TÜRKİYE CUMHURİYETİ'NİN YÜZÜNCÜ YILI

Matematikte İnovasyon: Modüller, Denklemler ve Yöntemler

Editör
Nihan Güngör

BİDGE

BİDGE Yayınları

Matematikte İnovasyon: Modüller, Denklemler ve Yöntemler

Editör: Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR

ISBN: 978-625-372-451-1

1. Baskı
Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL
Yayınlama Tarihi: 25.12.2024
BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374
Yayın hakları © BİDGE Yayınları
www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com
Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.
Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya / Ankara

ÖNSÖZ

Bilim ve matematik, insanlığın ilerlemesini sağlayan temel taşlardır. Matematik, doğanın dilini konuşmamıza olanak tanırken, soyut düşüncenin sınırlarını zorlayan bir araç olarak da karşımıza çıkar. Bu kitap, matematiğin çeşitli dallarında yapılan güncel araştırmaların bir derlemesi niteliğindedir ve okuyucuları bu zengin disiplinin derinliklerine davet etmektedir.

Birinci bölüm, cebirsel yapıların temel taşlarından biri olan halkalar ve modüller üzerine odaklanarak, değişmeli halkalar üzerinde modüllerin çarpanlarına ayrılma özelliklerini ele almaktadır. Bu çalışma, cebirsel yapıların daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

İkinci bölüm, Sturm-Liouville türü sınır-değer-geçiş problemlerinde Rayleigh oranının kullanımıyla ilgilidir. Bu klasik konu, hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından önem taşımaktadır ve okuyuculara problem çözümündeki analitik yaklaşımları tanıtmaktadır.

Üçüncü bölümde, conformable kesirli mertebeden türev kavramı kullanılarak geliştirilen kısmi diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş homotopi analiz yöntemiyle yarı analitik çözümleri sunulmaktadır. Bu yenilikçi yöntem, kesirli türevlerin uygulama alanlarını genişletmeyi hedeflemektedir.

Dördüncü ve son bölümde ise kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin fonksiyonel değişken yöntemiyle tam çözümleri ele alınmıştır. Bu bölüm, kesirli diferansiyel denklemler alanında çalışan araştırmacılar için yeni bir bakış açısı sunmaktadır.

Bu kitap, matematiksel araştırmalarda derinlemesine bir bakış açısı arayan akademisyenler, lisansüstü öğrenciler ve araştırmacılar

için bir başvuru kaynağı olmayı amaçlamaktadır. Kitabın hazırlanmasında emeği geçen tüm yazar ve araştırmacılara teşekkür ederim.

Okuyucularımıza, bu kitabın matematiksel bilgiye olan katkısının yanı sıra, yeni fikirler geliştirme ve araştırma yapma noktasında ilham vermesini dilerim.

Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR

Editör

İçindekiler

ÖNSÖZ 3

Değişmeli Halkalar Üzerinde Modüllerin Çarpanlarına Ayrılması . 7

Ali KARAKUŞ..... 7

Bir Sturm-Liouville Sınır-Değer-Geçiş Problemi İçin Rayleıgh Oranı..... 27

Kadriye AYDEMİR..... 27

Merve YÜCEL 27

Conformable Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Genelleştirilmiş Homotopi Analiz Yöntemi İle Yarı Analitik Çözümleri..... 55

Mehmet ÇOLAEL..... 55

Orkun TAŞBOZAN 55

Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Fonksiyonel Değişken Yöntemi İle Tam Çözümleri 69

Mustafa BATMAZ..... 69

Orkun TAŞBOZAN 69

Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Çalışmalara Yönelik Bibliyometrik Analiz Değerlendirilmesi..... 89

Ali KÖSE 89

Özlem YILMAZ..... 89

Demi-Zayıf* Dunford Pettis Operatörler..... 116

Birol ALTIN 116

Arayüz Şartları İle Verilmiş Bir Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri Ve Özfonksiyonları 122

Kadriye AYDEMİR..... 122

Hipergraflar ve Forgotten İndeksi..... 148

Eda ESENLER 148

Gülistan KAYA GÖK 148

Ayrık Zamanlı Bir Av-Avcı Popülasyon Modelinde Hasatın Etkisi Ve Kararlılık Analizi 164

Fatma ETİK 164

Figen KANGALGİL 164

Ülkü DİNLEMEZ KANTAR 164

Demi-Semikompakt Operatörler 202

Birol ALTIN 202

Ricci Solitonlu $\boldsymbol{\phi}$-Rekürent $\boldsymbol{\alpha}$-Kenmotsu Manifoldlar 209

Hakan ÖZTÜRK 209

Bazı Tensör Şartlarını Sağlayan Ricci Solitonlu $\boldsymbol{\alpha}$-Kenmotsu Manifoldlar 233

Hakan ÖZTÜRK 233

BÖLÜM I

Değişmeli Halkalar Üzerinde Modüllerin Çarpanlarına Ayrılması

Ali KARAKUŞ[1]

Giriş

Halkaların özel bir türü olan modüllerin indirgenip indirgenememe, çarpanlarına ayrılıp ayrılamama gibi özellikleri birçok bilim adamı tarafından çalışılmıştır ve hala çalışılmaya devam etmektedir. (Atani & Farzilipour, 2006) de faktöriyel modüller olarak adlandırılan, Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgeler (TÇM) kavramı, tamlık bölgeleri üzerindeki burulmalı serbest modüllere genelleştirildi ve faktöriyel modüller için bazı temel teoremler kanıtlandı. Bu konu ile ilgili daha fazla bilgiye (Sharp,2000), (Nicolas,1967), (Fletcher,1969) da ulaşılabilir.

[1] Dr Öğr Üyesi., Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Kilis/Türkiye, Orcid: 0000-0002-8483-0137, alikarakus@kilis.edu.tr

Bu çalışmanın amacı, faktöriyel modüller teorisi ile TÇM'ler teorisi arasındaki benzerlikleri araştırmak ve faktöriyel modülleri daha geniş modül sınıflarına genişletmektir.

Bölüm 1'de, İlk olarak Faktöriyel modüllerin bilinen tanımları ve bununla ilgili literatür bilgileri verildi.

Bölüm 2'de; Faktöriyel modüllerin en temel teoremi olan Teorem 2.1 ispatlandı. Bu teorem Her biri bir modülün bir TÇM üzerinde faktöriyel olduğuna eşdeğer olan beş koşulu belirtir.

Bölüm 3'te; Halkaların asal ideallerine benzeyen asal alt modüller kavramını inceledik. Bir R tek türlü çarpanlarına ayrılabilir bölgesi üzerindeki cisim olmayan bir M modülün faktöriyel olması için gerek ve yeter şartın $\eta \in M$ ve $p \in R$ olmak üzere $p\eta$ formunda bazı indirgenemez elemanları içeren sıfırdan farklı asal alt modüllere sahip M modülünün var olması olduğu kanıtlandı. Bir TÇM R'nin üst halkası, eğer R bir faktöriyel R-modülü ise faktöriyel genişleme olarak adlandırılır.

1. Modüllerde Tek Türlü Çarpanlara Ayırma

Tanım 1.1: M, bir R tamlık bölgesi üzerinde sıfırdan farklı bir modül ve U ise R in birimlerinin grubu olsun. Ayrıca m ve m', M'nin iki elemanı olsun.

Eğer $m' = rm$ olacak şekilde bir $r \in R$ var ise m elemanı m' elemanını bölüyor deriz ve $m \mid m'$ ile gösteririz. Eğer $m \mid m'$ ise m ye M kümesinde m' nün bir çarpanı ya da bir böleni denir. Benzer şekilde, $m = dm_0$ olacak şekilde bir $m_0 \in M$ elemanı var ise d elemanı m elemanını bölüyor denir ve $d \mid m$ ile gösterilir. Eğer $d \mid m$ ise d ye R de m nin bir böleni denir. R' deki a ve a'

öğelerinin $a|a'$ bölümünü de dahil ederek, burada üç tür bölmeyle uğraştığımıza dikkat edelim. $m|m'$ ve $m'|m$ ise, o zaman bu elemanların M' de birbirleri ile bağlantılı olduğunu söyler ve $m \sim m'$ yazarız. Açıkça, bazı $u,v \in U$ için $m = um'$ ve $m' = vm$ olması için gerek ve yeter şart $m \sim m'$ olmasıdır. Eğer $m \mid m'$ ve m, m' ile bağlantılı değilse, o zaman m nin, M'de m' nün bir öz çarpanı olduğunu yazarız.

