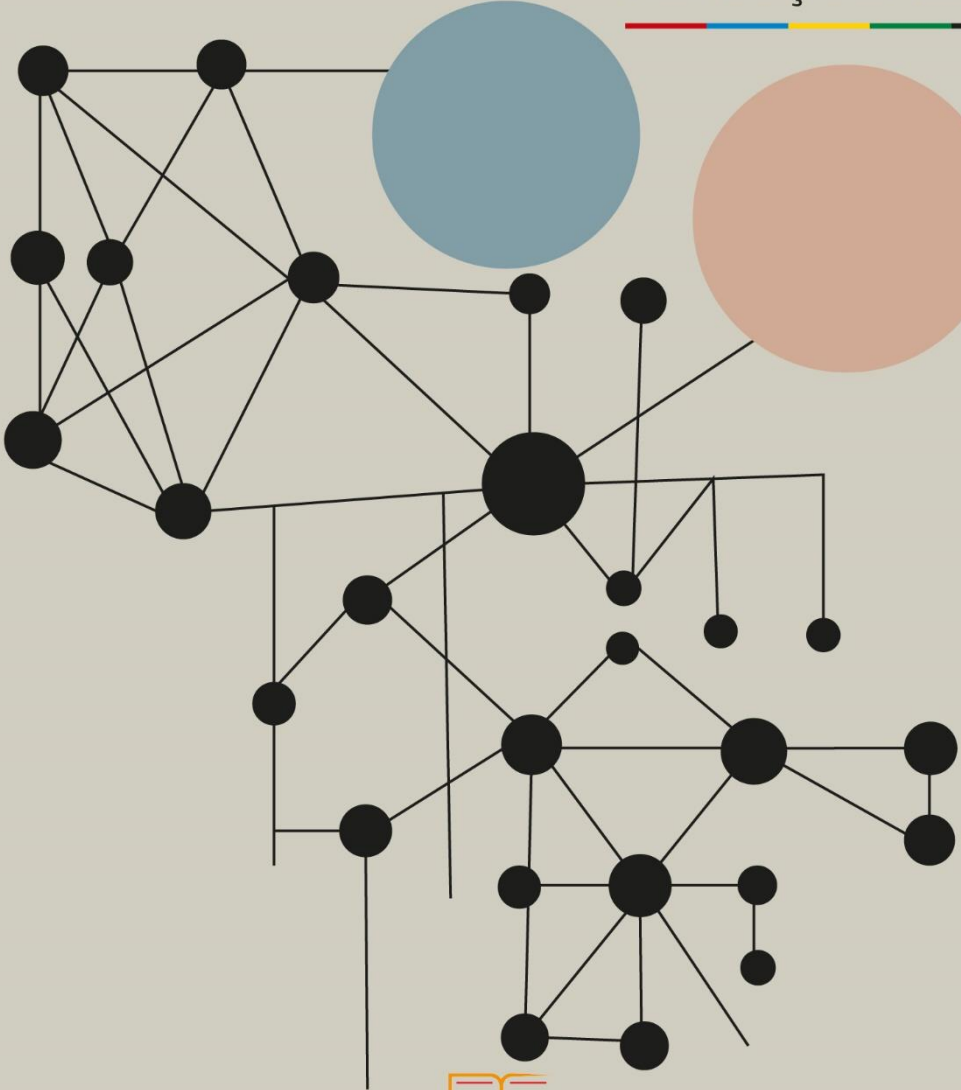


# SEÇME PRENSİPLERİ TEORİSİ



Editör  
Prof. Dr. ŞÜKRAN KONCA



# **BİDGE Yayınları**

Seçme Prensipleri Teorisi

**Editör:** Prof. Dr. Şükran KONCA

ISBN: 978-625-372-301-9

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 25.09.2024

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

[www.bidgeyayinlari.com.tr](http://www.bidgeyayinlari.com.tr) - [bidgeyayinlari@gmail.com](mailto:bidgeyayinlari@gmail.com)

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /  
Ankara



## İçindekiler

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Simgeler.....                                        | 4  |
| Kısaltmalar .....                                    | 6  |
| 1. Giriş .....                                       | 8  |
| Şükran KONCA.....                                    | 8  |
| Nuran ALAR .....                                     | 8  |
| Yücel AYDIN.....                                     | 8  |
| 2. Temel Kavramlar.....                              | 13 |
| Şükran KONCA.....                                    | 13 |
| Nuran ALAR .....                                     | 13 |
| Yücel AYDIN.....                                     | 13 |
| 3. Örtü Özellikleri ve Klasik Seçme Prensipleri..... | 25 |
| Şükran KONCA.....                                    | 25 |
| Nuran ALAR .....                                     | 25 |
| Yücel AYDIN.....                                     | 25 |
| 4. Yıldız ve Kuvvetli Yıldız Seçme Prensipleri.....  | 36 |
| Şükran KONCA.....                                    | 36 |
| Nuran ALAR .....                                     | 36 |
| 5. Seçme Prensiplerinin Zayıf Formları .....         | 61 |
| Şükran KONCA.....                                    | 61 |
| Yücel AYDIN.....                                     | 61 |
| 6. Sonuç .....                                       | 91 |
| Şükran KONCA.....                                    | 91 |
| Nuran ALAR .....                                     | 91 |
| YücelAYDIN.....                                      | 91 |
| 7. Kaynaklar .....                                   | 92 |

## Simgeler

|                                               |                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                                  | :Reel sayılar kümesi                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\mathbb{N}$                                  | :Doğal sayılar kümesi                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\mathbb{P}$                                  | :İrrasyonel sayılar kümesi                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\mathcal{O}$                                 | :Bir $X$ topolojik uzayının tüm açık örtülerinin bir ailesi                                                                                                                                                                                                   |
| $\Gamma$                                      | :Bir $X$ topolojik uzayının tüm $\gamma$ -örtülerinin bir ailesi                                                                                                                                                                                              |
| $\Omega$                                      | :Bir $X$ topolojik uzayının tüm $\omega$ -örtülerinin bir ailesi                                                                                                                                                                                              |
| $\overline{\mathcal{O}}$                      | : $\cup \{ \overline{U} : U \in \mathcal{U} \} = X$ olacak şekilde $X$ uzayını örten tüm $U \in \mathcal{O}$ örtülerinin bir kolleksiyonu                                                                                                                     |
| $\mathcal{O}_D$                               | : $\overline{\cup \mathcal{U}} = X$ olacak şekildeki tüm $U \in \mathcal{O}$ örtülerinin bir kolleksiyonu                                                                                                                                                     |
| $\text{int}(F) = {}^0 F$                      | : $F$ kümesinin içi                                                                                                                                                                                                                                           |
| $ A $                                         | : Bir $A$ kümesinin kardinalitesi                                                                                                                                                                                                                             |
| $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$               | : $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarının her bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \in A_n$ ve $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$ .                            |
| $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$           | : $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarının her bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset A_n$ ve $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$ .                       |
| $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ | : $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarının her $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için bir $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n, A_n$ nin sonlu alt kümesi ve $\{\cup B_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B} \square$ . |
| $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$               | : Açık örtülerin bir dizisinin her bir elemanına karşılık gelen açık örtüden tek bir tane seçilerek yeni bir açık örtü elde etmek-Rothberger özelliği (R).                                                                                                    |
| $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$           | : Açık örtülerin bir dizisinin her bir elemanına karşılık gelen açık örtüden sonlu birçok elemanını seçerek yeni bir açık örtü elde etmek-Menger özelliği (M).                                                                                                |

|                                                |                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$            | : Her bir $\gamma$ örtüsünden sonlu tane seçilerek yeni bir $\gamma$ örtü elde etmek                                                                                                  |
| $S_1(\mathcal{O}, \overline{\mathcal{O}})$     | : Hemen hemen Rothberger özelliği (aR)                                                                                                                                                |
| $S_{fin}(\mathcal{O}, \overline{\mathcal{O}})$ | : Hemen hemen Menger özelliği (aM)                                                                                                                                                    |
| $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O}_D)$              | : Zayıf Rothberger özelliği (wR)                                                                                                                                                      |
| $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_D)$          | : Zayıf Menger özelliği (wM)                                                                                                                                                          |
| $St(F, \mathcal{U})$                           | : $F$ nin $\mathcal{U}$ ya göre yıldızı<br>( $St(F, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : F \cap U \neq \emptyset\}$ )                                                         |
| $St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U})$         | : $\bigcup \mathcal{V}$ nin $\mathcal{U}$ ya göre yıldızı<br>( $St(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap (\bigcup \mathcal{V}) \neq \emptyset\}$ ) |
| $St(\{x\}, \mathcal{P})$                       | : $St(x, \mathcal{P}) = \bigcup \{P \in \mathcal{P} : \{x\} \cap P \neq \emptyset\}$                                                                                                  |

## Kısaltmalar

|         |                                                             |
|---------|-------------------------------------------------------------|
| $C$     | : Kompaktlık (Compactness)                                  |
| $CC$    | : Sayılabilir kompaktlık (Countable Compactness)            |
| $L$     | : Lindelöf                                                  |
| $M$     | : Menger                                                    |
| $R$     | : Rothberger                                                |
| $H$     | : Hurewicz                                                  |
| $GN$    | : Gerlits-Nagy                                              |
| $SM$    | : Yıldız Menger (Star Menger)                               |
| $SSM$   | : Kuvvetli yıldız Menger (Strongly Star Menger)             |
| $SR$    | : Yıldız Rothberger (Star Rothberger)                       |
| $SSR$   | : Kuvvetli yıldız Rothberger (Strongly Star Rothberger)     |
| $SH$    | : Yıldız Hurewicz (Star Hurewicz)                           |
| $SSH$   | : Kuvvetli Yıldız Hurewicz (Strongly Star Hurewicz)         |
| $SGN$   | : Yıldız Gerlits-Nagy (Star Gerlits-Nagy)                   |
| $SSGN$  | : Kuvvetli Yıldız Gerlits-Nagy (Strongly Star Gerlits-Nagy) |
| $S_K M$ | : Yıldız-K-Menger (Star-K-Menger)                           |
| $qM$    | : Söзде (quasi) Menger                                      |
| $qR$    | : Söзде (quasi) Rothberger                                  |
| $qH$    | : Söзде (quasi) Hurewicz                                    |
| $qGN$   | : Söзде (quasi) Gerlits-Nagy                                |
| $qL$    | : Söзде (quasi) Lindelöf                                    |
| $SL$    | : Yıldız Lindelöf                                           |

|               |                                     |
|---------------|-------------------------------------|
| $q\text{-}SL$ | : Söзде yıldız Lindelöf             |
| $w\text{-}SL$ | : Zayıf yıldız Lindelöf             |
| $q\text{-}SM$ | : Söзде yıldız Menger               |
| $w\text{-}SM$ | : Zayıf yıldız Menger               |
| $a\text{-}SM$ | : Hemen hemen yıldız Menger         |
| $wM$          | : Zayıf (weakly) Menger             |
| $wR$          | : Zayıf (weakly) Rothberger         |
| $wH$          | : Zayıf (weakly) Hurewicz           |
| $wGN$         | : Zayıf (weakly) Gerlits-Nagy       |
| $wL$          | : Zayıf (weakly) Lindelöf           |
| $aM$          | : Hemen hemen (almost) Menger       |
| $aR$          | : Hemen hemen (almost) Rothberger   |
| $aH$          | : Hemen hemen (almost) Hurewicz     |
| $aGN$         | : Hemen hemen (almost) Gerlits-Nagy |
| $cl(B)$       | : Bir $B$ kümesinin kapanışı        |

## 1. Giriş

*Prof. Dr. Ljubisa D.R. Koćinac'a saygılarımızla..*

**Şükran KONCA**  
**Nuran ALAR**  
**Yücel AYDIN**

‘Kompakt’ terimi, 1904 yılında Maurice Fréchet tarafından, her dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olan uzayları tanımlamak için ortaya atılmıştır. Bugün bu tip uzaylara ‘dizisel kompakt’ diyoruz. Dizisel kompaktlık, metrik uzaydaki kompaktlık kavramına denktir. Kompaktlığın özelliği uzun ve karmaşık bir tarihe sahiptir. Açıkçası, kompaktlığı tanımlamanın amacı kapalı ve sınırlı aralıkların özelliklerini genel olarak topolojik uzaylara taşımaktır. Bu amaca yönelik önceki girişimler dizisel kompaktlığı, sayılabilir kompaktlığı, Bolzano-Weierstrass özelliğini ve son olarak 1923 yılında P.S. Alexandroff ve Paul Urysohn tarafından öne sürülen kompaktlığın bugünkü tanımını kapsar. Kompaktlığın ilk teoremi, kapalı ve sınırlı  $[a,b]$  nın kompakt olduğunu belirten Heine-Borel Teoremi’dir. Bu kanıtın keyfi açık örtüye genişletilmesini Ernst Lindelöf (1870-1946) çalışmalarında göstermiştir (Karaca, 2013). Kompaktlık topolojik uzaylar üzerinde güçlü bir sınırlamadır. Kompaktlık önemli bir topolojik kavramdır, özellikle topolojik işlemlerle uğraşıyorsak. Matematğin birçok dalında özellikle analiz ve geometride sık sık karşılaşılan uzayların birçoğu kompakt değildir. Bu yüzden kompaktlığın bir genellemesi olan yerel kompaktlık kavramı ile ilgilenilmesi ihtiyacı duyulmuştur. Bu arayış matematikçilerin kompakt olmayan topolojik uzaylar için yeni örtü

özellikleri tanımlayarak kompaktlığın genel hallerini elde etmeleri ile devam eder.

Matematikte seçme prensibi, verilen bir kümeler dizisinden elemanlar seçerek matematiksel olarak önemli nesneler elde etme olasılığını ortaya koyan bir kuraldır. Seçme prensipleri teorisi, bu prensipleri ve diğer matematiksel özelliklerle ilişkilerini inceler. Bir matematiksel özelliğin bir seçme prensibi kullanılarak karakterize edilmesi, karakterize edilen özellik hakkında yeni kavrayışlara yol açan çoğunlukla aşikâr olmayan bir işlemdir. Köşegenleştirme yöntemi olarak da bilinen seçme prensipleri teorisinin uzun bir tarihi geçmişi vardır. 1845-1918 yılları arasında yaşamış kümeler kuramının kurucusu ünlü matematikçi Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1874 yılında reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu kanıtladıktan sonra kanıtta kullandığı ünlü köşegenleştirme yöntemi, aşağıda verilen şekilde, matematikte yeni araştırmalar ortaya koymuştur.

“Bir türe ait matematiksel nesnelerin  $(A_n: n \in \mathbb{N})$  dizisi için, belirli bir kurala göre her  $n \in \mathbb{N}$  için  $A_n$ ’den bazı elemanlar seçildiğinde, seçilen elemanların aynı veya farklı türde bir matematiksel nesne oluşturması.”

Genel olarak, bu yöntemi kullanan matematik dalına seçme prensipleri teorisi denir. Seçme prensipleri teorisinin birçok alanda uygulamalarını görebildiğimiz gibi küme teorisi, genel topoloji, cebirsel topoloji, matematiksel analiz, oyun teorisi, Ramsey teorisi, fonksiyon uzayları ve hiper uzaylar, kardinal değişmezlik, boyut teorisi, topolojik gruplar ve bağlar, Karamata teorisi gibi birçok matematiksel disiplin ile derin ve sık sık şaşırtıcı olan bağlantılara sahiptir. Temel olarak topolojik uzaylarda, özellikle fonksiyon uzaylarında örtü özelliklerini tanımlar. Tüm bu özellikler Lindelöf örtü özelliği ile ilgilidir. Menger ve Hurewicz gibi örtü özellikleri kompaktlığın zayıf halleri ve Lindelöf özelliğinin daha güçlendirilmiş halleridir. Aslında bunların hepsi sayılabilir kompaktlık ile yalancı kompaktlık (pseudokompaktlık) arasında uzanır.

Topolojideki seçme prensipleri teorisi ile ilgili temel çalışmalar 1920-1930'larda Menger (Menger, 1924), Hurewicz (Hurewicz, 1925; Hurewicz, 1938), Rothberger (Rothberger 1938), Sierpinski (Sierpinski, 1926; Sierpinski, 1928), tarafından yapılmış makaleler olmasına rağmen, bu alandaki sistematik araştırmalar son 20-30 yıldır özellikle de Scheeper'ın (Scheepers, 1996; Scheepers, 1997; Scheepers, 2000), makalelerinden sonra hızla artmış ve birçok matematikçiyi etkilemiştir.

Son birkaç yılda klasik seçme prensiplerinin zayıf formlarının araştırılmasına olan ilgi arttı ve bu konuda çok sayıda makale yayınlandı (Babinkostova, Pansera & Scheepers, 2012; Babinkostova, Pansera & Scheepers, 2013; Di Maio & Koçinac, 2015; Koccev, 2009; Pansera, 2012; Sakai, 2013; Song & Li, 2013). Tüm bu özellikler bir  $X$  uzayının Lindelöf özelliğinin zayıf versiyonlarıyla ilgilidir. 1979 yılında sözde (quasi) Lindelöf özelliği A.V. Arhangel'skii (Arhangel'skii, 1979) tarafından tanıtılmıştır. Di Maio ve Koçinac (Di Maio & Koçinac, 2015), Arhangel'skii nin bu çalışmasının seçilmiş versiyonlarıyla yakından ilgili olan Menger özelliğinin zayıf versiyonları olarak sözde (quasi) Menger uzaylarını tanımlamış ve bunların Menger özelliğinin diğer zayıf formlarından daha farklı olduklarını göstermişlerdir. Seçme prensipleri teorisi hakkında birkaç derleme makale yayınlanmıştır (örneğin, (Koçinac, 2004; Koçinac, 2019; Sakai & Scheepers, 2014), açık problemler için (Tsaban, 2007) nolu makaleye bakınız.) fakat yine de bazı önemli araştırma safhaları açığa çıkarılmamıştır. Koccev (Koccev, 2009) iyi bilinen Menger özelliğine benzeyen hemen hemen Menger ve ilgili uzayları araştırdı ve hemen hemen Menger özelliğinin Menger özelliğinden farklı olduğunu gösterdi. Bunun için açık kümelerin kapanışlarını kullanıyoruz. Aslında bu fikir tamamen yeni değil. Tkachuk (Tkachuk, 1995) ve Scheepers (Scheepers, 1998, 1999)'da, Rothberger (Rothberger, 1938)'in klasik notasyonuna benzer bir özellik olarak açık kümelerin kapanışını alarak düşünmüşlerdir. Koçinac (Koçinac, 1999b), Menger özelliğinin bir genelleştirilmesi olarak hemen hemen Menger kavramını tanıttı. Di Maio ve Koçinac (Di Maio & ark., 2015), hemen hemen Menger özelliğini hiper uzaylarda inceledi. Daniels (Daniels, 1988) zayıf

Menger ( $wM$ ), zayıf Rothberger ( $wR$ ) uzaylarını tanımlayan ilk kişiydi. Hemen hemen Menger ( $aM$ ) ve hemen hemen Rothberger ( $aR$ ) uzayları Kočinac (Kočinac, 1999b) tarafından tanımlandı. Zayıf Menger, hemen hemen Menger, zayıf Rothberger ve hemen hemen Rothberger uzaylarının oyun teorisi karakterizasyonları (Babinkostova, Pansera & Scheepers, 2012, 2013) te verilmiştir. Hemen hemen Hurewicz uzayları Song ve Li (Song & Li, 2013) tarafından tanımlandı ve bu uzayların temel topolojik özellikleri kanıtlandı.

Yıldız operatörünün topolojide kullanımı uzun bir tarihe sahiptir. Literatürde bir dizi topolojik özelliğin yıldız yöntemi kullanılarak karakterize edilebileceğini gösteren birçok sonuç vardır; özellikle topolojik uzayların birçok örtü özelliği söz konusu ise. Yıldız yöntemi, topolojik uzayların metrikleştirilmesi problemini incelemek ve birkaç önemli klasik topolojik kavramın tanımları için kullanılmıştır (Kočinac, 2015). Daha fazla ayrıntı için (Matveev, 1998) ve (Tsaban, 2015) makalelerine bakınız. 1999 yılında Kočinac, bu operatörü seçme prensipleri alanında uyguladı ve bu operatörü kullanarak bir dizi yeni seçme prensiplerini tanıttı ve araştırdı (Kočinac, 1999a, 1999b). Yıldız örtü özellikleri kompaktlığın zayıf halleridir ve sayılabilir kompaktlık ile yalancı kompaktlık (pseudokompaktlık) arasında uzanır (Tsaban, 2015). Metrik uzaylar parakompakt uzaylar olduğundan metrik uzaylarda Menger, yıldız-Menger, kuvvetli yıldız Menger, yıldız-K-Menger özellikleri çakışmaktadır. Kočinac (Kočinac, 2015) derleme makalesinde, seçme prensipleri teorisinin önemli bir alt alanı olan yıldız seçme prensiplerinin ayrıntılı bir açıklamasını vermektedir. Seçme prensipleri teorisinin önemli bir alt alanı olan yıldız seçme prensipleri hakkında (Bonanzinga, Cammaroto & Kocinac, 2004; Casas-de la Rosa, Garcia-Balan & Szeptycki, 2019; Kočinac, 1999a, 1999b; Kočinac, 2015; Matveev, 1998; Sakai, 2014; Song, 2013a, 2013b, 2013c; Song, 2014; Song, 2015; Tsaban, 2015) nolu makaleler yayınlanmıştır.

Arhangel'skii (Arhangel'skii, 1979),  $sL$  kardinal fonksiyonunu ve  $X$  uzaylarını  $sL(X) = \omega$  olacak şekilde tanımladı:

Bir  $X$  uzayına, eğer her  $A \subset X$  ve  $X'$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $\bar{A}$ 'nın her bir  $\mathcal{U}$  örtüsü için  $A \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}_n}$  olacak şekilde sayılabilir bir  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  kümesi varsa sLindelöff denir.

Bu fikri takiben ve değiştirerek, Koçinac ve Konca (Koçinac & Konca, 2020) seçmeli örtü özelliklerinin yeni tiplerini düşünmüş ve bunları Menger-kümesi tipi örtü özellikleri olarak adlandırmışlardır.

Yüksek lisans tez çalışmalarının bir ürünü olan bu kitapta, topolojide çok önemli bir yer edinen örtü özelliklerinden klasik seçme prensipleri ve yıldız seçme prensiplerinin zayıf formları ile bunların kendi aralarındaki ilişkiler derlenmiştir. Zayıf Menger, zayıf Rothberger, zayıf Hurewicz örtü özellikleri, hemen hemen-Menger, hemen hemen Rothberger, hemen hemen Hurewicz örtü özellikleri, yıldız-Menger, yıldız-Rothberger, yıldız Hurewicz örtü özelliklerinin zayıf versiyonlarını sağlayan uzayların bazı topolojik özelliklerini araştırdık. Şu ana kadar ilgili uzayların özellikle temel nitelikteki yapılmış çalışmalar üzerine yoğunlaştık ve ilgili makalelerde elde edilen ve ıspatı verilmemiş bazı sonuçları veya okuyucuya bırakılan teoremleri burada ıspatladık. Bu anlamda bu çalışma, son zamanlarda matematiğin bir alt bilim dalı olan topolojide önemli bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkan klasik seçme prensipleri ve yıldız seçme prensipleri ile bunların zayıf formları üzerine olup özellikle bu alanda temel bir kaynak arayan okuyucuya faydalı bir çalışma niteliğindedir.

## 2. Temel Kavramlar

Şükran KONCA  
Nuran ALAR  
Yücel AYDIN

**Tanım 2.1** (Koçak, 2015)  $X$  boş olmayan bir küme ve  $\tau$ ,  $X$ 'in kuvvet kümesi ile gösterilen  $P(X)$ 'in bir alt ailesi olsun.

T1)  $X$  ve  $\emptyset$ ,  $\tau$ 'ya aittir. Yani;  $X \in \tau$  ve  $\emptyset \in \tau$ ,

T2)  $\tau$ 'nın herhangi bir alt ailesine ait kümelerin birleşimi yine  $\tau$ 'ya aittir. Yani;  $I$  herhangi bir indis kümesi olmak üzere,  $i \in I$  için  $U_i \in \tau$  ise  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ ,

T3)  $\tau$ 'ya ait sonlu sayıdaki iki kümenin kesişimi yine  $\tau$ 'ya aittir. Yani  $U, V \in \tau$  ise  $U \cap V \in \tau$

özellikleri sağlanıyorsa  $\tau$ 'ya  $X$  üzerinde bir topoloji denir.  $\tau$  ailesi  $X$  üzerinde bir topoloji ise  $(X, \tau)$  sıralı ikilisine bir topolojik uzay ve  $X$ 'in elemanlarına noktalar denir.  $X$ 'in kendisine bir topolojik uzay denir.

**Örnek 2.2** (Koçak, 2015)  $X$  boş olmayan bir küme olsun.  $\tau = P(X)$  ailesinin  $X$  üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

**Çözüm** (T1)  $\emptyset \subseteq X$  ve  $X \subseteq X$  olduğu için  $X \in \tau$ ,  $\emptyset \in \tau$  olur.

(T2)  $\forall i \in I$  için  $U_i \in \tau$  ise  $U_i \subseteq X$  olur. Bu durumda  $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$  olur. O halde  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$  olur.

(T3)  $U, V \in \tau$  ise  $U \subseteq X, V \subseteq X$  olur. Bu durumda  $U \cap V \subseteq X$  olduğundan  $U \cap V \in \tau$  olur.

$\tau = P(X)$  ailesi Tanım 2.1 deki (T1), (T2) ve (T3) şartlarını sağladığından  $X$  üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye  $X$  üzerindeki

ayrık topoloji ve  $(X, \tau)$  topolojik uzayına da ayrık topolojik uzay denir.

**Tanım 2.3** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $\tau$  'nun elemanlarına  $(X, \tau)$  uzayının açık kümeleri denir.

**Tanım 2.4** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $U$  kümesi  $X$ 'in bir alt kümesi olsun.  $U$ 'nun  $X$ 'e göre tümleyeni olan  $X \setminus U$  kümesi  $(X, \tau)$  uzayında açıksa  $U$  'ya,  $(X, \tau)$  uzayının kapalı altkümeleri denir.

**Tanım 2.5** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $B, X$ 'in açık kümelerinin bir ailesi olsun.  $\tau$ 'nın her elemanı  $B$ 'ye ait bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa  $B$ 'ye  $\tau$  topolojisinin bir tabanı denir. Yani;

TB1)  $B \subseteq \tau$  dur.

TB2)  $U \in \tau$  ise  $i \in I$  için  $B_i \in B$  olmak üzere  $U = \bigcup_{i \in I} B_i$  olacak şekilde bir  $I$  indis kümesi vardır. TB1, TB2 şartları sağlanıyorsa  $B$ 'ye  $\tau$  topolojisinin bir tabanı denir.

**Tanım 2.6** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{O}, X$ 'in açık kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun.  $\mathcal{O}$ 'ya ait bütün sonlu sayıdaki bir takım kümelerin ara kesiti  $\tau$ 'nın bir tabanı oluyorsa  $\mathcal{O}$ 'ya  $\tau$ 'nın bir alt tabanı denir. Yani

$$B_{\mathcal{O}} = \left\{ \bigcap_{j \in J} S_j : J \text{ sonlu bir indis kümesi ve } j \in J \text{ için } S_j \in \mathcal{O} \right\}$$

ailesi  $\tau$ 'nın bir tabanı oluyorsa  $\mathcal{O}$ 'ya  $\tau$ 'nın bir alt tabanı denir.

**Tanım 2.7** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  olsun.  $x \in U$  özelliğindeki her  $U$  açık kümesine  $x$  noktasının bir komşuluğu denir. Diğer bir deyişle  $\tau$ 'nın  $x$  noktasını içeren her elemanına  $x$  noktasının bir komşuluğu denir. Bir  $x \in X$  noktasının komşuluklarının koleksiyonu genellikle  $N_x$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.8** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $x \in X$  ve  $B_x, x$  noktasını içeren açık kümelerin bir ailesi olsun.  $x \in U$  özelliğindeki her  $U \in \tau$  için  $B \subseteq U$  olacak şekilde bir  $B \in B_x$  varsa  $B_x$  ailesine  $x$

noktasının komşuluklarının bir tabanı veya  $x$  noktasının bir yerel tabanı denir. Yani;

YTB1)  $B_x \subseteq \tau$ 'dur,

YTB2)  $B \in B_x$  ise  $x \in B$ 'dir,

YTB3)  $x \in U$  özelliğindeki her  $U \in \tau$  için  $B \subseteq U$  olacak şekilde bir  $B \in B_x$  vardır.

