baskıyı artırabileceği değerlendirilmektedir. Böylece iki tür arasında hem ekolojik hem davranışsal düzeyde bir rekabet ilişkisi ortaya çıkmaktadır.

Bu rekabetin yönü ve şiddeti, av popülasyonlarının davranışsal tepkilerini, dağılım örüntülerini ve uzun vadeli demografik eğilimlerini etkileyebilir. Yaban keçisinin predasyon baskısına verdiği yanıtlar; habitat seçimi, grup yapısı, göç davranışı veya kaçınma stratejileri şeklinde kendini gösterebilir ve bu durum hem kurt hem de vaşağın avlanma başarılarını dolaylı olarak şekillendirebilir. Böylelikle üçlü bir etkileşim sistemi ortaya çıkar: av (yaban keçisi) – orta düzey yırtıcı (vaşak) – tepe yırtıcı (kurt).

Bu çalışmanın temel amacı, kurt ve vaşağın yaban keçisi üzerindeki rekabet ilişkisini ekolojik literatürün sunduğu kavramsal çerçeve içinde değerlendirmek ve üç tür arasındaki karşılıklı etkileşimlerin avcı-av dinamiklerindeki yerini anlamaya yönelik bilimsel bir temel oluşturmaktır. Ayrıca bu rekabetin düzeyinin belirlenmesi, Türkiye'nin dağlık ekosistemlerinde yırtıcı-av ilişkilerinin yönetimi, ekosistem süreçlerinin korunması ve özellikle tehdit altındaki yaban keçisi popülasyonlarının sürdürülebilirliği için önemli bir bilimsel katkı sağlayacaktır.

Materyaller Ve Metotlar

Bu çalışmada, yaban keçisi, vaşak ve kurt popülasyonları arasındaki trofik etkileşimleri ve insan kaynaklı ölümlerin bu etkileşimler üzerindeki etkilerini incelemek amacıyla, lojistik büyüme ve av-avcı dinamiklerini içeren deterministik bir diferansiyel denklem modeli kullanılmıştır (Demir, 2019). Model, farklı insan baskısı ve rekabet senaryoları altında popülasyonların

uzun dönem davranışlarını sayısal simülasyonlar aracılığıyla değerlendirmek üzere yapılandırılmıştır.

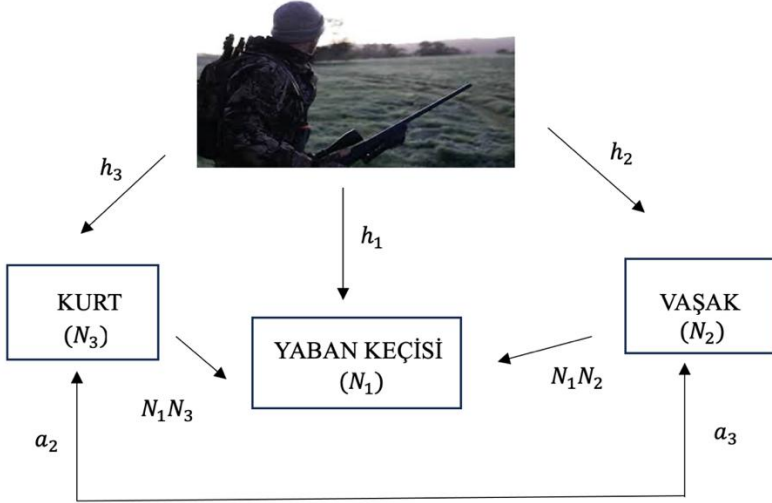
Model Formülasyonu

Bu çalışmada kullanılan matematiksel model, yaban keçisi popülasyonunun lojistik büyüme dinamiklerini temel almakta ve vaşak ile kurt popülasyonlarının bu türle olan av–avcı etkileşimlerini içermektedir. Bu ilişkiler Şekil 1 de açıkça belirtilmektedir. Model, her bir tür için tanımlanan büyüme, rekabet ve insan (avcılık) kaynaklı ölüm oranı katsayılarını içeren adi diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - a N_1 N_2 - b N_1 N_3 - h_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \left(\frac{N_2 + \alpha_2 N_3}{K_2}\right) - h_2 N_2\right) \\ \frac{dN_3}{dt} &= r_3 N_3 \left(1 - \left(\frac{N_3 + \alpha_3 N_2}{K_3}\right) - h_3 N_3\right)\end{aligned}\tag{1}$$

Bu sistem için başlangıç koşulları, $N_1(t=0), N_2(t=0), N_3(t=0)$ ve tüm parametre değerleri pozitif tanımlıdır. Bu durum, eşitlik (1) de verilen sistemin sonuçlarının negatif olamayan ve üten sınırlı olacağını garanti etmektedir (Demir, 2023).

Şekil 1. Modelin akış diyagramı



Tablo 1. Modelde kullanılan değişken ve parametreler

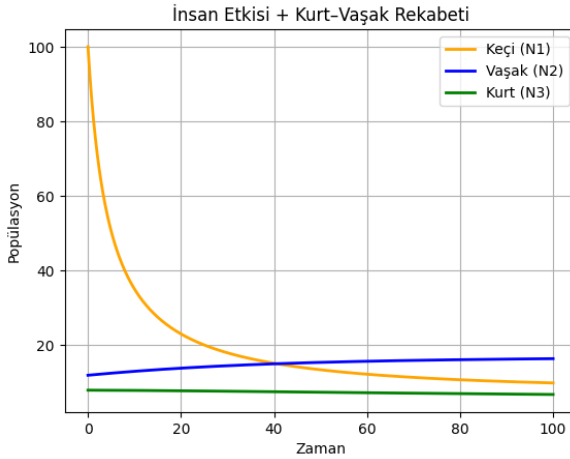
Sembol	Açıklama	Parametre Değerleri
$N_1(0)$	Yaban keçisi popülasyonunun başlangıçtaki birey sayısı	100
$N_2(0)$	Vaşak popülasyonunun başlangıçtaki birey sayısı	12
$N_3(0)$	Kurt popülasyonunun başlangıçtaki birey sayısı	8
r_1	Yaban keçisi büyüme sabiti	0.35
r_2	Vaşak büyüme sabiti	0.12
r_3	Kurt büyüme sabiti	0.08
K_1	Yaban keçisi taşıma kapasitesi	150
K_2	Vaşak taşıma kapasitesi	50
K_3	Kurt taşıma kapasitesi	50
h_1	İnsanın yaban keçisi üzerindeki etkisi	0.3
h_2	İnsanın vaşak üzerindeki etkisi	0.07
h_3	İnsanın kurt üzerindeki etkisi	0.07
a	Vaşağın yaban keçisi üzerindeki avlanma etkisi	0.0015
b	Kurdun yaban keçisi üzerindeki avlanma etkisi	0.0008
α_2	Kurdun vaşak üzerindeki rekabet etkisi katsayısı	0.6
α_3	Vaşağın kurt üzerindeki rekabet etkisi katsayısı	0.4

Nümeriksel Sonuçlar

Bu bölümde, Tablo 1’de sunulan parametre değerleri kullanılarak geliştirilen modelin nümerik çözümleri farklı koşullar altında analiz edilmektedir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiş ve sistem dinamiklerine ilişkin temel çıkarımlar özetlenmiştir.

İnsan kaynaklı av baskısının tüm türlere uygulanması ve üst düzey predatörlerin sisteme dahil edilmesi, yaban keçisi popülasyonunda belirgin bir azalmaya yol açmaktadır (Şekil 2). Bu durumda doğal olarak yaban keçisi popülasyonunun sistemin en hassas bileşeni olarak öne çıkartmaktadır.

Şekil 2. Üç türünde var olduğu popülasyonların dinamiksel değişimi

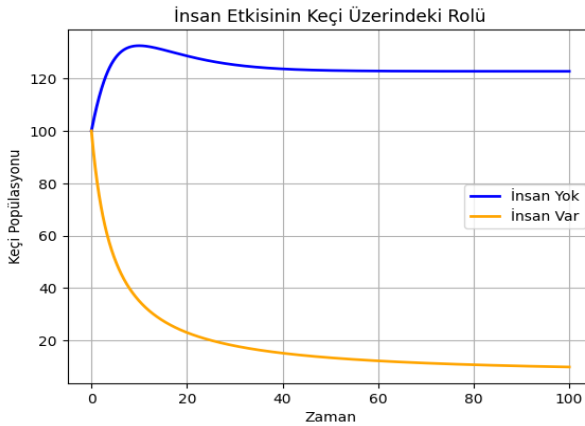


Yaban keçisi popülasyonu başlangıçta hızlı bir düşüş göstermekte, ardından düşük seviyede bir dengeye yaklaşmaktadır (Şekil 2). Bunun yanında keçi popülasyonundaki azalmaya rağmen, kurt ile olan rekabet ve insan etkisi altında sınırlı bir artışla dengelenmektedir. Fakat kurt popülasyonu, vaşakla olan rekabet

nedeniyle düşük yoğunlukta kalmakta ve baskılanmış bir popülasyon sergilemektedir.

İnsan etkisinin daha net biçimde ortaya konulabilmesi amacıyla, insan etkisinin bulunduğu ve bulunmadığı durumlar birlikte değerlendirilmiştir (Şekil 3). Bu karşılaştırma, insan etkisinin popülasyon dinamikleri üzerindeki rolünü daha açık biçimde göstermektedir. Farklı bir bakış açısıyla, rekabet etkisinin de hesaba katıldığı senaryolar incelendiğinde (Şekil 4), insan etkisinin varlığına ya da yokluğuna bakılmaksızın, yaban keçisi popülasyon büyüklüğünün kurt ve vaşak arasındaki rekabet oranı ile doğru orantılı olarak arttığı açıkça gözlemlenmektedir. Ancak insan etkisinin olmadığı durumlarda, birey sayısının onlar mertebesinde yüzler mertebesine yükseldiği görülmektedir.

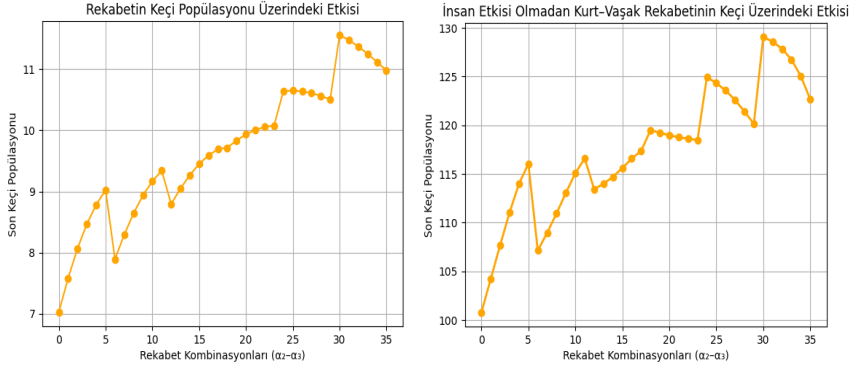
Şekil 3. İnsan etkisinin yaban keçisi üzerindeki etkisi



Sonuç olarak, insan etkisinin modele dahil edilmediği durumda, kurt ve vaşak arasındaki rekabetin yaban keçisi popülasyonu üzerinde dolaylı ancak belirgin bir düzenleyici etkisi olduğu görülmektedir (Şekil 3). Rekabetin artması, predatörlerin etkinliğini azaltarak keçi popülasyonunun daha yüksek denge seviyelerine ulaşmasını sağlamaktadır. Bu sonuç, üst düzey predatör

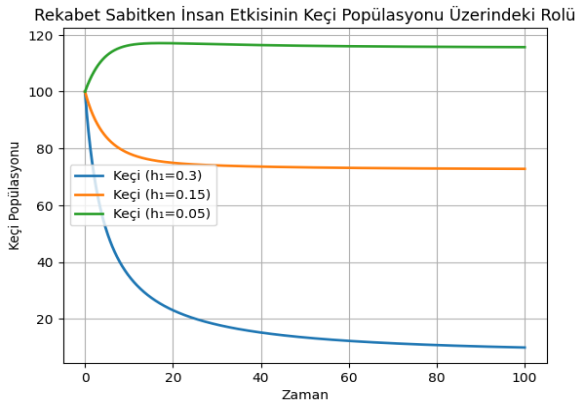
rekabetinin alt trofik seviyelerde dengeleyici bir rol oynayabileceğini göstermektedir.

Şekil 4. İnsan etkisi olduğunda ve olmadığında Kurt-Vaşak rekabetinin keçi popülasyonuna etkisi



Rekabet sabit iken yüksek insan etkisi altında keçi popülasyonu hızla düşüyor ve çok düşük bir seviyede dengeleniyor. Sistem çöküşe yakın bir rejime giriyor. Yani, İnsan baskısı yüksek olduğunda, rekabetin ve doğal denge mekanizmalarının keçi popülasyonunu koruması mümkün olmamaktadır (Şekil 5).

Şekil 5. Kurt-Vaşak rekabeti sabitken insan avlama etkisinin keçi popülasyonu üzerinde etkisi.



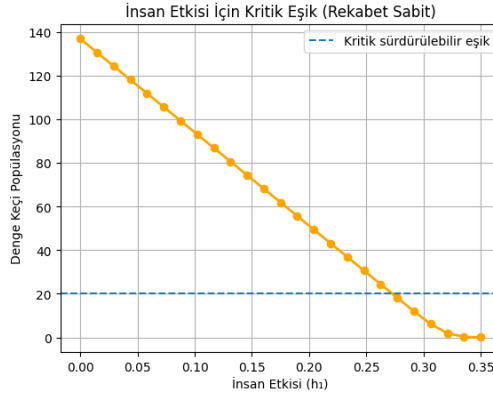
Orta Düzey İnsan Etkisi ($h_1 = 0.15$) olduğunda, başlangıçta düşüş var fakat Ardından orta seviyede kararlı dengeye oturuyor. Bu durumda keçi yok olmuyor ama hala çok güçlü olmasa da baskı altında bulunmaktadır. Bu sebeple, orta düzey insan etkisi altında sistem yeni bir denge noktasına oturmakta, ancak bu denge doğal taşıma kapasitesinin oldukça altında kalmaktadır.

Düşük İnsan Etkisi ($h_1 = 0.05$) altında, yaban keçisi popülasyonu önce artıyor daha sonra yüksek bir denge seviyesine ulaşıyor ve ekosistem sağlıklı rejime geçiyor. İnsan baskısının düşük olduğu bu durumda, rekabet sabit kalsa dahi yaban keçisi popülasyonu lojistik büyüme dinamikleri sayesinde kendini sürdürebilmektedir.

Bu sonuçları dikkate alırsak, rekabet sabitken bile, yaban keçisi popülasyonunun kaderini belirleyen ana parametre insan etkisidir. Üst düzey predatörler arasındaki rekabet önemli bir düzenleyici mekanizma olmakla birlikte, insan kaynaklı ölüm oranı bu etkinin önüne geçerek sistem dinamiklerini baskın biçimde belirlemektedir.