Tanım 1.2: R bir halka, M bir burulmalı R-modül ve $0 \neq m \in M$ olsun. $a \in R$ ve $m' \in M$ için, $m = am'$ iken $a \in U(R)$ oluyor ise $0 \neq m \in M$ elemanına 'indirgenemez' eleman denir.

Tanım 1.3: $0 \neq a \in R$ ve $m' \in M$ için, $m|am'$ olduğunda $m|m'$ oluyor ise $0 \neq m \in M$ elemanına 'ilkel' eleman denir.

a bir birim olmak üzere $m = am'$ iken $m \sim m'$ olduğundan, her m ilkel elemanı, M'de indirgenemezdir. R nin kendi üzerinde bir modül olarak kabul edilen bir r öğesi, ancak ve ancak r bir birim ise ilkeldir, çünkü $r|r'$ dir.

M bir R-modül ve N de alt modül olsun. Eğer her $r \in R$ için $rM \cap N = rN$ ise, N ye pür alt modül denir.

Önerme 1.1: M, bir burulmalı R-modül ve $m \in M$ sıfırdan farklı bir eleman olsun . O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) m ilkel elemandır.

(2) M nin devirli alt modülü Rm pür alt modüldür.

(3) Her $x \in M$ için ya $Rx \cap Rm = 0$ ya da $Rx \subseteq Rm$ dir.

İspat: (1)⇒(2) $a \in R$ ve $m \in M$ ilkel eleman olsun. Kabul edelim ki $x \in aM \cap Rm$ olsun. O zaman $m' \in M$ ve $r \in R$ için,

$x = am' = rm$ olur. Buradan $m|am'$ elde edilir ve m ilkel eleman olduğundan $m|m'$ olur. En az bir $r' \in R$ vardır öyle ki $m' = r'm$ ve böylece $x = am' = ar'm \in aRm$ bulunur. Ters kapsamayı göstermek için $y \in aRm$ alalım. En az bir $r \in R$ vardır öyle ki $y = arm$ dir. Buradan da $y \in aM$ ve $y \in Rm$ bulunmuş olur.

(2)⇒(3) M nin devirli alt modülü Rm pür alt modül olsun. $Rx \cap Rm \neq 0$ olacak şekilde $x \in M$ alalım. Bu durumda en az bir $y \in Rx \cap Rm$ vardır öyle ki bir $r' \in R$ elemanı için $y = r'x$ olur. Rm pür alt modül olduğundan $r'M \cap Rm = r'Rm$ dir. Böylece $y = r'x \in r'M \cap Rm = r'Rm$ elde edilir. Buradan da en az bir $r^* \in R$ için $y = r'x = r'r^*m$, yani $x = r^*m$ bulunur. Sonuç olarak $Rx \subseteq Rm$ elde edilir.

(3)⇒(1) Her $x \in M$ için ya $Rx \cap Rm = 0$ ya da $Rx \subseteq Rm$ olsun. Bir $a \in R$ ve $m' \in M$ için $m|am'$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, en az bir $r \in R$ vardır öyle ki $am' = rm$ dir.

Yani $Rm' \cap Rm \neq 0$ olur ve böylece $Rm' \subseteq Rm$ elde edilir. En az bir $s \in R$ için $m' = sm$ bulunur ki bu da m nin ilkel eleman olması demektir.

Sonuç 1.1: M bir burulmalı R-modül ve $m, m' \in M$ ilkel elemanlar olsunlar. m ile m' ilgili olmaması için gerek ve yeter koşul $Rm' \cap Rm = 0$ olmasıdır.

İspat: $m, m' \in M$ ilkel elemanları ilgili olmasınlar. m ve m' ilkel olduğundan Önerme 1.1 den $Rm' \cap Rm = 0$ olur. Aksi halde ilgili olurlardı. Tersi için $Rm' \cap Rm = 0$ olduğundan m' ve m ilgili değillerdir.

Tanım 1.4: Bir $p \in R$ elemanı aşağıdaki şartları sağlarsa bir R-modül M için asal olarak adlandırılır:

(i) p, R de indirgenemez,

(ii) $a \in R$ ve $m \in M$ için $p|am$ iken ya M de $p|m$ dir yada R de $p|a$ dır.

Tanım 1.5: Bir tamlık bölgesi R üzerindeki bir A(burulma içermeyen) M modülü için aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, M ye tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül (TÇM) veya faktöriyel modül denir:

(TÇM 1) Sıfırdan farklı her $x \in M$ elemanı, $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları R de ve m elemanı M de indirgenemez olmak üzere $x = a_1 a_2, \dots, a_n m$ şeklinde bir indirgenemez çarpanlarına ayrılışa sahiptir.

(TÇM 2) x elemanının iki farklı indirgenemez çarpanlarına ayrılışı $x = a_1 a_2, \dots, a_n m = b_1 b_2, \dots, b_k m'$ ise

$n = k$, M de $m \sim m'$ ve her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için b_i lerin sırası düşünülmeksizin R de $a_i \sim b_i$ dir.

Özellik 2.2 den, eğer bir R-modülü M bir TÇM ise, o zaman R mutlaka bir TÇM'dir. Bu nedenle, bir R -modülünün faktörlenebilirliğini ararken, baştan R halkasının bir TÇM olduğunu varsayabiliriz. R bir TÇM ise, aşağıdaki [TÇM1'] koşulunun [TÇM1] anlamına geldiğini belirtiyoruz.

Tanım 1.6: M bir burulmalı R -modül, $a \in R$ ve $m \in M$ olsun.

(1) Bir $d \in R$ elemanı, a ile m nin en büyük ortak bölenidir (ebob), eğer

(i) R de $d|a$ ve M de $d|m$ ve

(ii) R de $c|a$ ve M de $c|m$ ve olacak şekilde bir $c \in R$ elemanı olduğunda c , d nin bir bölenidir.

Bu durumda d elemanı (a, m) veya $ebob\ \{a, m\}$ ile gösterilir.

(2) Bir $m^* \in M$ elemanı a ile m nin en küçük ortak katıdır (ekok), eğer

(i) M de sırasıyla $a|m^*$ ve $m|m^*$ ve

(ii) M de $a|w$ ve $m|w$ olacak şekilde bir $w \in M$ elemanı var ise m^*, w elemanının bir çarpanı olur.

Bu durumda, m^*, $[a, m]$ veya $ekok\ \{a, m\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.2: M, bir R tamlık bölgesi üzerinde bir modül olsun. m,$m^* \in M$ ve $a \in R$ olsun. Şu halde ;

(1) $m^* \sim ekok\ [a, m]$ olması için gerek ve yeter koşul $aM \cap Rm = Rm^*$ olmasıdır.

(2) p, R nin indirgenemez bir elemanı ve $ekok\ [p, m]$, M de var olsun. Eğer p , m yi bölmez ise $pM \cap Rm = Rpm$ dir.

İspat: (1) $m^* \sim ekok[a, m]$ olduğunu kabul edelim, bu durumda en az bir birimsel eleman $u \in R$ için $um^* = ekok[a, m]$ olur. Burada tanımdan $a|um^*$ ve $m|um^*$ elde edilir. Böylece $m^* \in aM \cap Rm$, yani $Rm^* \subseteq aM \cap Rm$ bulunur. Ters kapsamayı göstermek için de bir $x \in aM \cap Rm$ alalım. Bu durumda $x = an = bm$ olacak şekilde $n \in M$,$b \in R$ elemanları vardır. Yani $a|x$

ve $m|x$ olur. En küçük ortak kat tanımından $m^*|x$ olur ki bu da $x \in Rm^*$ demek olur. Böylece ters kapsama gösterilmiş olur ve $aM \cap Rm = Rm^*$ ifadesi elde edilmiş olur. Şimdi de $aM \cap Rm = Rm^*$ olduğunu kabul edelim. $x = ekok[a, m]$ olsun. $aM \cap Rm = Rm^*$ olduğundan $a|m^*$ ve $m|m^*$ elde edilir. $x = ekok[a, m]$ olduğundan da $x \in aM \cap Rm = Rm^*$ ve böylece $m^*|x$ bulunmuş olur.

(2) $m^* \sim ekok\ [p, m]$ olsun. Bu durumda bazı sıfırdan farklı $a, b \in R$ ve $m_0 \in M$ için $0 \neq m^* = am = pm_0$ ve $pm = bm^*$ dır. $p = ab$ dir ve böylece $m = bm_0$ olur. p, m yi bölmesin ve $b|m$ olduğundan p, b ile ilgili değildir elde edilir. Böylece $p \sim a$ ve b birimseldir, yani $m^* \sim pm$ olduğu için (1) den $pM \cap Rm = Rpm$ olduğu görülür.