Eğer bu üç şart sağlanıyorsa  $B_x$  kolleksiyonuna  $x$  noktasının komşuluklarının bir tabanı veya  $x$  noktasının bir yerel tabanı denir.

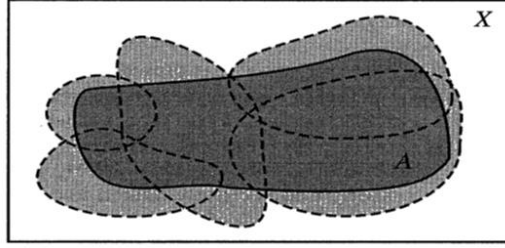
**Tanım 2.9** (Koçak, 2015) Eğer bir küme sonlu veya sayılabilir sonsuz ise bu kümeye sayılabilir küme denir. Sayılabilir olmayan kümeye sayılamayan küme denir.  $X$  ve  $Y$  boş olmayan iki küme olsun. Bire-bir ve örten bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu varsa  $X$  ve  $Y$  kümelerine eşgüçlü kümeler denir ve bu durum  $X \sim Y$  şeklinde gösterilir.  $X$  kümesi ile  $\mathbb{N}$  kümesi eşgüçlü ise yani  $X$  kümesinden  $\mathbb{N}$  kümesine bire-bir ve örten bir fonksiyon varsa,  $X$  kümesine sayılabilir sonsuzdur denir. Bir  $X$  kümesi bazı  $n \in \mathbb{N}$  için  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesi ile eşgüçlü veya  $X = \emptyset$  ise  $X$  kümesine sonlu küme denir.  $X$  sonlu değilse  $X$  kümesine sonsuzdur denir.

**Tanım 2.10** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $\overline{A} = X$  ise  $A$  ya  $(X, \tau)$  uzayının yoğun bir alt kümesi denir.

**Tanım 2.11** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  topolojik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya ayrılabilir uzay denir.

**Tanım 2.12** (Koçak, 2015)  $X$  bir küme ve  $A \subset X$  olsun. Eğer bir  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  ailesi için;  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  sağlanıyorsa, bu  $\mathcal{U}$  ailesine  $A$  alt kümesinin bir örtüsü denir.

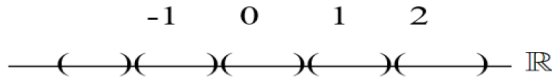
**Tanım 2.13** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $I$  bir indis kümesi olmak üzere her  $i \in I$  için  $U_i \in \tau$  ve  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  ise  $\mathcal{U} = \{U_i: i \in I\}$  ailesine  $A$ 'nın bir açık örtüsü denir (Bkz. Şekil 1).



Şekil 1:  $A$  kümesinin bir  $\mathcal{U}$  açık örtüsü

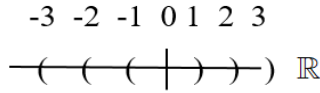
**Tanım 2.14** (Koçak, 2015)  $X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir örtüsü olsun. Eğer  $\mathcal{U}$ 'nün tüm elemanları bu uzayda açık ise  $\mathcal{U}$ 'ya  $X$  uzayının bir açık örtüsü denir ve  $X$ 'in açık örtülerinin ailesi  $\mathcal{O}$  ile gösterilir.

**Örnek 2.15** (Koçak, 2015)  $\mathcal{U} = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{Z}\}$  ailesi  $\mathbb{R}$  için bir açık örtü değildir. Çünkü,  $\mathbb{R} \neq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  (Bkz. Şekil 2). Tam sayıları örtemediğimizden dolayı  $\mathbb{R}$ 'nin açık örtüsü değildir.



Şekil 2:  $\mathbb{R}$  için açık örtü olmayan bir örnek

Örneğin; Şekil 3 'de  $X = \mathbb{R}$ ,  $\tau$  =alışılmış topoloji olsun.



Şekil 3:  $\mathbb{R}$  için açık örtü örneği

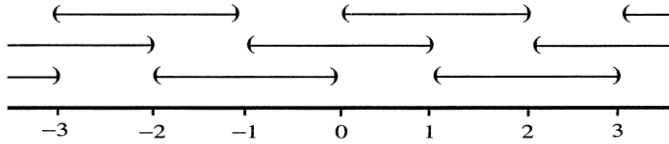
$\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) = \mathbb{R}$ 'yi verir. Böylece  $\mathbb{R}$ 'nin bir açık örtüsüdür.

**Tanım 2.16** (Koçak, 2015)  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  koleksiyonuna  $A$ 'nın açık bir örtüsü ve  $J \subseteq I$  olmak üzere  $\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$  koleksiyonu  $A$ 'nın bir örtüsü ise  $\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$  örtüsüne  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  örtüsünün bir alt örtüsü denir. Bu durumda  $J$  sonluysa

$\mathcal{V} = \{U_i : i \in J\}$  örtüsüne  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

**Tanım 2.17** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $X'$ 'in her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sonlu bir  $\mathcal{V}$  alt örtüsü varsa  $(X, \tau)$  uzayına veya kısaca  $X$  'in kendisine kompakt topolojik uzay denir.

**Örnek 2.18** (Karaca, 2013)  $\mathcal{U} = \{(n, n+2), n \in \mathbb{Z}\}$  ailesi  $\mathbb{R}$  için bir açık örtüdür fakat sonlu bir alt örtüsü olmadığından  $\mathbb{R}$  kompakt değildir (Bkz. Şekil 4).

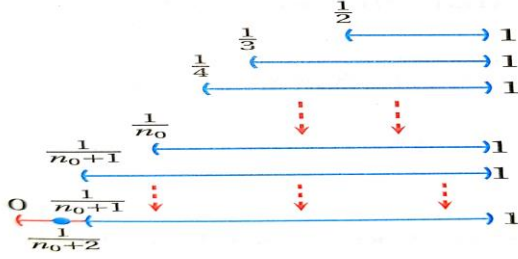


Şekil 4:  $\mathbb{R}$  kümesinin sonlu alt örtüsü olmayan bir açık örtüsü

**Tanım 2.19** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A$  da  $X$ 'in bir alt kümesi olsun.  $(A, \tau_A)$  alt uzayı kompaktsa  $A$ 'ya  $X$ 'in kompakt alt kümesi denir.

**Örnek 2.20** (Koçak, 2015)  $\mathbb{R}$  standart uzayının  $(0,1)$  alt kümesinin kompakt olmadığını gösterelim (Bkz. Şekil 5).

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$  kümesi  $\mathbb{R}$ 'de açık ve  $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) = (0,1) \cap \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$  olduğundan  $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$  kümesi  $(0,1)$  'de açıktır. Diğer yandan Şekil 5 ten de görüldüğü gibi,  $(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$  olduğundan  $\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$  koleksiyonu  $(0,1)$ 'in açık bir örtüsüdür.  $\mathcal{V} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) : n \in I \subseteq \mathbb{N}\right\}$  koleksiyonu bu örtünün sonlu bir alt örtüsü olsun. Bu durumda  $n_0 = \max\{n : n \in I\}$  olmak üzere  $(0,1) = \bigcup_{n \in I} \left(\frac{1}{n+1}, 1\right) = \left(\frac{1}{n_0+1}, 1\right)$  olur. Bu ise  $\frac{1}{n_0+2} \in (0,1)$  ve  $\frac{1}{n_0+2} \notin \left(\frac{1}{n_0+1}, 1\right)$  olduğundan bir çelişkidir. Böylece  $(0,1)$  'in  $\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$  açık örtüsünün sonlu hiçbir alt örtüsü yoktur. O halde  $(0,1)$  uzayı  $\mathbb{R}$  'nin kompakt bir alt kümesi değildir.



Şekil 5:  $\mathbb{R}$  standart uzayının kompakt olmayan bir alt kümesi

**Tanım 2.21** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $X$ 'in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa  $X$  uzayına sayılabilir kompakt (CC) uzay denir.  $A \subseteq X$  ve  $(A, \tau_A)$  uzayı sayılabilir kompaktsa  $A$  kümesine  $(X, \tau)$  uzayının sayılabilir kompakt altkümesi denir.

**Not 2.22** (Koçak, 2015) Kompaktlık (C) ve sayılabilir kompaktlık (CC) tanımları gereğince her kompakt uzay sayılabilir kompaktır. Çünkü kompakt uzayın her örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bunlar içinde sayılabilir olanlarında sonlu bir alt örtüsü vardır. Dolayısıyla  $C \Rightarrow CC$  dir.

**Tanım 2.23** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $(x_n)$  bu uzayda bir dizi ve  $x \in X$  olsun.  $x \in U$  özelliğindeki her  $U$  açık kümesi ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in U$  olacak şekilde bir  $n \geq N$  doğal sayısı varsa  $x$  noktasına  $(x_n)$  dizisinin bir yığılma noktası denir. Yani  $x \in U$  özelliğindeki her  $U$  açık kümesi için  $x_n \in U$  olacak şekilde sonsuz sayıda  $n \in \mathbb{N}$  varsa  $x$  noktasına  $(x_n)$  dizisinin bir yığılma noktası denir.

**Tanım 2.24** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Her  $x \in X$  noktasının sayılabilir bir yerel tabanı varsa  $(X, \tau)$  uzayına birinci sayılabilir uzay denir.

**Tanım 2.25** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $\tau$ 'nın sayılabilir bir tabanı varsa  $(X, \tau)$  uzayına ikinci sayılabilir uzay denir.

**Not 2.26** (Koçak, 2015) İkinci sayılabilir uzay birinci sayılabilir uzaydır. Her ikinci sayılabilir uzay ayrılabilir uzaydır.

**Örnek 2.27** (Koçak, 2015)  $\mathbb{R}$  üzerinde  $\tau_s$  standart topolojisi mevcut olsun. Bu uzayın  $B_s = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$  sayılabilir bir tabanı vardır. Dolayısıyla ikinci sayılabilir aksiyomunu sağlar.

**Tanım 2.28** (Koçak, 2015) Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa  $X$  uzayına Lindelöf uzayı (L) denir.

**Not 2.29** (Koçak, 2015) Her kompakt uzay bir Lindelöf uzayıdır ( $C \Rightarrow L$ ). Çünkü bir kompakt uzayın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Sonlu olan sayılabilir olduğundan her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır deriz. O halde tanım gereği bu uzay Lindelöf uzayıdır.

**Teorem 2.30** (Koçak, 2015) Her sayılabilir kompakt (CC) Lindelöf (L) uzayı kompakttır (C). ( $CC+L \Rightarrow C$ ).

**İspat**  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X$  bir Lindelöf uzayı olduğundan  $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  altörtüsü vardır.  $X$  sayılabilir kompakt olduğundan sayılabilir  $\mathcal{V}$  açık örtüsünün sonlu bir  $\mathcal{W}$  altörtüsü vardır. Buna göre  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{U}$ 'nun sonlu bir alt örtüsü olduğundan  $X$  kompakttır.

**Teorem 2.31** (Koçak, 2015) İkinci sayılabilir her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı bir Lindelöf uzayıdır.

**İspat**  $\beta = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $X$ 'in sayılabilir bir tabanı ve  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  ailesi  $X$ 'in herhangi bir açık örtüsü olsun. Bu durumda her  $x \in X$  için  $x \in U_{ix}$  olacak şekilde bir  $U_{ix} \in \mathcal{U}$  vardır.  $U_{ix}$  açık ve  $x \in U_{ix}$  olduğundan  $x \in B_x \subseteq U_{ix}$  olacak şekilde bir  $B_x \in \beta$  vardır. Böylece  $X = \bigcup_{x \in X} B_x$ 'dir. Her bir  $B_x \in \beta$  için  $B_x \subseteq U_{ix}$  olacak şekilde bir tane  $U_{ix} \in \mathcal{U}$  kümesi seçelim ve bunların koleksiyonuna  $V$  diyelim. Bu durumda  $\beta$  sayılabilir olduğundan  $V$  sayılabilir. Üstelik  $X = \bigcup_{x \in X} B_x = \bigcup_{U \in V} U$  olur. Diğer bir deyişle  $V$  koleksiyonu  $X$ 'in  $\mathcal{U}$  örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsüdür.

**Tanım 2.32** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.  $X$ 'deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa  $X$  uzayına dizisel kompakttır denir.

**Örnek 2.33** (Koçak, 2015)  $A = (0,1)$  alışılmış topolojiden indirgenen topolojiye sahip olsun.  $A = (0,1)$  kümesi dizisel kompakt değildir. Gerçekten  $(a_n) = \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$  dizisi 0 noktasına yakınsar. Dolayısıyla dizinin her alt dizisi de 0 noktasına yakınsar. Ancak  $0 \notin A$  'dır.

**Teorem 2.34** (Koçak, 2015) Dizisel kompakt her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı sayılabilir kompattır.

**Not 2.35** (Koçak, 2015) Dizisel kompaktlığın sayılabilir kompaktlığı gerektirmesine rağmen sayılabilir kompaktlık dizisel kompaktlığı gerektirmeyebilir. Bununla beraber birinci sayılabilir uzaylar için dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık denktir.

**Tanım 2.36** (Koçak, 2015)  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  olsun.

a)  $x \in U \subseteq C$  olacak şekilde bir  $U \in \tau$  ve  $X$ 'in kompakt bir  $C$  alt kümesi varsa  $X$  uzayına  $x$  noktasında yerel kompattır denir. Diğer bir deyişle  $x \in X$  noktasını içeren  $(X, \tau)$  uzayının bir  $U$  açık kümesini içeren  $(X, \tau)$  uzayının kompakt bir alt kümesi varsa  $(X, \tau)$  uzayına  $x$  noktasında yerel kompattır denir.

b) Her  $x \in X$  için  $(X, \tau)$  uzayı  $x$  noktasında yerel kompaktsa  $(X, \tau)$  uzayına yerel kompakt uzay denir.

**Örnek 2.37** (Koçak, 2015)  $\mathbb{R}$  standart uzayının yerel kompakt olduğunu gösterelim.

**Çözüm**  $x \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda  $\varepsilon > 0$  için  $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  ve  $C = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$  olsun. Bu durumda  $x \in U \subseteq C$  dir.  $U$  kümesi açık bir küme ve  $C$  kümesi kompakt olduğundan  $\mathbb{R}$  standart uzayı yerel kompattır.

**Teorem 2.38** (Koçak, 2015)  $\mathbb{R}$  standart uzayının kapalı ve sınırlı her altkümesi kompattır.

**Tanım 2.39** (Engelking, 1989)  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X$ in bir  $\mathcal{V}$  açık örtüsüne eğer her  $V \in \mathcal{V}$  bazı  $U_V \in \mathcal{U}$  tarafından kapsanıyorsa  $\mathcal{U}$ 'nun bir incesi veya inceltilmiş denir.

**Tanım 2.40** (Engelking, 1989)  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü ve  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$ un bir incesi olsun. Eğer  $X$ 'in her noktası  $\mathcal{V}$ 'nin en çok sonlu çoklukta elemanı tarafından kapsanıyorsa  $\mathcal{V}$  nokta-sonlu incedir denir.

**Tanım 2.41** (Engelking, 1989)  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü ve  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$ un bir incesi olsun. Eğer  $X$ 'in her bir noktası  $\mathcal{V}$ 'nin en çok sayılabilir çoklukta elemanı tarafından kapsanıyorsa  $\mathcal{V}$  nokta-sayılabılır incedir denir.

**Tanım 2.42** (Engelking, 1989) Bir  $X$  topolojik uzayının her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün açık ve yerel sonlu bir  $\mathcal{V}$  incesi varsa, bu uzaya parakompakt uzay denir.

**Tanım 2.43** (Engelking, 1989) Bir  $X$  topolojik uzayının her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün açık ve nokta-sonlu bir  $\mathcal{V}$  incesi varsa, bu uzaya metakompakt uzay denir.

**Tanım 2.44** (Daniels, 1988) Bir  $X$  topolojik uzayının her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün açık ve nokta-sayılabılır bir  $\mathcal{V}$  incesi varsa yani;  $X$ 'in her noktası  $\mathcal{V}$ 'nin elemanlarının en çok sayılabilir çoklukta kine ait ise, bu uzaya meta-Lindelöf uzay denir.

**Tanım 2.45** (Engelking, 1989) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sayılabilir, yerel, açık bir incesi varsa para-Lindelöf denir.

**Teorem 2.46** (Engelking, 1989)  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar ve  $f: X \rightarrow Y$  bir dönüşüm olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir.

- $f$  süreklidir.
- Her  $A \subset X$  için  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .
- Her  $B \subset Y$  için  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ .
- Her  $B \subset Y$  için  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$ .

**Tanım 2.47** (Engelking, 1989)  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne eğer  $\forall y \in Y$  için  $f^{-1}(y)$ ,  $X$ 'in kompakt alt kümesi ise kompakt dönüşüm denir.

**Tanım 2.48** (Engelking, 1989)  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar olmak üzere,  $X$ 'deki bir açık kümeyi  $Y$ 'de bir açık kümeye dönüştüren

$f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne açık dönüşüm denir. Açık bir dönüşüm için  $A \subset X$  iken  $f^{-1}(\overline{f(A)}) = \overline{f^{-1}(f(A))}$  eşitliği sağlanır.

**Tanım 2.49** (Engelking, 1989)  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne eğer  $\forall y \in Y$  ve  $f^{-1}(y) \subset U$  açık komşuluğu için  $y \in W$  ve  $f^{-1}(W) \subset U$  olacak şekilde  $Y$ 'de açık bir  $W$  kümesi varsa kapalı dönüşüm denir.

**Tanım 2.50** (Koçinac, 2016; Long & Herrington, 1981)  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne  $\theta$  -süreklili denir eğer her  $x \in X$  ve  $f(x)$ 'i içeren  $Y$  de açık her  $V$  kümesi için  $X$ 'de  $x$ 'i içeren bir  $U$  açık kümesi vardır öyle ki  $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$ .

**Tanım 2.51** (Koçinac, 2016; Long & Herrington, 1981) Bir  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne kuvvetli  $\theta$  -süreklili denir eğer her  $x \in X$  ve  $f(x)$ 'i içeren  $Y$ 'de açık her  $V$  kümesi için  $X$ 'de  $x$ 'i içeren bir  $U$  açık kümesi vardır öyle ki  $f(\overline{U}) \subset V$ .

**Not 2.52** (Koçinac, 2016; Long & Herrington, 1981)  $f(\overline{U}) \subset V \subset \overline{V}$  kapsama bağıntısından da görülebileceği gibi her kuvvetli  $\theta$  -süreklili dönüşüm  $\theta$  -süreklilidir.

**Tanım 2.53** (Engelking, 1989)  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzaylar olsun.  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü süreklili, kapalı ve kompakt bir dönüşüm ise  $f$  dönüşümüne mükemmel dönüşüm denir.

**Tanım 2.54** (Song, 2013a)  $X$  ve  $Y$  birer topolojik özellik ve  $f: X \rightarrow Y$  olsun.  $Y$ 'deki her noktanın ters görüntüsünde nokta sayısının  $X$ 'de sonlu olduğu  $f$  dönüşümüne sonludan-bire dönüşüm (finite-to-one mapping) denir.

**Not 2.55** (Engelking, 1989) Her kompakt uzay parakompakttır. Bir Lindelöf uzayının her açık örtüsünün yerel-sonlu, açık bir incesi vardır.

**Teorem 2.56** (Engelking, 1989) Yerel kompakt bir  $X$  uzayında aşağıdakiler denktir.

- (1)  $X$  uzayı  $\sigma$  -kompakttır.
- (2)  $X$  uzayı Lindelöftür.
- (3)  $X$  uzayının kompakt altkümelerinin bir dizisi  $K_1, K_2, K_3, \dots$

$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$  ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  olacak şekilde vardır.

**Tanım 2.57** (Engelking, 1989)  $X$  bir Tychonoff topolojik uzayı ve  $X$  üzerinde tanımlanmış her reel-değerli, sürekli fonksiyon sınırlı ise  $X$  uzayına pseudokompakt uzay denir.

**Teorem 2.58** (Engelking, 1989) Her sayılabilir kompakt (CC) Tychonoff uzayı pseudokompakt uzaydır.

**Teorem 2.59** (Engelking, 1989) Her pseudokompakt normal uzay sayılabilir kompakttır (CC).

**Tanım 2.60** [12]  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere,  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $d$  ye  $X$  üzerinde bir metriktir denir.

M1)  $\forall x, y \in X$  için  $d(x, y) \geq 0$ .

M2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

M3)  $\forall x, y \in X$  için  $d(x, y) = d(y, x)$ .

M4)  $\forall x, y, z \in X$  için  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**Tanım 2.61** (Engelking, 1989)  $(X, \tau)$  topolojik uzayına eğer  $X$  üzerindeki  $\tau$  topolojisi  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  metriği tarafından üretilmişse metriklenebilir denir.

**Teorem 2.62** (Engelking, 1989) Her metriklenebilir topolojik uzayda kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları denktir.

**Teorem 2.63** (Engelking, 1989) Her metriklenebilir kompakt uzay ayrılabiliridir.

**Tanım 2.64** (Engelking, 1989) Bir topolojik uzayın altkümelerinin bir ailesine  $\sigma$  -yerel sonlu (sırasıyla,  $\sigma$  -ayrık) denir eğer yerel sonlu ailelerin (sırasıyla, ayrık ailelerin) sayılabilir bir birleşimi olarak gösterilebiliyorsa.

**Not 2.65** Metriklenebilir uzayların en önemli özelliklerinden biri Stone Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremdedir.

**Teorem 2.66** (Engelking, 1989) (Stone Teoremi) Metriklenebilir bir uzayın her açık örtüsünün  $\sigma$  -yerel sonlu ve  $\sigma$  -ayrık bir incesi vardır.

**Teorem 2.67** (Engelking, 1989) Her metriklenebilir uzayın  $\sigma$  -ayrık bir bazı vardır.

**Teorem 2.68** (Engelking, 1989) Her metriklenebilir uzayın  $\sigma$  -yerel-sonlu bir bazı vardır.

**Teorem 2.69** (Engelking, 1989) Bir topolojik uzayın metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart parakompakt Hausdorff uzayı olmasıdır.

**Teorem 2.70** (Engelking, 1989) (Arhangel'ski'nin Metriklenebilme Teoremi) Bir topolojik uzay metriklenebilirdir ancak ve ancak bir  $T_1$ -uzayıdır ve regüler bir tabanı vardır.

**Teorem 2.71** (Engelking, 1989) Her regüler  $X$  topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (1)  $X$  uzayı parakompakttır.
- (2)  $X$  uzayının her açık örtüsünün açık sigma-yerel sonlu bir incesi vardır.
- (3)  $X$  uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu bir incesi vardır.
- (4)  $X$  uzayının her açık örtüsünün kapalı yerel sonlu bir incesi vardır.

### 3. Örtü Özellikleri ve Klasik Seçme Prensipleri

Şükran KONCA  
Nuran ALAR  
Yücel AYDIN

Bu bölümde örtü özellikleri ve klasik seçme prensipleri derlenmiş olup konuyla ilgili temel kısımlar verilerek ispatı verilmeyen veya ilgili makalelerde okuyucuya bırakılan bazı teoremlerin ispatları yapılmıştır. Referans verilmeyen bu sonuçlar bahsi geçen ispatlardır.

#### 3.1 Örtü Özellikleri ve $\sigma$ - Kompaktlık

**Tanım 3.1.1** (Scheepers, 1996)  $X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{U}$  da  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun. Eğer her bir  $x \in X$ ,  $\mathcal{U}$ 'nun sonlu tane elemanı hariç hemen hemen tümüne aitse veya diğer bir deyişle,  $\forall x \in X$  için  $\{U \in \mathcal{U}: x \notin U\}$  kümesi sonlu oluyorsa  $X$ 'in  $\mathcal{U}$  açık örtüsüne  $\gamma$  - örtü denir ve  $X$ 'in tüm  $\gamma$  -örtülerinin ailesi  $\Gamma$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.2** (Scheepers, 1996) Bir  $X$  topolojik uzayının  $\mathcal{U}$  açık örtüsüne eğer  $X \notin \mathcal{U}$  ve her bir sonlu  $F \subset X$  kümesi bazı  $U \in \mathcal{U}$  tarafından kapsanıyorsa  $\omega$  -örtü denir.  $X$ 'in tüm  $\omega$  -örtülerinin ailesi  $\Omega$  ile gösterilir.

**Örnek 3.1.3** (Konca, 2019) Açık bir şekilde tanımlardan da görüldüğü gibi,  $\mathbb{R}$ 'nin açık bir örtüsü olan  $\mathcal{U} = \{(-n, n): n \in \mathbb{N}\}$  bir  $\omega$  -örtü ve ayrıca bir  $\gamma$  -örtüsüdür.

**Teorem 3.1.4** (Scheepers, 1996; Konca, 2019) Bir  $X$  topolojik uzayının her bir  $\gamma$  -örtüsü bir  $\omega$  -örtüdür. Yani  $\gamma \Rightarrow \omega$ .

**İspat**  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir  $\gamma$  -örtüsü olsun.  $\mathcal{U}$ 'nun bir  $\omega$  -örtüsü olduğunu ispatlayacağız.  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  kümesi  $X$ 'in sonlu bir alt kümesi olsun.  $\mathcal{U}$  bir  $\gamma$  -örtü olduğundan

$x_1$ ,  $\mathcal{U}$ 'nun sonlu elemanları hariç tümüne ait.

$x_2, \mathcal{U}$ 'nun sonlu elemanları hariç tümüne ait.

$x_k, \mathcal{U}$ 'nun sonlu elemanları hariç tümüne ait.

Böylece  $F$  hemen hemen her  $U \in \mathcal{U}$  tarafından kapsanır ki bu da sonlu  $F \subset X$  kümesinin bazı  $U \in \mathcal{U}$  tarafından kapsandığı anlamına gelir. Böylece  $\mathcal{U}$  bir  $\omega$  -örtüdür.

**Sonuç 3.1.5** (Scheepers, 1996)  $\gamma$  -örtü,  $\omega$  -örtüden daha güçlüdür (baskındır).

**Örnek 3.1.6** (Scheepers, 1996)  $\mathcal{U}, X$  topolojik uzayının bir  $\omega$  -örtüsü olsun.  $\mathcal{U}^2 = \{U \times U : U \in \mathcal{U}\}$  nin  $X^2$  için bir  $\omega$  -örtü olması gerekmez.

**Teorem 3.1.7**  $\Gamma \subset \Omega \subset \mathcal{O}$  kapsama bağıntısı sağlanır.

Teorem 3.4 ten  $\gamma \Rightarrow \omega$  olduğunu biliyoruz.  $\Gamma, \Omega$  koleksiyonlarının elemanları aynı zamanda açık örtüler olduğundan ispat açıktır.

**Lemma 3.1.8** (Konca, 2019)  $\omega$  -örtüsü için  $X$  topolojik uzayı daima sonsuz elemanlı kabul edilir.

**İspat** Eğer  $X$  sonluysa,  $\omega$  -örtüsü için aşıkardır. Çünkü her bir sonlu  $F \subset X$  bazı  $U \in \mathcal{U}$  tarafından kapsanır.  $X$  sonlu olacağı için örtünün bazı elemanları tarafından kapsanır ve bu eleman  $X$  olmalıdır. Böylece  $X \in \mathcal{U}$  olur ki bu da  $\omega$  -örtünün tanımıyla çelişir. O halde  $X$  sonsuzdur.

**Not 3.1.9** (Konca, 2019)  $X$  deki her bir  $F$  sonlu küme,  $\omega$  -örtüsünün sonsuz çoklukta elemanına aittir.

**İspat**  $F \subset X, \exists U_0 \in \mathcal{U} \ni F \subset U_0$

$F_1 = F \cup \{x_1\}$  sonludur. Buna göre,  $\exists U_1 \in \mathcal{U} \ni F_1 \subset U_1$  ve böylece  $F \subset U_1$ .

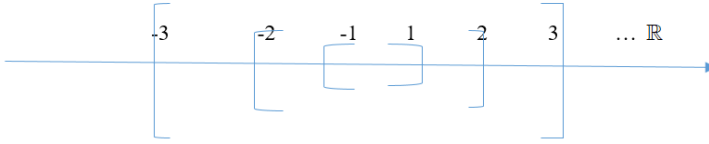
$F_2 = F \cup \{x_1, x_2\}$  sonludur. Buna göre,  $\exists U_2 \in \mathcal{U} \ni F_2 \subset U_2$  ve böylece  $F \subset U_2$ .