Şekil 6'yı analiz edecek olursak, insan kaynaklı mortalite katsayısının (h_1) düşük olduğu durumlarda (0 – 0.10 aralığı), yaban keçisi popülasyonunun yüksek bir denge düzeyine ulaştığı görülmektedir. Bu aralıkta sistem, ekolojik açıdan sağlıklı ve dayanıklı bir yapı sergilemekte; popülasyon dinamikleri büyük ölçüde doğal lojistik büyüme tarafından belirlenmektedir. İnsan etkisinin sınırlı olması, popülasyonun çevresel taşıma kapasitesine yakın değerlerde dengelenmesine olanak tanımaktadır.

Şekil 6. İnsan avlama etkisinin keçi popülasyonu üzerinde etkisi ve keçi popülasyonunun dengeye vardığı noktalar



h_1 katsayısının orta düzeylere yükselmesiyle (0.10 – 0.25 aralığı), yaban keçisi popülasyon büyüklüğünde belirgin ve yaklaşık doğrusal bir azalma gözlenmektedir. Bu aralıkta sistem kararlılığını korumakla birlikte, ekolojik açıdan daha kırılgan bir yapı kazanmaktadır. İnsan etkisindeki görece küçük artışlar veya çevresel ek baskılar, popülasyonun sürdürülebilirliğini ciddi biçimde tehdit edebilecek potansiyele sahiptir.

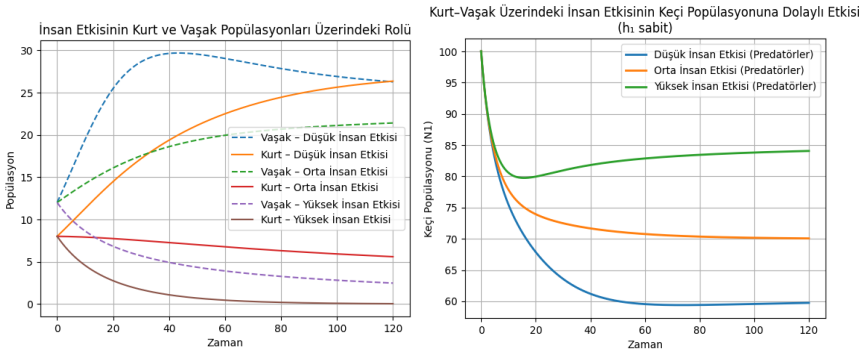
Model çıktıları, $h_1 \approx 0.26$ civarında kritik bir eşik değerin varlığına işaret etmektedir. Bu eşik değerin aşılmasıyla birlikte yaban keçisi popülasyonu sürdürülebilir seviyelerin altına düşmekte ve sistem dinamikleri yok oluş rejimine geçmektedir. Bu durum, popülasyonun doğal yenilenme kapasitesinin insan kaynaklı kayıpları telafi edemediği bir faz geçişini temsil etmektedir.

İnsan kaynaklı mortalite katsayısının daha da artması durumunda ($h_1 > 0.30$), yaban keçisi popülasyonu fonksiyonel olarak yok oluş göstermektedir. Birincil besin kaynağının ortadan kalkmasıyla birlikte, üst trofik seviyelerde yer alan predatör popülasyonlarının da dolaylı olarak çöküş sürecine girdiği gözlenmektedir. Bu sonuç, insan etkisinin yalnızca hedef tür

üzerinde değil, tüm trofik yapı üzerinde zincirleme etkiler yarattığını ortaya koymaktadır.

Rekabet katsayılarının sabit tutulduğu koşullar altında elde edilen bu bulgular, yaban keçisi popülasyonunun uzun vadeli dinamiklerinin büyük ölçüde insan kaynaklı mortalite tarafından belirlendiğini göstermektedir. Özellikle $h_1 \approx 0.26$ civarında tanımlanan kritik eşik, yönetim ve koruma stratejileri açısından hayati öneme sahiptir; bu değerin aşılması, ekosistemin geri dönüşü zor bir çöküş sürecine girmesine neden olmaktadır.

Şekil 7. Sol Panel: düşük ($h_2 = h_3 = 0.02$), orta ($h_2 = h_3 = 0.06$) ve yüksek ($h_2 = h_3 = 0.12$), insan etkisi altında kurt ve vaşak popülasyonlarının değişimi. Sağ Panel: düşük, orta ve yüksek insan etkisi altında keçi popülasyonunun değişimi.



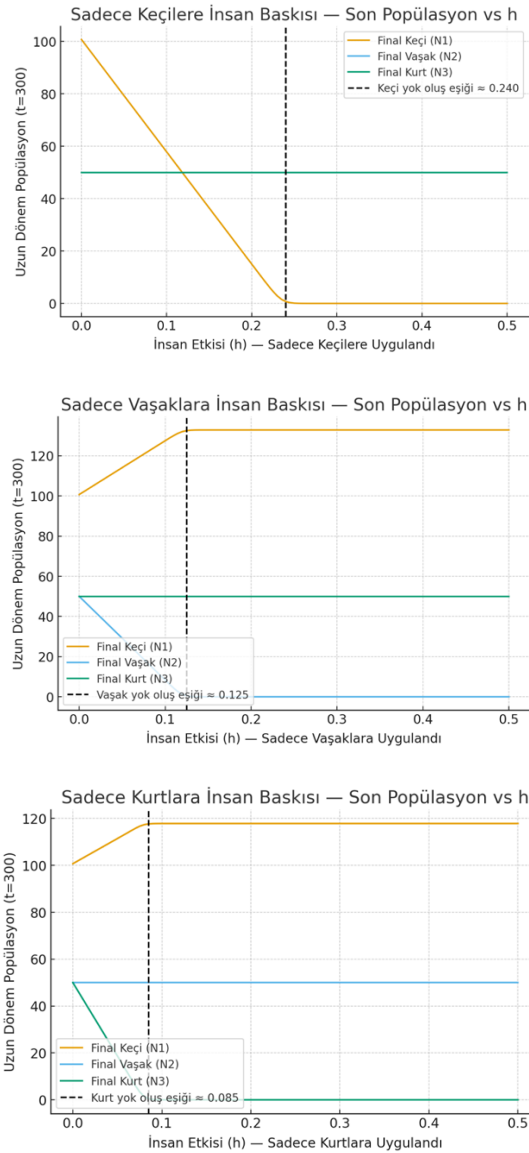
İnsan kaynaklı ölüm oranı katsayılarının düşük olduğu senaryoda, yani $h_2 = h_3 = 0.02$ olduğu durumda (Şekil 7), her iki avcı türünün de popülasyon dinamikleri istikrarlı bir artış eğilimi sergilemektedir. Vaşak popülasyonu, başlangıç evresinde hızlı bir büyüme göstererek orta-yüksek bir denge seviyesine ulaşmakta ve türler arası rekabetin varlığına rağmen belirgin bir baskılanma yaşamamaktadır. Buna karşılık kurt popülasyonu daha yavaş, ancak süreklilik arz eden bir artış göstermekte ve vaşak ile olan rekabet nedeniyle görece daha sınırlı bir denge düzeyinde sabitlenmektedir.

Bu bulgular, insan baskısının düşük olduğu koşullarda predatör popölasyonlarının ekosistem içerisinde kalıcı ve dengeli biçimde varlıklarını sürdürebildiğini ortaya koymaktadır.

İnsan kaynaklı mortalitenin orta düzeylere yükseldiğı durumda ($h_2 = h_3 = 0.06$), predatör popölasyonlarının tepkileri türler arasında belirgin biçimde ayrışmaktadır. Vaşak popölasyonunun büyümesi bu koşullarda belirgin şekilde sınırlanmakta ve düşük–orta seviyelerde bir denge durumuna ulaşmaktadır. Kurt popölasyonu ise hem türler arası rekabet hem de artan insan baskısının birleşik etkisi altında sürekli bir azalma eğilimi göstermektedir. Bu durum, orta düzey insan etkisinin, rekabet dezavantajına sahip türler üzerinde orantısız bir baskı yarattığını ve sistemde asimetrik bir predatör yapısının ortaya çıkmasına neden olduğunu göstermektedir.

İnsan etkisinin yüksek olduğı senaryoda ($h_2 = h_3 = 0.12$), üst düzey predatör popölasyonlarında belirgin bir çöküş gözlenmektedir. Vaşak popölasyonu zaman içerisinde sürekli azalan bir eğilim sergileyerek çok düşük bir denge seviyesine yaklaşırken, kurt popölasyonu neredeyse tamamen yok oluş düzeyine inmektedir. Bu sonuçlar, yüksek insan baskısı altında üst trofik seviyelerde yer alan türlerin ekosistemden fonksiyonel olarak silindiğini ve bunun sonucunda trofik yapının ciddi biçimde bozulduğunu ortaya koymaktadır.

Şekil 8. İnsan etkisinin yaban keçisi, kurt ve vaşak üzerindeki direk etkisi ve kritik eşik değerleri



Genel olarak değerlendirildiğinde, insan etkisinin kurt ve vaşak popülasyonları üzerindeki artışı, predatörler arası rekabetten

bağımsız olarak her iki türün de uzun vadeli varlığını tehdit etmektedir. Ancak model sonuçları, kurt popülasyonunun hem türler arası rekabet hem de insan kaynaklı baskılara karşı daha hassas bir dinamik yapı sergilediğini göstermektedir. Bu durum, ekosistem yönetimi ve koruma stratejilerinde türler arası farklı hassasiyetlerin dikkate alınmasının gerekliliğini vurgulamaktadır.

Bu çalışmada, her bir tür için yok oluş eşikleri sayısal olarak belirlenmiştir. Yaban keçisi popülasyonu (N_1) için hesaplanan yok oluş eşiği, insan kaynaklı mortalite katsayısı $h_1 \approx 0.240$ olarak bulunmuştur (Şekil 8). Bu değerin aşılması durumunda, model simülasyonlarının uzun dönem çıktılarında ($t = 300$) keçi popülasyon büyüklüğünün 1 bireyin altına düştüğü ve fonksiyonel yok oluşun gerçekleştiği gözlenmektedir. Bu sonuç, başlangıç popülasyon büyüklüğü yüksek olsa dahi, yeterince güçlü doğrudan insan baskısının yaban keçisi popülasyonunu uzun vadede sürdürülemez hâle getirebildiğini göstermektedir.

Vaşak popülasyonu (N_2) için hesaplanan yok oluş eşiği $h_2 \approx 0.125$ olarak belirlenmiştir (Şekil 8). Bu değer, vaşakların insan baskısına karşı keçiye kıyasla daha hassas, ancak kurtlara göre daha dirençli bir dinamik yapı sergilediğini ortaya koymaktadır. Kurt popülasyonu (N_3) için ise yok oluş eşiği daha düşük bir seviyede, $h_3 \approx 0.085$ olarak hesaplanmıştır. Bu bulgu, model parametreleri altında kurtların doğrudan insan baskısına karşı en hassas tür olduğunu ve görece küçük düzeydeki insan kaynaklı mortalitenin dahi uzun dönemde popülasyon çöküşüne yol açabildiğini göstermektedir.

Yok oluş eşiklerinin belirlenmesinde, her bir tür için insan baskısının yalnızca ilgili türe uygulandığı senaryolar ele alınmıştır. İnsan baskısı katsayıları $h \in [0, 0.5]$ aralığında sistematik olarak artırılmış, model denklemleri $t \in [0, 300]$ zaman aralığında sayısal olarak çözülmüş ve $t = 300$ sonunda popülasyon büyüklüğünün 1 bireyin altına düştüğü ilk h değeri yok oluş eşiği olarak

tanımlanmıştır (Şekil 8). Bu yaklaşım, türlere özgü insan baskısı hassasiyetlerinin karşılaştırmalı olarak değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır.

Elde edilen sonuçlar ekolojik açıdan önemli çıkarımlar sunmaktadır. Özellikle kurt popülasyonu için son derece düşük düzeydeki insan baskısının dahi uzun vadede yok oluşa yol açabilmesi, bu türün korunmasında insan etkilerinin dikkatle yönetilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Öte yandan, vaşak popülasyonunun orta düzeyde bir hassasiyet sergilemesi, türler arası farklılıkların ekosistem dinamikleri açısından belirleyici olduğunu göstermektedir.

Son olarak, model sonuçları trofik bağımlılığın önemini açık biçimde ortaya koymaktadır. Özellikle yaban keçisi popülasyonunun yok oluşu durumunda, bu türle beslenen predatör popülasyonlarının (vaşak ve kurt) kısa vadede artış göstermesi beklenmemekte; aksine, besin kaynağının ortadan kalkmasına bağlı olarak bu türlerin popülasyonlarının da zaman içerisinde azaldığı gözlenmektedir. Bu durum, ekosistemde bir türün kaybının üst trofik seviyelerde zincirleme ve gecikmeli etkiler yarattığını vurgulamaktadır.

Sonuç

Bu çalışmada, yaban keçisi–vaşak–kurt etkileşimlerinden oluşan üç trofik seviyeli bir ekosistemin dinamikleri, insan kaynaklı mortalite ve türler arası rekabetin birleşik etkileri altında sayısal olarak incelenmiştir. Geliştirilen model, insan baskısının hem doğrudan hem de dolaylı yollarla popülasyon dinamiklerini nasıl şekillendirdiğini ortaya koyarak, ekosistemlerin sürdürülebilirliği açısından kritik eşiklerin varlığını açık biçimde göstermiştir.

Elde edilen sonuçlar, yaban keçisi popülasyonunun uzun vadeli kaderinin büyük ölçüde insan kaynaklı mortalite katsayısı tarafından belirlendiğini ortaya koymaktadır. İnsan baskısının düşük

olduğu koşullarda keçi popülasyonu lojistik büyümenin baskın olduğu, kararlı ve yüksek bir denge seviyesine ulaşırken; insan etkisinin artmasıyla birlikte popülasyon büyüklüğünde doğrusal bir azalma gözlenmektedir. Model, $h_1 \approx 0.24-0.26$ aralığında kritik bir eşik bulunduğunu ve bu değerin aşılmasıyla sistemin yok oluş rejimine girdiğini göstermektedir. Bu eşik, ekosistemin dayanıklılığının ani biçimde kaybolduğu bir faz geçişini temsil etmektedir.

Predatör popülasyonlarına ilişkin bulgular, insan etkisinin türler arasında homojen olmayan sonuçlar doğurduğunu ortaya koymaktadır. Düşük insan baskısı altında hem vaşak hem de kurt popülasyonları ekosistem içinde kalıcı ve dengeli biçimde varlığını sürdürebilirken, insan etkisinin orta düzeylere yükselmesi sistemde belirgin bir asimetri yaratmaktadır. Bu koşullarda vaşak popülasyonu sınırlı bir dengeye ulaşırken, kurt popülasyonu rekabet ve insan baskısının birleşik etkisi altında sürekli bir azalma eğilimi sergilemektedir. Yüksek insan baskısı senaryolarında ise her iki predatör türü de fonksiyonel yok oluş düzeyine yaklaşmakta, özellikle kurt popülasyonu neredeyse tamamen sistemden silinmektedir.