Önerme 1.3: M bir R, GCD-bölgesi üzerinde bir modül olsun öyle ki her $a \in R$ ve $m \in M$ için $ebob[a, m] = (a, m)$ mevcut olsun. Bu durumda bir $b \in R$ için;

(i) $((a, b), m) = (a, (b, m))$,

(ii) $(ba, bm) = (b(a, m))$,

(iii) $a|bm$ ve $(a, m) = 1$ ise $a|b$ durumlarını sağlar.

2. Faktöriyel Modüller

Bu bölümde, bir faktöriyel modülün aşağıdaki temel karakterizasyonunu ve bunun çeşitli örneklere uygulanmasını araştıracağız.

Teorem 2.1: M, TÇM üzerinde bir R modül olsun.

O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) M modülü R üzerinde tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür.

(2) M nin her indirgenemez elemanı ilkeldir;

(3) Herhangi $a \in R$ ve $m \in M$ ikilisi için bir $ebob[a, m]$ R de mevcuttur.

(4) Herhangi $a \in R$ ve $m \in M$ ikilisi için $ekok[a, m]$ M de mevcuttur, yani $aM \cap Rm$ alt modülü devirlidir.

(5) R nin her p indirgenemez elemanı , M de asaldır.

(6) R nin a ve b elemanları $aM \subseteq bM$ olacak şekilde ise, o zaman $a|b$ dir ve her $a, b \in R$ ikilisi için bir $c \in R$ olacak şekilde $aM \cap bM = cM$ dir.

Sonraki sonuçlarda faktöriyel modüller hakkında bazı temel bilgiler vereceğiz. Çoğu zaten tartışıldı ve (Atani & Farzilipour, 2006) de kanıtlandı; ancak, bazı kanıtlar gereksiz yere uzun, burada Teorem 2.1'i uygulayarak daha basit ispatlar vermek niyetindeyiz, sonuçlardaki her modülün sıfırdan farklı bir modül olduğunu varsayıyoruz.

Sonuç 2.1: Bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R üzerindeki her Rm burulmalı devirli modülü bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür ve bu modülün her ilkel elemanı m ile ilgilidir.

İspat: İlk önce $m \in Rm$ nin indirgenemez bir eleman olduğunu gösterelim. $m = am^*$ olacak şekilde $a \in R$ ve $m^* \in Rm$ olsun. $m^* \in Rm$ olduğundan en az bir $r \in R$ için $m^* = rm$ dir. Bir önceki eşitlikte yerine yazarsak, $m = am^* = arm$ bulunur ve

böylece $a \in R$ birimsel olarak bulunmuş olur. Şimdi herhangi bir $n \in Rm$ alalım. Bu durumda en az bir $r \in R$ için $n = rm$ olur. R bir TÇB olduğundan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ indirgenemez elemanları için $r = a_1 a_2, \ldots, a_n$ ve buradan da $n = rm = a_1 a_2, \ldots, a_n m$ bulunduğundan Rm de (TÇM 1) sağlanır. M burulmalı modül olduğundan da (TÇM 2) sağlanır ve böylece Rm bir TÇM modül olarak elde edilir. Şimdi de Rm de bir ilkel eleman olan $x \in Rm$ alalım. Bu durumda $m|x$ ve R birimli olduğundan $x|m$ elde edilir. Böylece $m \sim x$ olur.

Sonuç 2.2: Her vektör uzayı bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür ve sıfırdan farklı her elemanı ilkeldir.

Sonuç 2.3: K, bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R nin kesir cismi ve M modülü K nın bir R-alt modülü olsun. Şu halde M bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olması için gerek ve yeter koşul M modülünün devirli olmasıdır. Dolayısıyla R nin bir ideali R üzerinde bir TÇB olması için gerek ve yeter koşul bu idealin temel ideal olmasıdır.

İspat: M nin herhangi sıfırdan farklı $x = {}^{a}/_{b}$ ve $y = {}^{c}/_{d}$ eleman çifti için $0 \neq bcx = ady \in Rx \cap Ry$ dir. Sonuç 2.3 e göre M, bir ilkel eleman tarafından üretilen en fazla bir devirli alt modüle sahiptir. Dolayısıyla tek bir tane indirgenemez elemanı olmuş olur. Buradan da M bir devirli modül elde edilir. Tersi için de M yi devirli kabul edelim. Bu durumda R tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan M de tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül elde edilmiş olur.

Sonuç 2.4: Bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olan R üzerindeki bir M tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modülün her N pür alt modülü de tek türlü çarpanlarına ayrılabilen R-modüldür. N nin bütün indirgenemez elemanları aynı zamanda M de indirgenemezdir.

İspat: N alt modülünün (TÇM 1) şartını sağladığı açıktır. Herhangi $a \in R$, $m \in M$ ve bazı $x \in M$ için N pür alt modül olduğundan

$aN \cap Rm = (aM \cap N) \cap Rm = (aM \cap Rm) \cap N = Rx \cap N = Rx$ elde edilir.

Böylece Teorem 2.1, (4) ten N bir TÇM dir. $N \subseteq M$ olduğundan N nin bütün indirgenemez elemanları aynı zamanda M de indirgenemez elemandır.

Sonuç 2.5: $\{M_i | i \in I\}$ ailesi bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde modüllerin ailesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(1) $\prod_{i \in I} M_{\boldsymbol{i}}$, R üzerinde bir TÇM dir.

(2) $\bigoplus_{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{M_i}$, $\boldsymbol{R}$ üzerinde bir TÇM dir.

(3) Her M_i, R üzerinde TÇM dir.

İspat: Sonuç 2.4 den (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) olduğu görülür. Şimdi de (3) ün varlığını kabul edelim ve $\prod_{i \in I} M_{\boldsymbol{i}} = M$ olsun. Bazı $a_i \in R$ ve bir $m_i{}' \in M_i$ indirgenemez elemanı için $m_i = a_i m_i{}'$ olmak üzere $m = (m_i)_{i \in I} \in M$ ise m elemanının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\{a_i | i \in I\}$ kümesinin R de en büyük ortak böleninin olmamasıdır. Böylece M nin (TÇM

1) koşulunu sağladığını görebiliriz. p elemanı bazı $a \in R$ ve $m = (m_i)_{i\in I} \in M$ için M de $p|am$ olacak şekilde R nin bir indirgenemez elemanı olsun. Şu halde her i için M_i de $p|am_i$ dir. Eğer R de p, a yı bölmez ise Teorem 2.1 , (5) ten her i için M_i de $p|m_i$ olduğu görülür, çünkü her M_i faktöriyeldir. Sonuç olarak $p|m$ ve böylece yine Teorem 2.1, (5) ten $\prod_{i\in I} M_i = M$ faktöriyeldir. Dolayısıyla (3) $\Rightarrow$ (1) sağlanmış olur.

Sonuç: (1) Bir tek türlü çarpanlarına ayrılan bölge üzerindeki her serbest modül tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür.

(2) Bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge üzerindeki her projektif modül bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüldür.

(3) Eğer R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen ise o zaman R modülleri $R[x_i|i \in I]$ ve $R[[x_i|i \in I]]$ herhangi bir I için faktöriyeldir.

Sonuç 2.6: M, tek türlü bir çarpanlara ayrılabilen bir temel ideal alan üzerinde R modül olsun. O halde (1) de M, ancak ve ancak [TÇM1]'i sağlıyorsa bir faktöriyeldir ve (2) de M bir TÇM ise, o zaman aslına uygun sabit bir R- modülüdür .

İspat : (1) Gerekliliği aşikardır. Yeterliliğini kanıtlamak için $p,\ a \in R$ ve $m \in M$ için $p|am$ olacak şekilde R nin bir indirgenemez elemanı olsun. p nin a yı bölmediğini varsayalım , o zaman R de $(p, a) = 1 = ps + at$ olacak şekilde bazı s ve t vardır. Şimdi $p|m$ ise $m = psm + atm$ olduğunu görebiliriz; bu nedenle M, Teorem 2.1,(5)' den bir faktöriyeldir. (2)

3.Tek Türlü Çarpanlarına Ayırma Modülerinde Asal Alt Modüller

Bu bölümde, bir TÇM'de asal ideallere benzer roller oynayan bir faktöriyel modülün iki alt modül ailesini ele alıyoruz.