$F_n = F \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonludur. Buna göre,  $\exists U_n \in \mathcal{U} \ni F_n \subset U_n$  ve böylece  $F \subset U_n$  olur. Böyle devam ettirilirse,  $F, \mathcal{U}_n$ 'nin sonsuz çoklukta elemanı tarafından kapsanır.

**Tanım 3.1.10** (Just & ark., 1996) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer kompakt kümelerin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa  $\sigma$ -kompakttır denir. Yani,  $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$  bu uzaydaki kompakt kümeler olmak üzere  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ .

**Örnek 3.1.11** (Konca, 2019)  $\mathbb{R}$ ,  $\sigma$ -kompakttır.

$\mathcal{U} = \{[-n, n] : n \in \mathbb{N}\}$  kümeler ailesi  $\mathbb{R}$  için bir örtüdür. Her bir  $K_n = [-n, n]$  kümesi  $\mathbb{R}$ 'de kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.



Şekil 6:  $\sigma$ -kompaktlık

$[-1, 1]$ ,  $[-2, 2]$ ,  $[-3, 3]$ ,  $\dots$ ,  $[-n, n]$ ,  $\dots$  kümelerinin her biri  $\mathbb{R}$ 'de kompakttır ve birleşimleri  $\mathbb{R}$ 'yi verir (Bkz. Şekil 6).  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$  olduğundan  $\mathbb{R}$ ,  $\sigma$ -kompakttır.

**Not 3.1.12** (Just & ark., 1996)  $\sigma$ -kompaktlık için  $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots$  iken  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$  her zaman sağlanır.  $X_1 = K_1$ ,  $X_2 = K_1 \cup K_2$ ,  $X_3 = K_1 \cup K_2 \cup K_3, \dots$  alalım.  $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$  sağlanır. Kompakt kümelerin sonlu sayıdaki birleşimi de kompakt olduğundan  $X_1, X_2, X_3, \dots$  kümelerinin her biri de kompakttır.  $X$ ,  $\sigma$ -kompakt uzay,  $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$  ise  $X$ 'in kompakt alt kümelerinden oluşan bir örtüsü olur. Kompakt kümelerin sonlu birleşimi de kompakt küme olduğundan her  $n$  için  $\mathcal{K}_n = \bigcup_{i=1}^n K_i$ 'de kompakttır. O halde  $\{\mathcal{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$  ailesi,  $\sigma$ -kompakt  $X$  uzayının iç içe geçmiş kompakt alt kümelerinden oluşan bir örtüsüdür.

**Teorem 3.1.13** (Konca, 2019) Her kompakt uzay  $\sigma$ -kompakttır.

**İspat**  $X$  kompakt olsun.  $X$ 'in  $\sigma$ -kompakt olduğunu göstereceğiz. Her bir  $n$  için  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$  yazalım. Buna göre, her bir  $n$  için  $X_n = X$  olmak üzere açıkça görülür ki  $X$ , kompakt kümelerin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabilir ve böylece  $X$ ,  $\sigma$ -kompakttır.

**Sonuç 3.1.14** (Konca, 2019)  $\sigma$  -kompaktlık  $\gamma$  -örtüyü üretir.

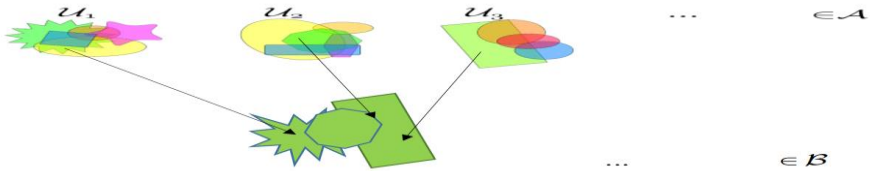
### 3.2 Seçme Prensipleri Teorisi

Tablo 1: Seçme prensipleri teorisi

|                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $X$ : Topolojik uzay                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $P$ : Topolojik özellik                                                                                                                | Seçmeli $P$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Bir tek eleman                                                                                                                         | Elemanların bir dizisi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $P$ : Kompaktlık ise<br>$X$ in her $\mathcal{U}$ açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü vardır $\ni \cup \mathcal{V} = X$ . | Seçmeli $P$ : Menger-Tipi Seçme Prensibi olur.<br>$X$ in açık örtülerinin her bir $\{\mathcal{U}_n: n \in \mathbb{N}\}$ dizisi için bir $\{\mathcal{V}_n: n \in \mathbb{N}\}$ dizisi vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ , $\mathcal{V}_n$ sonlu $\forall n \in \mathbb{N}$ için ve $\cup_n (\cup \mathcal{V}_n) = X$ . |

Kaynak: (Konca, 2019)

**Tanım 3.2.1** (Eysen, 2012) (Seçme Prensibi) Bir türe ait matematiksel nesnelerin bir  $(\mathcal{U}_n: n \in \mathbb{N})$  dizisinden, belirli bir kurala göre her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$  'den bazı elemanlar seçildiğinde, seçilen elemanların aynı veya farklı türde bir matematiksel nesne oluşturması.  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$  kümeler ailesi olmak üzere, kural Şekil 7 deki gibi ifade edilebilir:



Şekil 7: Seçme prensibi

**Tanım 3.2.2** (Scheepers, 1996) Bir  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin ailesi  $\mathcal{O}$  ile gösterilsin.  $\mathcal{A}$  ve  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{O}$  'nun boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

1.  $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  yöntemi:  $\mathcal{A}$  'nın elemanlarından oluşan her  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ .

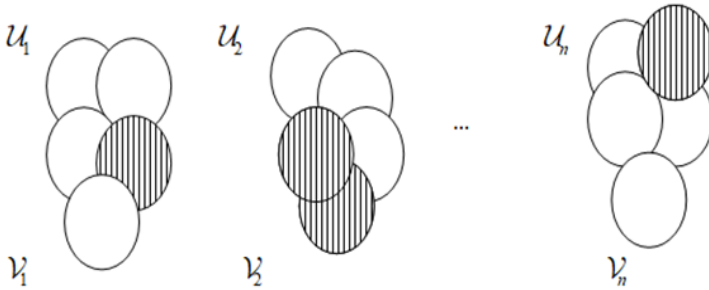
2.  $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  yöntemi:  $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarından oluşan her  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu altkümesi ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n \in \mathcal{B}$ .

3.  $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  yöntemi:  $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarından oluşan her  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinden,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için sonlu  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  kümesi seçerek,  $\mathcal{B}$ 'de bir  $(\bigcup \mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elemanı elde etmek.

**Not 3.2.3** (Scheepers, 1996) Açık örtülerin herhangi bir  $\mathcal{A}$  koleksiyonu ve  $\mathcal{O}$ ,  $\Gamma$  ve  $\Omega$  örtülerinin bir  $\mathcal{B}$  koleksiyonu için  $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ve  $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  kapsama bağıntısı sağlanır.

**Tanım 3.2.4** (Menger, 1924) (Menger-Tipi Seçme Prensibi) ( $M$ ) Bir  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n)$  olacak şekilde varsa  $X$  uzayına Menger örtü özelliğini sağlar veya Menger uzayıdır denir (Bkz. Şekil 8).

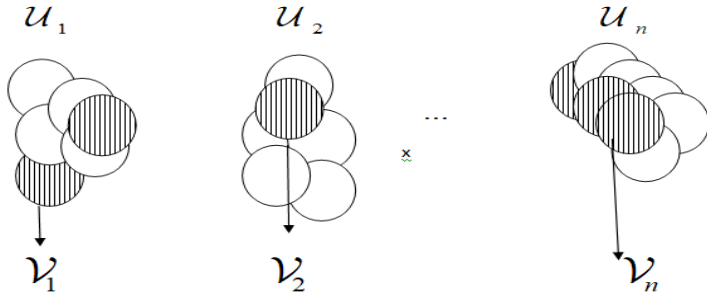
Açık örtülerin her bir  $\mathcal{U}_n$  dizisi için;



Şekil 8: Menger-tipi seçme prensibi

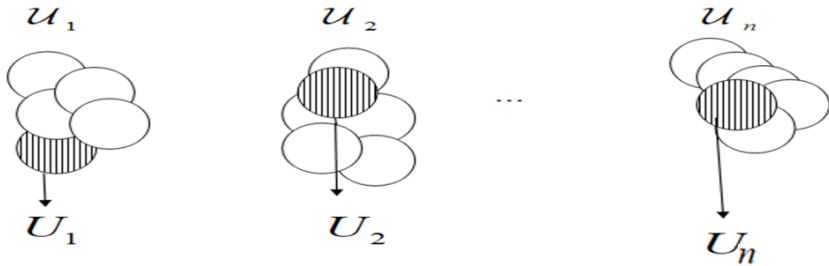
**Tanım 3.2.5** (Hurewicz, 1925) (Hurewicz-Tipi Seçme Prensibi) ( $H$ ) Bir  $X$  topolojik uzayına Hurewicz örtü özelliğini sağlar veya Hurewicz uzayıdır denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi varsa öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve her  $x \in X$  için  $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$ , sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için (Bkz. Şekil 9).



Şekil 9: Hurewicz-tipi seçme prensibi

**Tanım 3.2.6** (Rothberger, 1938) (Rothberger-Tipi Seçme Prensibi) (R) Bir  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  olacak şekilde varsa  $X$  uzayına Rothberger örtü özelliğini sağlar veya Rothberger uzayıdır denir (Bkz. Şekil 10).



Şekil 10: Rothberger-tipi seçme prensibi

**Tanım 3.2.7** (Gerlitz & Nagy, 1982). (Gerlitz-Nagy-Tipi Seçme Prensibi) (GN): Hurewicz ve Rothberger örtü özelliklerinin bir birleşimi olarak verilir. Buna göre,  $X$  uzayına Gerlitz-Nagy örtü özelliğini sağlar veya Gerlitz-Nagy uzayıdır denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi varsa öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve her  $x \in X$  için  $x \in U_n$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

Eğer  $\mathcal{O}$ , bir  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin bir koleksiyonu ise bu durumda

- $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$  Menger (M) örtü özelliğidir (Hurewicz, 1925; Menger, 1924);
- $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$  Rothberger (R) örtü özelliğidir (Rothberger, 1938);
- $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$  Hurewicz (H) örtü özelliğidir (Hurewicz, 1925).

**Teorem 3.2.8** (Konca, 2019)  $X \overset{(1)}{\sigma\text{-kompakt}} \Rightarrow X \overset{(2)}{\text{Menger}} \Rightarrow X \text{ Lindelöff}$  uzayı.

**İspat** (1) Varsayalım ki  $X$ ,  $\sigma$ -kompakt olsun.  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$  olacak şekilde  $X$ 'in kompakt  $X_1, X_2, \dots$  altkümelerinin birleşimi olarak yazılır.  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım.

$X_1$  kompakt olduğundan;  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$  olacak şekilde  $X_1$  kümesini örten sonlu bir  $\mathcal{V}_1$  alt örtüsü vardır.

$X_1 = \bigcup \mathcal{U}_1$  iken  $X_1 = \bigcup \mathcal{V}_1$  vardır ( $\mathcal{V}_1$  sonlu).

$X_2$  kompakt olduğundan;  $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_2$  olacak şekilde  $X_2$  kümesini örten sonlu bir  $\mathcal{V}_2$  alt örtüsü vardır.

...

$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots = (\bigcup \mathcal{V}_1) \cup (\bigcup \mathcal{V}_2) \cup \dots \cup (\bigcup \mathcal{V}_n) \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n)$  olur ki bu da  $X$  topolojik uzayının Menger uzayı olduğunu gösterir.

(2)  $X$  Menger uzayı olsun.  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ ,  $\mathcal{V}_n$  sonlu ( $\forall n \in \mathbb{N}$  için) ve  $\bigcup_n (\bigcup \mathcal{V}_n) = X$ . Buna göre,  $\mathcal{V}_n$  sonlu olduğundan sayılabilir bir alt örtüdür. Böylece,  $X$ 'in her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü olacağı için  $X$  Lindelöff uzayıdır.

**Teorem 3.2.9** (Konca, 2019)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & (1) & & (2) & & (3) & (4) \\
 \text{Kompaktlık} & \Rightarrow & \sigma\text{-Kompaktlık} & \Rightarrow & \text{Hurewicz} & \Rightarrow & \text{Menger} \Rightarrow \text{Lindelöf} \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
 & & (6) & & (5) & & \\
 & & \text{Garlitz-Nagny} & \Rightarrow & \text{Rothberger} & & \\
 & & & (7) & & & 
 \end{array}$$

**İspat** (1) *Kompaktlık* (C)  $\Rightarrow$   $\sigma$  -*Kompaktlık*

$X$  kompakt olsun.  $X$  'in  $\sigma$  -kompakt olduğunu göstereceğiz. Her bir  $n$  için  $X_n = X$  olmak üzere  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$  yazalım. Buna göre, açıkça görülür ki  $X$ , kompakt kümelerin sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabilir ve böylece  $X$ ,  $\sigma$  -kompakttır.

(2)  $\sigma$  -*Kompaktlık*  $\Rightarrow$  *Hurewicz* (H)

$X$  topolojik uzayı  $\sigma$  -kompakt olsun. Buna göre  $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$  bu uzaydaki kompakt kümeler olmak üzere  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ .  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $\mathcal{U}_1$ ,  $X$ 'i örttüğü için  $\mathcal{U}_1, K_1$ 'i örter.  $K_1$  kompakt olduğundan  $\exists$  sonlu  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$  alt örtüsü vardır öyle ki  $K_1 \subset \bigcup \mathcal{V}_1$ .

$\mathcal{U}_2$ ,  $X$ 'i örttüğü için  $\mathcal{U}_2, K_2$ 'yi örter.  $K_2$  kompakt olduğundan  $\exists$  sonlu  $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_2$  alt örtüsü vardır öyle ki  $K_2 \subset \bigcup \mathcal{V}_2$ .

...

$\mathcal{U}_k$ ,  $X$ 'i örttüğü için  $\mathcal{U}_k, K_k$ 'yi örter.  $K_k$  kompakt olduğundan  $\exists$  sonlu  $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{U}_k$  alt örtüsü vardır öyle ki  $K_k \subset \bigcup \mathcal{V}_k$ .

...

Buna göre,  $X = K_1 \cup K_2 \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n)$ .  $X$  'in herhangi bir noktası  $x$  olsun. Bu durumda,  $x \in K_k$  olacak şekilde minimum bir  $k \in \mathbb{N}$  seçelim. Açık bir şekilde, her bir  $m \geq k$  için  $x \in K_m$  ve  $K_m \subset \bigcup \mathcal{V}_m$  olduğundan  $x \in \bigcup \mathcal{V}_m$  her bir  $m \geq k$  için. Böylece, her  $x \in X$  için  $x \in \bigcup \mathcal{V}_m$ , sonlu tanesi hariç tüm  $m$ 'ler için. Bu durumda, her bir  $i \geq k$  için  $x \in \mathcal{V}_k$ . O halde,  $X$  Hurewicz uzayıdır.

(3) *Hurewicz (H)  $\Rightarrow$  Menger (M)*

$X$  Hurewicz uzayı olsun.  $X$  'in Menger olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani;  $X$  'in her  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  açık örtüsünün sonlu bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alt örtüsü vardır öyle ki  $\cup \mathcal{V}_n$   $X$  'i örter.

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ,  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $X$  Hurewicz olduğundan  $\exists \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ , her bir  $n$  için  $\mathcal{V}_n$  sonlu ve her  $x \in X$  için  $x \in \cup \mathcal{V}_n$  ( her  $n \geq n_x \in \mathbb{N}$  için ). Böylece,  $X$  topolojik uzayı  $(\cup \mathcal{V}_n)$  kümeleri tarafından kapsanır.

(4) *Menger (M)  $\Rightarrow$  Lindelöf (L)*

$X$  Menger uzayı ve  $U$  ise  $X$  'in herhangi bir açık örtüsü olsun. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n = U$  olacak şekilde  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini düşünelim. Menger özelliğini bu diziye uygularsak; sonlu  $V_n \subset U_n = U$  bulabiliriz, yani tüm  $U_n$  'ler  $U$  'dan ve

$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = U \cup U \cup \dots = U$  olur ki  $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset U$  demektir.

Böylece  $X$  'in her  $U$  açık örtüsünün sayılabilir bir  $V$  alt örtüsü olduğundan  $X$  Lindelöf 'tür.

(5) *Rothberger (R)  $\Rightarrow$  Menger (M)*

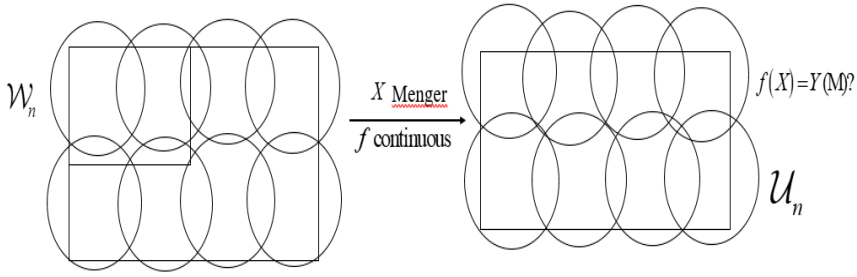
$X$  bir topolojik uzay ve  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  Rothberger olduğundan  $X$  'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$  olacak şekilde vardır.  $\mathcal{V}_n = \{U_n\} \subset \mathcal{U}_n$  alalım. Buna göre, her bir  $\mathcal{V}_n$  ,  $\mathcal{U}_n$  'nin sonlu alt kümesi olduğundan  $X$  'in Menger olmasını garantilemiş olur.

(6) *Garlitz-Nagay (GN)  $\Rightarrow$  Hurewicz (H)*

(7) *Garlitz-Nagay (GN)  $\Rightarrow$  Rothberger (R)*

Tanımdan da bilindiği üzere  $X$ , Gerlitz-Nagay uzayı ise  $X$  Rothberger ve Hurewicz uzayıdır. (6) ve (7) aşıkardır.

**Teorem 3.2.10** (Konca, 2019)  $X$  Menger uzayının sürekli  $f$  dönüşümü altındaki  $Y = f(X)$  görüntüsü de Menger uzayıdır.



Şekil 11: Menger uzayının sürekli  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü

**İspat**  $X$  bir Menger uzayı ve  $f: X \rightarrow Y$  sürekli ve örten bir dönüşüm olsun.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y = f(X)$  topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 11).  $Y$  uzayının da bir Menger uzayı olduğunu göstermek istiyoruz. Buna göre,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  nin sonlu bir alt kümesi ve  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  olacak şekilde bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin varlığını göstermemiz gerekir.  $f$  sürekli olduğundan, her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{W}_n = \{f^{-1}(U): U \in \mathcal{U}_n\}$  olarak alalım, buna göre  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  in açık örtülerinin bir dizisi olur.  $X$  bir Menger uzayı olduğundan öyle bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n$  nin sonlu alt kümesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \quad (1)$$

olur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{V}_n = \{f(H): H \in \mathcal{H}_n\}$  olsun, bu durumda  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir alt kümesidir. (1) denkleminde,

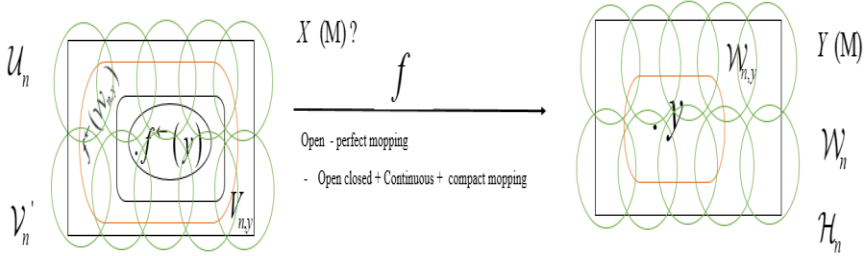
$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(\mathcal{H}_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

olur. Böylece  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  olur ki bu da  $Y$  'nin Menger uzayı olduğunu gösterir.

**Teorem 3.2.11** (Konca, 2019)  $f$  bir  $X$  uzayından bir  $Y$  Menger uzayına tanımlanan açık ve mükemmel bir dönüşüm ise bu durumda  $X$  uzayı da bir Menger uzayıdır.

**İspat**  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  uzayının açık örtülerinin bir dizisi ve  $y \in Y$  olsun (Bkz. Şekil 12).  $f$  kompakt bir dönüşüm olduğundan  $\forall y \in Y$  için  $f^{-1}(y)$  kümesi  $X$  uzayının kompakt bir altkümesidir. Buna

göre, her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\forall y \in Y$  için  $\mathcal{U}_n$  nin sonlu bir  $\mathcal{V}_{n,y}$  alt kümesi  $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_{n,y} = V_{n,y}$  olacak şekilde vardır.



Şekil 12: Menger uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü Menger

$f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan,  $y \in W_{n,y}$  ve  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_{n,y}) \subset V_{n,y}$  olacak şekilde bir açık  $W_{n,y} \subset Y$  kümesi vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{W}_n = \{W_{n,y} : y \in Y\}$  ailesi  $Y$  uzayının bir açık örtüsüdür.  $Y$  uzayı Menger özelliğini sağladığından, bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n$  'nin sonlu alt kümesi ve

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \quad (2)$$

Her  $H \in \mathcal{H}_n$  için buna karşılık gelen sonlu bir  $\mathcal{V}_{n,H} \subset \mathcal{U}_n$  vardır ve böylece  $\mathcal{V}_n' = \{V \in \mathcal{V}_{n,H} : H \in \mathcal{H}_n\}$  kümesi  $\mathcal{U}_n$  açık örtüsünün sonlu alt kümesi olur. Ayrıca (2) denklemden

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\mathcal{H}_n) \subseteq X$$

olur ve buradan  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'$  elde edilir. Böylece  $X$  Menger  $(M)$  uzayıdır.

## 4. Yıldız ve Kuvvetli Yıldız Seçme Prensipleri

Şükran KONCA  
Nuran ALAR

Yıldız örtü özellikleri kompaktlığın zayıf halleri ve Lindelöf özelliğinin daha güçlendirilmiş halleridir. Aslında bunların hepsi sayılabilir kompaktlık ile yalancı kompaktlık (pseudokompaktlık) arasında uzanır (Douwen & ark., 1991). Bu kısımda (Bonanzinga, Cammaroto & Kocinac, 2004; Casas-de la Rosa, Garcia-Balan & Szeptycki, 2019; Douwen & ark., 1991; Fleishman, 1970; Kočinac, 1999a; Kočinac, 2015; Kočinac, 2019; Matveev, 1998; Song, 2013a; Song, 2013b; Song, 2013c; Song, 2014) makaleleri derlenmiş ve bu makalelerde ispatları verilmeyip açık bir şekilde görülebileceği bilgisi verilen teoremlerin ispatları da yapılmıştır.

### 4.1 Yıldız Örtü Özellikleri ve Aralarındaki İlişkiler

Bu kısımda yıldız kompaktlık (SC), yıldız Lindelöf (SL) ile bunların daha güçlü versiyonları olan kuvvetli yıldız kompaktlık (SSC) ve kuvvetli yıldız Lindelöf (SSL) ile yıldız-L-Lindelöf (star-L-Lindelöf), kompaktlık (C) ve sayılabilir kompaktlık (CC) gibi kavramlarla aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

**Tanım 4.1.1** (Douwen & ark., 1991) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sonlu bir  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  alt örtüsü  $X = \bigcup t(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \bigcup \{ U \in \mathcal{U} : (\bigcup \mathcal{V}) \cap U \neq \emptyset \}$  olacak şekilde varsa yıldız-kompakt (SC) uzayı denir.

**Tanım 4.1.2** (Douwen & ark., 1991)  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in her bir  $\mathcal{U}$  açık örtüsü için sonlu bir  $F \subset X$  altkümesi  $X = \bigcup t(F, \mathcal{U})$  olacak şekilde varsa kuvvetli yıldız kompakttır (SSC) denir.

**Teorem 4.1.3** (Lemma 2.1.1, Douwen & ark., 1991) Kuvvetli yıldız-kompakt uzay yıldız-kompakttır.

**İspat**  $X$  topolojik uzayının bir açık örtüsü  $\mathcal{U}$  olsun.  $X$  kuvvetli yıldız-kompakt olduğundan, sonlu bir  $B \subset X$  kümesi  $St(B, \mathcal{U}) = X$  olacak şekilde vardır. Her bir  $b \in B$  için  $b \in U_b$  olacak şekilde bazı  $U_b \in \mathcal{U}$  seçelim.  $\mathcal{V} = \{U_b : b \in B\}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{V}, \mathcal{U}$  'nun sonlu bir alt kümesidir ve  $X = St(B, \mathcal{U}) \subseteq St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq X$  elde edilir. Böylece  $X = St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U})$  olur ki bu da  $X$ 'in yıldız-kompakt olduğunu gösterir.

**Teorem 4.1.4** (Teorem 2.1.4, Douwen & ark., 1991; Fleishman, 1970) Her sayılabilir kompakt uzay kuvvetli yıldız-kompakttır

( $CC \Rightarrow SSC$ ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay olsun. Varsayalım ki  $X$  uzayı sayılabilir kompakt olsun fakat kuvvetli yıldız-kompakt olmasın. Eğer  $B \subseteq X$  sonlu ise

$$St(B, \mathcal{U}) \neq X \quad (3)$$

olacak şekilde  $X$ 'in bir açık örtüsü  $\mathcal{U}$  olsun. Herhangi bir  $x_0 \in X$  seçelim ve tümevarımla,  $x_n \in X/St(\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \mathcal{U})$ ,  $n > 0$  için seçelim. (3) ile böyle bir seçim mümkündür.  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ve  $\mathcal{V} = \{St(x_n, \mathcal{U}) : n \in \mathbb{N}\}$  olsun. Dikkat edilirse,  $x_n$  nin seçimine bağlı olarak,  $\mathcal{V}$  'nin her elemanı kesinlikle  $A$ 'nın bir elemanını içerir. Sonuç olarak,  $\mathcal{V}$  'nin sonlu bir alt kümesi  $A$ 'yı kapsamayacaktır. Eğer  $y \in \bar{A}$  ise  $y \in U$  olacak şekilde bazı açık  $U \in \mathcal{U}$  seçelim.  $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$  ve böylece  $y \in St(x_n, \mathcal{U})$  bazı  $n$  için. Bunun için görüyoruz ki,  $X$ 'deki açık kümeler ile birlikte,  $\mathcal{V}, \bar{A}$ 'nın sayılabilir bir örtüsüdür.  $X$ 'in kapalı bir altkümesi olan  $\bar{A}$  sayılabilir kompakttır. Buna göre,  $\bar{A}$ 'nı ve dolayısıyla  $A$ 'yı örten,  $\mathcal{V}$  'nin sonlu bir altkümesi bulunmak zorundadır. Bu ise  $\mathcal{V}$  hakkındaki önceki gözlemlerimizle çelişmektedir. O halde  $X$  kuvvetli yıldız-kompakttır.

**Not 4.1.5** Bu teoremin tersinin sağlanabilmesi için verilen uzayın Hausdorff uzayı olması gerekir.

**Teorem 4.1.6** (Teorem 2.1.5, Douwen & ark., 1991) Kuvvetli yıldız-kompakt (SSC) Hausdorff uzayı sayılabilir kompakttır (CC).

**İspat** Varsayalım ki  $X$  sayılabilir kompakt olmayan bir Hausdorff uzayı olsun. Buna göre sonsuz kapalı ayrık  $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$  altkümesi vardır.  $D$  ayrık olduğundan, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \cap D = \{x_n\}$  olacak şekilde bir  $U_n$  açık kümesi vardır. Her  $m \in \mathbb{N}$  için  $Y_m = \{x_n \in D : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$ , böylece  $|Y_m| = 2^m - 1$ .  $Y_m$  sonlu ve  $X$  Hausdorff uzayı olduğundan  $2^m \leq n < 2^{m+1}$  için  $x_n \in V_n$  olan  $V_n$  ayrık açık kümeleri vardır. Daha sonra  $\mathcal{V}_m = \{U_n \cap V_n : 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$  kurulumu  $(U_n \cap V_n) \cap D = \{x_n\}$  olacak şekilde  $X$ 'in ikili ayrık açık altkümelerinin bir kolleksiyonunu verir.  $\mathcal{V} = \{X - D\} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_m$  olarak tanımlayalım. Açık bir şekilde,  $\mathcal{V}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsüdür.  $|A| = M$  varsayımıyla  $A$ ,  $X$ 'in sonlu bir altkümesi olsun. Buna göre,  $|A| < 2^M - 1 = |\mathcal{V}_m|$ . Böylece, bazı  $2^M \leq m < 2^{M+1} - 1$  için,  $(U_m \cap V_m) \cap A = \emptyset$  dir. Fakat  $U_m \cap V_m$ ,  $\mathcal{V}$ 'nin  $x_m$ 'i kapsayan tek elemanıdır. Bu yüzden,  $x_m \notin St(A, \mathcal{V})$ . Özel olarak,  $St(A, \mathcal{V}) \neq X$ . Fakat  $A$ ,  $X$ 'in keyfi sonlu altkümesidir. Böylece  $X$  kuvvetli-yıldız kompakt değildir.