Sayısal eşik analizi, türlerin insan baskısına karşı duyarlılıklarının belirgin biçimde farklılaştığını göstermektedir. Kurt popülasyonu için hesaplanan yok oluş eşığının ($h_3 \approx 0.085$) oldukça düşük olması, bu türün doğrudan insan baskısına karşı en hassas yapı sergileyen tür olduğunu ortaya koymaktadır. Vaşak popülasyonu orta düzey bir hassasiyet gösterirken ($h_2 \approx 0.125$), yaban keçisi popülasyonu başlangıçta yüksek birey sayısına sahip olmasına rağmen yeterince güçlü bir doğrudan baskı altında ($h_1 \approx 0.24$) uzun vadede yok olabilmektedir. Bu sonuçlar, yalnızca başlangıç popülasyon büyüklüğünün değil, insan etkisinin büyüklüğünün ve sürekliliğinin de belirleyici olduğunu göstermektedir.

Çalışmanın önemli bulgularından biri, trofik bağımlılığın ekosistem çöküşlerinde oynadığı merkezi roldür. Yaban keçisi popülasyonunun azalması veya yok olması, kısa vadede predatör popülasyonlarında telafi edici bir artışa yol açmamakta; aksine, besin kaynağının ortadan kalkmasına bağlı olarak vaşak ve kurt popülasyonları da gecikmeli biçimde düşüşe geçmektedir. Bu durum, tek bir tür üzerindeki insan baskısının, tüm trofik yapı boyunca zincirleme ve geri dönüşü zor etkiler yaratabildiğini ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak, bu çalışma insan kaynaklı, yani avcılık kaynaklı ölüm oranları, türler arası rekabetten bağımsız olarak, ekosistemin uzun vadeli sürdürülebilirliği üzerinde belirleyici bir rol oynadığını göstermektedir. Özellikle kritik eşiklerin aşılması durumunda sistemin ani ve geri dönüşü zor bir çöküş sürecine girdiği gözlenmektedir. Bu bağlamda, ekosistem yönetimi ve koruma stratejilerinin yalnızca tekil türleri değil, trofik ilişkileri ve insan baskısına karşı türlere özgü hassasiyetleri birlikte dikkate alması gerekmektedir. Model sonuçları, insan etkisinin sınırlandırılmasının yalnızca hedef türlerin değil, tüm ekosistem yapısının korunması açısından hayati öneme sahip olduğunu güçlü biçimde vurgulamaktadır.

Kaynakça

Begon, M., Townsend, C. R., & Harper, J. L. (2006). *Ecology: From individuals to ecosystems* (4th ed.). Blackwell Publishing.

Boitani, L. (2000). Wolf conservation and recovery. In L. D. Mech & L. Boitani (Eds.), *Wolves: Behavior, ecology, and conservation* (pp. 317–340). University of Chicago Press.

Breitenmoser, U., & Breitenmoser-Würsten, C. (2008). *Der Luchs: Ein Großraubtier in Europa*. Haupt Verlag.

Breitenmoser, U., Mallon, D. P., von Arx, M., Breitenmoser-Würsten, C., & Lanz, T. (2000). *Action Plan for the conservation of the Eurasian lynx in Europe (Lynx lynx)*. Council of Europe Publishing.

ÇOB-DKMP. (2021). *Türkiye'nin Memeli Türleri Tür Eylem Planları: Avrupa Vaşığı (Lynx lynx)*. T.C. Tarım ve Orman Bakanlığı Doğa Koruma ve Milli Parklar Genel Müdürlüğü.

Clutton-Brock, J. (1995). Origins of the dog: Domestication and early history. In J. Serpell (Ed.), *The domestic dog: Its evolution, behaviour and interactions with people* (pp. 7–20). Cambridge University Press.

Demir, M. (2019). Optimal Control Strategies in Ecosystem-Based Fishery Models, Ph.D dissertation, University of Tennessee in Knoxville. Available from: https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/5421.

Demir, M. (2023). Importance of stability analysis for sustainable fisheries in the absence of important data. *Acta Aquatica Turcica*, 19 (1), 071-087. <https://doi.org/10.22392/actaquatr.1179986>

Demir, M. (2024). Predator effect of Atlantic bonito on the Black Sea anchovy and their sustainable and optimal fishery. *Turkish Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 24(3), TRJFAS23861. <https://doi.org/10.4194/TRJFA S23861>

Durant, S. M. (2000). Living with the enemy: Avoidance of hyenas and lions by cheetahs in the Serengeti. *Behavioral Ecology*, 11(6), 624–632. <https://doi.org/10.1093/beheco/11.6.624>

Estes, J. A., Terborgh, J., Brashares, J. S., Power, M. E., Berger, J., Bond, W. J., ... & Wardle, D. A. (2011). Trophic downgrading of planet Earth. *Science*, 333(6040), 301–306. <https://doi.org/10.1126/science.1205106>

IUCN. (2023). *Lynx lynx: The IUCN Red List of Threatened Species*. Retrieved from <https://www.iucnredlist.org>

Jobin, A., Molinari, P., & Breitenmoser, U. (2000). Prey spectrum, prey preference and consumption rates of Eurasian lynx in the Swiss Jura Mountains. *Acta Theriologica*, 45(2), 243–252. <https://doi.org/10.4098/AT.arch.00-24>

Krofel, M. (2012). Human-caused mortality in the Eurasian lynx in Europe: The silent killer. *Hystrix, the Italian Journal of Mammalogy*, 23(1), 1–7. <https://doi.org/10.4404/hystrix-23.1-4567>

Krofel, M., Kos, I., & Jerina, K. (2012). The noble cats return: The status and conservation of the Eurasian lynx (*Lynx lynx*) in Slovenia. *Hystrix, the Italian Journal of Mammalogy*, 23(1), 3–10. <https://doi.org/10.4404/hystrix-23.1-4555>

Larson, G., Karlsson, E. K., Perri, A., Webster, M. T., Ho, S. Y., Peters, J., ... & Lindblad-Toh, K. (2012). Rethinking dog domestication by integrating genetics, archeology, and biogeography. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(23), 8878–8883. <https://doi.org/10.1073/pnas.1203005109>

Linnell, J. D. C., & Strand, O. (2000). Interference interactions, co-existence and conservation of mammalian carnivores. *Diversity and Distributions*, 6(4), 169–176. <https://doi.org/10.1046/j.1472-4642.2000.00069.x>

Mech, L. D., & Boitani, L. (Eds.). (2003). *Wolves: Behavior, ecology, and conservation*. University of Chicago Press.

Mengüllüoğlu, D., Ambarlı, H., Berger, J., & Turan, N. (2018). Status and distribution of the Eurasian lynx in Turkey. *Cat News, Special Issue 12*, 34–37.

Mengüllüoğlu, D., Ambarlı, H., Berger, J., & Turan, N. (2019). Diet and prey selection of Eurasian lynx (*Lynx lynx*) and grey wolf (*Canis lupus*) in a mountainous region of Anatolia. *European Journal of Wildlife Research*, 65(2), 1–9. <https://doi.org/10.1007/s10344-019-1255-2>

Peterson, R. O., & Ciucci, P. (2003). The wolf as a carnivore. In L. D. Mech & L. Boitani (Eds.), *Wolves: Behavior, ecology, and conservation* (pp. 104–130). University of Chicago Press.

Ripple, W. J., & Beschta, R. L. (2012). Trophic cascades in Yellowstone: The first 15 years after wolf reintroduction. *Biological Conservation*, 145(1), 205–213. <https://doi.org/10.1016/j.biocon.2011.11.005>

Schoener, T. W. (1974). Resource partitioning in ecological communities. *Science*, 185(4145), 27–39. <https://doi.org/10.1126/science.185.4145.27>

Schmidt-Posthaus, H., Breitenmoser-Würsten, C., Posthaus, H., & Bacciarini, L. N. (2002). Causes of mortality in reintroduced Eurasian lynx in Switzerland. *Journal of Wildlife Diseases*, 38(1), 84–92. <https://doi.org/10.7589/0090-3558-38.1.84>

Valdez, R. (1982). *The wild goats of the world*. Texas A&M University Press.

Von Arx, M., Breitenmoser-Würsten, C., Zimmermann, F., & Breitenmoser, U. (2009). *Status and conservation of the Eurasian lynx (Lynx lynx) in Europe in 2006*. KORA Report No. 35.

Sevil Meziyet Y., 2020. Yaban Keçisi (Capra Aegagrus)'Nin Niğde, Demirkazık Yaban Hayatı Geliştirme Sahası'ndaki Yayılışı Ve Popülasyon Büyüklüğü, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon

AŞILAMA ORANI İLE COVID-19 YAYILIMI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Mahir DEMİR¹

Giriş

Şiddetli Akut Solunum Sendromu Koronavirüs 2 (SARS-CoV-2) etkeninin neden olduğu COVID-19 hastalığı, ilk kez 2019 yılının sonlarında Çin'in Wuhan kentinde rapor edilmiş ve kısa sürede küresel bir halk sağlığı krizine dönüşmüştür (Li et al., 2020). Virüsün yüksek bulaşıcılığı ve asemptomatik bireyler yoluyla yayılabilmesi, hastalığın dünya genelinde kontrol altına alınmasını güçleştirmiş; kısa sürede neredeyse tüm ülkelerde yaygın salgınlara yol açmıştır (Dong et al., 2020). Pandeminin ilk evresinde vaka ve ölüm sayılarının büyük bölümü yüksek gelirli ülkelerde yoğunlaşmış olsa da, ilerleyen süreçte düşük ve orta gelirli ülkelerde de ciddi sağlık, sosyal ve ekonomik sonuçlar ortaya çıkmıştır.

COVID-19 pandemisi yalnızca sağlık sistemleri üzerinde değil, aynı zamanda sosyal yaşam, ekonomik faaliyetler ve psikolojik refah üzerinde de derin etkiler yaratmıştır. Hastalığın

¹Doç. Dr. Mahir DEMİR, Matematik, Giresun Üniversitesi, Giresun, Türkiye, ORCID: 0000-0002-9670-5210

toplum içinde hızlı yayılımı nedeniyle birçok ülkede sosyal mesafe uygulamaları, maske kullanımı, sokağa çıkma kısıtlamaları ve toplu etkinliklerin yasaklanması gibi önlemleri hayata geçirilmiştir (Spence, 2022). SARS-CoV-2'nin esas olarak enfekte bireylerin öksürme, hapşıрма ve konuşma sırasında saçtığı solunum damlacıkları yoluyla bulaştığı; klinik tabloda ateş, öksürük ve nefes darlığının yaygın olduğu, ağır vakalarda ise pnömoni, çoklu organ yetmezliği ve ölümün görülebildiği bildirilmiştir (T.C. Sağlık Bakanlığı, 2023).

Türkiye'de COVID-19'a bağlı ilk vaka 11 Mart 2020 tarihinde Sağlık Bakanlığı tarafından doğrulanmış olup (Sağlık Bakanlığı, 2020a), ülke çapında ilk ölüm 15 Mart 2020'de bildirilmiştir (Kısa et al., 2020; Sağlık Bakanlığı, 2020b). Kısa süre içinde salgının ülke geneline yayıldığı Sağlık Bakanı tarafından kamuoyuna ilan edilmiş; örneğin 1 Nisan 2020 tarihli açıklamada Bakan, 81 ilin tamamında vaka görüldüğünü ve birçok ilde ölüm bildirildiğini duyurmuştur (Sağlık Bakanlığı, 2020c). Türkiye'nin toplam vakalarına ve toplam ölüm sayılarına ilişkin resmi, güncel birikimli veriler COVID-19 Bilgilendirme Platformu tarafından yayımlanmaktadır (T.C. Sağlık Bakanlığı, COVID-19 verileri). Bu süreçte milyonlarca tanı testi yapılmış ve sağlık sistemi üzerinde önemli bir yük oluşmuştur. Salgının kontrol altına alınabilmesi amacıyla en kritik müdahalelerden biri olarak aşı uygulamaları devreye alınmıştır.

Türkiye'de COVID-19'a karşı Pfizer/BioNTech (BNT162b2) mRNA aşısı, Sinovac (CoronaVac) inaktif aşısı ve Gamaleya tarafından geliştirilen Sputnik V viral vektör aşısı acil kullanım onayı almıştır. Aşılama programı, sağlık çalışanları ve ileri yaş grupları başta olmak üzere kademeli bir önceliklendirme sistemiyle yürütülmüştür (T.C. Sağlık Bakanlığı, 2021). Uygulanan aşılarda çoğunlukla hafif ve geçici yan etkiler oluşturduğu; buna

karşılık hastalığın ağır seyri ve ölüm oranlarını önemli ölçüde azalttığı çeşitli çalışmalarda rapor edilmiştir.

Aşıların klinik etkinliğinin yanı sıra, toplum düzeyindeki etkilerinin anlaşılmasında matematiksel modelleme yaklaşımları önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle temel üreme sayısı (R_0) ve bulaşma katsayısı (β) gibi epidemiyolojik parametreler, aşılanmanın hastalık yayılım dinamikleri üzerindeki etkisini nicel olarak değerlendirmeye olanak tanımaktadır. Bu bağlamda SEIR (Susceptible–Exposed–Infected–Recovered) tipi modeller, COVID-19’un farklı senaryolar altında yayılımını incelemek için yaygın biçimde kullanılmaktadır.

Literatürde, COVID-19 aşılmasının salgın kontrolü üzerindeki etkisini inceleyen çok sayıda matematiksel çalışma bulunmaktadır. Yang, Yu ve Cai (2021), kusurlu bir aşının ABD’de COVID-19’un kontrolüne etkisini analiz etmiş ve denge noktaları ile kararlılık koşullarını inceleyerek aşılanmanın salgın dinamikleri üzerindeki rolünü ortaya koymuştur. Yavuz ve arkadaşları (2021) tarafından geliştirilen bir başka modelde, aşılama oranlarının enfeksiyon yayılımını nasıl değiştirdiği ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Diagne et al. (2021) ise Senegal verileri üzerinden gerçekleştirdikleri çalışmada, aşılama ve tedavi stratejilerinin etkili olmasına rağmen R_0 değerinin 1’in üzerinde kaldığı durumlarda ilaç dışı müdahalelerin sürdürülmesi gerektiğini göstermiştir. Benzer şekilde Çelik (2020), aşılama oranı ve etkinliğinin salgının seyri üzerindeki etkisini farklı duyarlı grupları içeren bir modelle değerlendirmiştir.