Tanım 3.1: Bir R halkası üzerinde bir M modülünün N has alt modülü olsun.

(i) $(N:_R M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$ kümesi R de bir idealdir.

(ii) Eğer $x \in M$ ve $a \in R$ için $ax \in N$ iken $x \in N$ veya $a \in (N:_R M)$ oluyorsa N ye asal alt modül denir.

Açıkça, Bir R halkasının her P asal ideali R-modül R nin asal alt modülüdür. Her burulmalı modülün (0) alt modülü asal alt modüldür.

Aşağıdaki Sonuç 3.1 - Sonuç 3.3'te, M modüllerinin burulmalı olmaması gerekir.

Sonuç 3.1: N, bir R-modül ve M nin bir asal alt modülü ise, $(N:_R M)$ ideali de R nin bir asal idealdir.

İspat: $\boldsymbol{N}$ alt modülü $\boldsymbol{M}$ de asal alt modül ve $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ için $\boldsymbol{ab} \in (\boldsymbol{N}:_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M})$ olsun. Kabul

edelim ki $\boldsymbol{b} \notin (\boldsymbol{N}:_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M})$ olsun. Bu durumda en az bir $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}$ için $\boldsymbol{bm} \notin \boldsymbol{N}$ fakat

$\boldsymbol{abm} \in \boldsymbol{N}$ dir. Buradan da $\boldsymbol{N}$ asal olduğundan $\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{N}:_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M})$ elde edilir.

Sonuç 3.2: Bir modülün her maksimal alt modülü asal alt modüldür.

İspat: M bir R-modül ve N bir maksimal alt modül olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için $rm \in N$ olsun. Kabul edelim ki $m \notin N$ olsun. Bu durumda $M = N + (m)$ dir. Her $x \in M$ için $n \in N$ ve $a \in R$ vardır öyle ki $x = n + am$ dir ve böylece $rx = r(n + am) = rn + ram \in N$ elde edilir. Yani $r \in (N:_R M)$ bulunmuş olur.

Sonuç 3.3: Bir M modülünün N has alt modülünün pür olması için gerek ve yeter koşul N nin asal alt modül ve $(N:_R M) = (0)$ olmasıdır.

İspat : N, M modülünün bir has pür alt modülü olsun. $r \in (N:_R M)$ ise $rM \subseteq N$ dir ve böylece $rM = rM \cap N = rN$ bulunur. M burulmalı modül olduğundan da $r = 0$ elde edilir. Şimdi de $m \in M$ ve $r \in R$ için $rm \in N$ olsun. Kabul edelim ki $m \notin N$ olsun. Bu durumda $rm \in rM \cap N = rN$ bulunur ve M burulmalı modül olduğundan da $r = 0 \in (N:_R M)$ elde edilir. Tersi gerektirmeyi göstermek için $r \in R$ alalım. $rM \cap N \supseteq rN$ olduğu açıktır. Ters kapsama için $0 \neq x \in rM \cap N$ olsun. Bu durumda $x = rm = n$ olacak şekilde $m \in M$ ve $n \in N$ vardır. $rm \in N$ ve N asal alt modül olduğundan $r \in (N:_R M)$ veya $m \in N$ dir. Kabulümüzden $r \neq 0$ olduğundan $m \in N$ bulunur ve böylece $rm \in rN$ olur.

Sonuç 3.4: M bir serbest R-modül ise R nin her P asal ideali için PM alt modülü M de asaldır ve $(PM: M) = P$ dir.

Önerme 3.1: M bir tamlık bölgesi üzerinde modül ve $Rm \neq M$ olacak şekilde $m \in M$ olsun. O halde m nin ilkel olması için gerek ve yeter koşul Rm nin asal alt modül ve $(Rm: M) = (0)$ olmasıdır.

İspat: $m \in M$ bir ilkel eleman ve $0 \neq r \in R$, $x \in M$ için $rx \in Rm$ olsun. Bu durumda $m|rx$ ve m ilkel olduğundan $m|x$ bulunur. Yani $x \in Rm$ olur. $r = 0$ ise de

$r \in (Rm: M)$ olur. Şimdi de $r \in (Rm: M)$ alalım. Bu durumda her $x \in M$ için $rx \in Rm$ olur. $x \in M \setminus Rm$ olarak seçersek $m|x$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $r = 0$ ve böylece $(Rm: M) = (0)$ bulunmuş olur. Tersi için de Rm nin asal alt modül ve $(Rm: M) = (0)$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq r \in R$, $x \in M$ için $m|rx$ olsun. O zaman $rx \in Rm$ olur. Burada $0 \neq r \in R$ ve $(Rm: M) = (0)$ olduğundan $x \in Rm$ ve böylece $m|x$ bulunur.

Önerme 3.2: M bir R tamlık bölgesi üzerinde, her birimsel olmayan $p \in R$ elemanı için $pM \neq M$ olmak üzere bir modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) p elemanı M de asaldır.

(2) pM alt modülü M de asaldır ve $(pM: M) = (p)$ dir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) p elemanı M de asal olsun. $r \in R$, $x \in M$ için $rx \in pM$ olsun. Bu durumda $p|rx$ olur ve böylece tanımdan $p|r$ veya $p|x$ elde edilir. $p|r$ ise

$r \in (p) \subseteq (pM:_R M)$ olur. $p|x$ ise $x \in pM$ elde edilir. Şimdi de $(pM: M) = (p)$ olduğunu gösterelim. $(p) \subseteq (pM:_R M)$ olduğu açıktır. Ters kapsamayı göstermek için de $a \in (pM: M)$ alalım. Bu durumda $aM \subseteq pM$ dir. Özel olarak $m \in M \setminus pM$ aldığımızdan $am \in pM$ olduğundan $p|a$ bulunur. Yani $a \in (p)$ bulunmuş olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) pM alt modülü M de asal ve $(pM: M) = (p)$ olsun. Bu durumda $p \in R$ indirgenemez eleman olur. $r \in R$, $x \in M$ için $p|rx$ olsun. Buradan $rx \in pM$ olur. pM asal alt modül

olduğundan $x \in pM$ veya $r \in (pM: M) = (p)$ elde edilir. Bu da $p|x$ veya $p|r$ demek olur, yani p elemanı M de asaldır.

Teorem 3.1: M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde tek türlü çarpanlara ayrılabilen modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır,

(1) $Rm \neq M$ şeklindeki her $m \in M$ indirgenemez elemanı için Rm asal alt modüldür ve $(Rm: M) = (0)$ dir.

(2) Her $p \in R$ indirgenemez elemanı için pM asal alt modüldür ve $(pM: M) = (p)$ dir.

Sonuç: M bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olan R üzerinde Rx devirli modülü ve m de x ile ilgili olmayacak şekilde $m \in M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) Rm asal alt modüldür.

(2) Bazı $p \in R$ indirgenemez elemanı için $m \sim px$ dir.

(3) Bazı $p \in R$ indirgenemez elemanı için $Rm = pM$ dir.

İspat: Burada $a \in R$ için $m = ax$ olur ise, ardından da $Rm: Rx = (a)$ olur. Eğer Rm asal ise, o zaman (a) Sonuç 3.1'e göre bir asal idealdir dolayısıyla, $m \sim px$ için indirgenemez eleman olur. O halde sonucun ispatı, Teorem 3.1, (2) uygulanarak kolayca tamamlanabilir.

Tanım 3.2: Burulmadan bağımsız bir modülde, sıfırdan farklı bir asal alt modülün, (0) dışında sabit bir asal alt modülü içermemesi durumunda minimum olduğu söylenir.

Teorem 3.2: N, faktöriyel bir R-modül ve M nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. O halde (1) N, olan bir minimal asal alt

modüldür $N:M = (0)$, ancak ve ancak M nin η özel öğesi için $N = R\eta \subsetneqq M$ için M nin ilkel elemanı η ve (2) de N, bir minimal asal alt modüldür $N:M \neq (0)$ olan $p \in R$ elemanı için ancak ve ancak $N = pM$ indirgenemez bir elemandır.