**Sonuç 4.1.7**  $X$  kuvvetli yıldız kompakt (SSC) Hausdorff uzayı  $\Leftrightarrow X$  sayılabilir kompattır (CC).

**Sonuç 4.1.8**  $C \Rightarrow CC \Rightarrow SSC$ .

Her kompakt uzay aynı zamanda sayılabilir kompakt olduğundan ve Teorem 4.1.4 den sonuç aşıkardır.

**Tanım 4.1.9** (Douwen & ark., 1991) Bir  $X$  topolojik uzayının her  $\mathcal{U}$  açık örtüsü için sayılabilir bir  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  alt örtüsü  $St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$  olacak şekilde varsa, bu uzaya yıldız-Lindelöff (SL) denir.

**Tanım 4.1.10** (Douwen & ark., 1991) Bir  $X$  topolojik uzayının her  $\mathcal{U}$  açık örtüsü için  $X$ 'in sayılabilir bir  $B$  alt kümesi  $St(B, \mathcal{U}) = X$  olacak şekilde varsa bu uzaya kuvvetli-yıldız-Lindelöff (SSL) denir.

**Tanım 4.1.11** (Douwen & ark., 1991) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in her  $\mathcal{U}$  açık örtüsü için  $X$ 'in bir  $A$  Lindelöff alt uzayı  $St(A, \mathcal{U}) = X$  olacak şekilde varsa yıldız-L-Lindelöff (star-L-Lindelöff) denir.

**Not 4.1.12** Koçınac (Koçınac, 1999a) 1999 daki makalesinde

$SSL \Rightarrow SL$  ve  $L \Rightarrow SSL \Rightarrow \text{star-L-Lindelöf} \Rightarrow SL$  ilişkilerinin açık bir şekilde görülebileceğini ispatsız belirtmiştir. Biz şimdi bunları aşağıdaki iki teoremle ispatlayalım.

**Teorem 4.1.13** Bir  $X$  topolojik uzayı kuvvetli yıldız Lindelöf ise yıldız Lindelöftür (  $SSL \Rightarrow SL$  ).

**İspat** Bir  $X$  topolojik uzayının bir açık örtüsü  $\mathcal{U}$  olsun.  $X$  kuvvetli yıldız Lindelöf olduğundan  $X$ 'in sayılabilir bir  $B$  altkümesi  $X = S t ( B , \mathcal{U} )$  olacak şekilde vardır. Her bir  $b \in B$  için  $b \in U_b$  olacak şekilde bazı  $U_b \in \mathcal{U}$  seçelim.  $\mathcal{V} = \{U_b : b \in B\}$  olsun. Böylece  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$  nun sayılabilir altkümesidir ve

$$X = S t ( B , \mathcal{U} ) \subseteq S t ( \cup \mathcal{V} , \mathcal{U} ) \subseteq X.$$

Böylece  $S t ( \cup \mathcal{V} , \mathcal{U} ) = X$ .

**Teorem 4.1.14**  $X$  bir topolojik uzay olsun.

i.  $X$  Lindelöf ise  $X$  kuvvetli yıldız Lindelöf'tür (  $L \Rightarrow SSL$  ).

ii.  $X$  kuvvetli yıldız Lindelöf ise  $X$  yıldız-L-Lindelöf'tür (  $SSL \Rightarrow \text{star-L-Lindelöf}$  ).

iii.  $X$  yıldız-L-Lindelöf ise  $X$  yıldız Lindelöf'tür (  $\text{star-L-Lindelöf} \Rightarrow SL$  ).

**İspat** i. (  $L \Rightarrow SSL$  )

$X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X$  Lindelöf olduğundan  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  altörtüsü  $\cup \mathcal{V} = X$  olacak şekilde vardır. Her bir  $V \in \mathcal{V}$  için bir  $x_V \in V$  noktası seçelim ve  $B = \{x_V : V \in \mathcal{V}\}$  kümesini oluşturalım bu şekilde.  $\mathcal{V}$  sayılabilir olduğundan  $B$  de  $X$ 'in sayılabilir bir altkümesi olur. Açık bir şekilde,  $X = S t ( B , \mathcal{U} )$  elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ii. (  $SSL \Rightarrow \text{star-L-Lindelöf}$  )

$X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X = S t ( L , \mathcal{U} )$  olacak şekilde  $X$  in bir  $L$  Lindelöf altuzayını bulmamız gerekir.  $X$  kuvvetli yıldız Lindelöf (  $SSL$  ) olduğundan  $X$  in sayılabilir bir  $A$  altkümesi  $S t ( A , \mathcal{U} ) = X$  olacak şekilde vardır.  $\mathcal{U}$ ,

$X$ 'in bir açık örtüsü olduğundan  $\mathcal{U}$  ayrıca  $A$  için de bir açık örtüdür.  $A$  sayılabilir olduğundan  $A$ 'yı örten sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  altörtüsü vardır (  $\mathcal{V} = \{V: x_V \in L\} \ni x_V \in V \subset U, U \in \mathcal{U}$  ) ve böylece  $A$  Lindelöftür. Buna göre  $L=A$  için sonuç elde edilir.

iii. (*star-L-Lindelöf*  $\Rightarrow$  *SL*)

$X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X$  bir yıldız-L-Lindelöf olduğundan  $X$ in bir  $A$  Lindelöf altuzayı  $St(A, \mathcal{U}) = X$  olacak şekilde vardır.  $\mathcal{U}, X$ 'in bir açık örtüsü olduğundan  $\mathcal{U}$  ayrıca  $A$  için de bir açık örtüdür.  $A$  bir Lindelöf uzayı olduğundan  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün  $A$ 'yı örten sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  altörtüsü  $A \subset \cup \mathcal{V}$  olacak şekilde vardır. Buna göre,  $X = St(A, \mathcal{U}) \subseteq St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq X$  olur ve böylece  $St(\cup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X$  olur ki bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.1.15**  $L \Rightarrow SSL \Rightarrow \text{star-L-Lindelöf} \Rightarrow SL$ .

## 4.2 Yıldız Menger ve Kuvvetli Yıldız Menger Tipi Seçme Prensipleri

Bu kısımda yıldız Menger, yıldız Hurewicz, yıldız Rothberger, yıldız Gerlits-Nagy seçme prensipleri ile bunların daha güçlü formları olan kuvvetli yıldız Menger, kuvvetli yıldız Hurewicz, kuvvetli yıldız Rothberger, kuvvetli yıldız Gerlits-Nagy ile yıldız-K-Menger, yıldız-L-Lindelöf kavramları incelenmiş ve bu örtü özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

**Tanım 4.2.1** (Kočinac, 1999a) Bir  $X$  topolojik uzayına yıldız-Menger (*SM*) denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki

- (i)  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ , her bir  $n \in \mathbb{N}$  için,
- (ii)  $\mathcal{V}_n$  sonlu, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için,
- (iii)  $\cup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) = X$ .

**Teorem 4.2.2** (Kočinac, 1999a)  $X$  topolojik uzayı yıldız-Menger ise yıldız-Lindelöf tür ( $SM \Rightarrow SL$ ).

**İspat**  $X$  yıldız-Menger uzayı ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$  olacak şekilde  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini düşünelim.  $X$  yıldız-Menger olduğundan bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için

$V_n \subset U_n = U$  sonlu altkumesi ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup V_n, U) = X$  olacak şekilde vardır.  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = U \cup U \cup \dots = U$  olur ki  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n =$ ,  $U$  'nun sayılabilir bir alt ailesi demektir. Böylece  $X$  'in her  $U$  açık örtüsünün sayılabilir bir  $V$  alt örtüsü  $St(\cup V, U) = X$  olacak şekilde var olduğundan  $X$  yıldız Lindelöf uzayıdır.

**Tanım 4.2.3** (Kočinac, 1999a) Bir  $X$  topolojik uzayına yıldız-K-Menger'dir ( $S_K M$ ) denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(U_n)$  dizisi için  $X$ 'in kompakt alt kümelerinin bir  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\{St(K_n, U_n) : n \in \mathbb{N}\}$   $X$ 'in bir açık örtüsüdür; yani  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, U_n) = X$ .

**Tanım 4.2.4** (Kočinac, 1999a) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(U_n, U_n) = X$  olacak şekilde varsa yıldız Rothberger (SR) denir.

**Tanım 4.2.5** (Song, 2013c)  $X$  topolojik uzayına yıldız Hurewicz (SH) denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $V_n, U_n$  'nin sonlu alt örtüsü ve her  $x \in X$  için  $x \in St(\cup V_n, U_n)$  sonlu çokluktaki hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için ( hemen hemen her  $n$  için ).

**Not 4.2.6** (Gerlits & Nagy, 1982) da tanımlanan Gerlits-Nagy örtü özelliğinin Rothberger ve Hurewicz örtü özelliklerinin birleşimi olduğunu biliyoruz. (Kočinac, 1999a) de tanımlanan yıldız Rothberger ve (Song, 2013c) de tanımlanan yıldız Hurewicz kavramlarından yola çıkılarak yıldız Gerlits-Nagy örtü özelliği tanımı verilebilir.

**Tanım 4.2.7**  $X$  topolojik uzayına yıldız Gerlits-Nagny (SGN) denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve her  $x \in X$  için  $x \in St(U_n, U_n)$  sonlu çokluktaki hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Tanım 4.2.8** (Kočinac, 1999a) Bir  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin her bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi

- (i)  $F_n \subset X$ , her bir  $n \in \mathbb{N}$  için,
- (ii)  $F_n$  sonlu, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için,
- (iii)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$

olacak şekilde varsa bu uzaya kuvvetli yıldız Menger (SSM) denir.

**Not 4.2.9** (Koçinac, 1999a) de aşağıdaki teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır. Bu teoremin ispatını burada verdik.

**Teorem 4.2.10**  $X$  uzayı kuvvetli yıldız-Menger ise kuvvetli yıldız Lindelöf uzayıdır ( $SSM \Rightarrow SSL$ ).

**İspat**  $X$  kuvvetli yıldız-Menger uzayı ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$  olacak şekilde  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini düşünelim.  $X$  kuvvetli yıldız-Menger olduğundan öyle bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n$  sonlu,  $F_n \subset X$  her  $n$  için ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$  olacak şekilde vardır. her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n$  sonlu olduğundan,  $F_n$  sayılabilir.  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ,  $X$ 'in  $St(F, \mathcal{U}) = X$  şartını sağlayan, sayılabilir bir altkümesidir. Böylece,  $X$  uzayı kuvvetli yıldız-Lindelöf uzayıdır.

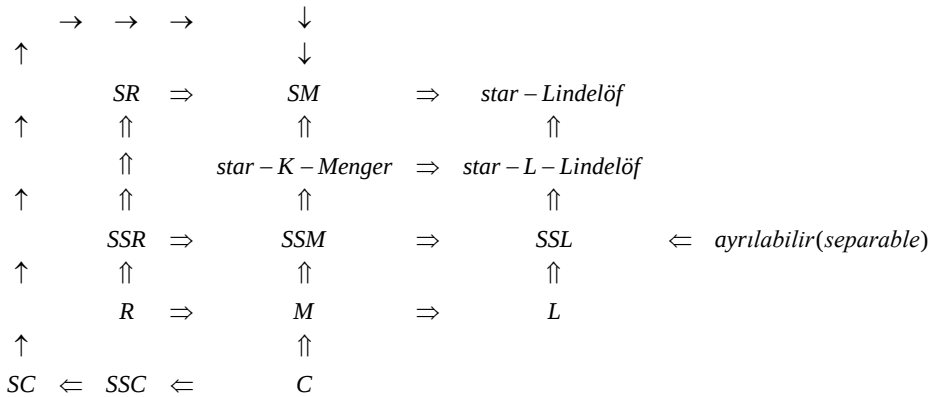
**Tanım 4.2.11** (Koçinac, 1999a) Eğer bir  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için  $X$ 'de bir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) = X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U \in \mathcal{U}_n : U \cap \{x_n\} \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}\}$  olacak şekilde varsa  $X$  uzayına kuvvetli yıldız Rothberger (SSR) denir.

**Tanım 4.2.12** (Song, 2013a) Bir  $X$  topolojik uzayına kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) denir eğer  $X$ 'in her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  açık örtüsü için bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n \subset X$  ve her  $x \in X$  için  $x \in St(F_n, \mathcal{U}_n)$  sonlu çokluktaki hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Not 4.2.13** (Gerlits & Nagy, 1982) da tanımlanan Gerlits-Nagy örtü özelliğinin Rothberger ve Hurewicz örtü özelliklerinin birleşimi olduğunu biliyoruz. (Koçinac, 1999a) de tanımlanan kuvvetli yıldız Rothberger ve (Song, 2013b) de tanımlanan kuvvetli yıldız Hurewicz kavramlarından yola çıkılarak yıldız Gerlits-Nagy örtü özelliği tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

**Tanım 4.2.14** Bir  $X$  topolojik uzayına kuvvetli yıldız Gerlits-Nagy (SSGN) denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için  $X$  'de bir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $x \in X$  için  $x \in St(x_n, \mathcal{U}_n)$  sonlu çokluktaki hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Yani,  $x \in \{St(x_1, \mathcal{U}_1), St(x_2, \mathcal{U}_2), \dots, St(x_n, \mathcal{U}_n), \dots\}$  hemen hemen her  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Not 4.2.15** Aşağıdaki Şekil 13 (Diagram 1, Kočinac, 1999a) de gösterilmiştir. Fakat bu ve buna benzer örtü özelliklerinin aralarındaki ilişkilerin ispatı verilmemiştir. Biz bu kitapta bu ispatları vereceğiz. Diğer örtü özellikleri arasındaki ilişkiler için Şekil 14, Şekil 15 ve Şekil 18 e bakınız.



Şekil 13: Örtü özellikleri arasındaki ilişki

**Teorem 4.2.16** Bir  $X$  topolojik uzayı Yıldız-K-Menger ise yıldız-L-Lindelöf uzayıdır.  $(star - K - Menger \Rightarrow star - L - Lindelöf)$ .

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X$ 'in bir  $A$  Lindelöf altuzayının  $St(A, \mathcal{U}) = X$  olacak şekilde var olduğunu göstermek istiyoruz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$  olacak şekilde  $X$ 'in açık örtülerinin bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini göz önünde bulunduralım.  $X$  yıldız-K-Menger olduğundan  $X$  'in kompakt altkümelerinin bir  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{U}) = X$ .

Bu durumda  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ,  $X$ 'in  $\sigma$ -kompakt bir altuzayıdır.  $\sigma$ -

kompakt uzay Lindelöf uzayı olduğundan,  $A$  bu durumda  $X$  'in  $St(A, \mathcal{U}) = X$  şartını sağlayan bir Lindelöf uzayı olduğundan  $X$  yıldız- $L$ -Lindelöftür.

**Teorem 4.2.17** Her Menger uzayı ( $M$ ) kuvvetli yıldız Menger ( $SSM$ ) dir ( $M \Rightarrow SSM$ ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  Menger olduğundan bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ ,  $\mathcal{V}_n$  sonlu, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n) = X$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $V \in \mathcal{V}_n$  için bir  $x_V \in V$  noktası seçelim ve  $F_n := \{x_V : V \in \mathcal{V}_n\}$  olarak alalım. Buna göre  $F_n$ ,  $X$  'in sonlu bir altkümesidir. Açık bir şekilde,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$  olur.

**Teorem 4.2.18** Her kuvvetli yıldız Menger uzayı yıldız Menger dir ( $SSM \Rightarrow SM$ ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  kuvvetli yıldız-Menger olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n \subset X$ ,  $F_n$  sonlu, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$  olacak şekilde bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $x \in F_n$  için  $x \in U_n$  olacak şekilde bazı  $U_n \in \mathcal{U}_n$  seçelim.  $\mathcal{V}_n = \{U_n : x \in F_n\}$  olsun. Buna göre her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  sonludur. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$  nin sonlu bir alt kümesidir ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) \subseteq X$  elde edilir. Bu da  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$  olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.2.19**  $M \Rightarrow SSM \Rightarrow SM$ .

**Teorem 4.2.20** Her Rothberger uzayı kuvvetli yıldız Rothberger dir ( $R \Rightarrow SSR$ ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  Rothberger olduğundan her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  'ler  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in U_n$  alalım. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \subseteq St(x_n, \mathcal{U}_n)$  gerçeğini takip ederek

$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) \subseteq X$  ve buradan  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n)$  elde edilir. Yani,  $X$  kuvvetli yıldız-Rothberger'dir.

**Teorem 4.2.21** Her kuvvetli yıldız Rothberger uzayı, yıldız Rothberger dir (  $SSR \Rightarrow SR$  ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  kuvvetli yıldız Rothberger olduğundan  $X$ 'de bir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) = X$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in U_n$  alalım. Açıkça, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $St(x_n, \mathcal{U}_n) \subseteq St(U_n, \mathcal{U}_n)$  olur. Böylece,  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(x_n, \mathcal{U}_n) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(U_n, \mathcal{U}_n) \subseteq X$  elde edilir. Yani,  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(U_n, \mathcal{U}_n)$  ve buradan  $X$  yıldız-Rothberger'dir.

**Sonuç 4.2.22**  $R \Rightarrow SSR \Rightarrow SR$ .

**Not 4.2.23** Aşağıdaki Şekil 14 (Song, 2013b) de gösterilmiştir. Fakat bu ve buna benzer örtü özelliklerinin aralarındaki ilişkilerin ıspatının açık olduğu belirtilerek verilmemiştir. Biz burada bazı ıspatları vereceğiz.

$$\begin{array}{ccccc} C & \Rightarrow & SSH & \Rightarrow & SSM \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & SH & \Rightarrow & SM \end{array}$$

*Şekil 14: Örtü özellikleri arasındaki ilişki*

**Teorem 4.2.24** Her Hurewicz uzayı kuvvetli yıldız Hurewicz dir ( $H \Rightarrow SSH$ ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  Hurewicz olduğundan bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  sonlu, vardır öyle ki her  $x \in X$  için  $x \in \bigcup \mathcal{V}_n$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $V \in \mathcal{V}_n$  için bir  $x_V \in V$  noktası seçelim ve  $F_n := \{x_V : V \in \mathcal{V}_n\}$  olarak alalım. Buna göre  $F_n$ ,  $X$ 'in sonlu bir altkümesidir. Buna göre,  $\forall x \in X$ ,  $x \in \bigcup \mathcal{V}_n \subset St(F_n, \mathcal{U}_n)$  sonlu tanesi hariç tüm  $n$  için.

**Teorem 4.2.25** Her kuvvetli yıldız Hurewicz uzayı, yıldız Hurewicz dir (  $SSH \Rightarrow SH$  ).

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  kuvvetli yıldız Hurewicz olduğundan bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n \subset X$ ,  $F_n$  sonlu, her bir  $n \in \mathbb{N}$  için ve  $\forall x \in X$  için  $x \in St(F_n, \mathcal{U}_n)$  sonlu tanesi hariç tüm  $n$  için.

Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $x \in F_n$  için  $x \in U_n$  olacak şekilde bazı  $U_n \in \mathcal{U}_n$  seçelim.  $\mathcal{V}_n = \{U_n : x \in F_n\}$  olsun, buna göre her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  sonludur. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir alt kümesidir ve  $\forall x \in X$  için  $x \in St(F_n, \mathcal{U}_n) \subset St(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$  sonlu tanesi hariç tüm  $n$  için. Buradan  $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)$  sonlu tanesi hariç tüm  $n$  için, olur ki bu da  $X$  'in yıldız-Hurewicz olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.2.26**  $H \Rightarrow SSH \Rightarrow SH$ .

**Teorem 4.2.27** (Kočinac, 1999a) Her kuvvetli yıldız Menger meta-kompakt uzayı, bir Menger uzayıdır ( $SSM + \text{metakompakt} \Rightarrow M$ ).

**İspat**  $X$  topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  uzayı meta-kompakt olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$  'nin açık, sonlu-nokta bir  $\mathcal{V}_n$  incesi vardır.  $X$  kuvvetli-yıldız Menger ( $SSM$ ) olduğundan (bu gerçeği  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  açık alt örtülerinin dizisi üzerine uygularsak),  $X$  'in sonlu alt kümelerinin bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\cup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{V}_n) = X$ , yani;  $\{St(F_n, \mathcal{V}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $X$  'in bir açık örtüsüdür.  $\mathcal{V}_n$  sonlu-nokta olduğundan  $F_n$  'nin elemanları  $\mathcal{V}_n$  'nin sonlu çokluktaki elemanları tarafından kapsanır ve  $St(F_n, \mathcal{V}_n)$  ise  $\mathcal{W}_n$  nin birleşimi olacaktır.  $W \in \mathcal{W}_n$  (öyle ki  $\mathcal{V}_n$  'nin gerçekte bir elemanı olan) için  $W$  elemanını içeren bir  $U_W \in \mathcal{U}_n$  vardır.  $\mathcal{H}_n = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$  olmak üzere  $\mathcal{H}_n, \mathcal{V}_n$  'nin sonlu alt kümesidir ve  $\cup \mathcal{H}_n \supset \cup \mathcal{W}_n = St(F_n, \mathcal{V}_n)$ . Böylece  $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} (\cup \mathcal{H}_n)$  elde edilir ve buradan  $X$  Menger uzayıdır.

**Teorem 4.2.28** (Kočinac, 1999a) Her kuvvetli yıldız-Menger ve meta-Lindelöf  $X$  uzayı, Lindelöf 'tür ( $SSM + \text{meta-Lindelöf} \Rightarrow L$ ).

**İspat**  $X$  'in bir açık örtüsü  $\mathcal{U}$  olsun.  $\mathcal{U}$  'nun sayılabilir bir alt örtüsünün olduğunu göstermek istiyoruz.  $X$  meta-Lindelöf uzay olduğundan  $\mathcal{U}$  'nun nokta-sayılabılır, açık bir  $\mathcal{V}$  incesi vardır.  $\mathcal{V}, \mathcal{U}$  'nun nokta-sayılabılır, açık bir incesi olduğundan  $\mathcal{V}$  'nin kendisi de  $X$  'i örter.  $X$  kuvvetli yıldız-Menger uzayı olduğundan ( $SSM$ ),  $X$  'in

sonlu alt kümelerinin bir  $\{F_n: n \in \mathbb{N}\}$  dizisi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{V}) = X$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n$  ile,  $\mathcal{W}_n = \{V \in \mathcal{V}: F_n \cap V \neq \emptyset\}$  olacak şekilde  $\mathcal{V}$ 'nin  $F_n$  ile kesişen elemanlarının ailesi gösterilsin.  $\mathcal{V}$  nokta-sayılabılır ve  $F_n$  sonlu olduğundan,  $\mathcal{W}_n$  sayılabilir. Böylece  $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$  kolleksiyonu,  $\mathcal{V}$ 'nin sayılabilir bir alt ailesi ve  $X$ 'in bir örtüsüdür. Her  $W \in \mathcal{W}$  için  $W \subset U_W$  olacak şekilde bir  $U_W \in \mathcal{U}$  elemanını karşılık getirelim. Buna göre,  $\{U_W: W \in \mathcal{W}\}$  kümesi  $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir alt örtüsüdür. O halde  $X$  topolojik uzayının herhangi bir  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sayılabilir bir  $\mathcal{W}$  alt örtüsü var olduğundan  $X$  uzayına Lindelöf uzayı denir.

**Not 4.2.29** Teorem 4.4 ve Teorem 4.6'dan elde edilen Sonuç 4.7 den bilindiği üzere Hausdorff uzaylarda kuvvetli yıldız kompaktlık (SSC) ve sayılabilir kompaktlık (CC) çakışmaktadır. Böylece sayılabilir kompakt Hausdorff uzayları kuvvetli yıldız Menger (SSM) dir. Bir önceki teoremden sonraki iyi bilinen sonucu elde ederiz.

**Sonuç 4.2.30** Sayılabilir kompakt meta-Lindelöf uzayı kompakttır.

**Not 4.2.31** Aşağıdaki Şekil 15 (Koçınac, 1999a) de gösterilmiştir. Aşağıdaki Teorem 4.2.32 bu makalede verilen bir teoremdir. Fakat bu tezde tüm şıkların ispatı verilecek olup ispat daha detaylı bir şekilde incelenecektir.

$$\begin{array}{c}
 SSM + \text{Meta-Lindelöf} \Rightarrow \text{Lindelöf} \\
 M \Rightarrow \text{Lindelöf} \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \\
 SSM \Rightarrow SSL \\
 \Downarrow \quad \Downarrow \\
 SM \Rightarrow SL
 \end{array}$$

*Şekil 15: Örtü özellikleri arasındaki ilişki*

**Teorem 4.2.32** (Koçınac, 1999a) Bir parakompakt Hausdorff  $X$  uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (a)  $X$  yıldız-Menger ( $SM$ ) uzayıdır.
- (b)  $X$  yıldız-K-Menger ( $S_K M$ ) uzayıdır.

(c)  $X$  kuvvetli yıldız-Menger (SSM) uzayıdır.

(d)  $X$  Menger (M) uzayıdır.

**İspat** (d)  $\Rightarrow$  (c):  $M \Rightarrow SSM$ , Teorem 4.2.14 te gösterilmişti.

(c)  $\Rightarrow$  (b):  $SSM \Rightarrow S_K M$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $X$  kuvvetli yıldız-Menger uzayı ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Bu durumda  $X$ 'in sonlu alt kümelerinin bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n$  sonlu olduğundan kompakttır. Böylece,  $X$ 'in kompakt alt kümelerinin bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(F_n, \mathcal{U}_n) = X$  olacak şekilde elde etmiş oluruz. Bu da  $X$ 'in bir yıldız- $K$ -Menger ( $S_K M$ ) olduğu anlamına gelir.

(b)  $\Rightarrow$  (a):  $S_K M \Rightarrow SM$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $X$  yıldız- $K$ -Menger ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $X$  yıldız- $K$ -Menger olduğundan  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{U}_n) = X$  (yani,  $\{St(K_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$   $X$ 'in bir açık örtüsü) olacak şekilde  $X$ 'in kompakt alt kümelerinin bir  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $K_n$  kompakt olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$ ,  $K_n$  için bir açık örtüdür ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 'nin sonlu alt kümelerinin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $K_n \subset \bigcup \mathcal{V}_n = St(K_n, \mathcal{U}_n)$ .  $St(K_n, \mathcal{U}_n) = \bigcup \mathcal{V}_n$  olduğundan  $\{\bigcup \mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü olur. Buna göre,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n) = X$ , yani  $X$  Menger uzayıdır. Sonuç 4.2.15 ten  $M \Rightarrow SSM \Rightarrow SM$  olduğundan  $X$  yıldız-Menger uzayıdır.

(a)  $\Rightarrow$  (d):  $SM \Rightarrow M$  olduğunu göstermeliyiz. Böylece ıspat tamamlanmış olur.  $X$  yıldız-Menger ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Parakompaktlığın Stone-karakterizasyonu uygulanırsa her bir  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$  için  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \dots, \mathcal{V}_n, \dots$  dizisi vardır öyle ki

$\mathcal{V}_1, \mathcal{U}_1$ 'in bir yıldız incesidir, o halde,  $\forall V \in \mathcal{V}_1$  için  $\exists U_V \in \mathcal{U}_1$  vardır öyle ki  $St(V, \mathcal{V}_1) \subset U_V$ .

$\mathcal{V}_2, \mathcal{U}_2$ 'in bir yıldız incesidir, o halde,  $\forall V \in \mathcal{V}_2$  için  $\exists U_V \in \mathcal{U}_2$  vardır öyle ki  $St(V, \mathcal{V}_2) \subset U_V$ .