Bu çalışmada, Türkiye’de COVID-19 aşılama oranlarının hastalık yayılımı üzerindeki etkisi, il bazlı bir yaklaşım benimsenerek incelenmektedir. Sağlık Bakanlığı’ndan il düzeyinde haftalık vaka verilerine erişimde yaşanan kısıtlar nedeniyle, coğrafi olarak birbirine yakın ancak aşılama oranları bakımından belirgin

farklılıklar gösteren Giresun, Bayburt, Bingöl ve Tunceli illeri çalışma kapsamına alınmıştır. Bu illerin seçilmesindeki temel amaç, iklimsel ve coğrafi değişkenlerin etkisini asgariye indirerek, aşılama oranlarındaki farklılıkların COVID-19 yayılım dinamikleri üzerindeki etkisini daha net biçimde ortaya koymaktır. Bu doğrultuda SEIR tipi bir matematiksel model oluşturulmuş ve model parametreleri MATLAB ortamında mevcut verilerle uyumlu olacak şekilde simüle edilmiştir. Elde edilen bulguların, aşılamanın salgın kontrolündeki kritik rolünü il bazında ortaya koyarak politika yapıcılar ve halk sağlığı stratejileri açısından yol gösterici olması hedeflenmektedir.

Metot Ve Model

Bu çalışmada, hastalığın popülasyon içindeki yayılım dinamiklerini incelemek amacıyla bireylerin farklı epidemiyolojik durumlara göre sınıflandırıldığı bir kompartıman tarzı modelleme inşa edilmiştir (Aslan vd., 2022; Demir vd., 2023; Demir, 2025). Bu model eşitlik (1) de ve model kompartımanları Tablo 1 de tanıtılmaktadır.

Model Formülasyonu

Enfeksiyon yayılım kuvvetini

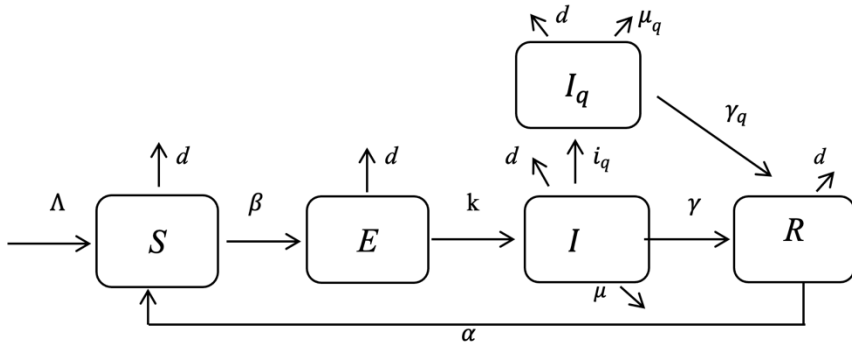
$$\lambda(t) = \frac{I(t)}{N(t)}$$

şeklinde tanımlayalım; burada $I(t)$ toplam enfekte birey sayısını ve $N(t)$ popülasyondaki toplam birey sayısını ifade etmektedir. Buna göre, Şekil 1 de verilen hastalığın yayılım şeması dikkate alındığına aşağıdaki diferansiyel denklem sistemimiz elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \beta\lambda(t)S(t) - dS(t) + \alpha R(t) \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta\lambda(t)S(t) - (k + d)E(t) \\
\frac{dI(t)}{dt} &= kE(t) - (d + \mu + \gamma + i_q)I(t) \\
\frac{dI_q(t)}{dt} &= i_qI(t) - (d + \mu_q + \gamma_q)I_q(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) + \gamma_q I_q(t) - (\alpha + d)R(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

Burada, $S(0) = S_0$, $E(0) = E_0$, $I(0) = I_0$, $I_q(0) = I_{q,0}$, ve $R(0) = R_0$ modelin başlangıç koşullarını temsil etmekte olup, bu değerler negatif olmayan ve sınırlı reel sayılar olarak tanımlanmıştır. Modelde kullanılan tüm parametreler (Tablo 2) pozitif ve sınırlı olarak tanımlanmıştır.

Şekil 1. Hastalığın akış şeması



Tablo 1. Kompartımanların tanımlanması ve açıklamaları

Kompartıman	Tanımı
S	Hastalığa açık sağlıklı bireyler
E	Kuluçka dönemindeki bireyler
I	Enfekte Bireyler (henüz test olmayan)
I_q	Test sonrası karantinaya alınan enfekte bireyler
R	İyileşen ve geçici bağışıklık kazanan bireyler

Tablo 2. Model parametrelerinin tanımlanması

Parametre	Tanım
Λ	Doğum ve göç kaynaklı yeni bireyler
β	Hastalığın bulaşıcılık oranı
k	Kuluçkadaki bireylerin enfekte sınıfına geçiş oranı
i_q	Enfekte bireylerin test ile enfekte sınıfına geçiş oranı
γ	Doğal bağışıklık yanıtı sonucu iyileşme hızı
γ_q	Hastaneye yatışa bağlı iyileşme hızı
α	Bağışıklığın azalım hızı (geçici bağışıklık)
d	Doğal ölüm oranı
μ	Hastalık kaynaklı I sınıfındaki ölüm oranı
μ_q	Hastalık kaynaklı I_q sınıfındaki ölüm oranı

Modelin matematiksel ve epidemiyolojik açıdan iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Bunun için, model (1)'in çözümlerinin pozitif olduğunu ve yukarıdan sınırlı kaldığını göstermemiz gerekmektedir. Model çözümlerinin pozitifliği ve sınırlılığı için Teorem 1'e bakınız.

Teorem 1. Başlangıç koşullarının Ω bölgesinde tanımlandığı varsayıldığında, (1) numaralı denklemde verilen diferansiyel denklem sistemi, her $t \in [0, T]$ için Ω bölgesinde tek, pozitif ve sınırlı bir çözüme sahiptir. Öyleki,

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, I_q, R) \in \mathbb{R}_+^5 : 0 < N \leq \frac{\pi}{d} \right\}.$$

İspat. Öncelikle, model (1) için çözümlerin sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dI_q}{dt} + \frac{dR}{dt} \\ &= \Lambda - \mu I - \mu_q I_q - d(S + E + I + I_q + R) \\ &\leq \Lambda - dN \\ \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} &\leq \Lambda - dN \\ \Rightarrow \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} N &\leq \frac{\Lambda}{d}. \end{aligned} \tag{2}$$

Bu durumda, $N \leq \frac{\Lambda}{d}$. Şimdi, çözümlerin pozitifliğini aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dI_q}{dt} + \frac{dR}{dt} \\ &= \Lambda - \mu I - \mu_q I_q - d(S + E + I + I_q + R) \\ &\geq \Lambda - (\mu + \mu_q + d)N \end{aligned}$$

Diferansiyel denklemin lineerliğinden yararlanarak, yukarıdaki eşitsizliği integrasyon (integral) çarpanı ile çarpabiliriz, $e^{\int_0^t (\mu + \mu_q + d) ds} = e^{(\mu + \mu_q + d)t}$ ve $s \in (0, t)$ için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$N(t)e^{(\mu+\mu_q+d)t} \geq N(0) + \Lambda \int_0^t e^{(\mu+\mu_q+d)s} ds > 0 \quad (3)$$

Bu durumda (2) ve (3) den, $0 < N \leq \frac{\Lambda}{d}$ elde edilir. Bu da diferansiyel denklem sistemin çözümünü negative olmayan üstten sınırlı bir aralıkta olduğunu göstermektedir.

Hastalısız Denge Noktası

Bu, sistemde hastalığın bulunmadığı ($I = 0$) denge noktasıdır. Buna göre, (1) ile verilen sistemin denge noktası şu şekilde ifade edilir:

$$E_1 = (S^*, E^*, I^*, I_q^*, R^*) = \left(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Buna göre, $0 < N \leq \frac{\Lambda}{d}$ olduğundan, hastalık bulunmadığı durumda duyarlı bireylerin maksimum düzeyde kalacağını göstermektedir.

Temel Üreme Sayısı (R_0)

Temel üreme sayısı, tamamen duyarlı bir popülasyona giren tek bir enfekte bireyin ortalama olarak oluşturduğu yeni enfeksiyon sayısını ifade eder. Temel üreme sayısı (R_0) hesaplanırken, Yeni Nesil Matris Yöntemi (Next Generation Matrix Method) kullanılacaktır (Driessche ve Watmough, 2002). Bu yöntem iki temel bileşene dayanmaktadır: Yeni enfeksiyonlar matrisi (F): Bu matris, salgın sırasında ortaya çıkan yeni vakaların oluşum hızlarını göstermektedir. Geçiş matrisi (V): Bu matris, bireylerin farklı durumlar arasındaki geçişlerini temsil etmektedir. Bu matrisler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta I S}{N} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V = \begin{bmatrix} (k+d)E \\ -kE + (d+\mu+\gamma+i_q)I \\ -i_q I + (d+\mu_q+\gamma_q)I_q \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta S}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\left(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0, 0\right)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta \Lambda}{dN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} k+d & 0 & 0 \\ -k & d+\mu+\gamma+i_q & 0 \\ 0 & -i_q & d+\mu_q+\gamma_q \end{bmatrix}_{\left(\frac{\Lambda}{d}, 0, 0, 0, 0\right)}$$

Bu matrisler yardımıyla yeniden üreme kat sayısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$R_0 = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta \Lambda}{dN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathcal{V}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k+d} & 0 & 0 \\ \frac{k}{((k+d)(d+\mu+\gamma+i_q))} & \frac{1}{(d+\mu+\gamma+i_q)} & 0 \\ \frac{k i_q}{((k+d)(d+\mu+\gamma+i_q)(d+\mu_q+\gamma_q))} & \frac{i_q}{((d+\mu+\gamma+i_q)(d+\mu_q+\gamma_q))} & \frac{1}{(d+\mu_q+\gamma_q)} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, bu durumda $\mathcal{FV}^{-1}$ çarpımı:

$$\mathcal{FV}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta \Lambda k}{(d N (k+d)(d+\mu+\gamma+i_q))} & \frac{\beta \Lambda}{(d N (d+\mu+\gamma+i_q))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Next Generation Matrix yöntemine göre temel üreme sayısı R_0 , $\mathcal{FV}^{-1}$ matrisinin spektral yarıçapına eşittir (Driessche and Watmough, 2002). Yani, en büyük özdeğere eşittir. Buna göre:

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda k}{d N (k + d)(d + \mu + \gamma + i_q)}$$

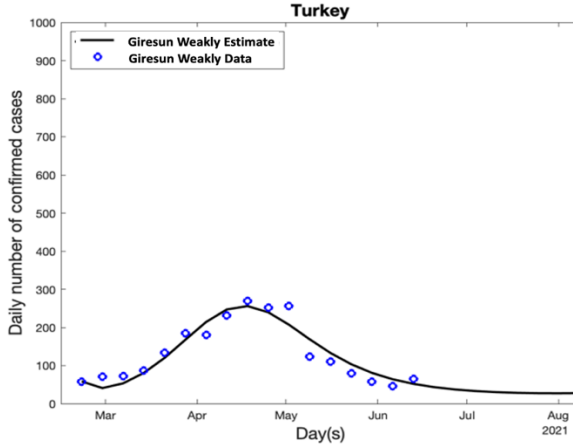
Nümeriksel Sonuçlar

Bu kısımda kullanılan veriler açık erişim sitesi olan TURCOVID19 dan elde edilmiştir (TURCOVID19, 2023). Aşağıda verilen Giresun, Bayburt, Bingöl ve Tunceli illerine ait haftalık veriler model (1) ile kalibre edilerek aşağıdaki sonuçlar ve grafikler elde edilmiştir.

Modelin Giresun Verilerine Uygulaması

Eşitlik (1) de verilen modeli Giresun verileri ile kalibre ettiğimiz zaman Şekil 2 de verilen grafikler elde edilmiştir. Giresun için ele alınan dönemde haftalık doğrulanmış vaka sayılarının zamana bağlı değişimini göstermektedir. Grafikte, haftalık gözlemsel veriler ile modelden elde edilen tahmin sonuçları birlikte sunulmuştur. Salgının başlangıç aşamasında vaka sayılarının görece düşük seviyelerde seyrettiği, Mart ayı sonu itibarıyla belirgin bir artış eğilimine girdiği ve Nisan ayı sonu-Mayıs başı civarında tepe noktasına ulaştığı görülmektedir.

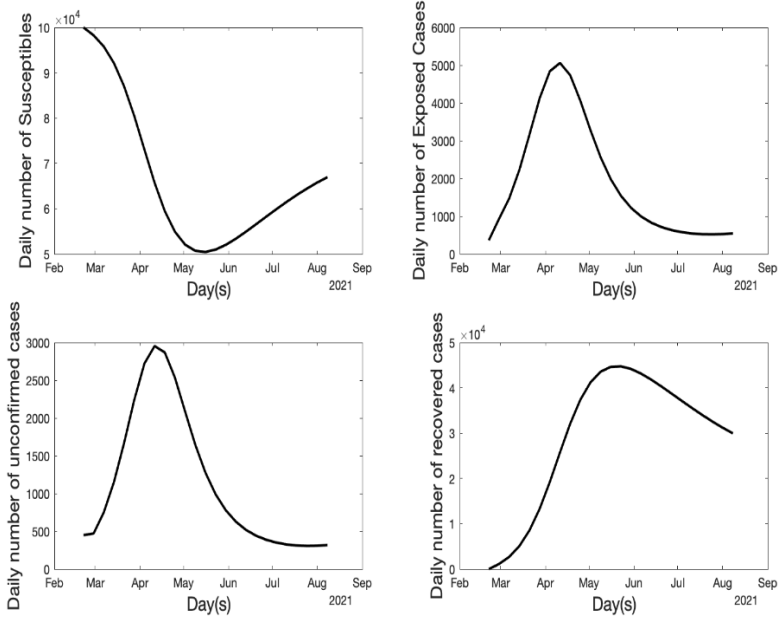
Şekil 2. Giresun için haftalık vaka sayılarının model ile kalibrasyonu



Bu tarihten sonra vaka sayılarında düzenli bir azalma meydana gelmiştir. Model çıktılarının gözlemsel verilerle büyük ölçüde uyumlu olması, önerilen matematiksel modelin kısa dönem salgın dinamiklerini başarılı bir şekilde temsil edebildiğini göstermektedir.

Salgının erken evresinde duyarlı birey (susceptible) sayısının yüksek olduğu, enfeksiyonun yayılımının hızlanmasıyla birlikte bu sayının hızlı bir şekilde azaldığı gözlenmektedir (Şekil 3, üst sol panel). Özellikle Nisan ve Mayıs aylarında duyarlı birey sayısında belirgin bir düşüş meydana gelmiş ve bu düşüş Mayıs ayı civarında minimum seviyeye ulaşmıştır. Daha sonraki süreçte ise duyarlı birey sayısında kademeli bir artış eğilimi görülmektedir. Bu durum, temas oranlarının azalması, bağışıklık süresinin sınırlı olması veya yeni duyarlı bireylerin sisteme dâhil olması gibi mekanizmalarla açıklanabilir.