İspat: N, $N:M = (0)$ olan bir minimal asal alt modül ise, N saftır ve $\eta \in M$ ilkel elemanını içerir. N minimum olduğundan ve $R\eta$ Teorem 3.1 ile asal olduğundan, $N = R\eta$ tersini görmek kolaydır, çünkü η nin ilkel olduğu $R\eta$ de bulunan M nin sıfır olmayan herhangi bir asal alt modülü saftır ve bu nedenle η yi içerir. (2) gereklilik, sıfır olmayan asal ideal $N:M$ nin indirgenemez bir p, R elemanı içermesi gerektiği gerçeğinden kaynaklanır, böylece $pM \subseteq N$, burada pM Teorem 3.1'e göre bir asal alt kümedir.

yeterliliği kanıtlamak için N', R nin bazı indirgenemez p elemanı için $N = pM$ de bulunan M nin bir asal alt modülü olsun. Teorem 3.1'de N nin $N:M = (p)$ ile bir asal alt modül olduğunu gördük, dolayısıyla N, M nin ilkel öğesini içermez. $N':M = (p)$; aksi halde, $N':M = (0)$ ve $N' \subseteq N$ ilkel bir öğe içerir.

şimdi, $pM = N = N'$ olduğu açıktır. dolayısıyla $N = pM$, $N:M = (p) \neq (0)$ olan bir minimal asal alt modüldür.

Ancak ve ancak sıfır olmayan her asal idealin bir asal içermesi durumunda tamlık bölgesinin bir TÇM olduğu bilinmektedir. Benzer bir ifadenin modüller için de geçerli olduğunu bir sonraki Teorem 3.3'te kanıtlayacağız, burada faktöriyel modüller-vektör uzaylarının önemsiz bir durumunu hariç tutacağız.

Teorem 3.3: R, alan olmayan bir TÇM olsun. Bir R-modülü M, bir TÇM$\Leftrightarrow$ (1) M sıfır olmayan asal alt modüller içerir ve (2)

her sıfır olmayan asal alt modül, $\eta \in M$ ilkel öğesi için $p\eta$ biçiminde bir öğeye ve bir asal öğe olan $p \in R$ ye sahiptir.

İspat: Gereklilik Teorem 3.1'den ve bir faktöriyel modülün sıfır olmayan her asal alt modülünün bir minimum asal alt modül içerdiği gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Minimal asal alt modülün her iki tipinin de (bkz. Teorem 3.2) teoremde açıklandığı gibi $p\eta$ biçiminde bir öğe içerdiğine dikkat edin.

Yeterliliği kanıtlamak için S, M deki tüm ilkel öğelerin kümesi olsun ve $S^* = \{a\eta | \eta \in S \; ve \; a \in R - \{0\}\}$; hipoteze göre $S \neq \emptyset$ olduğundan $S^* \neq \emptyset$ dir.

M nin faktöriyel olduğunu ancak ve ancak $S^* = M - \{0\}$ olduğunda söyleyebiliriz. Varsayalım ki $S^* \subsetneqq M - \{0\}$ ve $e, M - S^*$ nin sıfır olmayan bir öğesi olsun, sonra $Re \subseteq M - S^*$ olsun. Aksi takdirde, $e \in S^* \cap (M - S^*) = \emptyset$ olur, çünkü $Re \cap S^* \neq \emptyset$ ise bazı ilkel elemanlar e yi M ye böler. Daha sonra, S^* nin hariç tutulmasına göre Re yi M maksimalinin bir N alt modülüne genişletiriz; N, Zorn'un Lemması tarafından mevcut olmalıdır.

N nin saf olduğunu iddia ediyoruz. eğer öyle değilse, o zaman $am \in aM \cap N$ olacak şekilde bazı $0 \neq a \in R$ ve $m \in M - N$ vardır. $(N + Rm) \cap S^* \neq \emptyset$ olduğundan , bazı $x \in N$ ve $r \in R$ için $w = x + rm$ olacak şekilde bir $w \in S^*$ öğesi vardır, bu da $aw = ax + ram \in N \cap S^* \neq \emptyset$ çelişkisini ifade eder. Böylece N saftır, bu yüzden asaldır. Hipotezinden dolayı, elimizde $N \cap S^* \neq \emptyset$, bir çelişkisi vardır. Bu nedenle $S^* = M - \{0\}$, dolayısıyla M faktöriyeldir. Bu ispatı tamamlar

Açıklama: $M = R$ özel durumunda, Teorem 3.3, TÇM için yukarıda belirtilen Teorem 5 ile aynıdır. Hatırlayalım; R-modülü $M = R$ de ancak ve ancak η bir birim ise η ilkeldir.

4. Sonuçlar

Bu çalışmada tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalardaki özelliklerin modüllerdeki uygulamaları incelendi. Daha sonraki çalışmalarda R değişmeli ve birimli bir halka ve M burulmasız serbest modülken, M nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olmasının R'nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olmasını gerektirip gerektirmediği sorusunun cevabı araştırılabilir.

Kaynaklar

[1] Sharp R.Y. (2000). *Steps in Commutative Algebra*, London Mathematical Society Students 51, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Nicolas, A. M. (1967). Modules Factorials, *Seminaire Dubreil-Pisot, 20(10): 1-12*.

[3] Sharpe D.W. (1987), *Rings and Factorization*, Cambridge University Press, Cambridge

[4] Lu, C. P., (1977). Factorial Modules, *Rocky Mountain Journal of Math., 7(1): 125-140.*

[5] Nicolas, A. M. (1974). Extensions Factorielles, *Seminaire Dubreil, 27(15): 1-8.*

[6] Costa, D. L. (1976). Unique Factorization in Modules and Symmetric Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc., 224(2): 267-280.*

[7] Atani, S. E. ve Farzilipour, F. (2006), Notes on the Graded Prime Submodules*, International Mathematical Forum, 1(38): 1871-1880.*

[8] Atani, S. E. (2006). On Graded Prime Submodules, *Chiang Mai J. Sci., 33(1): 3-7.*

[9] Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, S. (1997). Factorization in commutative rings with zero divisors, II, Factorization in Integral Domains, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math, 189:197-219.*

[10] Fletcher, C.R. (1969). Unique Factorization Rings, *Proc. Camb. Phil. Soc., 65:579-583.*

[11] Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, S. (1996). Factorization in commutative rings with zero divisors, *Rocky Mountain J. Math, 26:439-480.*

[12] Kaplansky, I. (1970). *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Boston.

BÖLÜM II

Bir Sturm-Liouville Sınır-Değer-Geçiş Problemi İçin Rayleıgh Oranı

Kadriye AYDEMİR[1]
Merve YÜCEL[2]

Giriş

Homojen sınır koşullarına sahip bazı homojen kısm diferansiyel denklemlerin çözümünde değişkenlerin ayrılması yöntemi oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Örneğin, düzgün olmayan bir çubuktaki ısı akışı

$$\boldsymbol{uv\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{K}_0\frac{\partial y}{\partial x}\right) + Q(y)} \qquad (1)$$

kısmi diferansiyel denklemi ile modellenir. Burada termal katsayılar u, v ve $\mathcal{K}_0$ x'in fonksiyonlarıdır. Isı kaynağı Q'nun y sıcaklığı ile

[1] Prof. Dr., Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Amasya/Turkey, Orcid: 0000-0002-8378-3949, kadriyeaydemr@gmail.com
[2] Dr. Öğr. Üyesi, Hitit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Çorum/Turkey, Orcid: 0000-0001-7990-2821, merve.yucel@outlook.com.tr

orantılı olduğu varsayılırsa yani $Q = \alpha(x)y$ ise o zaman (1) denklemi

$$\boldsymbol{uv\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{K}_0\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \alpha y} \qquad (\mathbf{2})$$

şeklinde yazılabilir. Homojen sınır koşullarının belirtildiği varsayıldığında, değişkenlerin ayrılması yöntemi (2) denklemini çözmek için kullanılabilir. Eğer $y(x,t) = \mathcal{X}(x)\psi(t)$ olarak alınırsa bu durumda denklem

$$\boldsymbol{\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{uv\mathcal{X}}\frac{d}{dx}\left(\mathcal{K}_0\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}\right) + \frac{\alpha}{uv} = -\mu}$$

biçiminde değişkenlere ayrılabilir. Bu durumda

$$\boldsymbol{\frac{d\psi}{dt} = -\mu\psi} \qquad (3)$$

ve

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\mathcal{K}_0\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}\right) + \alpha\psi + \mu uv\mathcal{X} = 0} \qquad (4)$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Bu, uygun sınır koşullarına sahip

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(p\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}\right) + \alpha\psi + \mu\sigma\mathcal{X} = 0} \qquad (5)$$

şeklinde genel bir diferansiyel denklem sınıfının incelenmesini teşvik eder. (5) denklemi Sturm-Liouville diferansiyel denklemi olarak adlandırılmaktadır. Tellerin titreşimi, atomik parçacıkların etkileşimi, karmaşık ortamların elektrodinamiği, aerodinamik, polimer reolojisi veya dünyanın serbest salınımları gibi birçok fiziksel süreç Sturm-Liouville özdeğer problemlerini ortaya çıkarır (örneğin bkz. Cannon & Meyer 1971; Gesztesy, Macdeo & Streit 1985; Gonzalez-Velasco, 1996; Petrovsky, 2012; Titeux &

Yakubov, 1997). ve bunlara atıfta bulunulan referanslar).