$\mathcal{V}_3, \mathcal{U}_3$ 'in bir yıldız incesidir, o halde,  $\forall V \in \mathcal{V}_3$  için  $\exists U_V \in \mathcal{U}_3$  vardır öyle ki  $S t(V, \mathcal{V}_3) \subset U_V$ .

...

$\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'in bir yıldız incesidir, o halde,  $\forall V \in \mathcal{V}_n$  için  $\exists U_V \in \mathcal{U}_n$  vardır öyle ki  $S t(V, \mathcal{V}_n) \subset U_V$ .

...

$X$  yıldız-Menger olduğundan her  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$   $\mathcal{W}_n$  sonlu (her  $n \in \mathbb{N}$  için) ve

$$\{St(\cup \mathcal{W}_1, \mathcal{V}_1), St(\cup \mathcal{W}_2, \mathcal{V}_2), \dots, St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n), \dots\} \in \mathcal{O}$$

yani  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) = X$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $W \in \mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$  için en az bir  $U_W \in \mathcal{U}_n$  vardır öyle ki  $S t(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W$ .  $\mathcal{U}_n'$ :  $= \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$  olsun.  $\mathcal{U}_n'$  her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$  nin sonlu altkümesidir.  $(\mathcal{U}_n')_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ in açık altkümelerinin bir ailesidir öyle ki  $\mathcal{U}_n'$  her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$  nin sonlu altkümesi,  $S t(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) \subset \mathcal{U}_n'$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $S t(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n)$  kümeleri  $X$  bir örtü oluşturur. Böylece,  $\{\cup \mathcal{U}_1', \cup \mathcal{U}_2', \cup \mathcal{U}_3', \dots\} \in \mathcal{O}$  olur ve buradan  $X$  Menger'dir.

**Not 4.2.33** Kocinac (Kočinac, 1999a) benzer bir yolla, parakompakt bir  $X$  uzayında Rothberger, yıldız Rothberger, kuvvetli yıldız Rothberger özelliklerinin birbirlerine denk olduklarının gösterilebileceğine değinmiştir ve bu ispatı okuyucuya bırakmıştır. Biz ispatını aşağıda vereceğiz.

**Teorem 4.2.34** Bir parakompakt  $X$  uzayı, Rothberger ( $R$ ) uzayıdır  $\Leftrightarrow$  yıldız Rothberger ( $SR$ ) uzayıdır  $\Leftrightarrow$  kuvvetli yıldız Rothberger ( $SSR$ ) uzayıdır.

**İspat** Sonuç 4.2.22 de  $R \Rightarrow SSR \Rightarrow SR$  olduğu gösterilmişti.  $SR \Rightarrow R$  olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , parakompakt yıldız-Rothberger bir  $X$  uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Parakompaktlığın Stone-karakterizasyonu uygulanırsa her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin açık bir yıldız incesidir.  $X$  yıldız-Rothberger olduğundan her  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi

vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $W_n \in \mathcal{V}_n$  ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(W_n, \mathcal{V}_n) = X$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $W' \in W_n$  için bir  $U_{W'} \in \mathcal{U}_n$  vardır öyle ki  $St(W', \mathcal{V}_n) \subset U_{W'}$ .  $U_n' := \{U_{W'} : W' \in W_n\}$  olsun.  $(U_n')_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık altkümelerinin bir dizisi olup her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n' \in \mathcal{U}_n$  ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(W_n, \mathcal{V}_n) = X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n' \subset X$ . Buradan  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n' = X$  olur ve böylece  $X$  Rothberger'dir.

**Not 4.2.35** Teorem 4.2.28, Teorem 4.2.32 ve regüler Lindelöf uzayların parakompakt olması gerçeğinden yola çıkarak aşağıdaki sonuç elde edilir. Ayrıca herhangi bir ayırma aksiyomuna gerek kalmadan Teorem 4.2.37 deki sonucun sağlandığını gözlemleyebiliriz.

**Sonuç 4.2.36** (Kočinac, 1999a) Bir regüler kuvvetli yıldız Menger (SSM) meta-Lindelöf (meta- $L$ ) uzayı Menger ( $M$ ) uzayıdır.

**Teorem 4.2.37** (Kočinac, 1999a) Bir parakompakt  $X$  uzayı yıldız- $K$ -Menger uzayıdır ( $S_K M$ )  $\Leftrightarrow$  Menger ( $M$ ) uzayıdır.

**İspat** Menger uzayının yıldız- $K$ -Menger ( $M \Rightarrow SSM \Rightarrow S_K M$ ) olduğunu Teorem 4.2.32 den biliyoruz. Yıldız- $K$ -Menger uzayının Menger olması için uzayın parakompakt olması gerektiğini bu teoremden göstermiş olacağız.

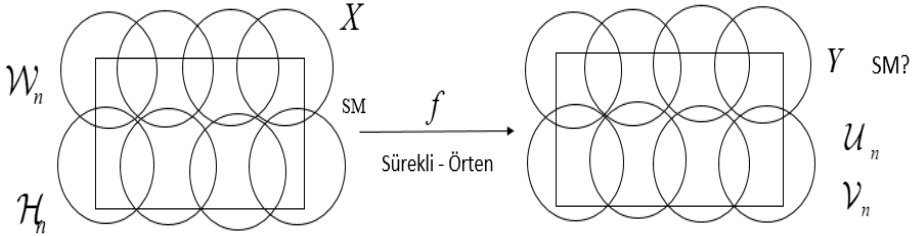
**Teorem 4.2.38** Parakompakt  $X$  uzayı yıldız- $K$ -Mengerdir  $\Leftrightarrow X$  Menger uzayıdır.

**İspat**  $X$  uzayının açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  parakompakt olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}_n$  nin açık, yerel-sonlu bir  $\mathcal{V}_n$  incesi vardır.  $X$ , yıldız- $K$ -Menger olduğundan,  $X$ 'in  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{V}_n) = X$  şartını sağlayan kompakt altkümelerinin bir dizisi  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $\mathcal{V}_n$  yerel sonlu olduğundan,  $\mathcal{V}_n$  nin  $K_n$  ile kesişen tüm elemanlarının kümesi  $\mathcal{V}_n'$  sonludur ve  $\bigcup \mathcal{V}_n' = St(K_n, \mathcal{V}_n)$ . Buna göre  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{V}_n') = X$ . Her  $V \in \mathcal{V}_n'$  için  $V \subset U_V$  ile birlikte bir  $U_V \in \mathcal{U}_n$  alalım ve  $\mathcal{W}_n = \{U_V : V \in \mathcal{V}_n'\}$  olsun. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$  nin sonlu altkümesidir. Buna göre  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{W}_n) = X$  ve böylece  $X$  Menger uzayıdır.

**Sonuç 4.2.39** Metrik uzaylar da parakompakt uzaylar olduğundan metrik uzaylarda Menger, yıldız-Menger, kuvvetli yıldız Menger, yıldız-K-Menger çakışmaktadır.

**Teorem 4.2.40** Yıldız Menger (SM) bir  $X$  uzayının sürekli ve örten bir  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü olan  $Y$  uzayı da yıldız Menger (SM) uzayıdır.

**İspat**



Şekil 16: Yıldız Menger uzayının sürekli ve örten bir  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü

$X$  bir yıldız Menger (SM) uzayı ve  $f: X \rightarrow Y$  sürekli ve örten bir dönüşüm olsun (Bkz. Şekil 16).  $Y = f(X)$  uzayının da yıldız Menger (SM) olduğunu göstereceğiz.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$  topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  nin sonlu bir alt kümesi ve  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$  olacak şekilde bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin varlığını göstermemiz gerekir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{W}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$  olarak alalım. Buna göre,  $f$  sürekli olduğundan,  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olur.  $X$  bir yıldız Menger olduğundan öyle bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n$  nin sonlu bir alt kümesi ve

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\bigcup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n) \quad (4)$$

Burada  $St(\bigcup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n) = \bigcup \{W \in \mathcal{W}_n : (\bigcup \mathcal{H}_n) \cap W \neq \emptyset\}$  olduğunu biliyoruz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{V}_n = \{f(H) : H \in \mathcal{H}_n\}$  olsun. Bu durumda,  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir alt kümesidir. (4) den,

$$\begin{aligned}
Y = f(X) &= f \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n) \right) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(f(\cup \mathcal{H}_n), f(\mathcal{W}_n)) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n).
\end{aligned}$$

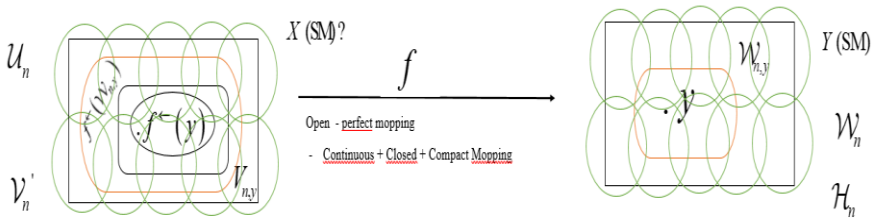
Burada,

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(St(\cup \mathcal{H}_n, \mathcal{W}_n)) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup \{f(W) \in f(\mathcal{W}_n) : f(\cup \mathcal{H}_n) \cap f(W) \neq \emptyset\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup \{U \in \mathcal{U}_n : (\cup \mathcal{V}_n) \cap U \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,  $Y$  bir yıldız Menger uzayıdır.

**Teorem 4.2.41** Eğer  $f$ , bir  $X$  uzayından yıldız-Menger (SM) bir  $Y$  uzayına tanımlanan bir açık mükemmel dönüşüm ise  $X$  de yıldız-Menger (SM) dir.

**İspat**



Şekil 17: Yıldız Menger uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun ve  $y \in Y$  olsun (Bkz. Şekil 17).  $f: X \rightarrow Y$  açık ve mükemmel bir dönüşüm olduğundan sürekli, kapalı, kompakt ve açık bir dönüşümdür.  $f$ , kompakt bir dönüşüm olduğundan,  $f^{-1}(y)$  kümesi  $X$  de kompakttır ve bu

sebeple her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir  $\mathcal{V}_{n,y}$  alt kümesi vardır.  $f^{\leftarrow}(y) \subseteq \cup \mathcal{V}_{n,y} = V_{n,y}$  olacak şekilde.  $f$  kapalı olduğundan  $y \in W_{n,y}$  ve  $f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(W_{n,y}) \subset V_{n,y}$  olacak şekilde  $W_{n,y} \subset Y$  açık kümesi vardır.

Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $W_n = \{W_{n,y} : y \in Y\}$  (ailesi)  $Y$  'nin bir açık örtüsüdür.  $Y$ , Yıldız – Menger (SM) olduğundan bir  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $H_n, W_n$  'nin sonlu alt kümesidir ve

$$Y = \cup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup H_n, W_n) \quad (5)$$

Her  $H \in H_n$  için buna karşılık gelen  $\mathcal{V}_{n,H} \subset \mathcal{U}_n$  vardır  $\mathcal{V}_n' = \{v \in \mathcal{V}_{n,H}, H \in H_n\}$  kümesi, bu durumda,  $\mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir alt kümesidir ve her  $n \in \mathbb{N}$  için. Ayrıca, (5) den

$$\begin{aligned} X &= f^{\leftarrow}(Y) = f^{\leftarrow}(\cup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{H}_n, W_n)) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup f^{\leftarrow}(\mathcal{H}_n), f^{\leftarrow}(W_n)) \\ &\Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{U}_n). \end{aligned}$$

olur. Böylece  $X$ , Yıldız-Mengerdir.

**Teorem 4.2.42** (Proposition 4.1, Bonanzinga, Cammaroto & Kocinac, 2004) Bir  $X$  parakompakt Hausdorff uzayı yıldız Hurewicz özelliğine sahip ise Hurewicz özelliğini sağlar.

**İspat**  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Parakompaktlığın Stone-karakterizasyonundan her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}_n$  nin açık bir  $\mathcal{V}_n$  yıldız incesi vardır.  $X$  yıldız-Hurewicz uzayı olduğundan, bir  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n$  nin sonlu altkümesi ve her  $x \in X$  için,  $x \in St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n)$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Her  $W \in \mathcal{W}_n$  için  $St(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W$  olacak şekilde  $\mathcal{U}_n$  'nin bir elemanı  $U_W$  olsun. Buna göre, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}$  kümesi sonlu ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{U}_n$  dir.

$$\begin{aligned} St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) &= \cup \{V \in \mathcal{V}_n : (\cup \mathcal{W}_n) \cap V \neq \emptyset\} \\ \forall W \in \mathcal{W}_n &\Rightarrow St(W, \mathcal{V}_n) \subset U_W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} St(W, \mathcal{V}_n) \\
&\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \\
\mathcal{H}_n = \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\} &\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U_W : W \in \mathcal{W}_n\}
\end{aligned}$$

ve buradan,  $\forall x \in X$  için  $x \in St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{V}_n) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ , sonlu tanesi hariç tümüne ait olur ve böylece  $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$  sonlu tanesi hariç tümüne ait, yani;  $X$ , Hurewicz uzayıdır.

**Teorem 4.2.43** (Theorem 2.6, Song, 2013c) Yıldız Hurewicz (SH) bir  $X$  uzayının sürekli ve örten bir  $f$  dönüşümü altındaki  $Y = f(X)$  görüntüsü de yıldız Hurewicz (SH) uzayıdır.

**İspat**  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü yıldız Hurewicz bir  $X$  uzayından  $Y$  uzayına tanımlanan sürekli ve örten bir dönüşüm olsun.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$  nin açık örtülerinin bir dizisi olsun Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ ,  $X$  in açık örtülerinin bir dizisidir.  $X$  uzayı yıldız Hurewicz olduğundan, bir  $(\mathcal{V}_n)'_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n'$ ,  $\mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir altkümesidir ve her  $x \in X$  için,  $x \in St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}_n' = \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n'\}$  olsun, buna göre  $\mathcal{U}_n'$  her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$  'nin sonlu altkümesidir. Her  $y \in Y$  için, sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için,  $y \in St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$  olduğunu göstermek istiyoruz.

$y \in Y$  olsun. Bu durumda  $f(x) = y$  olacak şekilde bir  $x \in X$  vardır. Böylece sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $x \in St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$  olur. Buna göre,  $f(\cup \mathcal{V}_n') = \cup \mathcal{U}_n'$ ,  $f(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$  ve

$$\begin{aligned}
St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) &= \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\} \\
x \in St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) &= \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\}
\end{aligned}$$

olacak şekilde sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} y = f(x) \in f(St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)) &= St(f(\cup \mathcal{V}_n'), f(\mathcal{V}_n)) \\ &= St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) = \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\}. \end{aligned}$$

Böylece  $Y$ , yıldız Hurewicz ( $SH$ ) uzayıdır.

**Theorem 4.2.44** (Theorem 2.8, Song, 2013c)  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü bir  $X$  uzayından yıldız Hurewicz bir  $Y$  uzayına tanımlı açık-mükemmel bir dönüşüm ise  $X$  de yıldız Hurewicz uzayıdır.

**İspat**  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi ve  $y \in Y$  olsun.  $f: X \rightarrow Y$  kompakt bir dönüşüm olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f^{-1}(y)$  kümesi  $X$  de kompakttır. O halde, her  $U \in \mathcal{U}_{n,y}$  için  $f^{-1}(y) \subseteq \cup \mathcal{U}_{n,y}$  ve  $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$  olacak şekilde  $\mathcal{U}_n$  nin sonlu bir  $\mathcal{U}_{n,y}$  alt ailesi vardır.  $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan  $f^{-1}(V_{n,y}) \subseteq \cup \{U : U \in \mathcal{U}_{n,y}\}$  olacak şekilde  $y \in Y$ 'nin açık bir  $V_{n,y}$  komşuluğu vardır. Sonlu tane açık kümenin kesişimi açık ve  $f$  açık bir dönüşüm olduğundan,

$$V_{n,y} \subseteq \cap \{f(U) : U \in \mathcal{U}_{n,y}\} \quad (6)$$

olduğu varsayılabilir. Bu durumda  $\mathcal{V}_n = \{V_{n,y} : y \in Y\}$  ailesi  $Y$ 'nin bir açık örtüsüdür.  $Y$  yıldız Hurewicz uzayı olduğundan, bir  $(\mathcal{V}_n')_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{V}_n'$ ,  $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu alt kümesidir ve her  $y \in Y$  için,  $y \in St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$  dir sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Geleneği bozmaksızın  $\mathcal{V}_n' = \{V_{n,y} : i < n'\}$  varsayalım.  $\mathcal{U}_n' = \cup_{i < n} \mathcal{U}_{n,y_i}$  olsun. Bu durumda her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n' \mathcal{U}_n$  nin sonlu altkümesidir ve

$$f^{-1}(\cup \mathcal{V}_n) \subseteq \cup \mathcal{U}_n'. \quad (7)$$

Her  $x \in X$ 'in, sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $x \in St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $x \in X$  olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} x &\in St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n) \\ \Rightarrow y = f(x) &\in f(St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)) \\ &= St(f(\cup \mathcal{U}_n'), f(\mathcal{U}_n)) = St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$$

sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $y = f(x) \in St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n)$  ise  $V_{n_{y_i}} \cap V_{n_{y'}} \neq \emptyset$  ve  $y \in V_{n_{y'}}$  olacak şekilde  $i < n'$  ve  $y' \in Y$  vardır.  $x \in f^{\leftarrow}(V_{n_{y'}}) \subseteq \cup \{U : U \in \mathcal{U}_{n_{y'}}\}$  olduğundan  $x \in U$  ile birlikte bir  $U \in (\mathcal{U}_{n_{y'}})$  seçebiliriz. Buna göre, (6) dan  $V_{n_{y'}} \subseteq f(U)$  olur. Böylece  $U \cap f^{\leftarrow}(\cup V_n') \neq \emptyset$ . Bu yüzden, sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $x \in St(f^{\leftarrow}(\cup \mathcal{V}_n'), \mathcal{U}_n)$  ve (7) denkleminde  $x \in St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$  olur ki bu da her  $x \in X$ 'in, sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $x \in St(\cup \mathcal{U}_n', \mathcal{U}_n)$ , olduğunu gösterir. Sonuç olarak  $X$  yıldız Hurewicz uzayıdır.

**Theorem 4.2.45** (Theorem 2.13, Song, 2013c) Her para-Lindelöf yıldız Hurewicz uzayı Lindelöf uzayıdır.

**İspat**  $\mathcal{U}, X$ 'in açık bir örtüsü olsun.  $X$  para-Lindelöf bir topolojik uzayı olduğundan  $\mathcal{U}$ 'nun yerel sayılabilir, açık bir  $\mathcal{V}$  incesi vardır. Her  $x \in X$  için,  $\{V \in \mathcal{V} : V_x \cap V \neq \emptyset\}$  sayılabilir ve bazı  $V \in \mathcal{V}$  için  $V_x \subseteq V$  olacak şekilde  $x$  in bir açık  $V_x$  komşuluğu vardır.  $\mathcal{V}' = \{V_x : x \in X\}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{V}', \mathcal{V}$ 'nin açık bir incesidir.  $X$  yıldız Hurewicz olduğundan, bir  $(\mathcal{V}_n')_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n' \subset \mathcal{V}'$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n'$  sonlu ve her  $x \in X$  için  $x \in St(\cup \mathcal{V}_n', \mathcal{V}_n')$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n = \{V \in \mathcal{V} : \text{bazı } V' \in \mathcal{V}_n' \text{ vardır } \ni V \cap V' \neq \emptyset\}$  olsun. O halde,  $\mathcal{V}_n$  her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}$  nin sayılabilir bir altkümesidir.  $\mathcal{W} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  olsun. Buna göre,  $\mathcal{W}, X$ 'in sayılabilir bir açık örtüsüdür. Her  $V \in \mathcal{W}$  için  $V \subseteq U_V$  olacak şekilde  $U_V \in \mathcal{U}$  seçelim. Bu durumda,  $\{U_V : V \in \mathcal{W}\}$  ailesi  $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir altörtüsü olur ki bu da  $X$  uzayının Lindelöf olduğunu gösterir.

**Not 4.2.46** (Song, 2013c) Her parakompakt topolojik uzay para-Lindelöf olduğundan aşağıdaki sonuç bir önceki teoremden elde edilir.

**Sonuç 4.2.47** (Song, 2013c) Parakompakt yıldız Hurewicz  $X$  uzayı Lindelöf uzayıdır.

$$\begin{array}{ccc}
 H & \rightarrow & M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C \rightarrow SSH & \rightarrow & SSM \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 SH & \rightarrow & SM
 \end{array}$$

Şekil 18: Örtü özellikleri arasındaki ilişki

**Teorem 4.2.48** (Theorem 2.1, Song, 2013b) Kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayının sürekli bir dönüşüm altındaki görüntüsü de kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayıdır.

**İspat**  $f: X \rightarrow Y$  bir kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH)  $X$  uzayından bir  $Y$  uzayına tanımlı sürekli ve örten bir dönüşüm olsun.  $Y$  uzayının da kuvvetli yıldız Hurewicz özelliğini sağlayan bir topolojik uzay olduğunu göstermek istiyoruz.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$  uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$  olsun. Buna göre,  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  uzayının açık örtülerinin bir dizisi olur.  $X$  kuvvetli yıldız Hurewicz uzayı olduğundan  $X$ in sonlu altkümelerinin bir  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $x \in X$  için  $x \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$  olur, sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Bu yüzden  $(f(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$ 'nin sonlu altkümelerinin bir dizisidir öyle ki her  $y \in Y$  için  $y \in St(f(A_n), \mathcal{U}_n)$ , sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.  $y \in Y$  alalım. Buna göre,  $f(x) = y$  olacak şekilde  $x \in X$  vardır. Bu yüzden,  $f(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$  iken

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) \in St(f(A_n), \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\}) \\
 St(f(A_n), \{f(U) : U \in \mathcal{V}_n\}) &= St(f(A_n), \mathcal{U}_n)
 \end{aligned}$$

sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için, olur ki böylece  $Y$  kuvvetli yıldız Hurewicz uzayıdır.

**Teorem 4.2.49** (Theorem 2.6, Song, 2013b)  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü bir  $X$  uzayından kuvvetli yıldız Hurewicz  $Y$  uzayına tanımlanan açık-kapalı (clopen), sonludan-bire (finite-to-one) sürekli bir dönüşüm

olsun. Buna göre,  $X$  uzayı da kuvvetli yıldız Hurewicz uzayıdır (veya kuvvetli yıldız Hurewicz özelliğini sağlar).

**İspat**  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü bir  $X$  uzayından kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH)  $Y$  uzayına tanımlanan açık-kapalı (clopen), sonludan-bire (finite-to-one) sürekli bir dönüşüm olsun.  $X$  uzayının da kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olduğunu göstermek istiyoruz.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi ve  $y \in Y$  olsun.  $f^{-1}(y)$  sonlu olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{n_y}$  ve her  $U \in \mathcal{U}_{n_y}$  için  $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$  olacak şekilde  $\mathcal{U}_n$ 'nin bir  $\mathcal{U}_{n_y}$  sonlu alt kolleksiyonu vardır.  $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan  $f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \bigcup \{U: U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$  olacak şekilde  $y \in Y$ 'nin bir  $V_{n_y}$  açık komşuluğu vardır.  $f$  açık bir dönüşüm olduğundan

$$V_{n_y} \subseteq \bigcap \{f(U): U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$$

olduğunu kabul edebiliriz. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $y \in Y$  için bu şekilde  $V_{n_y}$  açık kümeleri alarak  $Y$ nin  $\mathcal{V}_n = \{V_{n_y}: y \in Y\}$  bir açık örtüsü elde edilir. Bu yüzden  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$ 'nin açık örtülerinin bir dizisidir. Böylece,  $Y$  kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olduğundan  $Y$  nin sonlu alt kümelerinin bir  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $y \in Y$  için  $y \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$ , sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için,  $f$  sonludan-bire (finite-to-one) tanımlanan bir dönüşüm olduğundan  $Y$ 'deki her bir noktanın ters görüntüsü  $X$ de sonlu bir kümeye denk gelecektir. O halde  $(f^{-1}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $X$ in sonlu alt kümelerinin bir dizisidir. Her  $x \in X$  için  $x \in St(f^{-1}(A_n), \mathcal{U}_n)$ , sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.  $x \in X$  olsun, buna göre  $f(x) \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$ , sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.  $f(x) \in St(A_n, \mathcal{V}_n)$  ise  $f(x) \in V_{n_y}$  ve  $V_{n_y} \cap A_n \neq \emptyset$  olacak şekilde  $y \in Y$  vardır.  $x \in f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{n_y}$  olduğundan,  $x \in U$  ile birlikte  $U \in \mathcal{U}_{n_y}$  seçebiliriz. Buna göre, (1) denkleminde  $V_{n_y} \subseteq f(U)$  olur. Böylece  $U \cap f^{-1}(A_n) \neq \emptyset$  ve sonuç olarak  $x \in St(f^{-1}(A_n), \mathcal{U}_n)$  olur.

$$f(x) \in St(A_n, \mathcal{V}_n) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_n: A_n \cap V \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

$\Rightarrow x \in St(f^{-1}(A_n), f^{-1}(\mathcal{V}_n)) = St(f^{-1}(A_n), \mathcal{U}_n)$  ( $f^{-1}(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$ ) sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için, ve böylece  $X$  kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayıdır.

**Teorem 4.2.50** (Theorem 2.11, Song, 2013b) Her meta-Lindelöf strongly star-Hurewicz (SSH) uzayı Lindelöf (L) uzayıdır.

**İspat**  $\mathcal{U}$ ,  $X$  in açık bir örtüsü olsun.  $X$  meta-Lindelöf olduğundan,  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün nokta-sayılabılır açık bir  $\mathcal{V}$  incesi vardır.  $X$  uzayı kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) olduğundan,  $X$  in sonlu altkümelerinin bir  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $x \in X$  için  $x \in St(A_n, \mathcal{V}) = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : A_n \cap V \neq \emptyset\}$ , sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n = \{V \in \mathcal{V} : V \cap A_n \neq \emptyset\}$  olsun. Buna göre,  $\mathcal{V}_n, \mathcal{V}$  örtüsünün sayılabilir bir alt kümesidir.  $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{W}$ ,  $X$  uzayının sayılabilir, açık bir örtüsüdür. Her  $V \in \mathcal{W}$  için  $V \subseteq U_V$  olacak şekilde  $U_V \in \mathcal{U}$  seçelim. Buna göre,  $\{U_V : V \in \mathcal{W}\}$  ailesi  $\mathcal{U}$  örtüsünün sayılabilir bir altörtüsü olur.

$$\mathcal{W} = St(A_n, \mathcal{V}) = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap A_n \neq \emptyset\} = \bigcup \mathcal{V}_n$$

$$\forall V \in \mathcal{W}, U_V \in \mathcal{U} \ni V \subseteq U_V$$

olduğundan  $\mathcal{H} = \{U_V : V \in \mathcal{W}\} \subset \mathcal{U}$  olur ve böylece  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{U}$  'nun sayılabilir bir altörtüsü olur. Böylece,  $X$  in her  $\mathcal{U}$  açıkörtüsünün sayılabilir bir  $\mathcal{H}$  altörtüsü olduğundan  $X$  uzayının Lindelöf uzayı olduğu kanıtlanmış olur.

**Not 4.2.51** Her para-Lindelöf uzayı meta-Lindelöf olduğundan aşağıdaki sonuç bir önceki teoremden elde edilir.

**Sonuç 4.2.52** (Corollary 2.12, Song, 2013b) Bir para-Lindelöf kuvvetli yıldız Hurewicz  $X$  uzayı Lindelöf uzayıdır.

**Not 4.2.53** Her Lindelöf uzayı meta-Lindelöf ve para-Lindelöf olduğundan aşağıdaki sonuçlar yukarıdaki teoremden elde edilir.

**Sonuç 4.2.54** (Corollary 2.13, Song, 2013b)  $X$  kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olsun. Buna göre,  $X$  meta- Lindelöf  $\Leftrightarrow X$  Lindelöf (L).

**Sonuç 4.2.55** (Corollary 2.14, Song, 2013b)  $X$  kuvvetli yıldız Hurewicz (SSH) uzayı olsun. Buna göre,  $X$  para-Lindelöf  $\Leftrightarrow X$  is Lindelöf ( $L$ ).