Şekil 3. Hastalığın her bir kompartımanda yayılım dinamiği



Şekil 3 de sağ üst grafikte, maruz kalan bireylerin (Exposed) zamana göre değişimini göstermektedir. Grafikten, Mart ayı itibarıyla maruz kalan birey sayısının hızla arttığı ve Nisan ayı ortalarında maksimum seviyeye ulaştığı anlaşılmaktadır. Bu tepe noktası, enfeksiyonun toplum içinde en yoğun biçimde yayıldığı dönemi temsil etmektedir. Takip eden süreçte maruz kalan birey sayısında belirgin bir azalma gözlenmiş olup bu azalış, bulaşma hızının düşmesi ve kontrol önlemlerinin etkisiyle ilişkilendirilebilir. Maruz kalan sınıfın doğrulanmış vakalardan önce tepe yapması, modelin epidemiyolojik gerçekçilik açısından tutarlı olduğunu göstermektedir.

Şekil 3 de sol alt grafikte, doğrulanmamış vakaların (Unconfirmed cases) zaman içindeki seyrini sunmaktadır. Salgının erken dönemlerinde doğrulanmamış vaka sayısında hızlı bir artış

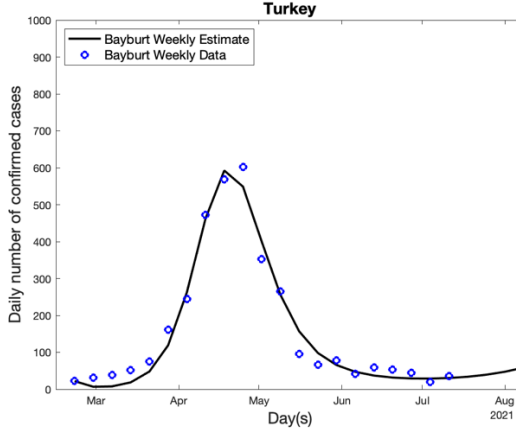
gözlenmekte olup bu durum, sınırlı test kapasitesi ve asemptomatik bireylerin varlığı ile açıklanabilir. Nisan ayı sonlarına doğru doğrulanmamış vakalar maksimum seviyeye ulaşmış, sonrasında ise kademeli bir düşüş eğilimi sergilemiştir. Bu azalış, test olanaklarının artması ve vaka tespit mekanizmalarının iyileştirilmesiyle uyumlu bir görünüm sunmaktadır.

Şekil 3 de sağ alt grafikte, iyileşen bireylerin (Recovered) zamana bağlı değişimini göstermektedir. Salgının başlangıç aşamasında iyileşen birey sayısı oldukça düşük seviyelerde iken, enfeksiyonun yaygınlaşmasına paralel olarak bu sayı hızlı bir şekilde artmıştır. Özellikle Mayıs ve Haziran aylarında iyileşen birey sayısında belirgin bir yükseliş gözlenmiştir. Daha sonraki süreçte artış hızının azalması, aktif vaka sayısındaki düşüşle ilişkilidir. Bu sonuçlar, salgının ilerleyen dönemlerinde kontrol altına alınma sürecine girildiğine işaret etmektedir.

Modelin Bayburt verilerine uygulaması

Bayburt ili için günlük doğrulanmış vaka sayılarının zamana bağlı değişimin Şekil 4 verilmektedir. Grafik incelendiğinde, Mart ayı sonuna kadar vaka sayılarının düşük seviyelerde seyrettiği, Nisan ayı başından itibaren ise ani ve keskin bir artışın başladığı görülmektedir. Günlük doğrulanmış vakalar Nisan ortasında hızlı bir şekilde zirveye ulaşmış, ardından Mayıs ayı itibarıyla belirgin bir düşüş eğilimine girmiştir. Model tahminlerinin haftalık gözlemsel verilerle büyük ölçüde uyumlu olması, küçük nüfuslu bölgelerde dahi modelin geçerli sonuçlar üretebildiğini göstermektedir.

Şekil 4. Bayburt için haftalık vaka sayılarının model ile kalibrasyonu



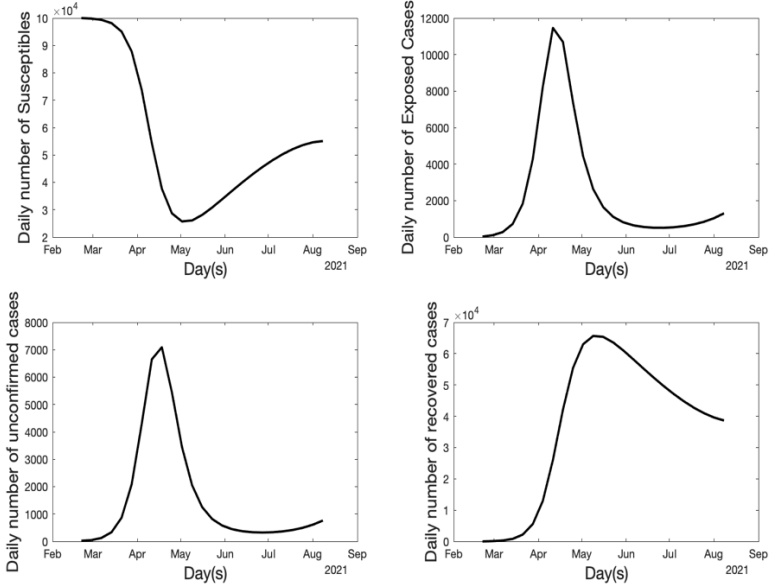
Duyarlı bireylerin (susceptible) zamana bağlı değişimi incelendiğinde (Şekil 5, sol üst grafik), salgının kısa sürede etkili olması nedeniyle duyarlı nüfusta ani ve derin bir azalma meydana geldiği görülmektedir. Özellikle Nisan ayında duyarlı birey sayısının hızla düşmesi, Bayburt'ta bulaşmanın kısa sürede yoğunlaştığını göstermektedir. Salgının kontrol altına alınmasıyla birlikte duyarlı birey sayısında kademeli bir toparlanma süreci başlamıştır.

Maruz kalan bireyler (Exposed, Şekil 5 sağ üst grafik) için elde edilen sonuçlar, Bayburt'ta salgının daha dar zaman aralığında ve yüksek yoğunlukta gerçekleştiğini ortaya koymaktadır. Nisan ayı içerisinde maruz kalan birey sayısı keskin bir tepe noktası oluşturmuş, bu durum enfeksiyonun kısa sürede yayıldığını ve ardından hızlı biçimde azaldığını göstermektedir.

Doğrulanmamış vakalar (unconfirmed cases, Şekil 5 de sol alt grafik), Nisan ayı boyunca hızlı bir artış sergilemiş ve Mayıs ayı başında maksimum seviyeye ulaşmıştır. Takip eden dönemde bu grubun hızla azalması, test ve tespit süreçlerinin etkinliğinin artmasıyla ilişkilendirilebilir. Bu yapı, küçük ölçekli yerleşimlerde

kayıt dışı vakaların salgının erken evresinde önemli rol oynadığını göstermektedir.

Şekil 5. Hastalığın her bir kompartımanda yayılım dinamiği.



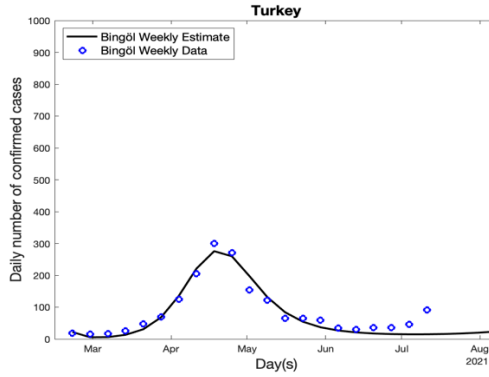
İyileşen bireylerin (Recovered), zaman içindeki değişimi (Şekil 5 de sağ alt grafik), Bayburt'ta salgının hızlı bir yükseliş ve ardından görece hızlı bir toparlanma süreci izlediğini ortaya koymaktadır. Mayıs ayı itibarıyla iyileşen birey sayısındaki artış belirginleşmiş, ilerleyen aylarda ise artış hızının azalmasıyla birlikte sistemin dengeye yaklaştığı görülmüştür.

Genel olarak, Bayburt için elde edilen sonuçlar, salgının kısa sürede zirveye ulaştığı ve kontrol önlemleriyle birlikte hızlı bir düşüş sürecine girdiğini göstermekte olup, bu dinamik yapı büyük şehirlerden farklı bir epidemiyolojik desen sergilemektedir.

Modelin Bingöl verilerine uygulaması

Bingöl Vaka sayılarının Mart ayı boyunca düşük seviyelerde seyrettiği, Nisan ayı itibarıyla artışa geçerek Nisan sonu–Mayıs başı civarında tepe noktasına ulaştığı görülmektedir (Şekil 6). Bu dönemden sonra vaka sayılarında düzenli bir azalma meydana gelmiş, yaz aylarında ise düşük ve yatay bir seyir izlenmiştir. Model tahminleri ile haftalık gözlemsel veriler arasındaki uyum, modelin Bingöl için de güvenilir sonuçlar ürettiğini göstermektedir.

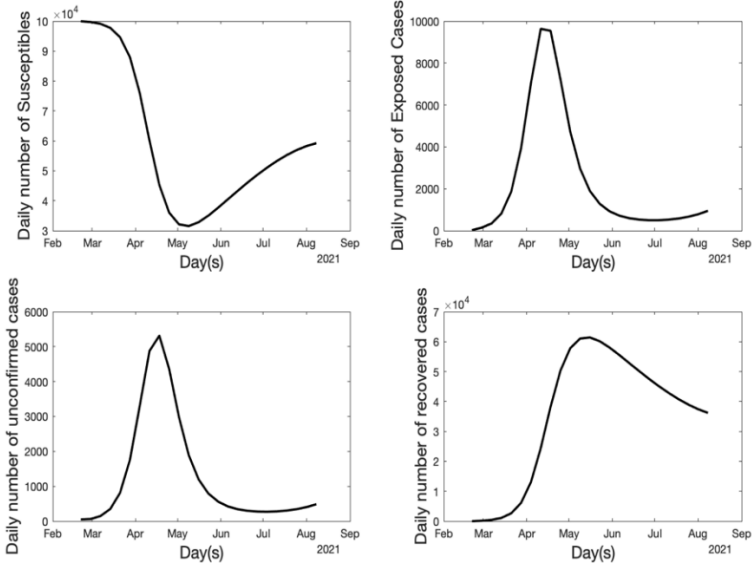
Şekil 6. Bingöl için haftalık vaka sayılarının model ile kalibrasyonu



Şekil 7’yi incelediğimiz de duyarlı bireylerin (Susceptible) zaman içindeki değişimi, Bingöl’de salgının yayılmasıyla birlikte hızlı bir düşüş sergilemiş, mayıs ayı civarında minimum seviyeye ulaşmıştır. Salgının etkisinin azalmasıyla birlikte duyarlı birey sayısında kademeli bir artış gözlenmiştir. Maruz kalan bireyler (Exposed), Nisan ayında belirgin ve keskin bir tepe noktası oluşturmuştur. Bu durum, Bingöl’de enfeksiyonun kısa bir zaman aralığında yoğunlaştığını ve ardından bulaşmanın hızla zayıfladığını göstermektedir. Doğrulanmamış vakalar (Unconfirmed cases), Nisan ayı sonlarında maksimum seviyeye ulaşmış, takip eden süreçte ise hızlı bir düşüş eğilimi sergilemiştir. Bu sonuç, erken

dönemde kayıt dışı vakaların etkili olduğunu ancak daha sonra tespit süreçlerinin iyileştiğini göstermektedir.

Şekil 7. Hastalığın her bir kompartımanda yayılım dinamiği.



İyileşen bireyler (Recovered), Mayıs ayı itibarıyla hızlı bir artış göstermiş, yaz aylarında ise artış hızının azalmasıyla birlikte sistemin dengeye yaklaştığı görülmüştür.

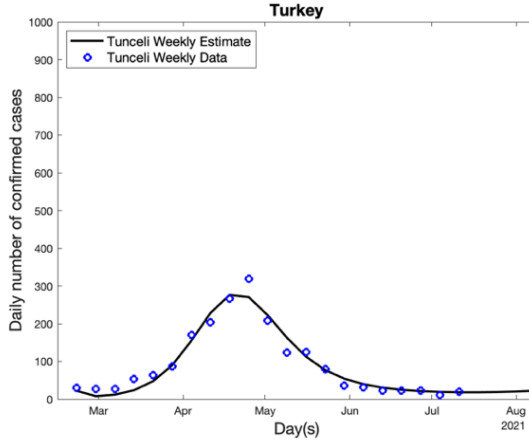
Genel olarak, Bingöl için elde edilen bulgular, salgının sınırlı bir zaman diliminde yoğunlaştığını ve kontrol önlemleriyle birlikte etkisinin hızlı bir şekilde azaldığını ortaya koymaktadır.

Modelin Tunceli verilerine uygulaması

Mart ayı boyunca vaka sayılarının düşük seviyelerde seyrettiği, Nisan ayı itibarıyla belirgin bir artış yaşandığı ve Nisan sonu–Mayıs başı civarında tepe noktasına ulaşıldığı görülmektedir (Şekil 8). Bu dönemden sonra vaka sayılarında düzenli bir azalma gözlenmiş ve yaz aylarında düşük seviyelerde dengelenmiştir. Model

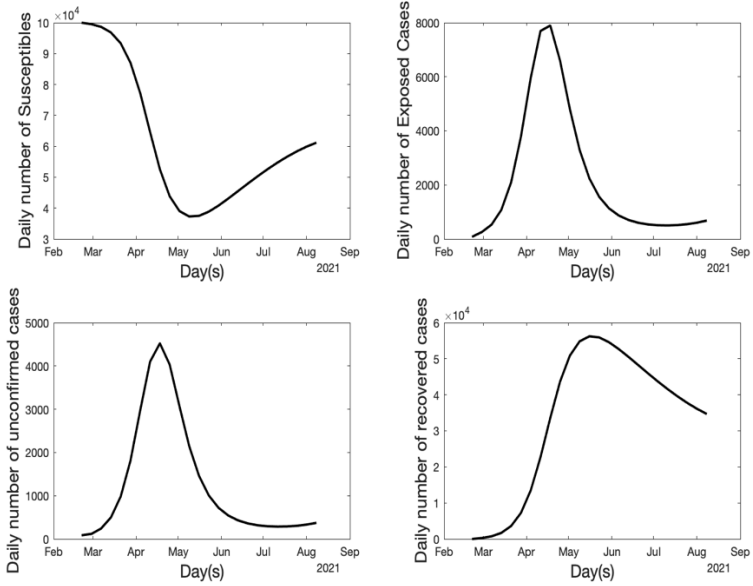
tahminleri ile haftalık gözlemsel veriler arasındaki uyum, Tunceli için elde edilen sonuçların güvenilirliğini desteklemektedir.

Şekil 8. Tunceli için haftalık vaka sayılarının model ile kalibrasyonu



Tunceli’de salgının kısa süreli ve yoğun bir yayılım gösterdiğini ortaya koymaktadır (Şekil 9). Duyarlı birey sayısındaki hızlı azalış ve maruz kalan ile doğrulanmamış vakalardaki keskin tepe noktaları, bulaşmanın sınırlı bir zaman aralığında yoğunlaştığını göstermektedir. İyileşen birey sayısındaki artış ise Mayıs ayı itibarıyla belirginleşmiş, sonraki dönemde artış hızının azalmasıyla sistemin dengeye yaklaştığı görülmüştür.