Rayleigh oranı, katıhal mekaniğin yanı sıra kuantum mekaniğinde de kullanılan önemli bir yaklaşım yönteminin temelidir. $\mathcal{L}u = \lambda u$ özdeğer problemi için R(u) Rayleigh oranı

$$\boldsymbol{R(u) = \frac{\langle \mathcal{L}u, u \rangle_H}{\langle u, u \rangle_H}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{L}$, H iç çarpım uzayında diferansiyel bir operatördür. Bu ifadeden, diferansiyel operatör $\mathcal{L}$'nin herhangi bir öz çifti (λ_i, u_i) için λ_i = R(u_i) olduğu sonucu çıkar. Herhangi bir özdeğer Rayleigh oranıyla özfonksiyonuna ilişkilendirilebilse de, özfonksiyon bilinmediği için bu oran özdeğeri açıkça belirleyemez. Ancak, diferansiyel denklemi çözmeden (yani özfonksiyon bilinmediğinde bile) Rayleigh oranından ilginç ve anlamlı sonuçlar elde edilebilir. Rayleigh oranı, Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini ve özellikle en düşük özdeğerini tahmin etmenin sistematik bir yoludur.

Geçiş koşulları ile birlikte tanımlı ve iç tekilliğe sahip olan diferansiyel denklemler için spektral problemlerin bazıları Allahverdiev, & Tuna, 2019; Allahverdiev, Tuna, & Isayev, 2024; Aydemir, Olğar, & Mukhtarov, 2019; Aydemir, Olğar, Mukhtarov & Muhtarov, 2018; Mukhtarov, Olgar, Aydemir & Jabbarov, Olğar, 2023; Olğar, Mukhtarov & Aydemir 2018; Stikonas, Şen, 2023; Şen, & Štikonas, 2022. çalışmalarında araştırılmıştır.

ESAS SONUÇLAR

$$\mathcal{L}(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y,\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \qquad (6)$$

iki-aralıklı Sturm-Liouville diferansiyel denkleminden,

$$\mathcal{L}_1 y := y(-1) = 0,\ \mathcal{L}_2 y := y(1) = 0 \qquad (7)$$

sınır şarlarından ve $x = 0$ iletim noktasında verilmiş

$$t_1 y := y(+0) - \alpha y(-0) = 0 \tag{8}$$

$$t_2 y := y'(+0) - \beta y'(-0) = 0 \tag{9}$$

geçiş şartlarından oluşmuş sınır-değer-geçiş problemini gözönüne alalım; burada q(x) gerçel değerli fonksiyondur ve bu fonksiyon $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında süreklidir ve sonlu $q(\pm 0)=\lim_{\varepsilon\to 0} q(|\pm\varepsilon|)$ limit değerlerine sahiptir, α, β, gerçel sayılardır, λ ise kompleks özdeğer parametresidir.

Problemin Özdeğer Ve Özfonksiyonlarının Bazı Temel Özellikleri

Teorem 1. Eğer αβ=1 ise o halde (6)-(9) Sturm-Liouville sınır-değer geçiş probleminin (SLSDGP) tüm özdeğerleri (eğer mevcut ise) gerçel sayılardır.

İspat. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısı keyfi bir özdeğer, $y_0(x)$ ise bu özdeğere karşılık gelen keyfi bir özfonksiyon olsun. O halde

$$-y_0''(x) + q(x)y_0(x) = \lambda_0 y_0(x),\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{10}$$

$$y_0(-1) = 0,\ y_0(1) = 0 \tag{11}$$

$$y_0(+0) = \alpha y_0(-0),\quad y_0'(+0) = \beta y_0'(-0) \tag{12}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerin kompleks eşleniğini alırsak, sırası ile

$$-\overline{y_0}''(x) + q(x)\,\overline{y_0}(x) = \overline{\lambda_0}\ \overline{y_0}(x),\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{13}$$

$$\overline{y_0}(-1) = 0,\ \overline{y_0}(1) = 0 \tag{14}$$

$$\overline{y_0}(+0) = \alpha\,\overline{y_0}(-0),\quad \overline{y_0}'(+0) = \beta\,\overline{y_0}'(-0) \tag{15}$$

eşitlikleri bulunur. (13)-(15) eşitlikleri gereği $\overline{\lambda_0}$ sayısı da (6)-(9) probleminin özdeğeridir ve $\overline{y_0(x)}$ fonksiyonu bu özdeğere uygun özfonksiyondur. (10) eşitliğinin her iki tarafını $\overline{y_0(x)}$ ile ve (13) eşitliğinin her iki tarafını ise $y_0(x)$ ile çarptıktan sonra taraf-tarafa çıkarırsak $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için

$$-y_0''(x)\overline{y_0(x)} + \overline{y_0}''(x)y_0(x) = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right) \mid y_0(x) \mid^2 \qquad (16)$$

özdeşliği elde edilir.

$$-y_0''(x)\overline{y_0}(x) + \overline{y_0}''(x)y_0(x) = -(y_0'(x)\overline{y_0(x)} - \overline{y_0}'(x)y_0(x))' \qquad (17)$$

olduğu için (10) ve (17) den

$$\frac{d}{dx}W(y_0,\overline{y_0};x) = (\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \mid y_0(x) \mid^2 \qquad (18)$$

elde edilir. Her iki taraf $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında integrallenirse

$$W(y_0,\overline{y_0};-0) - W(y_0,\overline{y_0};-1) + W(y_0,\overline{y_0};1) - W(y_0,\overline{y_0};+0)$$
$$= \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left(\int_{-1}^{-0} \mid y_0(x) \mid^2 dx + \int_{+0}^{1} \mid y_0(x) \mid^2 dx\right) \qquad (19)$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan (11)-(14) eşitlikleri gereği

$$W(y_0,\overline{y_0};-1) = y_0(-1)\,\overline{y_0}'(-1) - y_0'(-1)\overline{y_0}(-1) = 0 \qquad (20)$$

ve

$$W(y_0,\overline{y_0};1) = y_0(1)\,\overline{y_0}'(1) - y_0'(1)\overline{y_0}(1) = 0 \qquad (21)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi (12) ve (15) eşitliklerinden yararlanırsak

$$W(y_0,\overline{y_0};+0) = y_0(+0)\,\overline{y_0}'(+0) - y_0'(+0)\overline{y_0}(+0)$$
$$= \alpha\,\beta\,W(y_0,\overline{y_0};-0) = W(y_0,\overline{y_0};-0) \qquad (22)$$

elde edilir. (20)-(22) eşitliklerini (19) de yerine yazarsak

$$\left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left(\int_{-1}^{-0} |\, y_0\,(\mathrm{x})\,|^2\, dx + \int_{+0}^{1} |\; y_0\,(\mathrm{x})\,|^2\, dx\right) = 0 \qquad (23)$$

elde edilir. $y_0(\mathrm{x})$ özfonksiyon olduğu için

$$\int_{-1}^{-0} |\, y_0\,(\mathrm{x})\,|^2\, dx + \int_{+0}^{1} |\; y_0\,(\mathrm{x})\,|^2\, dx \neq 0 \qquad (24)$$

sağlanır. (23) ve (24) den $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ elde edilir. Yani λ_0 gerçel sayıdır. İspat bitti.

Teorem 2. Kabul edelim ki αβ=1 şartı sağlansın. O halde (6)-(9) SLSDG- nin tüm özdeğerlerinin geometrik katı 1-e eşittir, yani her bir özdeğere uygun olan özfonksiyonlar bir-birinden sabit çarpan ile elde edilir.