**Teorem 4.2.56** (Theorem 2.13, Song, 2013a)  $f: X \rightarrow Y$  bir  $X$  uzayından kuvvetli yıldız Menger (SSM) bir  $Y$  uzayına tanımlanan açık, kapalı, sürekli, sonludan-bire dönüşüm ise  $X$  uzayı da kuvvetli yıldız Menger uzayıdır (SSM).

**İspat**  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi ve  $y \in Y$  olsun.  $f^{-1}(y)$  sonlu olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için her  $U \in \mathcal{U}_{n_y}$  için  $f^{-1}(y) \subseteq \cup \mathcal{U}_{n_y}$  and  $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$  olacak şekilde  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu  $\mathcal{U}_{n_y}$  alt kolleksiyonu vardır.  $f$  kapalı olduğundan  $f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \cup \{U: U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$  olacak şekilde  $Y$  de  $y$ 'nin bir  $V_{n_y}$  açık komşuluğu vardır.  $f$  açık olduğundan

$$V_{n_y} \subseteq \cap \{f(U): U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$$

olacak şekilde varsayılabilir. Her  $y \in Y$  için bu şekildeki  $V_{n_y}$  açık kümelerini alarak, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $Y$  nin bir  $\mathcal{V}_n = \{V_{n_y}: y \in Y\}$  açık örtüsü elde edilir.  $Y$  kuvvetli yıldız Menger olduğundan  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$  nin açık örtülerinin bir dizisi olur, böylece  $\cup_{n \in \mathbb{N}} St(K_n, \mathcal{V}_n) = Y$  olacak şekilde  $Y$ 'nin sonlu altkümelerinin bir  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır.  $f$  sonludan-bire (finite-to-one) dönüşüm olduğundan  $(f^{-1}(K_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  'in sonlu altkümelerinin bir dizisidir.  $\{St(f^{-1}(K_n), \mathcal{U}_n): n \in \mathbb{N}\}$  ailesinin  $X$  in bir açık örtüsü olduğunu göstereceğiz.  $x \in X$  olsun. Buna göre,  $f(x) = V_{n_y}$  ve  $V_{n_y} \cap K_n \neq \emptyset$  olacak şekilde  $n \in \mathbb{N}$  ve  $y \in Y$  vardır.  $x \in f^{-1}(V_{n_y}) \subseteq \cup \{U: U \in \mathcal{U}_{n_y}\}$  olduğundan  $x \in U$  ile birlikte  $U \in \mathcal{U}_{n_y}$  seçebiliriz. (1) den  $V_{n_y} \subseteq f(U)$  ve böylece  $U \cap f^{-1}(K_n) \neq \emptyset$  olur ki bu da  $x \in St(f^{-1}(K_n), \mathcal{U}_n)$  olduğunu gösterir. Sonuç olarak,  $\{St(f^{-1}(K_n), \mathcal{U}_n): n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $X$  in bir açık örtüsüdür ve bu da  $X$  uzayının kuvvetli yıldız Menger olduğunu gösterir.

## 5. Seçme Prensiplerinin Zayıf Formları

Şükran KONCA  
Yücel AYDIN

Bu kısımda klasik seçme prensiplerinin ve yıldız seçme prensiplerinin zayıf formları incelenmiştir. Makalelerde okuyucuya bırakılan veya ispatı kolayca görülebilir denilen bazı teoremlerin ispatları da burada yapılmıştır. Referansı verilmemiş ispatlar yukarıda bahsi geçen ispatlardır.

### 5.1 Klasik Seçme Prensiplerinin Zayıf Formları

**Tanım 5.1.1** (Kocev, 2009; Kočinac, 1999b; Kočinac, 2016) Bir  $X$  topolojik uzayına hemen hemen (almost) Menger denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesi ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\} = X$ .

**Tanım 5.1.2** (Pansera, 2012) Bir  $X$  topolojik uzayına zayıf (weakly) Menger (wM) denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir ve  $\bigcup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  kümesi  $X$ 'de yoğundur. Yani,  $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$ .

**Tanım 5.1.3** (Kočinac, 1999b; Kočinac, 2016; Kočinac, 2019) Bir  $X$  topolojik uzayına hemen hemen (almost) Rothberger denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = X$ .

**Tanım 5.1.4** (Pansera, 2012) Bir  $X$  topolojik uzayına zayıf (weakly) Rothberger denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}$ .

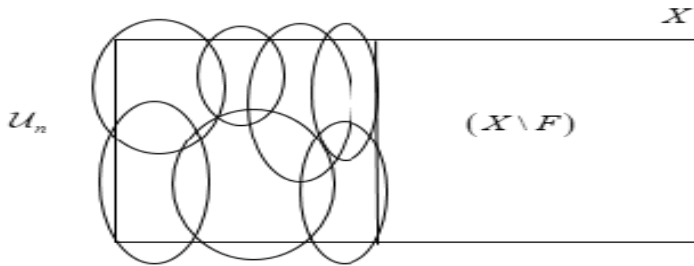
**Tanım 5.1.5** (Song & Li, 2013) Bir  $X$  topolojik uzayına hemen hemen (almost) Hurewicz denir eğer  $X$  'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir alt kümesidir ve her  $x \in X$  için,  $x \in \overline{\mathcal{V}_n}$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Tanım 5.1.6** (Kočinac, 2001; Sakai, 2013) Bir  $X$  topolojik uzayına zayıf (weakly) Hurewicz denir (Kočinac anlamında) eğer  $X$  'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $Y \subset X$  yoğun alt kümesi ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  sonlu alt aileleri vardır öyle ki  $Y$  'nin her noktası  $\cup \mathcal{V}_n$  tarafından kapsanmaktadır sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$ .

**Tanım 5.1.7** (Sakai, 2013) Bir  $X$  topolojik uzayına zayıf (weakly) Hurewicz denir (Sakai anlamında) eğer  $X$  'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n, (\forall n \in \mathbb{N})$  sonlu alt kümeleri vardır öyle ki her sonsuz  $I \subset \mathbb{N}$  alt kümesi için  $\cup \{\cup \mathcal{V}_n : n \in I\}$  kümesi sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için  $X$  'de yoğundur. Yani, her boştan farklı  $U \subset X$  açık kümesi için  $U \cap (\cup \mathcal{V}_n) \neq \emptyset$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Teorem 5.1.8** (Koccev, 2015) Hemen hemen (almost) Menger uzayının her kapalı-açık alt kümesi hemen hemen (almost) Mengerdir.

**İspat**



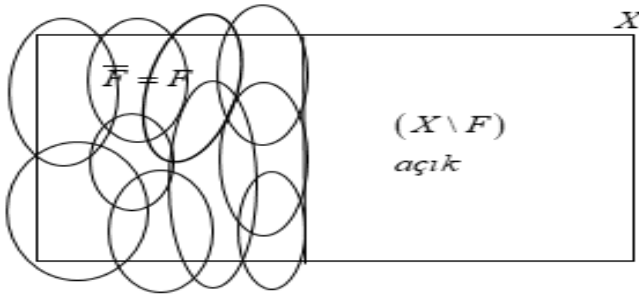
$F$  , hem açık hem kapalı

Şekil 19:  $aM$  uzayının her açık-kapalı alt kümesi  $aM$

$X$  hemen hemen Menger uzayı ve  $F$ 'de  $X$ 'in hem kapalı hem açık alt kümesi olsun ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $F$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 19).  $F$  kapalı olduğundan  $(X \setminus F)$  ise açıktır. Buna göre,  $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n \cup (X \setminus F)$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $X$ 'in bir açık örtüsüdür.  $X$  hemen hemen Menger uzayı olduğu için  $\mathcal{V}_n$ 'nin  $\mathcal{V}_n'$  sonlu alt kümeleri,  $\forall n \in \mathbb{N}$  vardır. Böylece  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n'\}$ .  $(X \setminus F)$  hem kapalı, hem açık olduğundan  $\overline{X \setminus F} = X \setminus F$  ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n', V \neq X \setminus F\}$ ,  $F$ 'yi örter.

**Teorem 5.1.9** (Kocev, 2015) Zayıf Menger bir  $X$  uzayının her kapalı-regüler alt kümesi de zayıf Mengerdir.

**İspat**



Şekil 20: wM uzayın her kapalı-regüler alt kümesi  $W_m$

Zayıf Menger  $X$  uzayının regüler ve kapalı bir alt kümesi  $F$  ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ise  $F$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 20). Buna göre, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n \cup (X \setminus F)$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü olur.  $X$  zayıf Menger olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$ 'nin  $\mathcal{V}_n'$  sonlu alt kümeleri vardır, böylece  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'$ ,  $X$ 'de yoğundur yani  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'} = X$ .  $\mathcal{V}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{V : V \in \mathcal{V}_n', V \neq X \setminus F\}$  alalım. Buna göre,  $X = \overline{\mathcal{V}'} \cup (X \setminus F)$ .  $F = \overline{\text{int}(F)} = \overline{\overset{o}{(F)}}$  olduğu için  $\overset{o}{F} \cap \overline{(X \setminus F)} = \emptyset$  ve böylece  $\overset{o}{F} \subset \overline{\mathcal{V}'}$  ve  $F = \overline{\overset{o}{F}} \subset \overline{\mathcal{V}'}$ .

**Tanım 5.1.10** (Babinkostova, Pansera & Scheepers, 2012) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sayılabilir  $\mathcal{V}$  alt

örtüsü  $\cup \overline{\mathcal{V}} = \cup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} = X$  olacak şekilde varsa hemen hemen (almost) Lindelöf ( $aL$ ) uzayı denir.

**Tanım 5.1.11** (Babinkostova, Pansera & Scheepers, 2012) Bir  $X$  topolojik uzayına (weakly) Lindelöf ( $wL$ ) denir eğer  $X$ 'in her  $\mathcal{U}$  açık örtüsünün sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  alt örtüsü vardır öyle ki  $\cup \mathcal{V}$ ,  $X$ 'de yoğun ise yani  $\overline{\cup \mathcal{V}} = X$  ise.

**Tanım 5.1.12** (Gillman & Henriksen, 1954) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in sayılabilir çokluktaki alt kümelerinin keşişimi açık (veya sayılabilir çokluktaki kapalı kümelerinin birleşimi  $X$ 'de kapalı) ise  $P$  –uzayı denir.

**Teorem 5.1.13** (Kocev, 2015) Hemen hemen Lindelöf ( $aL$ ) her  $P$  –uzayı hemen hemen Menger ( $aM$ ) dir.

**İspat**  $X$  uzayı hemen hemen (almost) Lindelöf ( $aL$ ) bir  $P$  –uzayı ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ise  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $X$  bir  $P$  –uzayı olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu birleşimlerinin kapalı olduğunu varsayalım.  $\mathcal{U} = \{\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n : U_n \in \mathcal{U}_n\}$  olarak alalım. Buna göre  $\mathcal{U}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsüdür.  $X$  hemen hemen Lindelöf uzayı olduğundan,  $\mathcal{U}$ 'nun sayılabilir bir  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} = X$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $U_k^n \in \mathcal{U}_k$  iken  $V_n = \cap_{k \in \mathbb{N}} U_k^n$  yazalım. Bu durumda, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $V_n \subset U_n^n$  olduğundan  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n^n} = X$ 'dir. Bu da  $X$ 'in hemen hemen Menger olduğunu gösterir.

**Sonuç 5.1.14** (Kocev, 2015)  $P$  –uzaylarında hemen hemen Lindelöf ( $aL$ ) ve hemen hemen Menger ( $aM$ ) özellikleri birbirine denktir ( $aM \Rightarrow aL$  ve Teorem 5.1.13 den).

**Not 5.1.15** (Babinkostova, Pansera & Scheepers, 2013) te zayıf Lindelöf ( $wL$ )  $P$  – uzayının zayıf Menger ( $wM$ ) olduğu gösterilmiştir.  $wM \Rightarrow wL$  olduklarından  $P$  – uzaylarında bu iki özellik birbirine denktir diyebiliriz.

**Teorem 5.1.16** (Kocev, 2015) Zayıf Menger ( $wM$ ) her  $P$  –uzayı hemen hemen Menger ( $aM$ ) dir.

**İspat**  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $X$  zayıf Menger ( $wM$ ) olduğundan bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  sonlu ve  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ ,  $X$  'de yoğundur, yani;  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n} = X$ .  $X$ ,  $P$ -uzayı olduğundan,  $X$  'in sayılabilir çokluktaki açık alt kümelerinin keşişimi açık olduğundan her sayılabilir kapalı kümenin birleşimi de kapalı olur. Böylece,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$ ,  $X$  'in kapalı alt kümesidir.  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  kümesi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$  kümesini içeren en küçük kapalı küme olduğundan  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$  olur. Buna göre,

$$X \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\} \subseteq X$$

ve buradan  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\} = X$  olur ki bu da  $X$  uzayının hemen hemen Menger ( $aM$ ) olması anlamına gelir.

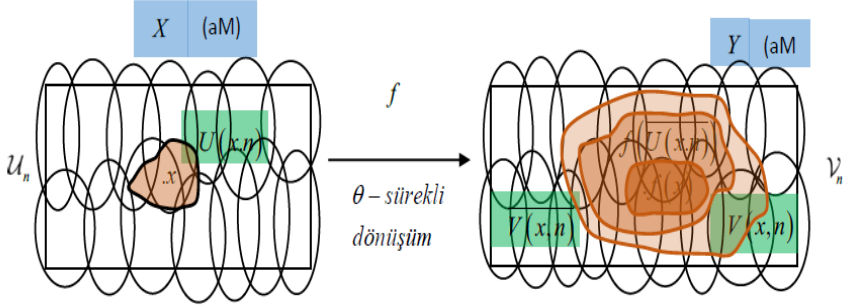
**Sonuç 5.1.17** (Kocev, 2015)  $P$  -uzaylarında hemen hemen Lindelöf ( $aL$ ) ve hemen hemen Menger ( $aM$ ) özellikleri birbirine denktir ( $aM \Rightarrow aL$  ve Teorem 5.1.13 den).

**Sonuç 5.1.18** (Kocev, 2015)  $X$  regüler  $P$  -uzayı olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

- 1)  $X$  Menger ( $M$ ) dir.
- 2)  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) dir.
- 3)  $X$  zayıf Menger ( $wM$ ) dir.
- 4)  $X$  Lindelöf ( $L$ ) tür.
- 5)  $X$  hemen hemen Lindelöf ( $aL$ ) tür.
- 6)  $X$  zayıf Lindelöf ( $wL$ ) tür.

**Teorem 5.1.19** (Koçınac, 2016) Hemen hemen Menger bir  $X$  ( $aM$ ) uzayının  $\theta$  –sürekli  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü  $Y = f(X)$  de hemen hemen Menger ( $aM$ ) dir.

## İspat



Şekil 21:  $aM$  uzayının  $\theta$  -sürekli dönüşüm altındaki görüntüsü  $aM$

$X$  bir hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayı,  $f = X \rightarrow Y$  dönüşümü  $\theta$  -sürekli ve  $Y = f(X)$  ise  $X$  uzayının  $f$  altındaki görüntüsü olsun (Bkz. Şekil 21).  $Y$  'nin de hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayı olduğunu göstermek istiyoruz.  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$  'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $x \in X$  seçelim. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f(x)$  'i içeren  $V(x, n) \in \mathcal{V}_n$  kümesi vardır.  $f, \theta$  -sürekli olduğundan  $X$  uzayında  $x$  noktasını içeren bir  $U(x, n)$  açık kümesi vardır öyle ki  $f(\overline{U(x, n)}) \subset \overline{V(x, n)}$ . Bu yüzden her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n = \{U(x, n): x \in X\}$  kümesi  $X$  'in bir açık örtüsüdür.  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) olduğundan sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{H}_n = \{U(x_i, n): i \leq k_n\}$ ,  $\mathcal{U}_n$  'nin bir alt kümesidir ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{H}: H \in \mathcal{H}_n\}$ . Her  $U(x_i, n) \in \mathcal{H}_n$ , bir  $W(x_i, n) \in \mathcal{V}_n$  kümesini belirler öyle ki  $f(\overline{U(x_i, n)}) \subset \overline{W(x_i, n)}$  ve  $\mathcal{W}_n = \{W(x_i, n): i \leq k_n\}$  kuralım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  'nin sonlu altkümelerinin bir  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini elde ederiz, öyle ki

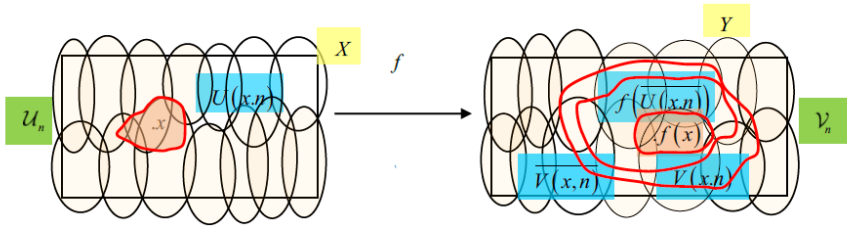
$$\begin{aligned} Y = f(X) &= f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{H}: H \in \mathcal{H}_n\}\right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{W}: W \in \mathcal{W}_n\} \subset Y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_n\}$$

olur ve böylece  $Y$ , hemen hemen Menger ( $aM$ ) dir.

**Teorem 5.1.20** (Kočinac, 2016) Hemen hemen Menger ( $aM$ ) Xuzayının kuvvetli  $\theta$  –süreklı dönüşüm altındaki  $Y$  görüntüsü bir Menger ( $M$ ) uzayıdır.

### İspat



Şekil 22:  $aM$  uzayının kuvvetli  $\theta$  -süreklı dönüşüm altındaki görüntüsü  $M$

$Y$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun.  $x \in X$  alalım (Bkz. Şekil 22). Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f(x)$ 'i içeren  $V_{(x,n)} \in \mathcal{V}_n$  kümesi vardır.  $f$  kuvvetli  $\theta$  –süreklı dönüşüm olduğundan  $X$ 'de  $x$  elemanını içeren bir  $U_{(x,n)}$  açık kümesi vardır öyle ki  $f(\overline{U_{(x,n)}}) \subset V_{(x,n)}$ . Bu yüzden, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n = \{U_{(x,n)} : x \in X\}$  kümesi  $X$  'in bir açık örtüsüdür.  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}_n\}$  olacak şekilde sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. Her  $F \in \mathcal{F}_n$  bir  $W_F \in \mathcal{V}_n$  kümesi belirler  $f(\overline{F}) \subset W_F$  olacak şekilde.  $\mathcal{W}_n = \{W_F : F \in \mathcal{F}_n\}$  kümesini oluşturalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$ 'nin sonlu alt kümelerinin bir  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini elde ederiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}_n\} \Rightarrow Y = f(X) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup f(\overline{F} : F \in \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

$$= \mathcal{W}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$$

olur ve buradan  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n = Y$ . Böylece  $Y$ , bir Menger uzayıdır.

**Not 5.1.21** Her Menger uzayı hemen hemen Menger uzayı olduğundan Teorem 5.1.20'den hemen hemen Menger bir  $X$  uzayının kuvvetli  $\theta$  – sürekli  $f$  dönüşümü altındaki  $Y$  görüntüsü de hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayıdır diyebiliriz. Bu gerçekten yola çıkarak ayrıca her kuvvetli  $\theta$  – sürekli dönüşüm  $\theta$  – sürekli olduğundan Teorem 5.1.19'daki sonuca dolaylı bir bakış açısıyla da ulaşmak mümkündür.

**Teorem 5.1.22** (Kočinac, 2016) Hemen hemen Rothberger ( $aR$ ) (hemen hemen Hurewicz ( $aH$ ))  $X$  uzayının kuvvetli  $\theta$  – sürekli dönüşüm altındaki  $Y$  görüntüsü bir Rothberger ( $R$ ) (Hurewicz ( $H$ )) uzayıdır.

**Not 5.1.23** Bir sonraki teorem hemen hemen Menger tanımında açık kümelerin yerine regüler-açık kümelerin alınabileceğini gösterir.

**Tanım 5.1.24** (Kocev, 2009) Bir  $X$  topolojik uzayının bir  $B$  alt kümesine eğer

$$B = (\overline{B})^\circ \left( B = \overline{\overline{B}} \right)$$

ise regüler açık (regüler kapalı) denir.

**Teorem 5.1.25** (Kocev, 2009; Teorem 2.2) Bir  $X$  topolojik uzayına hemen hemen Menger ( $aM$ ) denir  $\Leftrightarrow X$ 'in regüler açık kümelerle oluşturulan örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir ve  $\mathcal{V}_n' = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$  olmak üzere  $\bigcup \{\mathcal{V}_n' : n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $X$  in açık bir örtüsüdür.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ):  $X$  topolojik uzayı hemen hemen Menger ( $aM$ ) olsun.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ise regüler açık kümelerle oluşturulan  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her regüler-açık küme açık olduğundan  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  açık örtülerinin bir dizisidir.  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ )

olduğundan, varsayımdan, bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesi ve  $\cup \{\mathcal{V}_n' : n \in \mathbb{N}\}, X$ 'in bir açık örtüsüdür  $\mathcal{V}_n' = \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$  olmak üzere, yani;

$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n\}.$$

$(\Leftarrow)$ :  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}, X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\mathcal{U}'_n = \left\{ \bar{\bar{U}} : U \in \mathcal{U}_n \right\}$  ile tanımlanan bir dizi olsun. Bu durumda,  $\mathcal{U}'_n,$

$X$ 'in regüler açık kümelerle oluşturulan bir örtüsüdür. Her  $\bar{\bar{U}}$  kümesi

regüler-açık kümedir ve  $U$  açık olduğundan  $U \subset \bar{\bar{U}}$ 'dir (Engelking, 1989). Buna göre, bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}'_n$ 'nün sonlu alt kümesi ve  $\cup \{\mathcal{V}_n' : n \in \mathbb{N}\}, \mathcal{V}_n' = \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$  olmak üzere  $X$ 'in bir açık örtüsüdür. Varsayımdan, her  $n \in \mathbb{N}$  için ve her  $V \in \mathcal{V}_n$

için  $\bar{V} = \left( \bar{\bar{U}}_V \right)$  olacak şekilde bir  $U_V \in \mathcal{U}_n$  vardır.  $U_V$  açık bir küme olduğundan  $\bar{\bar{U}}_V$  regüler kapalı kümedir (bkz. Engelking, 1989).

Bunun için,  $\bar{\bar{U}}_V = \left( \bar{\bar{U}}_V \right)$  olur. Böylece  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{U_V : V \in \mathcal{V}_n\} = X$  olduğundan  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayıdır.

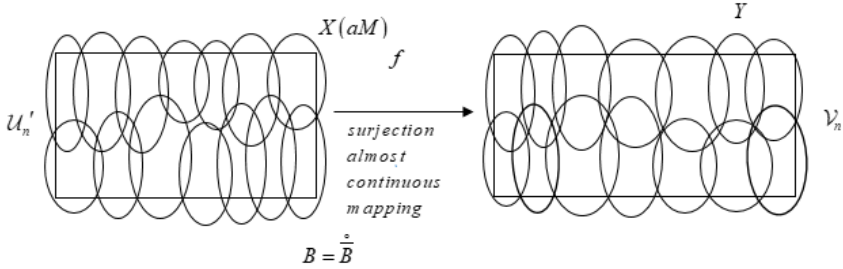
**Tanım 5.1.26** (Kocev, 2009; Tanım 2.2)  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzaylar olmak üzere eğer her açık-regüler  $B \subset Y$  kümesinin ters görüntüsü  $f^{-1}(B)$   $X$ 'de açık ise  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne hemen hemen (almost) süreklidir denir.

**Tanım 5.1.27** (Kocev, 2009)  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayı ve  $Y$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $f: X \rightarrow Y$  hemen hemen sürekli ve örten bir dönüşüm ise  $Y$  de hemen hemen Menger uzayı ( $aM$ ) dır.

### İspat

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}},$  regüler-açık kümelerle oluşturulan,  $Y$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}'_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$  olsun. Buna göre,  $f$  hemen hemen sürekli, örten bir açık dönüşüm

olduğundan  $(\mathcal{U}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olur. (Bkz. Şekil 23).



Şekil 23:  $aM$  uzayının hemen hemen sürekli-örten  $f$  altındaki görüntüsü  $aM$

$X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) olduğundan, bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}'_n, \mathcal{U}'_n$ 'nin sonlu alt kümesi ve  $\cup \{\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N}\}$   $X$ 'in bir örtüsüdür, yani;  $\mathcal{V}'_n = \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$  için

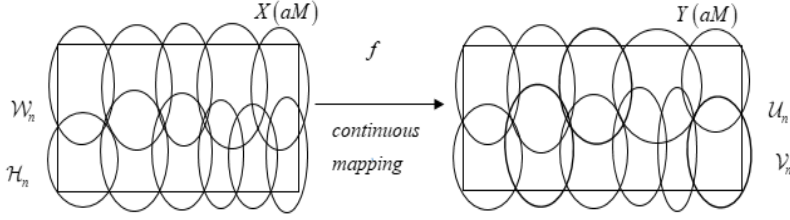
$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_n\}.$$

Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $V \in \mathcal{V}_n$  için bir  $U_V \in \mathcal{U}_n$ ,  $V = f^{-1}(U_V)$  açık olacak şekilde seçebiliriz.  $\mathcal{W}_n = \{\bar{U}_V : V \in \mathcal{V}_n\}$  olsun.  $\cup \{\mathcal{W}_n : n \in \mathbb{N}\}$  ailesinin  $Y$  için bir açık örtü olduğunu göstereceğiz.  $y = f(x) \in Y$  ise bu durumda  $x \in \bar{V}$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  ve  $V \in \mathcal{V}_n$  vardır.  $V = f^{-1}(U_V)$  olduğundan  $x \in \bar{f^{-1}(U_V)} \subset f^{-1}(\bar{U}_V)$  olur. Böylece  $y = f(x) \in \bar{U}_V \in \mathcal{W}_n$ .

**Not 5.1.28** Hemen hemen Menger ( $aM$ ) ve zayıf Menger ( $wM$ ) uzaylarının sürekli dönüşüm altındaki görüntülerinin sırasıyla hemen hemen Menger ve zayıf Menger olduklarını Kocev (Kocev, 2009) ve Song (Song, 2013a) makalelerinde bahsetmiş ve ispatları okuyucuya bırakmışlardır. Biz burada bu kolayca görülebileceği söylenen ispatları yapacağız.

**Teorem 5.1.29** Hemen hemen Menger ( $aM$ )  $X$  uzayının sürekli ve örten  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü  $Y = f(X)$  de hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayıdır.

## İspat



Şekil 24:  $aM$  uzayının sürekli-örten  $f$  altındaki görüntüsü  $aM$

$f: X \rightarrow Y$  sürekli ve örten bir dönüşüm olsun ve  $X$  hemen hemen Menger olsun.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$  topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 24). Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n = \{f^{-1}(U): U \in \mathcal{U}_n\}$  olarak seçelim.  $f$  sürekli bir dönüşüm olduğundan  $Y$ 'deki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$ 'de açık olacağından  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olur.  $X$  uzayı hemen hemen Menger ( $aM$ ) olduğundan bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n$ ,  $\mathcal{W}_n$ 'nin sonlu alt kümesi ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\bar{H}: H \in \mathcal{H}_n\}$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{V}_n = \{f(H): H \in \mathcal{H}_n\}$  olsun. Bu durumda,  $\mathcal{V}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir.  $Y = f(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\bar{V}: V \in \mathcal{V}_n\}$  olduğunu göstereceğiz.  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\bar{H}: H \in \mathcal{H}_n\}$  denkleminde,

$$\begin{aligned} Y &= f(X) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\bar{H}: H \in \mathcal{H}_n\}\right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{f(\bar{H}): f(H) \in f(\mathcal{H}_n)\} \\ &\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ff^{-1}(\bar{V}): ff^{-1}(\bar{V}) \in ff^{-1}(\mathcal{V}_n)\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\bar{V}: V \in \mathcal{V}_n\} \end{aligned}$$

olur.  $\mathcal{H}_n = f^{-1}(\mathcal{V}_n)$ ,  $H = f^{-1}(V)$  ve  $f$  sürekli olduğundan,  $\bar{H} = \overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$  bağıntısı sağlanır. Ayrıca,

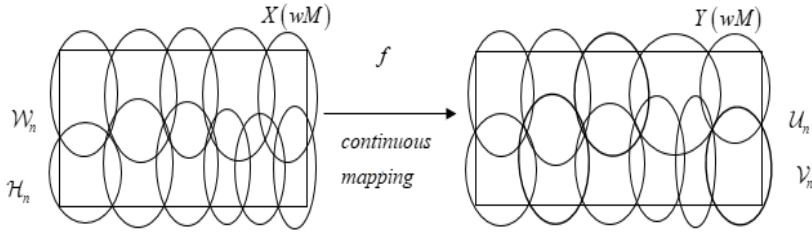
$$\mathcal{H}_n \subset \overline{\mathcal{H}_n} = \overline{f^{-1}(\mathcal{V}_n)} \subset f^{-1}(\bar{\mathcal{V}_n}).$$

$f^{-1}(\overline{\mathcal{V}_n})$  kapalı ve  $f$  sürekli olduğundan ve  $\overline{f^{-1}(\mathcal{V}_n)}$  kümesi  $\mathcal{H}_n$  'ni içeren en küçük kapalı kümedir.  $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\} \subseteq Y$  ve buradan  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_n\}$  olur. Böylece  $Y$  hemen hemen Menger uzayıdır.