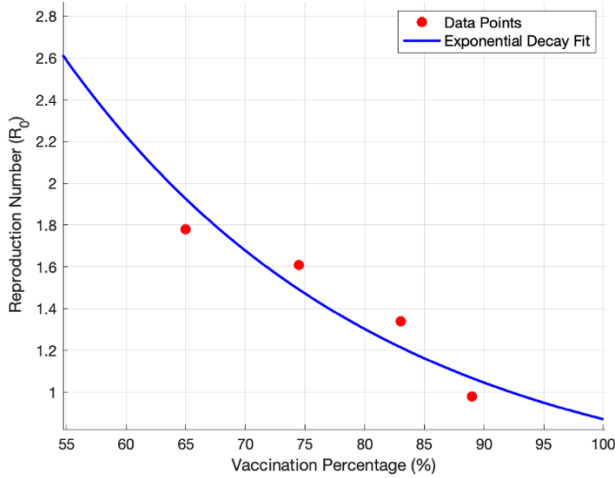
Şekil 9. Hastalığın her bir kompartımanda yayılım dinamiği.



Tablo 3. Yeniden üreme sayısı (R_0) ve şehir bazlı aşılama oranları

Şehirler	R_0	Aşılama oranı 08.02.2021	Aşılama oranı Son güncelleme
Bingöl	1.78	%10	%64.9
Bayburt	1.61	%14.84	%74,5
Tunceli	1.34	%26.78	%83.1
Giresun	0.98	%32.13	%89.1

Şekil 10. Yeniden üreme sayısının (R_0) aşılama oranıyla ilişkisi



Tablo 3 de verilen R_0 değerlerini üstel fonksiyonla kalibre ettiğimiz gibi zaman Şekil 10 verilen kalibrasyon elde edilmiştir. Şekil 10 da görüldüğü üzere, aşılama yüzdesi arttıkça R_0 değerinin üstel bir azalış gösterdiği anlaşılmaktadır. Düşük aşılama oranlarında (yaklaşık %55–65 aralığında) R_0 değeri 2'nin üzerinde olup, bu durum hastalığın toplum içinde hızla yayılabileceğine işaret etmektedir. Aşılama oranı %70–80 seviyelerine ulaştığında R_0 değerinin belirgin biçimde azaldığı ve 1.5 civarına düştüğü görülmektedir. Bu düşüş, bulaşmanın önemli ölçüde yavaşladığını göstermektedir.

Yüksek aşılama oranlarında ise (90-100) R_0 değerinin 1'e yaklaştığı ve hatta 1'in altına indiği gözlenmektedir. Bu durum, salgının sürdürülebilirliğinin azaldığını ve toplumsal bağışıklığa yaklaşılmış olabileceğini göstermektedir. Veri noktalarının üstel azalış eğrisi ile uyumlu olması, aşılama oranındaki artışın salgın dinamikleri üzerinde güçlü ve belirleyici bir etkiye sahip olduğunu doğrulamaktadır.

Sonuç

Bu bölümde, Türkiye’de seçilen farklı iller için COVID-19 salgınının zamansal dinamikleri matematiksel modelleme yaklaşımıyla incelenmiştir. Günlük doğrulanmış vakalar, duyarlı, maruz kalan, doğrulanmamış ve iyileşen birey sınıflarının zamana bağlı değişimleri birlikte değerlendirilerek, salgının farklı demografik ve bölgesel yapılarda nasıl şekillendiği ortaya konulmuştur. Elde edilen sonuçlar, model tahminleri ile gözlemsel veriler arasında güçlü bir uyum olduğunu göstermiş ve önerilen modelin hem büyük hem de küçük nüfuslu illerde salgın seyrini başarılı bir şekilde temsil edebildiğini doğrulamıştır.

İl bazlı analizler, salgının bazı bölgelerde kısa süreli ancak yoğun bir yayılım gösterdiğini, bazı illerde ise daha yaygın ve görece uzun süreli bir dinamik sergilediğini ortaya koymuştur. Duyarlı bireylerdeki hızlı azalış, maruz kalan ve doğrulanmamış vakalardaki keskin tepe noktaları ve iyileşen birey sayısındaki gecikmeli artış, salgının doğal seyrini ve kontrol önlemlerinin etkisini açık biçimde yansıtmaktadır. Bu bulgular, yerel ölçekte uygulanan müdahalelerin salgın dinamikleri üzerindeki belirleyici rolünü vurgulamaktadır.

Aşılama oranı ile temel üreme sayısı (R_0) arasındaki ilişkinin incelenmesi, salgın kontrolünde aşının kritik önemini açıkça ortaya koymuştur. Aşılama yüzdesindeki artışın R_0 değerini üstel biçimde azalttığı ve yüksek aşılama oranlarında R_0 ’ın 1’in altına düştüğü görülmüştür. Bu durum, toplumsal bağışıklığa yaklaşmanın salgının sürdürülebilirliğini ortadan kaldırmada temel bir unsur olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak, bu çalışmada sunulan matematiksel model, bölgesel salgın dinamiklerini anlamada ve halk sağlığı stratejilerini değerlendirmede güçlü bir araç sunmaktadır. Elde edilen bulgular, gelecekte benzer bulaşıcı hastalıklar için uygulanacak kontrol ve

aşılama politikalarının planlanmasına bilimsel bir zemin oluşturmakta ve karar vericiler için önemli çıkarımlar sağlamaktadır.

Kaynakça

Aslan, I. H., Demir, M., Wise, M. M., & Lenhart, S. (2022). Modeling COVID-19: Forecasting and analyzing the dynamics of the outbreak in Hubei and Turkey. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45 (10), 6481–6494. <https://doi.org/10.1002/mma.8181>

Çelik, S. (2020). COVID-19 salgınında aşılama oranı ve etkinliğinin matematiksel modelleme ile incelenmesi (Yüksek lisans tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Demir, M., Aslan, I. H., & Lenhart, S. (2023). Analyzing the effect of restrictions on the COVID-19 outbreak for some US states. *Theoretical Ecology*, 16, 117–129. <https://doi.org/10.1007/s12080-023-00557-1>

Demir, M. (2025) Modeling Monkeypox: Spread of Outbreak with Social Distancing, Quarantine and Vaccination, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, vol. 14, no. 1, pp. 361–384, 2025, doi: 10.17798/bitlisfen.1589786.

Diagne, M. L., Rwezaura, H., Tchoumi, S. Y., & Tchuenche, J. M. (2021). A mathematical model of COVID-19 with vaccination and treatment. *Journal of Applied Mathematics*, 2021, 1–17. <https://doi.org/10.1155/2021/1250129>

Dong, E., Du, H., & Gardner, L. (2020). An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time. *The Lancet Infectious Diseases*, 20(5), 533–534. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30120-1](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30120-1)

Li, Q., Guan, X., Wu, P., Wang, X., Zhou, L., Tong, Y., Feng, Z. (2020). Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus–infected pneumonia. *New England Journal of*

Medicine, 382 (13), 1199–1207. <https://doi.org/10.1056/NEJMoa2001316>

TURCOVID19 (2023)- Türkiye İl Geneli Haftalık Vaka sayıları verileri. (Erişim tarihi: 2025, Aralık). <https://turcovid19.com/acikveri/>

T.C. Sağlık Bakanlığı. (2021). *COVID-19 aşıları hakkında bilgilendirme*. <https://covid19.saglik.gov.tr>

T.C. Sağlık Bakanlığı. (2023). *COVID-19 nedir?* <https://covid19.saglik.gov.tr/TR-66300/covid-19-nedir-.html>

T.C. Sağlık Bakanlığı. (2020a, 11 Mart). *Koronavirüs, Alacağımız Tedbirlerden Güçlü Değildir* [Basın açıklaması]. Sağlık Bakanlığı Haberleri. <https://www.saglik.gov.tr/TR-64383/koronavirus-alacagimiz-tedbirlerden-guclu-degildir.html>

Kısa, S., Güner, A. E., & diğ. (2020). Under-reporting of COVID-19 cases in Turkey. *Journal/Report* (erişim için bkz. PubMed Central). <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7436880/>

Spence L, Anderson DE, Aslan IH, et al. (2023) The effect of changing COVID-19 restrictions on the transmission rate in a veterinary clinic. *Infect Dis Model*. 8:294–308. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2023.01.005>

T.C. Sağlık Bakanlığı. (2020b, 15 Mart). *Basın açıklamaları / Günlük vaka ve vefat bildirimleri* [Basın açıklaması]. <https://www.saglik.gov.tr/>

T.C. Sağlık Bakanlığı. (2020c, 1 Nisan). *Nisan 2020 — Bakan açıklamaları ve Bilim Kurulu duyuruları*. <https://www.saglik.gov.tr/TR-105411/nisan-2020.html>

T.C. Sağlık Bakanlığı — COVID-19 Bilgilendirme Platformu. (erişim tarihi: 2025, Aralık). *COVID-19 verileri / Genel koronavirüs tablosu* [Çevrimiçi gösterge tablosu]. <https://covid19.saglik.gov.tr/>

P. van den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Mathematical Biosciences*, vol. 180, pp. 29–48, 2002, doi: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.

Yang, B., Yu, Z., & Cai, Y. (2021). Impact of imperfect vaccination on COVID-19 control: A mathematical modeling study. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 580, 126146. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126146>

Yavuz, M., Coşar, F. Ö., Günay, F., & Özdemir, F. N. (2021). Mathematical modeling of the COVID-19 pandemic with vaccination. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 9, 1935–1956. <https://doi.org/10.4236/jamp.2021.98124>

ÇARPIMSAL ÖLÇÜ VE ÖLÇÜYE BAĞLI MODELLER

Oğuz OĞUR¹

Giriş

Klasik Newtonyen analiz, uzun süre boyunca matematiksel düşüncenin temel yapı taşlarından biri olarak kabul edilmiştir. Bununla birlikte, özellikle oransal değişimlerin ve üstel davranışların baskın olduğu problemlerde, bu yaklaşımın bazı yapısal sınırlamalar içerdiği görülmüştür. Bu ihtiyaçtan hareketle Grossman ve Katz (1972) tarafından geliştirilen **Newtonyen olmayan hesap**, geleneksel işlemleri farklı cebirsel yapılarla yeniden tanımlayarak matematiksel analize alternatif bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu çerçevede, toplamsal işlemler yerine çarpımsal ve üstel işlemlerin kullanılması, modelleme süreçlerinde daha esnek ve doğal bir yapı sunmaktadır (Grossman, 1979; Stanley, 1999).

Newtonyen olmayan hesap ailesinin önemli bir alt dalı olan **çarpımsal hesap**, özellikle değişimin mutlak farklar yerine oranlar üzerinden ifade edildiği sistemlerde etkili sonuçlar

¹Prof., Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi, Giresun, Türkiye, ORCID: 0000-0002-3206-5330

üretmiştir. Bashirov, Kurpınar ve Özyapıcı (2008), bu yaklaşımın kuramsal temelini sistematik biçimde ortaya koymuş ve çarpımsal türev ile integral kavramlarının matematiksel tutarlılığını göstermiştir. İzleyen çalışmalarda, çarpımsal hesabın karmaşık analiz bağlamındaki rolü (Uzer, 2010) ve fonksiyon uzayları teorisine olan katkıları (Çakmak & Başar, 2014) ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Soyut matematik bağlamında, dizi uzayları ve matris dönüşümleri üzerine yapılan araştırmalar (Çakmak & Başar, 2012, 2015; Türkmen & Başar, 2012), (Sağır & Erdoğan, 2019a, 2019b) Newtonyen olmayan ve çarpımsal yaklaşımların klasik yapıların genelleştirilmesinde nasıl etkin bir rol oynadığını ortaya koymuştur. Varyasyonlar hesabı alanında Torres (2021) tarafından yapılan çalışmalarda, Newtonyen olmayan hesap türlerinin çözüm tekniklerine yeni açılımlar sunduğunu ortaya koymaktadır.

Bu yaklaşımın uygulama alanları yalnızca cebirsel ve analitik yapılarla sınırlı kalmamış, integral denklemler teorisinde de farklı çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine olanak sağlamıştır (Güngör, 2020a, 2020b, 2022). Topolojik açıdan ise Newtonyen olmayan reel doğrunun temel özellikleri Duyar, Sağır ve Oğur (2015), Duyar ve Erdoğan (2016) ile Duyar ve Oğur (2017) tarafından ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Daha yakın tarihli çalışmalarda, Newtonyen olmayan cisimler üzerinde tanımlanan lineer uzayların yapısı (Işık & Eryılmaz, 2023) ve v -normlu uzaylarda elde edilen temel sonuçlar (Rohman & Eryılmaz, 2023), (Eryılmaz, 2024) bu alternatif matematiksel çerçevenin giderek genişleyen bir araştırma alanı hâline geldiğini göstermektedir.

Özellikle **ölçü kuramı** bağlamında, Newtonyen olmayan ve çarpımsal yaklaşımlar dikkat çekici sonuçlar ortaya koymuştur. Oğur ve Demir (2019, 2020), Newtonyen olmayan Lebesgue ölçüsünü tanımlayarak bu ölçünün temel özelliklerini incelemiş; Duyar ve

Sağır (2017), reel sayıların Newtonyen olmayan yorumları ile ölçü kavramı arasındaki ilişkiyi analiz etmiştir. Bu çalışmalar, Oğur ve Güneş (2024) tarafından Newtonyen olmayan ölçülebilir kümelerin incelenmesiyle daha da ileri taşınmıştır. Ayrıca, Oğur (2024a, 2024b) çalışmalarında, çarpımsal ölçü ile ilgili bazı temel tanım ve teoremleri vermiştir. Tüm bu gelişmeler, çarpımsal ölçünün yalnızca soyut bir genelleme değil, ölçüye duyarlı matematiksel yapıların incelenmesinde temel bir araç olduğunu göstermektedir.

Bu bölümde, yukarıda özetlenen kuramsal çerçeve esas alınarak **çarpımsal ölçü** kavramı ayrıntılı biçimde ele alınmakta ve ölçünün değiştirilmesinin matematiksel modeller üzerindeki etkisi incelenmektedir. Özellikle büyüme denklemleri, lojistik tip modeller, epidemik yayılım süreçleri ve zaman ölçekleme problemleri üzerinden, **ölçüye bağlı model davranışları** açık matematiksel formülasyonlar ve grafiksel analizler aracılığıyla ortaya konulmaktadır. Amaç, çarpımsal ölçünün klasik ölçüye göre yalnızca alternatif değil, bazı durumlarda **zorunlu** bir tercih olduğunu matematiksel olarak göstermektir.