İspat. λ_0 keyfi bir özdeğer $y_1(\mathrm{x})$ ve $y_2(\mathrm{x})$ ise bu özdeğere uygun keyfi iki tane özfonksiyon olsun. O halde

$$W(y_1, y_2; -1) = y_1(-1)\, y_2{}'(-1) - y_1{}'(-1) y_2(-1) = 0 \qquad (25)$$

ve

$$W(y_1, y_2; 1) = y_1(1)\, y_2{}'(1) - y_1{}'(1) y_2(1) = 0 \qquad (26)$$

eşitlikleri bulunur. Bu nedenle $y_1(\mathrm{x})$ ve $y_2(\mathrm{x})$ özfonksiyonları hem $[-1,0)$ hem de $(0,1]$ aralıklarında lineer bağımlıdırlar. Dolayısıyla

$$y_2(x) = \begin{cases} a y_1(x), & x \in [-1,0) \\ b y_1(x), & x \in (0,1] \end{cases} \qquad (27)$$

olacak biçimde $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ sayıları bulunur. $y_1(\mathrm{x})$ ve $y_2(\mathrm{x})$ özfonksiyonları (9) geçiş şartlarını sağladıkları için (27) eşitliğinden

$$y_2(-0) = a y_1(-0) = \frac{a}{\alpha} y_1(+0) = \frac{a}{b\alpha} y_2(+0) \qquad (28)$$

ve

$$y_2'(-0) = ay_1'(-0) = \frac{a}{\beta} y_1'(+0) = \frac{a}{b\beta} y_1'(+0) \tag{29}$$

eşitlikleri sağlanır. Diğer taraftan (9) geçiş şartları gereği

$$y_2(-0) = \frac{1}{\alpha} y_2(+0) \tag{30}$$

ve

$$y_2'(-0) = \frac{1}{\beta} y_2'(+0) \tag{31}$$

eşitlikleri sağlanır. (28)- (31) eşitliklerinden

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{b} - 1\right) y_2(+0) = 0 \tag{32}$$

ve

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{a}{b} - 1\right) y_2'(+0) = 0 \tag{33}$$

eşitlikleri bulunur. $y_2(+0)$ ve $y_2'(+0)$ sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Aksi halde, yani $y_2(+0)=y_2'(+0)=0$ olduğu durumda varlık ve teklik teoremi gereği $x \in (0,1]$ için $y_2(x)=0$ olurdu. Bu durumda geçiş şartları gereği $y_2(-0)=y_2'(-0)=0$ ve dolayısı ile her $x \in [-1,0)$ için $y_2(x)=0$ olurdu. Yani her $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için $y_2(x)=0$ olurdu. Bu ise $y_2(x)$-in özfonksiyon olması ile çelişir. $y_2(+0)$ ve $y_2'(+0)$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olduğu için (32) ve (33) den $\frac{a}{b} - 1 = 0$, yani $a = b$ elde edilir. O halde (27) eşitliği gereği $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımlıdır.

Teorem 3. Kabul edelim ki $\alpha\beta = 1$ şartı olsun. O halde (6)-(9) SLSDG- nin her λ_0 özdeğerine karşılık reel-değerli bir özfonksiyonu bulunur.

İspat. Bir önceki teoremin ispatında aşağıdaki sonuç elde edilmişti. Eğer $(\lambda_0, y_0(x))$ (6)-(9) SLSDG- nin bir özçifti ise o halde

$(\overline{\lambda_0}, \overline{y_0}(x))$ de aynı problemin özçiftidir. $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ olduğu için λ_0 özdeğeri için hem $y_0(x)$ hem de $\overline{y_0}(x)$ fonksiyonları özfonksiyondur. (6) denklemi ve (8)-(9) sınır-geçiş şartları homojen olduğu için bir özdeğere uygun olan özfonksiyonların her lineer birleşimi de aynı özdeğere uygun özfonksiyon olur. Bu nedenle reel değerli de $Re y_0 = \frac{y_0(x)+\overline{y_0(x)}}{2}$ ve $I\mathrm{m} y_0 = \frac{y_0(x)-\overline{y_0(x)}}{2i}$ fonksiyonların her ikisi (6)-(9) SLSDG-ni sağlar. Bu fonksiyonlardan en az biri sıfırdan farklı olduğu için özfonksiyon olur.

Not. Teorem 1 ve Teorem 3 ü dikkate alarak genelliği azaltmadan bundan sonra tüm özfonksiyonların reel değerli olduğunu kabul ed **Teorem 4.** λ_1 veλ_2 değerleri (6)-(9) SLSDG-nin iki farklı özdeğeri olsun. O halde bu özdeğerlere sırası ile uygun olan $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları için

$$\int_{-1}^{-0} y_1(x)\, y_2(x)dx + \int_{+0}^{1} y_1(x)\, y_2(x)dx = 0 \qquad (34)$$

eşitliği sağlanır.; yani bu özfonksiyonlar $L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ direkt toplam uzayında ortogoneldir.

İspat. $-y_1''(x) + q(x)y_1(x) = \lambda\, y_1(x),\ x \in [-1,0) \cup (0,1]$ (35)

ve

$$-y_2''(x) + q(x)y_2(x) = \lambda\, y_2(x),\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \qquad (36)$$

eşitliklerini sırası ile $y_2(x)$ ve $y_1(x)$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri tararf tarafa çıkarırsak kolayca

$$\frac{d}{dx} W(y_1, y_2; x) = (\lambda_1 - \lambda_2)\, y_1(x) y_2(x) \qquad (37)$$

eşitliğini elde edebiliriz. (37) eşitliğinin her iki tarafını $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında integralledikten sonra taraf tarafa toplarsak

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\int_{-1}^{-0} y_1(x)\, y_2(x)dx + \int_{+0}^{1} y_1(x)\, y_2(x)dx\right)$$
$$= W(y_1, y_2; -0) - W(y_1, y_2; -1) + W(y_1, y_2; 1)$$
$$- W(y_1, y_2; +0) \qquad (38)$$

Elde edilir. y_1 ve y_2 fonksiyonları (7)-(9) sınır geçiş şartlarını sağladıkları için

$$W(y_1, y_2; -1) = W(y_1, y_2; 1) = 0 \qquad (39)$$

ve

$$W(y_1, y_2; -0) - W(y_1, y_2; +0) = 0 \qquad (40)$$

eşitlikleri sağlanır. (39)-(40) eşitliklerini (38) eşitliğinin sağ tarafında yerine yazarsak,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\int_{-1}^{-0} y_1(x)\, y_2(x)dx + \int_{+0}^{1} y_1(x)\, y_2(x)dx\right) = 0 \qquad (41)$$

eşitliği bulunur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için (41) eşitliğinden (34) eşitliği elde edilir. İspat bitti.

Temel Çözüm Fonksiyonları

(6) nolu diferensiyel denklemin $[-1,0)$ aralığında tanımlı olan ve

$$y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1 \qquad (42)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümünü $y_1(x, \lambda)$ ile, $(0,1]$ aralığında tanımlı olan ve

$$y(0, \lambda) = \alpha y_1(-0, \lambda),\ y'(0, \lambda) = \beta y_1'(-0, \lambda) \qquad (43)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümününü ise $y_2(x,\lambda)$ ile gösterelim. Yine de (6) nolu diferensiyel denklemin (0,1] aralığında

$$y(1) = 0,\ y'(1) = 1 \tag{44}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $z_2(x,\lambda)$ ile aynı denklemin (0,1] aralığında tanımlı ve ,

$$y(0,\lambda) = \frac{1}{\alpha} z_2(+0,\lambda),\ y'(0,\lambda) = \frac{1}{\beta} z_2{}'(+0,\lambda) \tag{45}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü ise $z_1(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Diferensiyel denklemler teorisinin bilinen varlık ve teklik teoremi (Kelley; 2010) gereği $y_i(x,\lambda)$ ve $z_i(x,\lambda)$ (i=1,2) çözümleri mevcutturlar. Ayrıca (Titchmarsh; 2011) gereği $\forall$ x için bu fonksiyonlar λ kompleks değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitiktirler, yani tam fonksiyonlardır.

$$W(y_1, z_1; -1) = W(y_2, z_2; 1) = 1 \neq 0$$

olduğu için y_1, z_1 fonksiyonları $[-1,0)$ aralığında, y_2, z_2 fonksiyonları (0,1] aralığında lineer bağımsızdırlar.