**Teorem 5.1.30** Zayıf Menger ( $wM$ ) bir  $X$  uzayının sürekli ve örten bir  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü  $Y = f(X)$  de zayıf Menger ( $wM$ ) dir.

### İspat

$f: X \rightarrow Y$  sürekli ve örten bir dönüşüm ve  $X$  topolojik uzayı da zayıf Menger olsun.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun. (Bkz. Şekil 26). Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$  seçelim.



Şekil 25:  $wM$  uzayın sürekli-örten  $f$  altındaki görüntüsü  $wM$

$f$  sürekli olduğundan  $Y$ 'deki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$ 'de açık olacağından  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  uzayının açık örtülerinin bir dizisi olur.  $X$  topolojik uzayı zayıf Menger ( $wM$ ) olduğundan öyle bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{H}_n$ ,  $\mathcal{W}_n$ 'nin sonlu alt kümesi ve  $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}$  olur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{V}_n = \{f(H) : H \in \mathcal{H}_n\}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{V}_n$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu alt kümesidir.  $Y = f(X) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olduğunu göstereceğiz.  $f$  sürekli olduğundan, her  $A \subset X$  için  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  olduğunu biliyoruz. Ayrıca,  $f^{-1}(\mathcal{V}_n) = \mathcal{H}_n$  olacağından,  $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}$  denkleminde

$$Y = f(X) = f\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}\right) \subset \overline{f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right)} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f f^{-1}(\mathcal{V}_n)} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}.$$

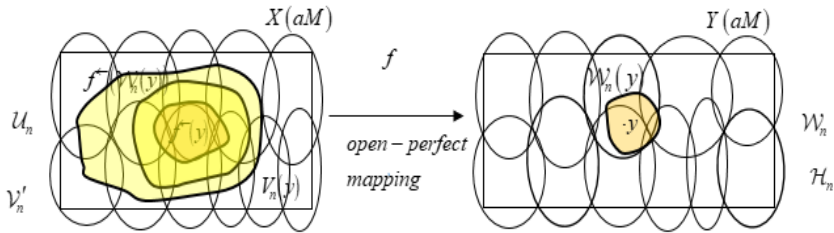
Böylece  $Y$  zayıf Menger dir.

**Not 5.1.31** Teorem 5.1.29 ve Teorem 5.1.30 da elde edilen sonuçlara benzer şekilde hemen hemen Rothberger ( $aR$ ) ve zayıf Rothberger ( $wR$ ) için de ispatı yapılabilir.

**Not 5.1.32** Teorem 5.1.29 ve Teorem 5.1.30 da hemen hemen Menger ve zayıf Menger uzaylarının sürekli dönüşüm altında korunduğunu gördük. Teorem 5.1.33 ve Teorem 5.1.34 de ise sırasıyla hemen hemen Menger ve zayıf Menger uzaylarının açık mükemmel bir dönüşüm altındaki ters görüntülerinin sırasıyla hemen hemen Menger ve zayıf Menger olduklarını gösterdik.

**Teorem 5.1.33**  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzaylar olsun. Eğer  $f$  bir  $X$  uzayından hemen hemen Menger ( $aM$ ) bir  $Y$  uzayına tanımlanan bir açık-mükemmel dönüşüm ise  $X$  uzayı da hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayıdır.

**İspat**



Şekil 26:  $aM$  uzayının açık-mükemmel  $f$  altındaki ters görüntüsü  
 $aM$

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 26). Her  $y \in Y$  için  $f^{-1}(y)$ ,  $X$ 'de kompakt bir kümedir ve böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{V}_n(y) = V_n(y)$  olacak şekilde  $f^{-1}(y)$  'yi örten  $\mathcal{V}_n(y) \subset \mathcal{U}_n$  sonlu alt ailesi vardır.  $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_n(y)) \subset V_n(y) = \bigcup \mathcal{V}_n(y)$  ve  $y \in W_n(y)$  olacak şekilde bir  $W_n(y) \subset Y$  açık kümesi vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{W}_n = \{W_n(y) : y \in Y\}$  kümesi  $Y$ 'nin açık örtüsüdür. Böylece  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$ 'nin açık örtülerinin bir dizisidir.  $Y$ uzayı hemen hemen Menger ( $aM$ ) olduğundan bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in$

$\mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n$ ,  $\mathcal{W}_n$  'nin sonlu alt kümesidir ve  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{H} : H \in \mathcal{H}_n \}$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $H \in \mathcal{H}_n$  için karşılık gelen sonlu  $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}_n$  alt kümesi  $f^{-1}(H) \subset \mathcal{U}_H$  olacak şekilde vardır.  $\mathcal{V}_n' = \{U \in \mathcal{U}_n : U \in \mathcal{U}_H, H \in \mathcal{H}_n\}$  olsun.

Bu durumda  $\mathcal{V}_n'$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}_n$  'nin sonlu bir alt kümesidir.  $f$  açık bir dönüşüm olduğundan  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{H} : H \in \mathcal{H}_n \}$  denkleminde

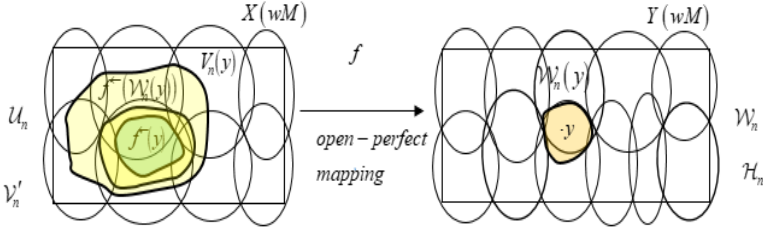
$$\begin{aligned} X = f^{-1}(Y) &= f^{-1} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{H} : H \in \mathcal{H}_n \} \right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ f^{-1}(\overline{H}) : f^{-1}(H) = V, V \in \mathcal{V}_n', f^{-1}(\mathcal{H}_n) = \mathcal{V}_n' \} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{V} : V \in \mathcal{V}_n' \}. \end{aligned}$$

Buna göre,  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{V} : V \in \mathcal{V}_n' \}$  ve böylece  $X$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayıdır.

**Teorem 5.1.34**  $X$  ve  $Y$  birer topolojik uzaylar olsun. Eğer  $f$  dönüşümü bir  $X$  topolojik uzayından zayıf Menger ( $wM$ ) bir  $Y$  uzayına tanımlı açık-mükemmel bir dönüşüm ise  $X$  uzayı da zayıf Menger ( $wM$ ) dir.

### İspat

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her  $y \in Y$  için,  $f^{-1}(y)$  kümesi  $X$  'de kompakttır,  $f$  kompakt bir dönüşüm olduğundan, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f^{-1}(y) \subset \mathcal{U}_n(y) = V_n(y)$  olacak şekilde  $f^{-1}(y)$  'yi örten bir  $\mathcal{V}_n(y) \subset \mathcal{U}_n$  sonlu alt ailesi vardır (Bkz. Şekil 27).



Şekil 27:  $wM$  uzayın açık-mükemmelf altındaki ters görüntüsü  $wM$   $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan  $W_n(y) \subset Y$  açık kümesi  $y \in W_n(y)$  ve  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_n(y)) \subset V_n(y) = \bigcup \mathcal{V}_n(y)$  olacak şekilde vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{W}_n = \{W_n(y) : y \in Y\}$  kümesi  $Y$ 'nin açık bir örtüsüdür.  $Y$  zayıf Menger olduğundan, bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n$ ,  $\mathcal{W}_n$ 'nin sonlu alt kümesidir ve  $Y = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  için ve her  $H \in \mathcal{H}_n$  için karşılık gelen  $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}_n$  sonlu alt kümesi  $f^{-1}(H) \subset \bigcup \mathcal{U}_H$  ile birlikte vardır.  $\mathcal{V}_n' = \{U \in \mathcal{U}_n : U \in \mathcal{U}_H, H \in \mathcal{H}_n\}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{V}_n'$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir.  $f$  açık olduğundan  $Y = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}$ 'den

$$\begin{aligned} X = f^{-1}(Y) &= f^{-1}\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}\right) = \overline{f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right)} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\mathcal{H}_n)} \\ &= \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'} \\ &\Rightarrow X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n'} \end{aligned}$$

olur. Böylece  $X$  zayıf Menger  $(wM)$ 'dir.

**Not 5.1.35** Teorem 5.1.33 ve Teorem 5.1.34 te elde edilen sonuçlara benzer şekilde hemen hemen Rothberger ( $aR$ ) ve zayıf Rothberger ( $wR$ ) için de ispatı yapılabilir.

**Tanım 5.1.36** (Wilansky, 1967) Bir  $X$  topolojik uzayından bir  $Y$  topolojik uzayına tanımlı  $f$  dönüşümüne eğer her  $U \subset Y$  açık alt kümesi için  $f^{-1}(\overline{U}) \subset \overline{f^{-1}(U)}$  ise hemen hemen açık dönüşüm denir.

**Not 5.1.37** Her açık dönüşüm hemen hemen açık dönüşüm olduğundan Teorem 5.1.33 ve Teorem 5.1.34 teoremlerinde elde ettiğimiz sonuçlara bu ilişki uyarlanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Aslında bu teoremler Song (Song, 2015a) tarafından Önerme 3.7 de ispatı verilmiş ve Önerme 3.8 in ispatı da okuyucuya bırakılmıştır.

**Sonuç 5.1.38** (Song, 2015a; Önerme 3.7)  $f: X \rightarrow Y$  hemen hemen (almost) açık ve mükemmel bir dönüşüm ve  $Y$  hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayı ise  $X$  de hemen hemen Menger uzayı ( $aM$ )'dır.

**Sonuç 5.1.39** (Song, 2015a; Önerme 3.8)  $f: X \rightarrow Y$  hemen hemen (almost) açık ve mükemmel bir dönüşüm ve  $Y$  uzayı zayıf Menger ( $wM$ ) uzayı ise  $X$  de zayıf Menger ( $wM$ )'dir.

**Not 5.1.40** Menger uzayı hemen hemen Menger uzayıdır ( $M \Rightarrow aM$ ). Tersinin doğru olabilmesi için uzayın regüler olması gerektiği aşağıdaki teoremlerle görülebilir.

**Teorem 5.1.41** (Kocev, 2009) Regüler hemen hemen Menger ( $aM$ ) Uzayı Menger ( $M$ ) dir.

**İspat**  $X$  topolojik uzayı bir regüler hemen hemen Menger uzayı olsun.  $X$  'in Menger uzayı olduğunu göstermek istiyoruz.  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $V_n \subset U_n$  olacak şekilde sonlu kümelerin bir  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  olacak şekilde var olduğunu gösterebiliriz.  $X$  bir regüler uzayı olduğundan; her  $n \in \mathbb{N}$  için  $X$  'in  $W_n$  açık örtüleri vardır öyle ki  $\overline{W_n} := \{\overline{W} : W \in W_n\}$  ,  $U_n$  'nin incesidir.  $X$  uzayı hemen hemen Menger bir uzay olduğundan, varsayımdan, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $H_n$  ,  $W_n$  'nin sonlu alt kümesi ve  $\cup \{\overline{H_n} : n \in \mathbb{N}\}$  ,  $X$  'in örtüsü yani;  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\overline{H} : H \in H_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{H_n}$  olacak şekilde bir  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır, öyle ki  $\overline{H_n} := \{\overline{H} : H \in H_n\}$  . Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $H \in H_n$  için,

$\overline{H} \subset V_H$  olacak şekilde  $V_H \in \mathcal{U}_H$  seçebiliriz.  $V_n = \{V_H : H \in H_n\}$  olsun. Buna göre, her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $V_n$ ,  $\mathcal{U}_H$ 'nin sonlu alt kümesidir ve

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{H} : H \in H_n \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{H_n}$$

denkleminde

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ \overline{H} : H \in H_n \} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{ V_H : H \in H_n \} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset X \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  elde edilir ve böylece  $X$  uzayı bir

Menger uzayıdır deriz.

**Tanım 5.1.42** (Arhangel'skii, 1979) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer  $X$ 'in her kapalı  $F$  alt kümesi ve  $X$ 'de açık olan kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin her  $\mathcal{U}$  örtüsü için  $F \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}}$  olacak şekilde sayılabilir bir  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  alt örtüsü varsa sözde (quasi) Lindelöf ( $qL$ ) denir.

**Tanım 5.1.43** (Di Maio & Kočinac, 2015) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer her kapalı  $F \subset X$  kümesi için ve  $X$ 'de açık olan kümelerle oluşturulan,  $F$ 'nin örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olacak şekilde varsa sözde (quasi) Menger ( $qM$ ) denir.

**Tanım 5.1.44** (Di Maio & Kočinac, 2015) Bir  $X$  topolojik uzayına eğer her kapalı  $F \subset X$  kümesi için ve  $X$ 'de açık olan kümelerle oluşturulan,  $F$ 'nin örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}$  olacak

şekilde varsa sözde (quasi) Rothberger ( $qR$ ) denir.

**Tanım 5.1.45** (Di Maio & Kočinac, 2015) Bir  $X$  topolojik uzayına sözde (quasi) ( $qH$ ) Hurewicz denir eğer her kapalı  $F \subset X$  kümesi ve  $X$ 'de açık kümelerle oluşturulan,  $F$ 'nin örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  sonlu,

$\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  (her  $n \in \mathbb{N}$  için) ve her  $x \in F$  için  $x \in \overline{\cup \mathcal{V}_n}$  sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Tanım 5.1.46** (Di Maio & Kočinac, 2015) Bir  $X$  topolojik uzayına sözde (quasi) Gerlits-Nagy denir eğer her kapalı  $F \subset X$  alt kümesi için ve  $X$  'de açık kümelerle oluşturulan  $F$  'nin  $\omega$  – örtülerinin her bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_n$  ve  $V = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  kümesi sonlu, ikili ayrık  $V_n$  kümelerine her  $n \in \mathbb{N}$  için bölünebiliyorsa, böylece her  $x \in F$  için  $x \in \overline{\cup V_n}$  oluyorsa sonlu tanesi hariç tüm  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Not 5.1.47** (Di Maio & Kočinac, 2015) Bir  $X$  uzayı  $qL$  ( $qM$ ,  $qR$ ,  $qH$ ,  $qGN$ ) dir  $\Leftrightarrow$  her kapalı alt uzayı  $wL$  ( $wM$ ,  $wR$ ,  $wH$ ,  $wGN$ ) ise.

**Not 5.1.48** (Di Maio & Kočinac, 2015) Sözde Lindelöf ( $qL$ ) olma özelliği zayıf Lindelöf ( $wL$ ) olma özelliğinden daha güçlüdür.  $qL \Rightarrow wL$ .

**Teorem 5.1.49** (Di Maio & Kočinac, 2015) Her kalıtsal ayrılabilir  $X$  uzayı sözde (quasi) Rothberger ( $qR$ )'dir.

**İspat**  $F$ ,  $X$  'in kapalı bir alt kümesi olsun ve  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ise her  $n \in \mathbb{N}$  için  $F \subset \cup \mathcal{U}_n$  olacak şekilde açık kümelerin ailesinin bir dizisi olsun.  $F$  'de yoğun olan sayılabilir bir  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  kümesini alalım.  $X$  'in kalıtsal ayrılabilir uzay olması demek  $X$  'in kendisi ayrılabilir iken her alt uzayının da ayrılabilir olması demektir. Bu durumda  $\overline{F} = F \subset X$  ayrıca  $X$  'de ayrılabilir. Böylece  $A \subset F$  ve  $A$  sayılabilir, yoğundur  $F$  kümesinde.  $\overline{A} = F$  'dir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n \in U_n$  olacak şekilde  $U_n \in \mathcal{U}_n$  seçelim. Buna göre,  $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  ve böylece  $F = \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n} \Rightarrow F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}$  olur. O halde,  $X$  sözde Rothberger ( $qR$ ) dir.

**Not 5.1.50** (Di Maio & Kočinac, 2015) da ve atıfta bulunduğu makalede verilen aşağıdaki teoremin ispatını burada açık bir şekilde verelim.

**Teorem 5.1.51** (Di Maio & Kočinac, 2015) Her ayrılabilir uzay sözde Rothberger ( $qR$ ) dir ve dolayısıyla zayıf Rothberger ( $wR$ ) dir.

**İspat**  $X$  bir topolojik uzay ve  $A$  kümesi  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  olacak şekilde  $X$  'in sayılabilir, yoğun bir altkümesi olsun.  $\overline{A} = X$  olur.  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \in \mathcal{U}_\mathbb{N}$  seçelim.  $\overline{\bigcup U_n} = X$  olduğunu göstermeliyiz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n \in U_n$  olacak şekilde bir  $U_n \in \mathcal{U}_\mathbb{N}$  seçelim. Buna göre,  $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  olur.  $X = \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n} \subset \overline{X} = X \Rightarrow X = \overline{\bigcup U_n}$  elde edilir ki bu da  $X$  'in zayıf Rothberger olduğunu gösterir.

**Not 5.1.52** (Di Maio & Kočinac, 2015)'deki makalede Menger-tipi örtü özellikleri arasındaki ilişki ve seçme örtü özelliklerinin bu örtü tiplerinin zayıf ve sözde versiyonlarıyla aralarındaki ilişki Şekil 28 ve Şekil 29 da verilmiştir. Bazılarının ispatını verdik, diğerleri de bunlara benzer şekilde yapılır.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\
 \downarrow & & & \downarrow \\
 aM & \rightarrow & qM \\
 \downarrow & & & \downarrow \\
 wM & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow
 \end{array}$$

*Şekil 28: Menger-tipi örtü özellikleri arasındaki ilişki*

$$\begin{array}{ccccc}
L & \Rightarrow & qL & \Rightarrow & wL \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
H & \Rightarrow & qH & \Rightarrow & wL \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
M & \Rightarrow & qM & \Rightarrow & wM \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
R & \Rightarrow & qR & \Rightarrow & wR \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
GN & \Rightarrow & qGN & \Rightarrow & wGN \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
L & \Rightarrow & qL & \Rightarrow & wL
\end{array}$$

Şekil 29: Örtü özellikleri arasındaki ilişki

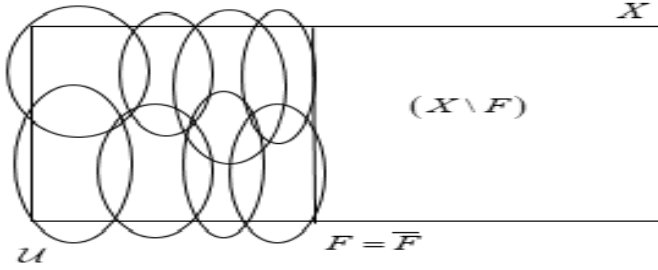
### Teorem 5.1.53

- (a) Lindelöf  $(L) \xRightarrow{(1)} \text{sözde Lindelöf } (qL) \xRightarrow{(2)} \text{zayıf } (wL) \text{ Lindelöf}$   
(b) Menger  $\xRightarrow{(1)} \text{sözde Menger } (qM) \xRightarrow{(2)} \text{zayıf Menger } (wM)$   
(c) Rothberger  $\xRightarrow{(1)} \text{sözde Rothberger } (qR) \xRightarrow{(2)} \text{zayıf Rothberger } (wR)$   
(d) Hurewicz  $\xRightarrow{(1)} \text{sözde Hurewicz } (qH) \xRightarrow{(2)} \text{zayıf Hurewicz } (wH)$   
(e) Gerlits-Nagy  $\xRightarrow{(1)} \text{sözde Gerlits-Nagy } (qGN) \xRightarrow{(2)} \text{zayıf Gerlits-Nagy } (wGN)$

**İspat** (a)  $L \xRightarrow{(1)} qL \xRightarrow{(2)} wL$

(a.1)  $L \xRightarrow{(1)} qL$

$F$ , Lindelöf bir  $X$  uzayının kapalı bir alt kümesi ve  $\mathcal{U}$  ise  $X$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin bir örtüsü olsun (Bkz. Şekil 30).



Şekil 30:  $L$  uzayının kapalı alt kümesi

$F$  kapalı  $\Rightarrow F^t$  açıktır.  $X \setminus F = X \cap F^t$  ( $X$  ve  $F^t$  açık olduklarından kesişimleri de açıktır.) açıktır. Buna göre,  $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsü olsun.  $X$  uzayı Lindelöf uzay olduğundan  $\mathcal{U}'$  açık örtüsünün sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  alt örtüsü vardır öyle ki  $X = \bigcup \mathcal{V}$ . Buna göre,  $\mathcal{U}'$  ayrıca  $X$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin bir açık örtüsüdür ve  $\mathcal{V}$ 'de  $\mathcal{U}'$ 'nün sayılabilir bir alt örtüsü olur ki  $F \subset \bigcup \mathcal{V} = X \Rightarrow F = \overline{F} \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}} \Rightarrow F \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}}$  olur. Böylece,  $X$  sözde Lindelöf ( $qL$ )'tür.

(2)  
(a.2)  $qL \Rightarrow wL$

$\mathcal{U}, X$ 'in bir açık örtüsü olsun ve  $F$ 'de  $X$ 'in kapalı herhangi bir alt kümesi olsun. Buna göre,  $\mathcal{U}$  aynı zamanda  $X$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin bir açık örtüsü olur.  $X$  sözde Lindelöf ( $qL$ ) olduğundan  $\mathcal{U}$ 'nün sayılabilir bir  $\mathcal{V}$  alt örtüsü vardır öyle ki  $F \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}}$ .  $X = \overline{\bigcup \mathcal{V}}$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $(X, \tau)$  topolojik uzay olduğundan  $X \in \tau$ ,  $\emptyset \in \tau$  olur.  $X = \emptyset^t$  kapalıdır (hem açık hem kapalıdır). Her küme kendisinin bir alt kümesi olduğundan bu varsayım  $X$  için de sağlanır. O halde  $F \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}}$  olduğundan

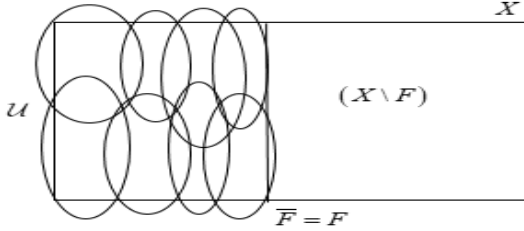
$$X = \overline{X} = \overline{F} \subset \overline{\bigcup \mathcal{V}} \subset X \Rightarrow X = \overline{\bigcup \mathcal{V}}$$

elde edilir. Böylece  $X$  zayıf Lindelöf ( $wL$ )'tür.

(b)  $M \xRightarrow{(1)} qM \xRightarrow{(2)} wM$

(b.1)  $M \xRightarrow{(1)} qM$

$X$  bir Menger uzayı ve  $F$ ,  $X$ 'in kapalı bir alt kümesi olsun ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 31).



Şekil 31:  $M$  uzayının kapalı alt kümesi

$F$  kapalı  $\Rightarrow F^t$  açıktır.  $X \setminus F = X \cap F^t$  ( $X$  ve  $F^t$  açık olduğundan kesişimleri de açıktır.) açık olur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathcal{U}'_n = \mathcal{U}_n \cup \{X \setminus F\}$  bu durumda  $X$ 'in bir açık örtüsüdür.  $X$  Menger uzayı olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $V_n$ ,  $\mathcal{U}'_n$ 'nün sonlu alt kümesi ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup V_n$  olacak şekilde bir  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. Buna göre,  $\mathcal{U}'_n$  aynı zamanda  $X$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin bir açık örtüsüdür ve  $V_n$ ,  $\mathcal{U}'_n$ 'nün her  $n \in \mathbb{N}$  için sonlu bir alt kümesidir ve  $F \subset X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup V_n$ .

$$\bar{F} = F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup V_n} = \bar{X} = X \Rightarrow F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup V_n}$$

ve böylece  $X$  sözde Menger ( $qM$ )'dir.

$$(b.2) \quad qM \stackrel{(2)}{\Rightarrow} wM$$

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun ve  $F$ ,  $X$ 'in kapalı bir alt kümesi olsun. Buna göre,  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aynı zamanda,  $X$ 'deki açık kümelerle oluşturulan  $F$ 'nin de açık örtülerinin bir dizisi olur.  $X$  sözde Menger ( $qM$ ) olduğundan sonlu kümelerin bir  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi

vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olur.  $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olduğunu göstermek istiyoruz.

Her küme kendisinin bir alt kümesi olduğundan ve  $X$  kapalı olduğundan  $F = X$  için

$$X = \overline{X} = F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n} \subset X \Rightarrow X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$$

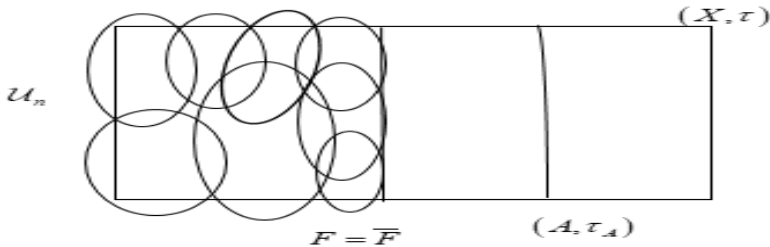
elde edilir. Böylece  $X$ , zayıf Menger ( $wM$ )'dir.

**Önerme 5.1.54** (Di Maio & Kočinac, 2015; Önerme 3.1) önceki tanımlardaki her bir özellik sürekli dönüşüm ve sayılabilir topolojik toplamlarda korunur. Klasik versiyonlar ve sözde (quasi) versiyonlar hem açık hem kapalı olan kümelerde korunurken zayıf (weak) versiyonlar hem kapalı hem regüler olan kümelerde korunur.

**Not 5.1.55** Yukarıdaki önerme (Di Maio & Kočinac, 2015) nolu makalede ispatsız verilmiştir. Biz bu çalışmada sözü edilen ispatları verdik.

**Teorem 5.1.56**  $X$  sözde Menger ( $qM$ ) ve  $A \subset X$  olsun.  $A$  kümesi hem açık hem de kapalı ise  $A$  sözde Menger ( $qM$ )'dir.

**İspat** Sözde Menger ( $qM$ ) bir  $X$  uzayının hem açık hem kapalı alt kümesi  $A$  olsun.  $A$  sözde Menger ( $qM$ ) midir?



Şekil 32: Bir  $qM$  olan  $X$  uzayının açık-kapalı altkümesi

$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ ,  $A$  üzerindeki altuzay topolojisi olmak üzere,  $F$ ,  $(A, \tau_A)$ 'nın kapalı bir alt kümesi olsun ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ise  $(A, \tau_A)$ 'da açık olan kümelerle oluşturulan  $F = \overline{F} = cl_{\tau_A}(F)$ 'nin örtülerinin bir dizisi olsun (Bkz. Şekil 32). Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $F \subset$

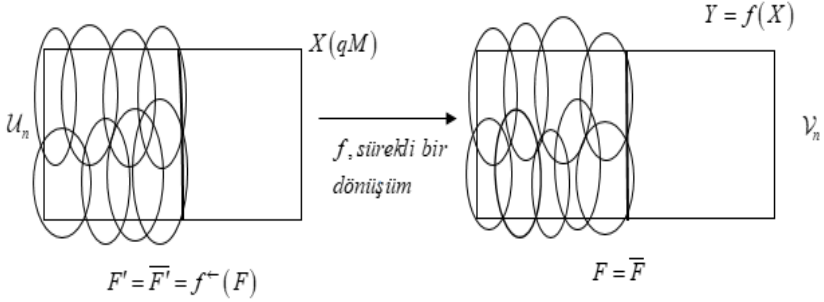
$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olacak şekilde bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi olduğunu göstermek istiyoruz.  $A$  açık bir küme ve  $U, A$ 'da açık ise  $U = A \cap V$  ( $V, X$ 'de açık)  $X$ 'de açık olan  $A$  ve  $V$  kümelerinin keşişimi de  $X$ 'de açıktır.  $A$  açık bir küme olduğundan her  $\mathcal{U}_n, (X, \tau)$ 'da açık kümelerin bir ailesidir.  $A$  açık ise  $A$ 'daki her açık küme de  $X$ 'de açıktır. Eğer  $A, X$ 'in kapalı bir alt kümesi ve  $F \subset A$  ise  $cl_{\tau_A}(F) = cl_{\tau}(F \cap A) = cl_{\tau}(F)$  olur. ( $F \subset A \Rightarrow F \cap A = F$  olduğundan  $F \subset A \subset X \Rightarrow F \subset X$ 'dir.).  $F$ , ayrıca  $X$ 'in alt kümesidir ve  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}, X$ 'de açık olan kümelerle oluşturulan  $F = cl_{\tau}(F)$  'nin örtülerinin bir dizisidir.  $X$  sözde Menger ( $qM$ ) olduğundan sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$ . Her  $\mathcal{V}_n, (A, \tau_A)$ 'da açık olduğundan  $(\bigcup \mathcal{V}_n), (A, \tau_A)$ 'da açıktır. Böylece  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olacak şekilde bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi var olduğundan  $A$  sözde (quasi) Menger dir.