Şimdi Newtonyen olmayan analizde kullanılan bazı temel kavramları tanıtalım. ρ , $\mathbb{R}'$ 'den $A = \mathbb{R}(N)_\rho \subseteq \mathbb{R}$ kümesine tanımlı, birebir bir fonksiyon olmak üzere bir üreteç (generator) olsun. Bu durumda Newtonyen olmayan cebirsel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır: herhangi $s, t \in \mathbb{R}(N)_\rho$ için

ρ – toplama	$s \dot{+} t = \rho(\rho^{-1}(s) + \rho^{-1}(t))$
ρ – çıkarma	$s \dot{-} t = \rho(\rho^{-1}(s) - \rho^{-1}(t))$
ρ – çarpma	$s \dot{\times} t = \rho(\rho^{-1}(s) \times \rho^{-1}(t))$
ρ – bölme	$s \dot{\div} t = \rho(\rho^{-1}(s) \div \rho^{-1}(t))$
ρ – sıralama	$s \dot{<} t \Leftrightarrow \rho^{-1}(s) < \rho^{-1}(t)$

(Grossman & Katz, 1972). Herhangi $t \in \mathbb{R}(N)_\rho$ elemanı için Newtonyen olmayan mutlak değer aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$|t|_\rho = \begin{cases} t, & \text{if } t \succ \dot{0} \\ \dot{0}, & \text{if } t \doteq \dot{0} \\ \dot{0} \dot{-} t & \text{if } t \prec \dot{0} \end{cases}$$

Burada $\rho(0) = \dot{0}$. Ayrıca, $\sqrt[n]{t}^\rho = \rho(\sqrt[n]{\rho^{-1}(t)})$ ve $t^{n\rho} = \rho((\rho^{-1}(t))^n)$ şeklinde tanımlanır (Grossman & Katz, 1972).

Bu noktada, Newtonyen olmayan analizin özel bir durumu olan geometrik analiz tanımlanabilir. Bu amaçla

$$\rho(s) = \exp(s)$$

almak yeterli olacaktır. Eğer

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, s \rightarrow \rho(s) = \exp(s)$$

alınırsa, bu fonksiyonun ters fonksiyonu

$$\rho^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \rho^{-1}(t) = \ln(t)$$

olur. Böylece, aşağıdaki kümeleri elde ederiz;

$$\mathbb{R}(N)_\rho = \mathbb{R}_{exp} = \{\exp(s): s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+,$$

$$\mathbb{R}_{exp}^+ = \{\exp(s): s \in \mathbb{R}^+\} = (1, +\infty)$$

ve

$$\mathbb{R}_{exp}^- = \{\exp(s): s \in \mathbb{R}^-\} = (0,1).$$

Burada $\exp(0) = 1$ olduğunu vurgulamak önemli olacaktır. Şimdi, tanım kullanılırsa, $s, t \in \mathbb{R}_{exp}$ elemanlarının toplamı aşağıdaki şekilde olur;

$$s \dot{+} t = \exp(\ln s + \ln t) = e^{\ln(st)} = st.$$

Benzer şekilde tanım kullanılırsa aşağıdaki çarpımsal cebirsel işlemler elde edilir;

$s \dot{+} t = st$
$s \dot{-} t = S/t$
$s \dot{\times} t = s^{lnt}$
$s \dot{\div} t = s^{\frac{1}{lnt}}$

Bu bölümde, $(.)_{exp}$, λ_{exp} , $exp\sum$, $expinf$, $expsup$ sembolleri sırasıyla çarpımsal-açık aralık, çarpımsal-Lebesgue ölçüsü, çarpımsal-toplam, çarpımsal-infimum ve çarpımsal-supremumu gösterecektir.

Şimdi, reel analizde iyi bilinen bazı temel tanım ve sonuçları sunalım. Bu amaçla Natanson'un kitabında verilen temel kavramların hatırlatılması yeterli olacaktır (Natanson, 1964).

Tanım 1. Açık bir (a,b) aralığının uzunluğu, bu aralığın ölçüsü olarak adlandırılır ve

$$\lambda(a,b) = b - a$$

şeklinde tanımlıdır (Natanson, 1964).

Tanım 2. Boş olmayan, sınırlı bir G açık kümesinin ölçüsü, onu oluşturan tüm ϱ_k bileşen aralıkların uzunluklarının toplamı olarak tanımlanır;

$$\lambda(G) = \sum_k \lambda(\varrho_k)$$

(Natanson, 1964).

Teorem 1. G_1 ve G_2 sınırlı iki açık küme olsun. Eğer $G_1 \subset G_2$ ise

$$\lambda(G_1) \leq \lambda(G_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Natanson, 1964).

Teorem 2. Eğer G sınırlı açık kümesi

$$G = \cup_k G_k, \quad k \neq l \text{ için } G_k \cap G_l = \emptyset,$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu takdirde

$$\lambda(G) = \sum_k \lambda(G_k)$$

eşitliği vardır (Natanson, 1964).

Tanım 3. Boştan farklı sınırlı, kapalı bir F kümesinin ölçüsü

$$\lambda(F) = D - C - \lambda(T - F)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $T = [C, D]$ kümesi F kümesini içeren en küçük kapalı aralıktır (Natanson, 1964).

Tanım 4. Sınırlı bir E kümesinin dış ölçüsü

$$\lambda^o(E) = \inf\{\lambda(T): E \subset T, T \text{ sınırlı, açık küme}\}$$

ile tanımlanır (Natanson, 1964).

Tanım 5. Sınırlı bir E kümesinin iç ölçüsü

$$\lambda^i(E) = \sup\{\lambda(U): U \subset E, U \text{ sınırlı kapalı küme}\}$$

ile tanımlanır (Natanson, 1964).

Reel analizde bilinen açık aralık ölçüsü tanımı, Duyar ve Sağır tarafından Newtonyen olmayan analize aşağıdaki şekilde genişletilmiştir:

Tanım 6. $\mathbb{R}(N)_\rho$ içindeki bir (s, t) açık aralığın ölçüsü

$$\lambda_N(s, t) = \rho(\lambda(\rho^{-1}(s), \rho^{-1}(t))) = t \div s$$

ile tanımlıdır (Duyar & Sağır, 2017).

Bu çalışmada ayrıca Newtonyen olmayan sınırlı açık kümelerin ölçümüne ilişkin temel tanım ve teoremler de ele alınmaktadır. Yukarıdaki tanım dikkate alınarak, Newtonyen olmayan analizde kapalı kümelerin ölçüsü Oğur ve Demir tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Tanım 7. $\mathbb{R}(N)_\rho$ de boştan farklı sınırlı, kapalı bir F kümesinin ölçümü

$$\lambda_N F = \rho \left(\lambda(\rho^{-1}(C), \rho^{-1}(D)) - \lambda(\rho^{-1}(S - F)) \right)$$

ile tanımlıdır. Burada $S = [C, D]$, F kümesini içeren en küçük kapalı aralıktır (Oğur & Demir, 2020).

Bu bölümde, Newtonyen olmayan analize genişletilmiş bu kavramlar, $\rho(x) = \exp(x)$ özel durumu alınarak geometrik analize uyarlanacaktır. Böylece çarpımsal ölçülebilir kümelerin uygulamalarında kolaylık sağlayan bir çerçeve elde edilecektir.

Şimdi, çarpımsal bir kümenin Lebesgue ölçüsü tanımı, (Duyar & Sağır, 2017) çalışmasında $\rho(x) = \exp(x)$ alınarak elde edilir. Bu aşamada (Oğur, 2024a, 2024b) çalışmasında yer alan bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 8. Çarpımsal bir $(s, t)_{\exp}$ açık aralığının çarpımsal ölçüsü

$$\begin{aligned} \lambda_{\exp}(s, t)_{\exp} &= \exp(\lambda(\ln s, \ln t)) \\ &= \exp(\ln t - \ln s) \\ &= \exp\left(\ln \frac{t}{s}\right) \\ &= \frac{t}{s} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Burada λ , alışılmış Lebesgue ölçüsüdür.

Örnek 1. $(2, 6)_{\exp}$ açık aralığının çarpımsal ölçüsü

$$\begin{aligned} \lambda_{\exp}(2, 6)_{\exp} &= \exp(\lambda(\ln 2, \ln 6)) \\ &= \exp((\ln 6 - \ln 2)) \\ &= 3. \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\lambda_{exp}(e^2, e^4)_{exp} &= \exp(\lambda(\ln e^2, \ln e^4)) \\ &= e^2.\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 9. (γ_k) , G sınırlı açık çarpımsal kümesinin bir aralık bileşenlerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, G çarpımsal kümesinin çarpımsal ölçüsü

$$\begin{aligned}\lambda_{exp}(T) &= \sum_{exp} \lambda_{exp}(s_k, t_k)_{exp} \\ &= \sum_{exp} (t_k \div s_k) \\ &= \sum_{exp} (t_k \div s_k) \\ &= \exp(\sum_k \ln(t_k \div s_k)) \\ &= \exp(\ln(\prod_k (t_k \div s_k))) \\ &= \prod_k (t_k \div s_k)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $\gamma_k = (s_k, t_k)_{exp}$ şeklinde bir çarpımsal aralıktır.

Örnek 3. Bir çarpımsal T kümesi $T = (2,4)_{exp} \cup (5,9)_{exp} \cup (25, e^7)_{exp}$ şeklinde verilsin. Bu takdirde, T kümesinin çarpımsal ölçüsü

$$\lambda_{exp}(T) = \frac{4}{2} \frac{9}{5} \frac{e^7}{25} = \frac{36e^6}{250}$$

şeklinde bulunur.

Sonraki aşamada kapalı, sınırlı çarpımsal kümenin çarpımsal ölçüsü tanımlanabilir:

Tanım 10. Çarpımsal bir U sınırlı, kapalı kümesi verilsin. Bu takdirde, U çarpımsal kümesinin çarpımsal ölçüsü

$$\lambda_{exp}(U) = \exp\{\lambda(\ln K, \ln L) - \lambda(\ln(S - U))\}.$$

ile tanımlanır. Burada, $S = [K, L]_{exp}$ aralığı U kümesini içeren en küçük kapalı aralıktır.

Örnek 4. Çarpımsal $U = [e^{3/2}, e^2]_{exp} \cup [e^3, e^5]_{exp}$ kümesi verilsin. Bu takdirde, U kümesinin çarpımsal ölçüsü

$$\begin{aligned}\lambda_{exp}(U) &= \exp\{\lambda(\ln e^{3/2}, \ln e^5) - \lambda(\ln e^2, \ln e^3)\} \\ &= \exp\{(\ln e^5 - \ln e^{3/2}) - (\ln e^3 - \ln e^2)\} \\ &= \exp\left\{\ln\left(\frac{e^5 e^2}{e^{3/2} e^3}\right)\right\} \\ &= e^{5/2}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3. U çarpımsal kümesi, çarpımsal anlamda sonlu sayıda ve ikişer ikişer ayrık kümelerin birleşimi biçiminde ifade edilebiliyorsa, yani $l \neq s$ için $U_l \cap U_s = \emptyset$ olmak üzere $U = \bigcup_{l=1}^r U_l$ ise bu takdirde, aşağıdaki eşitlik vardır;

$$\lambda_{exp}(U) = \prod_{l=1}^r (\lambda_{exp}(U_l)).$$

İspat. Açıktır ki $\ln(U) = \bigcup_{l=1}^r \ln(U_l)$. O zaman, reel sayılarda bilinen ölçü özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\lambda_{exp}(\ln(U)) &= \exp(\sum_{l=1}^r \lambda(\ln(U_l))) \\ &= \exp\left(\sum_{l=1}^r \ln\left(\exp\left(\lambda(\ln(U_l))\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{l=1}^r \ln\left(\lambda_{exp}(U_l)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left(\ln \left(\prod_{l=1}^r \lambda_{exp}(U_l) \right) \right) \\
&= \prod_{l=1}^r \left(\lambda_{exp}(U_l) \right)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 11. Çarpımsal boştan farklı, bir sınırlı E kümesi verilsin. Bu takdirde, E kümesinin sırasıyla çarpımsal iç ve dış ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{aligned}
\lambda_{exp}^o(E) = \exp \inf \{ \lambda_{exp}(G) : E \\
\subset G, G \text{ çarpımsal sınırlı, açık küme} \}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda_{exp}^i(E) = \exp \sup \{ \lambda_{exp}(S) : S \subset \\
E, S \text{ çarpımsal kapalı küme} \}.
\end{aligned}$$

Teorem 4. Eğer G sınırlı, açık bir çarpımsal küme ise

$$\lambda_{exp}(G) = \lambda_{exp}^o(G) = \lambda_{exp}^i(G)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5. Eğer S sınırlı, kapalı bir çarpımsal küme ise

$$\lambda_{exp}(S) = \lambda_{exp}^o(S) = \lambda_{exp}^i(S)$$

eşitliği vardır.

Teorem 6. Her sınırlı çarpımsal M kümesi için aşağıdaki eşitsizlik vardır;

$$\lambda_{exp}^i(M) \leq \lambda_{exp}^o(M).$$

Tanım 12. Sınırlı bir çarpımsal S kümesi verilsin. Eğer bu kümenin çarpımsal iç ve dış ölçüleri eşit ise, yani

$$\lambda^i(S) = \lambda^o(S)$$

ise bu S kümesine ölçülebilir küme denir.

Şimdi, çarpımsal türev kavramını verelim (Bashirov, Kurpinar & Özyapıcı, 2008).

Tanım 13. $A \subset \mathbb{R}$ açık aralığında tanımlı ve değerleri $(0, \infty)$ kümesinde olan bir f fonksiyonu ele alınsın. Keyfi bir $x \in A$ için

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

limiti varsa bu f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun çarpımsal türevi denir (Bashirov, Kurpinar & Özyapıcı, 2008).

Bu tanımda, $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ ifadesi fonksiyonun x noktasındaki oransal değişimini, $\frac{1}{h}$ üssü ise bu değişimin birim değişken başına yoğunluğunu temsil etmektedir. Dolayısıyla çarpımsal türev, klasik türevden farklı olarak mutlak artışları değil, görelî yani çarpımsal değişimleri ölçmektedir. Eğer f fonksiyonu klasik anlamda türevlenebilir ise, çarpımsal türev ile klasik türev arasında aşağıdaki ilişki geçerlidir:

$$f^*(x) = \exp \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Tanım 14. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı ve değerleri $(0, \infty)$ kümesinde olan pozitif bir f fonksiyonu verilsin. Eğer

$$\int_a^b \ln(f(x)) dx$$

integrali varsa f fonksiyonunun çarpımsal anlamda Riemann integrali (veya kısaca çarpımsal integrali)

$$^* \int_a^b \ln(f(x)) dx = \exp \left(\int_a^b \ln(f(x)) dx \right)$$

ile tanımlanır (Bashirov, Kurpinar & Özyapıcı, 2008).

Bu tanımda çarpımsal integral, fonksiyonun değerlerinin logaritmasının klasik integralinin üstel dönüşümü olarak elde edilmektedir. Dolayısıyla çarpımsal integral, klasik integralde olduğu gibi toplamaya değil, çarpıma dayalı bir birikimi temsil eder. Bu özellik, özellikle oransal değişimlerin baskın olduğu problemlerde çarpımsal integralin doğal bir araç hâline gelmesini sağlamaktadır.