**Not 5.1.57** (Di Maio & Kočinac, 2015) deki makalede aşağıdaki teoremin ispatının kolayca görülebileceği söylenmiştir. Biz belirtilen makaledeki okuyucuya bırakılan bu teoremi burada ispatlayacağız.

**Teorem 5.1.58** Bir  $X$  sözde Menger ( $qM$ ) uzayının sürekli bir  $f$  dönüşümü altındaki görüntüsü  $Y = f(X)$  de sözde Menger ( $qM$ )'dir.

### İspat

$f: X \rightarrow Y$  sürekli bir dönüşüm ve  $X$  topolojik uzayı sözde (quasi) Menger olsun.  $Y = f(X)$  'in sözde (quasi) Menger olduğunu göstereceğiz.  $F, Y$ 'nin kapalı bir alt kümesi olsun  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ise  $Y$  deki açık kümelerle oluşturulan  $F$  'nin örtülerinin bir dizisi olsun. (Bkz. Şekil 33).



Şekil 33: Bir  $qM$  olan  $X$  uzayının sürekli  $f$  altındaki görüntüsü

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$  ve  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n}$  olacak şekilde bir  $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin olduğunu göstermek istiyoruz.  $F' = f^<(F)$  olsun.  $f$  sürekli bir dönüşüm olduğundan, her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $f^<(\mathcal{V}_n) = \mathcal{U}_n$ ,  $X$ 'deki açık kümelerin bir koleksiyonudur ve

$$\begin{aligned} F' &= \overline{F'} \supset \overline{f^<(F)} \subset f^<(\overline{F}) \\ &= f^<(F) \subset f^<(\bigcup \mathcal{V}_n) = \bigcup \mathcal{U}_n \end{aligned}$$

olur. Buradan  $F' \subset \bigcup \mathcal{U}_n$ .  $X$  sözde (quasi) Menger olduğundan,  $f^<(\mathcal{W}_n) = \mathcal{U}_n'$  her  $n \in \mathbb{N}$  ile birlikte sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{U}_n')_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n' \subset \mathcal{U}_n$  ve  $F' \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n'}$ . Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}_n' = f^<(\mathcal{W}_n)$  ve  $f^<(F) \subset f^<(\overline{F})$  olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} F &= f(F') \subset f\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n'}\right) = f\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^<(\mathcal{W}_n)}\right) \\ &= f\left(f^<\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n}\right)\right) \subset f f^<\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n}\right) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n} \end{aligned}$$

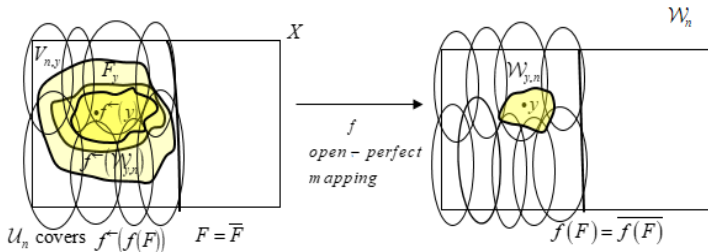
elde edilir ve buradan  $F \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n}$  olur. Böylece  $Y$  uzayı sözde Menger ( $qM$ ) dir.

**Not 5.1.59**  $f: X \rightarrow Y$  bir  $X$  uzayından bir sözde Menger ( $qM$ )  $Y$  uzayına tanımlı açık, mükemmel bir dönüşüm ise  $X$  sözde Menger ( $qM$ ) midir? (Di Maio & Kočinac, 2015) deki makalede verilen bu teorem (Di Maio & ark., 2015)'de düzeltildi. Sanıldığı gibi sözde

(quasi) Menger bir uzayın açık ve mükemmel bir dönüşüm altındaki ters görüntüsü sözde (quasi) Menger değildir.

**Teorem 5.1.60** (Teorem 2, Di Maio & ark., 2015) Eğer  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü bir  $X$  uzayından sözde (quasi) Menger bir  $Y$  uzayına tanımlı açık, mükemmel bir dönüşüm ise her kapalı  $F \subset X$  kümesi ve  $X$ 'de açık kümelerle oluşturulan  $f^{-1}(f(F))$ 'nin açık örtülerinin her  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  ve  $f^{-1}(f(F)) \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n}$  olacak şekilde sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır.

**İspat**



Şekil 34: Bir qM olan  $Y$  uzayının açık-mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsü

$f: X \rightarrow Y$  bir açık-mükemmel dönüşüm ve  $Y$  uzayı sözde Menger olsun.  $f$  mükemmel dönüşüm olduğundan  $f$  kapalı, sürekli ve kompakt bir dönüşümdür.  $F$ , bir  $X$  topolojik uzayının kapalı bir alt kümesi olsun ve  $X$ 'de açık kümelerle oluşturulan  $f^{-1}(f(F))$ 'nin açık örtülerinin bir dizisi  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olsun (Bkz. Şekil 34).  $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan  $X$ 'deki her kapalı  $F$  kümesinin  $f$  altındaki görüntüsü olan  $f(F)$  kümesi  $Y$ 'de kapalıdır.  $f$  kompakt bir dönüşüm olduğundan her  $y \in f(F)$  için  $F_y := f^{-1}(y)$  kümesi  $X$  de kompakttır.  $F_y$  kompakt olduğundan aynı zamanda  $F_y$  için de her  $n \in \mathbb{N}$  için açık bir örtü olan  $\mathcal{U}_n$  açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Böylece  $\bigcup \mathcal{V}_{y,n} = F_y$  olmak üzere,  $F_y$ 'yi örten, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_{y,n} \subset \mathcal{U}_n$  sonlu kümesi vardır öyle ki  $F_y = f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{V}_{y,n} = F_y$ .  $f$  kapalı bir dönüşüm olduğundan, her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $y \in f(F)$  için  $y \in W_{y,n}$  ve  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_{y,n}) \subset V_{y,n}$  olacak

şekilde bir  $W_{y,n} \subset Y$  açık kümesi vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{W}_n = \{W_{y,n} : y \in f(F)\}$  olacak şekilde kuralım. Buna göre  $\forall n \in \mathbb{N}$  için her  $\mathcal{W}_n$ ,  $Y$ 'deki açık kümelerle oluşturulan,  $f(F)$ 'nin bir örtüsüdür.  $Y$  sözde Menger ( $qM$ ) olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{W}_n$  ve  $f(F) \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}$  olacak şekilde sonlu kümelerin bir  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $H \in \mathcal{H}_n$  için  $f^{-1}(H) \subset \bigcup \mathcal{U}_H$  ile birlikte sonlu bir  $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}_n$  kümesi vardır. Eğer  $\mathcal{G}_n = \{U \in \mathcal{U}_n : U \in \mathcal{U}_H, H \in \mathcal{H}_n\}$  ise her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{G}_n$ ,  $\mathcal{U}_n$ 'nin sonlu bir alt kümesidir.  $f$  açık bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(F)) &\subset f^{-1}\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n}\right) \\ &= \overline{f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n\right)} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\mathcal{H}_n)} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

## 5.2 Yıldız Seçme Prensiplerinin Zayıf Formları

**Tanım 5.2.1** (Kocев, 2009) Bir  $X$  topolojik uzayına hemen hemen (almost) yıldız Menger uzayı denir eğer  $X$ 'in açık örtülerinin her bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n$  sonlu ve  $\{\overline{St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbb{N}\}$  ailesi  $X$ in bir açık örtüsüdür, yani;

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{U \in \mathcal{U}_n : U \cap (U\mathcal{V}) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

**Not 5.2.2** Açık-regüler küme açık küme olduğundan Kocев (Kocев, 2009) hemen hemen Menger ( $aM$ ) tanımında olduğu gibi hemen hemen yıldız-Menger ( $aSM$ ) tanımını açık-regüler kümeler kullanarak da tanımlanabileceğini göstermiştir.

**Teorem 5.2.3** (Kocев, 2009) Bir  $X$  topolojik uzayı hemen hemen yıldız-Mengerdir  $\Leftrightarrow$  açık-regüler kümelerle oluşturulan  $X$  'in örtülerinin bir  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki

her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu alt kümesi ve  $\left\{ \overline{St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbb{N} \right\} X$ 'in bir örtüsüdür.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ):  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in regüler-açık kümelerle oluşturulan açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her regüler-açık küme açık olduğundan  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisidir aynı zamanda.  $X$  hemen hemen yıldız-Menger ( $\alpha$ -SM) olduğundan bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu alt kümesi ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)}$ .

( $\Leftarrow$ ):  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık-regüler kümelerle oluşturulan örtülerinin bir dizisi için bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n$  'nin sonlu alt kümesi ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)}$  olacak şekilde varsa  $X$  hemen hemen yıldız-Menger midir?  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$ 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun.  $X$ 'in hemen hemen yıldız-Menger olduğunu göstermek istiyoruz.  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{U}'_n = \left\{ \overset{\circ}{\bar{U}} : U \in \mathcal{U}_n \right\}$  ile tanımlanan bir dizi olsun. Bu durumda her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{U}'_n$ , regüler-açık kümelerle oluşturulan  $X$ 'in bir örtüsüdür.

Gerçekten,  $\overset{\circ}{\bar{U}}$  regüler-açık kümedir (Kocev, 2009) ( $U$  açık  $\Rightarrow U = \overset{\circ}{U} = \bar{U} \Rightarrow U = \bar{U} \Rightarrow U$  hem kapalı hem açık) ve  $U \subset \bar{U}$ ,  $U$  açık olduğundan. Buna göre, bir  $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}_n, \mathcal{U}'_n$  'nün sonlu bir alt kümesidir ve  $\left\{ \overline{St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}'_n)} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $X$  'in bir örtüsüdür, yani  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}'_n)}$ . Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 5.2.4** (Kocev, 2009)  $\forall U \in \mathcal{U}_n$  için  $St(U, \mathcal{U}_n) = St\left(\overset{\circ}{\bar{U}}, \mathcal{U}_n\right)$ .

**İspat**  $U \subset \overset{\circ}{\bar{U}}$  olduğundan  $St(U, \mathcal{U}_n) \subset St\left(\overset{\circ}{\bar{U}}, \mathcal{U}_n\right)$ .  $x \in St\left(\overset{\circ}{\bar{U}}, \mathcal{U}_n\right)$  olsun. Buna göre,  $V \cap \overset{\circ}{\bar{U}} \neq \emptyset$  ve  $x \in V$  olacak şekilde

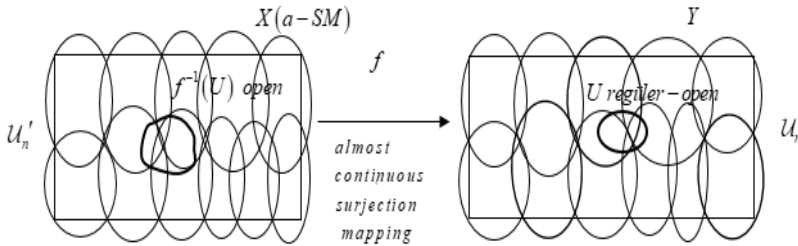
$V \in \mathcal{U}_n$  vardır. Böylece  $V \cap U \neq \emptyset$  elde edilir  $x \in St(U, \mathcal{U}_n)$  olmasını gerektiren her  $V \in \mathcal{V}_n$  için  $V = \overline{\overset{\circ}{U}_V}$  olacak şekilde  $U_V \in \mathcal{U}_n$  seçebiliriz.  $\mathcal{W}_n = \{U_V : V \in \mathcal{V}_n\}$  olsun.  $\{\overline{St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{U}_n)} : n \in \mathbb{N}\}$   $X$ 'in bir örtüsüdür, yani;  $X = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{U}_n)}$ .  $x \in X$  olsun. O halde  $n \in \mathbb{N}$  vardır  $x \in \overline{St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}'_n)}$  olacak şekilde.  $x \in X$  ve  $x$ 'in her  $V$  komşuluğu için,  $V \cap St(\cup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}'_n) \neq \emptyset$ . Bu durumda,  $U \in \mathcal{U}_n$  vardır öyle ki

$$\begin{aligned} & \left( V \cap \overset{\circ}{U} \neq \emptyset \right) \wedge \left( \cup \mathcal{V}_n \cap \overset{\circ}{U} \neq \emptyset \right) \neq \emptyset \\ & \Rightarrow V \cap U \neq \emptyset \wedge (\cup \mathcal{V}_n \cap U \neq \emptyset). \end{aligned}$$

$\cup \mathcal{W}_n \cap U \neq \emptyset$  elde edilir ve böylece  $x \in \overline{St(\cup \mathcal{W}_n, \mathcal{U}_n)}$  olur.

**Teorem 5.2.5** (Kocev, 2009)  $X$  hemen hemen yıldız-Menger ( $a$ -SM) ve  $Y$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $f: X \rightarrow Y$  hemen hemen sürekli, örten bir dönüşüm ise  $Y$  de hemen hemen yıldız-Menger ( $a$ -SM) uzaydır.

**İspat**  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $Y$ 'nin regüler-açık kümelerle oluşturulan örtülerinin bir dizisi ve  $\mathcal{U}'_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$  olsun. Buna göre,  $f$  hemen hemen sürekli bir dönüşüm olduğundan ve her  $U \in \mathcal{U}_n$  regüler-açık küme olduğundan her  $\mathcal{U}'_n$ ,  $X$ 'in bir açık örtüsüdür (Bkz. Şekil 35).



Şekil 35:  $a$ SM uzayının hemen hemen sürekli-örtenf altındaki görüntüsü

$X$  hemen hemen yıldız-Menger olduğu için bir  $(\mathcal{V}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{V}'_n \subset \mathcal{U}'_n$ ,  $\mathcal{V}'_n$  sonlu, her  $n \in \mathbb{N}$  için ve  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{St(\bigcup \mathcal{V}'_n, \mathcal{U}'_n)}$ .  $\mathcal{V}_n = \{U: f^{-1}(U) \in \mathcal{V}'_n\}$  ve  $x \in X$  olsun. Böylece  $f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n) = \bigcup \mathcal{V}'_n$  olur ve  $x \in \overline{St(f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n), \mathcal{U}'_n)}$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  vardır.  $y \in f(x) \in Y$  ise

$$y \in f\left(\overline{St(f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n), \mathcal{U}'_n)}\right) \subseteq \overline{f\left(St(f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n), \mathcal{U}'_n)\right)} \subseteq \overline{St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n)}.$$

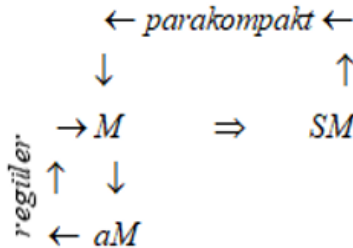
Son kapsamayı ispatlayalım:

Varsayalım ki  $f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$  olsun. O halde  $f(f^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_n)) \cap f(f^{-1}(U)) \neq \emptyset$ . Böylece  $\bigcup \mathcal{V}_n \cap U \neq \emptyset$ . Buna göre,  $X$  hemen hemen yıldız-Menger uzayıdır.

**Not 5.2.6** Kocinac (Kočinac, 1999a) parakompakt uzaylarda Menger ( $M$ ) ve yıldız-Menger ( $SM$ ) uzayların birbirine denk olduğunu kanıtladı. Kocev (Kocev, 2009) regüler hemen hemen Menger ( $aM$ ) uzayının Menger olduğunu ispatladı. Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 5.2.7** Regüler, parakompakt bir  $X$  uzayında aşağıdakiler birbirine denktir (Bkz. Şekil 36).

- (a)  $X$  Menger uzayıdır ( $M$ )
- (b)  $X$  yıldız-Menger uzayıdır ( $SM$ )
- (c)  $X$  hemen hemen Menger uzayıdır ( $aM$ )



Şekil 36:  $M$  ve  $SM$  tipi örtü özellikleri arasındaki ilişki

## 6. Sonuç

**Şükran KONCA**  
**Nuran ALAR**  
**Yücel AYDIN**

Bu kitapta önemli bir topolojik özellik olan kompaktlığın daha genel formları olan örtü özellikleri derlenmiştir. Yıldız kompaktlık ve yıldız seçme prensipleri teorisi üzerine şu ana kadar yapılmış bazı temel çalışmalar incelenip derlenerek kompaktlık, yıldız kompaktlık,  $\sigma$  -kompaktlık, Lindelöf özelliği ile bunların kendi aralarındaki ilişkiler ve seçme prensipleriyle yıldız seçme prensipleri arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Klasik seçme prensiplerinden Menger, Rothberger, Hurewicz örtü özellikleri, yıldız-Menger, yıldız-Rothberger, yıldız-Hurewicz örtü özellikleri, kuvvetli yıldız-Menger, kuvvetli yıldız-Rothberger, kuvvetli yıldız Hurewicz örtü özellikleri ve bu özellikleri sağlayan uzayların bazı topolojik özelliklerini araştırdık. Klasik seçme prensipleri ve yıldız seçme prensipleri ile bunların zayıf formları ve bunların kendi aralarındaki ilişkiler çalışılmıştır. Zayıf Menger, zayıf Rothberger, zayıf Hurewicz örtü özellikleri, hemen hemen-Menger, hemen hemen Rothberger, hemen hemen Hurewicz örtü özellikleri, yıldız-Menger, yıldız-Rothberger, yıldız Hurewicz örtü özelliklerinin zayıf versiyonlarını sağlayan uzayların bazı topolojik özelliklerini araştırdık. Şu ana kadar ilgili uzayların özelliklerle temel nitelikteki yapılmış çalışmalar üzerine yoğunlaştık ve bu makalelerde ıspatı verilmemiş bazı sonuçları veya okuyucuya bırakılan teoremleri burada ıspatladık. Bu anlamda bu kitap, son zamanlarda önemli bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkan seçme prensipleri konusuna yeni başlamak isteyenler için, temel oluşturmak adına faydalı bir Türkçe kaynak niteliğindedir.

## 7. Kaynaklar

Arhangel'skii, A. V. (1979). A theorem on cardinality. *Russian Mathematical Surveys*, 34, 153-154.

Babinkostova, L., Pansera, B. A. & Scheepers, M. (2012). Weak covering properties and infinite games. *Topology and its Applications*, 159, 3644-3657.

Babinkostova, L., Pansera, B. A & Scheepers, M. (2013). Weak covering properties and selection principles. *Topology and its Applications*, 160, 2251-2271.

Bonanzinga, M., Cammaroto, F. & Kocinac, L. D. R. (2004). Star-Hurewicz and related properties. *Applied General Topology*, 5 (1), 79-89.

Casas-de la Rosa, J., Garcia-Balan, S. A. & Szeptycki, P. J. (2019). Some star and strongly star selection principles. *Topology and its Applications*, 258, 572-587.

Daniels, P. (1988). Pixley–Roy spaces over subsets of the reals. *Topology and its Applications*, 29 (1), 93-106.

Di Maio, G., Kočinac, L. D. R. (2015). A note on quasi-Menger and similar spaces. *Topology and its Applications*, 179, 148-155.

Di Maio, G., Kočinac, L. D. R., Peng, L. X. & Shen, Z. C. (2015). Addendum to a note on quasi-Menger and similar spaces [*Topology and its Applications*, 179, 148-155]. *Topology and its Applications*, 182, 135-136.

Douwens, E. K., Reed, G. M., Roscoe, A. W. & Tree, I.J. (1991). Star covering properties, *Topology and its Applications*, 39 (1), 71-103.

Engelking, R. (1989). *General topology* (revised and completed edition), Heldermann.

Eysen A. E, (2012). Topolojide seçme prensipleri. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Fleishman, W. M. (1970). A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae*, 67 (1), 1-9.

Gerlits J. & Nagy, Zs. (1982). Some properties of  $C(X)$  I, *Topology and its Applications*, 14 (2), 151-161.

[18] Gillman L & Henriksen M. (1954). Concerning rings of continuous functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 77 (2), 340-352.

Hurewicz, W. (1938). Über folgen stetiger funktionen. *Fundamenta Mathematicae*, 30, 50-55.

Hurewicz, W. (1925). Über die verallgemeinerung des Borelschen theorems, *Mathematische Zeitschrift*, 24, 401-425.

Just, W., Miller, A. W., Scheepers, M. & Szeptycki, P. J. (1996). Combinatorics of open covers (II). *Topology and its Applications*, 73 (3), 241-266.

Karaca, İ. (2013). *Topoloji ders notları*. Ege Üniversitesi Açık Erişim Ders Notları.

<https://www.coursehero.com/file/20088104/Topoloji/>.

Kocev, D. (2009). Almost Menger and related spaces. *Matematiski Vesnik*. 61, 173-180.

[23] Kocev, D. 2015. Menger-Type Covering Properties of Topological Spaces. *Filomat*, 29 (1), 99-106.

Kočinac, L. D. R. (1999a). Star-Menger and related spaces. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 55 (3-4), 421-431.

Kočinac, L. D. R. (1999b). Star-Menger and Related Spaces II. *Filomat*, 13, 129-140.

Kočinac, L. D. R. (2001). The Pixley-Roy Topology and Selection Principles. *Questions Answers General Topology*, 19, 219-225.

Kočinac, L. D. R. (2004). Selected results on selection principles. 71-104, in: *Proceedings of The Third Seminar*

on *Geometry and Topology*. July 15-17, (ed. Sh. Rezapour). Tabriz Iran.

Kočinac, L. D. R. (2015). Star selection principles: A survey. *Khayyam Journal of Mathematics*, 1 (1), 82-106.

Kočinac L. D. R. (2016). A Note on Mappings and Almost Menger and Related Spaces. *University Thought, Publication in Natural Sciences*, 6 (1), 67-70.

Kočinac, L. D. R. (2019). Variations of classical selection principles: An overview. *Quaestiones Mathematicae*, 1-33.

Kočinac, L. D. R. & Konca, Ş. (2020). Set-Menger and related properties. *Topology and its Applications*, 275, 106996.

Koçak M, 2015. *Genel topolojiye giriş ve problem çözümleri*. Pelikan Kitabevi, Ankara.

Konca Ş, 2019. Seçme Prensipleri Teorisi Ders Notları (Lecturer Notes: The Theory of Selection Principles, Lecture notes obtained as a result of collaboration, interviews, personal communications with Professor Ljubisa Kocinac during the visitation on September 12-23, 2018; December 23, 2017-January 2, 2018; August 3-12, 2017).

Long, P. E. & Herrington, L. L. (1981). Strongly  $\theta$  - continuous functions. *Journal of Korean Mathematical Society*, 18, 21-28.

Matveev, M. V. (1998). A survey on star covering properties. *Topology Atlas*, 330, Preprint.

Menger, K. (1924). Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre. *Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik. Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie, Wien)*, 133, 421-444.

Pansera, B. A. (2012). Weaker forms of the Menger property. *Quaestiones Mathematicae*, 35 (2), 161-169.

Rothberger, F. (1938). Eine verschärfung der eigenschaft C. *Fundamenta Mathematicae*, 30, 50-55.

Sakai, M. (2013). The weak Hurewicz property of Pixley-roy hyperspaces. *Topology and its Applications*, 160, 2531-2537.

Sakai, M. & Scheepers, M. (2014). *The combinatorics of open covers*, 751-800 in: (Eds. K. P. Hart, J. Van Mill, P. Simon). Recent Progress in General Topology III, Atlantis Press, Amsterdam/Paris.

Scheepers, M. (1996). Combinatorics of open covers I: Ramsey theory. *Topology and its Applications*, 69 (1), 31-62.

Scheepers, M. (1997). Combinatorics of open covers (III): Games,  $C_p(X)$ . *Fundamenta Mathematicae*, 152, 231-254.

Scheepers, M. (1998). Combinatorics of open covers (IV): Subspaces of the Alexandroff double of the unit interval, *Topology and its Applications*, 83, 63-75.

Scheepers, M. (1999). Lusin sets. *Proceedings American Mathematical Society*, 127: 251-257.

Scheepers, M. (2000). Combinatorics of open covers V: Pixley-Roy Spaces of Sets of Reals. *Topology and its Applications*, 102: 13-31.

Sierpinski, W. (1926). Sur un Probleme de K. Menger. *Fundamenta Mathematicae* 8: 223-224.

Sierpinski, W. (1928). Sur un Ensemble Nondénombrable. Donc Toute Image Continue est de Mesure Nulle. *Fundamenta Mathematicae*, 11, 301-304.

Sakai, M. (2014). Star covering versions of the Menger property. *Topology and its Applications*, 176, 22-34.

Song, Y. K. (2013a). Remarks on strongly star-Menger spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 54 (1), 97-104.

Song, Y. K. (2013b). Remarks on strongly star-Hurewicz spaces. *Filomat*, 27 (6), 1127-1131.

Song, Y. K. (2013c). Remarks on star-Hurewicz spaces. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, 61 (3-4), 247-255.

Song, Y. K. & Li, R. (2013). On almost Hurewicz spaces. *Questions and Answers in General Topology*, 31, 131-136.

Song, Y. K. (2014). On star-K-Menger spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43 (5), 769-776.

Song, Y. K. (2015). Absolutely strongly star-Hurewicz spaces. *Open Mathematics*, 13, 26-32.

Song Y. K. (2015a). Some Remarks on Almost Menger Spaces and Weakly Menger Spaces. *Publications de L'institut Mathematique, Nouvelle Série, Tome, 98 (112): 193-198.*

Tkachuk, V. V. (1995). Some new versions of an old game. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 36, 179-198.

Tsaban, B. (2007). *Selection principles and special sets of reals*, 91-108 in: *Open Problems in Topology II*. (Ed. Pearl, E.), Elsevier Science, Amsterdam.

Tsaban, B. (2015). Combinatorial aspects of selective star covering properties in spaces. *Topology and its Applications*, 192, 198-207.

Wilansky, A. (1967). *Topics in Functional Analysis*. Springer, Berlin.

Yüksek lisans tez çalışmalarının bir ürünü olan bu kitapta, topolojide çok önemli bir yer edinen örtü özelliklerinden klasik seçme prensipleri, yıldız seçme prensipleriyle bunların zayıf formları incelenmiş olup bu örtü özelliklerinin kendi aralarındaki ilişkiler derlenmiştir. Zayıf Menger, zayıf Rothberger, zayıf Hurewicz örtü özellikleri, hemen hemen-Menger, hemen hemen Rothberger, hemen hemen Hurewicz örtü özellikleri, yıldız-Menger, yıldız-Rothberger, yıldız Hurewicz örtü özelliklerinin zayıf versiyonlarını sağlayan uzayların bazı topolojik özelliklerini araştırdık. Şu ana kadar ilgili uzayların özellikle temel nitelikteki yapılmış çalışmalar üzerine yoğunlaştık ve ilgili makalelerde elde edilen ve ispatı verilmemiş bazı sonuçları veya okuyucuya bırakılan teoremleri burada ispatladık. Bu anlamda bu çalışma, son zamanlarda matematiğin bir alt bilim dalı olan topolojide önemli bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkan klasik seçme prensipleri ve yıldız seçme prensipleri ile bunların zayıf formları üzerine olup özellikle bu alana ilgi duyan ve temel oluşturmak isteyen okuyuculara faydalı bir Türkçe kaynak olması hedeflenmektedir.