Çarpımsal Ölçüye Dayalı Bazı Modeller

Bu bölümde, çarpımsal integral ve çarpımsal ölçü kavramlarının matematiksel modeller üzerindeki etkisi açık biçimde ortaya konulmaktadır. Özellikle büyüme ve yayılım süreçlerinde, ölçünün klasik Lebesgue ölçüsünden çarpımsal Lebesgue ölçüye geçirilmesi, modelin nitel davranışını doğrudan değiştirmektedir.

Çarpımsal Büyüme Modeli

Pozitif değerli bir durum değişkeni $x(t)$ için **çarpımsal büyüme modeli**, çarpımsal türev kullanılarak

$$x^*(t) = c, \quad c > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada c , sabit çarpımsal büyüme katsayısını temsil eder. Çarpımsal türevin tanımı kullanıldığında, bu model klasik anlamda

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \ln c$$

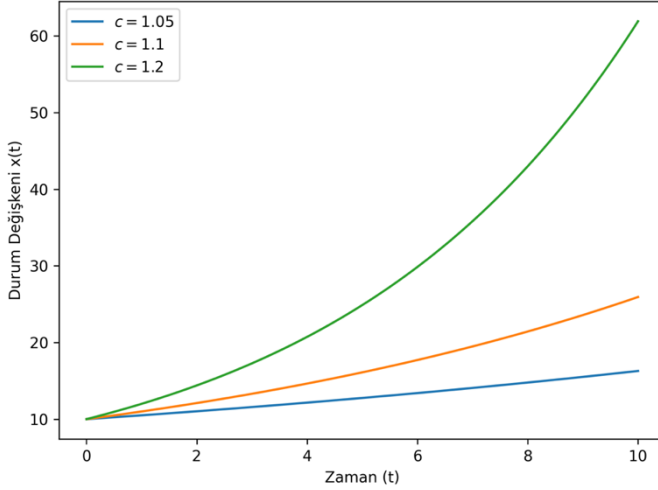
diferansiyel denklemine denktir. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$x(t) = x(0)e^{(\ln c)t} = x(0)c^t$$

olarak bulunur. Bu modelde büyüme, mutlak artışlar yerine **oransal değişimler** üzerinden tanımlanmaktadır. Çarpımsal ölçü altında küçük oranlı büyümeler zamanla üstel bir etki yaratır. Bu durum,

klasik doğrusal veya üstel modellere kıyasla erken evrede daha belirgin bir büyüme davranışı ortaya koyar.

Şekil 1



Çarpımsal Lojistik Büyüme Modeli

Taşıma kapasitesi $K > 0$ olan bir sistem için çarpımsal lojistik model

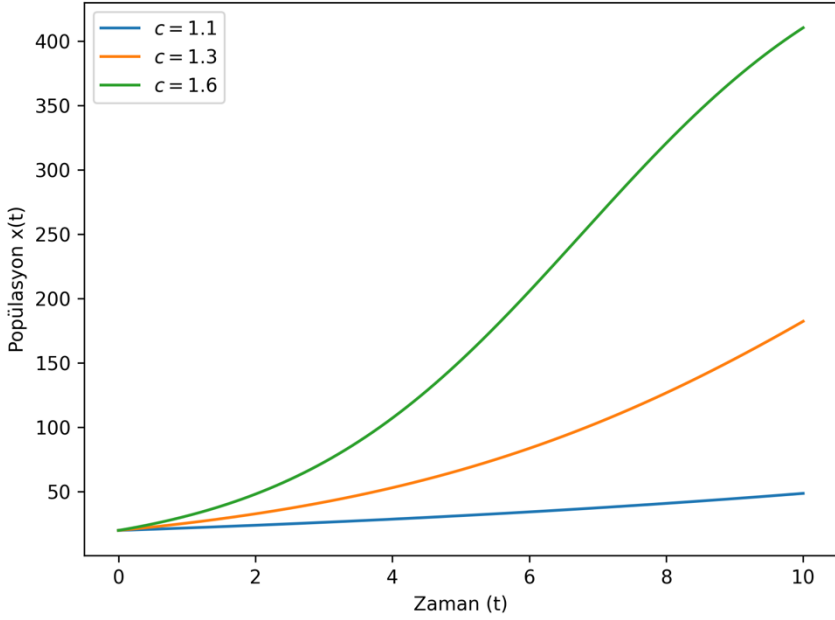
$$x^*(t) = c^{1 - \frac{x(t)}{K}}, \quad c > 1$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \ln c \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right)$$

yazılır. Buradan $x(t) \ll K$ iken büyüme çarpımsal olarak baskındır. $x(t) \rightarrow K$ iken büyüme hızı oransal olarak yavaşlar. Bu davranış, klasik lojistik modeldeki doğrusal baskıdan farklıdır ve ölçü değişiminin doğrudan bir sonucudur.

Şekil 2



Çarpımsal Epidemik Model

Epidemiyolojik modellerde temel parametre olan temel üreme sayısı $R_0 > 0$ kullanılarak çarpımsal model

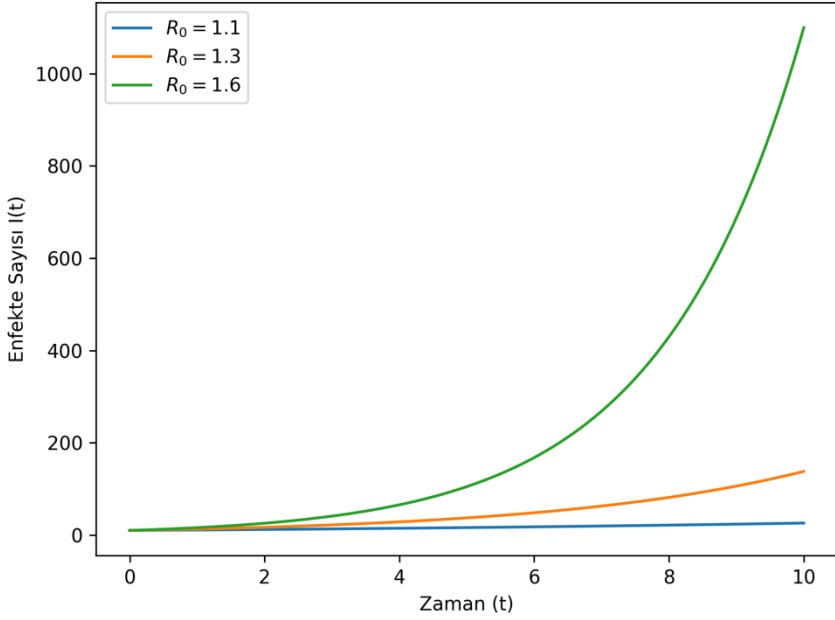
$$I^*(t) = R_0$$

ile tanımlıdır. Bu ifade klasik modelde

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = \ln R_0$$

denkleminde dönüşür. Çözümü, $I(0) = I_0 > 0$ olmak üzere $I(t) = I_0 R_0^t$ şeklindedir. Çarpımsal ölçü altında erken evredeki yayılım çok daha belirgin hâle gelir. Klasik ölçü altında “küçük artış” gibi görünen değişimler, çarpımsal modelde doğrudan sistem davranışını belirler.

Şekil 3



Çarpımsal Ölçü ile Ölçekleme

Çarpımsal ölçü altında bir aralığın ölçüsü, mutlak farkla değil **oranla** belirlenir:

$$\lambda_{exp}([t_1, t_2]) = \frac{t_2}{t_1}.$$

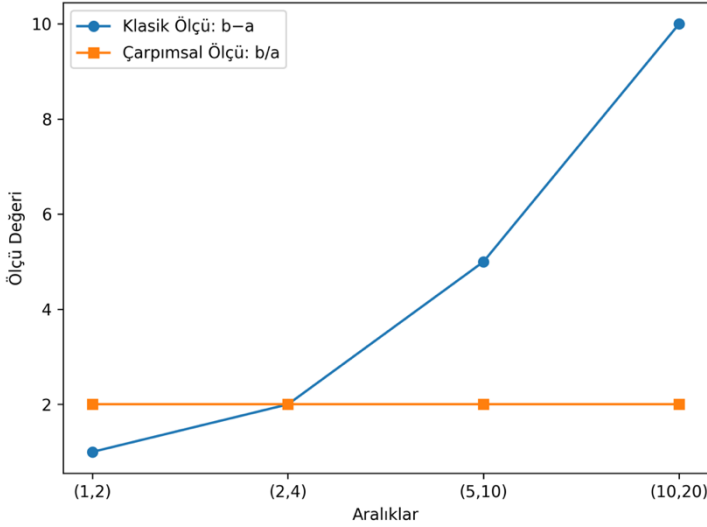
Bu nedenle çarpımsal ölçü, özellikle ölçekleme (scaling) ve oran-temelli zaman/uzunluk yorumlarında doğaldır. Örneğin (1,2) ile (10,20) aralıkları klasik ölçüde farklı uzunluklara sahipken, çarpımsal ölçüde

$$\lambda_{exp}(1,2) = \lambda_{exp}(10,20) = 2$$

olduğundan aynı büyüklükte kabul edilir. Bu, çarpımsal ölçünün “ölçekten bağımsızlık” özelliğini açık biçimde gösterir. Özetle

“Çarpımsal ölçü uzunluğu değil, ölçeği ölçer” şeklinde yorumlanabilir.

Şekil 4



Bu bölümde, çarpımsal ölçü kavramı ve bu ölçüye bağlı olarak tanımlanan matematiksel modeller ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Newtonyen olmayan analiz çerçevesinde tanıtılan çarpımsal türev ve çarpımsal integral tanımları kullanılarak, ölçü kavramının yalnızca teknik bir araç olmadığı; aksine modelin nitel davranışını belirleyen temel bir unsur olduğu gösterilmiştir.

Çarpımsal büyüme, çarpımsal lojistik ve çarpımsal epidemik modeller üzerinden yapılan incelemeler, oransal değişimlerin baskın olduğu sistemlerde çarpımsal ölçünün klasik toplamsal ölçüye kıyasla daha doğal ve açıklayıcı bir yapı sunduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca açık aralıklar için tanımlanan çarpımsal ölçü

$\lambda_{exp}([t_1, t_2]) = \frac{t_2}{t_1}$ ifadesi aracılığıyla, ölçekten bağımsızlık özelliği grafiksel olarak vurgulanmış ve ölçü seçiminin modelleme sürecindeki etkisi somut biçimde gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, çarpımsal ölçüye dayalı yaklaşımların yalnızca soyut bir genelleme olmadığını; özellikle büyüme, yayılım ve ölçekleme gibi oransal dinamiklerin modellenmesinde güçlü ve esnek bir çerçeve sunduğunu göstermektedir. Bu bağlamda, çarpımsal ölçü ve bu ölçüye bağlı modeller, Newtonyen olmayan analizin uygulama potansiyelini açıkça ortaya koymakta ve ileri çalışmalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır.

Kaynakça

Bashirov A. E., Kurpinar E. M. & Ozyapici A., (2008). Multiplicative calculus and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337, 36- 48.

Çakmak, A. F. & Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *J. Inequal. Appl.* 2012:228. DOI: 10.1186/1029-242X-2012-228.

Çakmak, A. F. & Başar, F. (2014). Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers. *Abstr. Appl. Anal.*, DOI6: 10.1155/2014/236124.

Çakmak, A. F. & Başar, F. (2015). Some sequence spaces and matrix transformations in multiplicative sense. *TWMS J. Pure Appl. Math.* 6(1):27–37.

Duyar, C. & Erdoğan, M. (2016). On non-Newtonian real number series. *IOSR J Math.* 12(6):34–48.

Duyar, C., Sagır, B. & Ogur, O. (2015). Some basic topological properties on non-Newtonian real line. *BJMCS.* 300–307. DOI: 10.9734/BJMCS/2015/17941.

Duyar, C. & Oğur, O., (2017). A note on topology of non-Newtonian real numbers. *IOSR J. Math.* 13(6), 11–14.

Duyar C. & B. Sağır, (2017). Non-Newtonian comment of Lebesgue measure in real numbers. *J. Math*, Article ID 6507013.

Grossman M. & Katz R. (1972). Non-Newtonian calculus, Lee Press, Pigeon Cove, MA.

Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technolny*, 10(4), 525–528. <https://doi.org/10.1080/0020739790100406>.

Güngör, N. (2020). Some geometric properties of the non-Newtonian sequence spaces $l_p(N)$. *Mathematica Slovaca*, vol. 70, no. 3, 2020, pp. 689-696. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0382>

Güngör, N., (2020). Volterra integral equations and relationship with Differential Equations. *GÜFBED* 10(3), 814–829.

Güngör, N. (2022). A note on linear non-Newtonian Volterra integral equations. *Math Sci* 16, 373–387. <https://doi.org/10.1007/s40096-021-00427-z>.

Işık G., Eryılmaz İ., (2023). Newtonian olmayan cisimler üzerinde tanımlı lineer uzayların bazı özellikleri, *Fen Bilimlerinde Özgün Disiplinlerarası Araştırmalar*, KAYA, Nergis, Editör, SRA Academic Publishing, Klaipeda, ss.139-176.

Eryılmaz İ., (2024). Non-Newtonian Lebesgue Spaces with Their Basic Properties, *Journal of Mathematical Extension*, 18(7), 1-23.

Natanson, I. P. (1964). Theory of function of a real variable, vol 1, Frederick Ungar Publishing Co., New York, NY, USA.

Oğur, O., & Demir, S. (2019). On non-Newtonian measure for α -closed sets, *New Trends in Mathematical Sciences*, 7(2), 202-207.

Oğur, O., & Demir, S. (2020). Newtonyen olmayan Lebesgue ölçüsü. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 134-139.

Oğur, O. & Güneş, Z. (2024). Newtonyen olmayan ölçülebilir kümeler üzerine bir not. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 14(1), 295-303. <https://doi.org/10.31466/kfbd.1405273>.

Oğur, O. (2024). On Measurable Sets in Multiplicative Calculus, Book Chapter, BIDGE Publications.

Oğur, O. (2024). A Short Note on Measurable Sets in Multiplicative

Calculus, Book Chapter, BIDGE Publications.

Rohman M., Eryılmaz İ., (2023). Some basic results in v-normed spaces, *Indonesian Journal of Mathematics and Applications*, Vol:1, No:1, pg.1-8.

Sagır B., Erdoğan F., (2019). On characterization of non-Newtonian superposition operators in some sequence spaces, *Filomat*, 33(9) 2601–2612.

Sagır B., Erdoğan F., (2019). On the function sequences and series in the non-Newtonian calculus, *Journal of Science and Arts*, 19(4), 915–936.

Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Primus*, 9(4), 310–326. <https://doi.org/10.1080/10511979908965937>.

Torres, D. F. M. (2021). On a non-Newtonian calculus of variations. *Axioms*. 10(3):171. <https://doi.org/10.3390/axioms10030171>.

Türkmen, C. & Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* 61(2):17–34.

Uzer, A. (2010). Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2725-2737.