Homojen Olmayan Problem. Green Fonksiyounu

Bu bölümde homojen olmayan iki-ararlıklı

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + f(x),\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{46}$$

diferensiyel denkleminden

$$y(-1) = y(1) = 0 \tag{47}$$

sınır şarlarından ve $x = 0$ iletim noktasında verilmiş

$$y(+0) = \alpha y(-0), \qquad y'(+0) = \beta y'(-0) \tag{48}$$

geçiş şartlarından oluşmuş homojen olmayan SLSDG-nin Green fonksiyonunu kuracağız. $W(y_1, z_1; x)$ fonksiyonunun $[-1,0)$

aralığında x-den bağımsız olduğu, $W(y_2, z_2; x)$ fonksiyonunun ise $(0,1]$ aralığında x-den bağımsız olduğu iyi bilinmektedir [ ]. Bu fonksiyonları sırası ile $\Delta_1(\lambda)$ ve $\Delta_2(\lambda)$ ile gösterelim. O halde $\Delta_1(\lambda)$ ve $\Delta_2(\lambda)$ fonksiyonlarının her ikisi tam fonksiyon olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\Delta_2(\lambda) &= W(y_2, z_2; x) = W(y_2, z_2; +0)\\ &= y_2(+0)\, z_2'(+0) - y_2'(+0) z_2(+0)\\ &= \alpha\beta\big(y_1(-0)\, z_1'(-0) - y_1'(-0) z_1(-0)\big)\\ &= \alpha\beta W(y_1, z_1; -0) = \alpha\beta\Delta_1(\lambda) \qquad (49)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$$\Delta(\lambda) := \Delta_2(\lambda) = \alpha\beta\Delta_1(\lambda) \qquad (50)$$

gösterelim. Aşağıda kısalık için $I_1 = [-1,0)$, $I_2 = (0,1]$, $I = I_1 \cup I_2$ gösterimlerinden yararlanılacaktır.

$\oplus\, C^{(k)}(I) = C^{(k)}[-1,-0] \oplus C^{(k)}[+0,1]$ ile gösterilecek Banach uzayını

$$\oplus C^{(k)}(I) := \{\, g(x) = \begin{cases} g_1(x), x \in I_1 \\ g_2(x), x \in I_2 \end{cases}, g_1 \in C^{(k)}[-1,0],$$

$$g_2 \in C^{(k)}[+0,1]\,\}$$

$$\|g\| := \|g\|_{\oplus C^{(k)}(I)} := \|g_1\|_{C^{(k)}[-1,-0]} + \|g_2\|_{C^{(k)}[+0,1]} \qquad (51)$$

şeklinde tanımlayalım.

Ayrıca $\oplus\, C^{(0)}(I)$ yerine $\oplus\, C(I)$ simgesi kullanılacaktır.

Teorem 5. Kabul edelim ki $\alpha\beta=1$ ve $g \in \oplus C(I)$ olsun. O halde (6)-(9) SLSDG- nin özdeğer olmayan her λ için bir tek $\tilde{y}(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm için

$$\tilde{y}(x,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(z_1(x,\lambda)\int_{-1}^{x} y_1(s,\lambda)\,g(s)ds + y_1(x,\lambda)\int_{x}^{-0} z_1(s,\lambda)\,g(s)ds \right. \\ \qquad \left. + y_1(x,\lambda)\int_{+0}^{1} z_2(s,\lambda)\,g(s)ds\right), \qquad x \in I_1 \\ \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(z_2(x,\lambda)\int_{+0}^{x} y_2(s,\lambda)\,g(s)ds + y_2(x,\lambda)\int_{x}^{1} z_2(s,\lambda)\,g(s)ds \right. \\ \qquad \left. + z_2(x,\lambda)\int_{-1}^{0} y_1(s,\lambda)\,g(s)ds\right), \qquad x \in I_2 \end{cases} \tag{52}$$

formülü geçerlidir.

İspat. $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$, $z_1(x,\lambda)$ ve $z_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tanımından yararlanarak (52) fonksiyonunun (46)- (48) homojen olmayan sınır-değer-geçiş problemini sağladığını kolayca gösterebiliriz. Bu çözümün tekliğini ise aksini kabul etme yöntemi ile göstereceğiz. İki $\widetilde{y_1} \neq \widetilde{y_2}$ çözümünün mevcut olduğunu kabul edelim. $\widetilde{y_3}(x,\lambda) = \widetilde{y_1}(x,\lambda) - \widetilde{y_2}(x,\lambda)$ gösterirsek, $\widetilde{y_3}(x,\lambda)$ fonksiyonu (6)-(9) homojen SLSDG-ni sağlar. O halde λ özdeğer olur. Bu ise λ nın özdeğer olmadığı kabulümüzle çelişir. İspat bitti.

$G(x,s;\lambda)$ fonksiyonunu

$$G(x,s;\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases} y_1(x,\lambda)\,z_1(s,\lambda), & -1 \le s \le x < 0 \ \ için \\ y_1(s,\lambda)\,z_1(x,\lambda), & -1 \le x \le s < 0 \ \ için \\ y_2(s,\lambda)\,z_1(x,\lambda), & -1 \le x < 0 < s \le 1 \ \ için \\ y_2(x,\lambda)\,z_1(s,\lambda), & -1 \le s < 0 < x \le 1 \ \ için \\ y_2(x,\lambda)\,z_2(s,\lambda), & 0 < s \le x \le 1 \ \ için \\ y_2(s,\lambda)\,z_2(x,\lambda), & 0 < x \le s \le 1 \ \ için \end{cases} \tag{53}$$

eşitliği ile tanımlarsak (53) eşitliğini

$$\tilde{y}(x,\lambda) = \int_{-1}^{0} G(x,s;\lambda)g(s)\,ds + \int_{+0}^{1} G(x,s;\lambda)g(s)\,ds$$

biçiminde yazabiliriz. Bu nedenle (53) ile tanımlı $G(x,s;\lambda)$ fonksiyonu (46)- (48) homojen olmayan sınır-değer-geçiş probleminin Green fonksiyonudur. Kabul edelim ki λ=0 (6)-(9) homojen SLSDGP-nin özdeğeri değil ve $g \in C[-1,-0] \oplus C[+0,1]$ keyfi bir fonksiyondur. O halde $G(x,s) := G(x,s;0)$ gösteriminden yararlanarak aşağıdaki özelliği elde ederiz.

$$-y'' + q(x)y = g(x),\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{54}$$

$$y(-1) = y(1) = 0 \tag{55}$$

$$y(+0) = \alpha y(-0), \qquad y'(+0) = \beta y'(-0) \tag{56}$$

homojen olmayan (46)- (48) sınır-değer-geçiş probleminin bir tek $y(x)$ çözümü bulunur ve bu çözüm için

$$y(x) = \int_{-1}^{0} G(x,s;\lambda)g(s)\,ds + \int_{+0}^{1} G(x,s;\lambda)g(s)\,ds \tag{57}$$

formülü sağlanır. Özel olarak $g = \lambda y$ yazarsak (6)-(9) homojen SLSDGP-ne denk olan

$$y(x) = \lambda\left(\int_{-1}^{0} G(x,s)y(s)\,ds + \int_{+0}^{1} G(x,s)y(s)\,ds\right) \tag{58}$$

integral denklemi elde edilir.

Özfonksiyon Açılımı

Bu bölümde (6)-(9) homojen SLSDG-nin özfonksiyonlarının tamlık özellikleri incelenecektir. Aşağıda her yerde $\alpha\beta$=1 olduğu kabul edilecektir.

$$\ell y = \int_{-1}^{0} G(x,s)y(s)\,ds + \int_{+0}^{1} G(x,s)y(s)\,ds \tag{59}$$

şitliği ile ℓ integral operatörünü tanımlayalım. O halde (6)-(9) SLSDG-ni

$$(\lambda\ell - E)y = 0 \tag{60}$$

operatör-denklem biçiminde yazabiliriz; burada$E$ ile birim operatör gösterilmiştir. $G(x,s)$ çekirdek fonksiyonu simetrik ve sürekli olduğu için integral operatörler teorisinin ekstremal ilkesini (60) denklemine uygulayabiliriz (bak Courant & Hilbert 2008). (λ_n) dizisi ise ℓ integral operatörünün ekstremal ilke ile elde edilen özdeğerlerini, $(y_n(x))$ ile ise uygun ortonormal özfonksiyonlar dizisini gösterelim. Yani $(y_n(x))$ özfonksiyonları için

$$\int_{-1}^{-0} y_n\, y_m dx + \int_{+0}^{1} y_n\, y_m dx = \delta_{nm},\ \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 6. Her $g \in C[-1,-0] \oplus C[+0,1]$ için $f = \ell g$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{0}\left(f - \sum_{k=1}^{n}\langle f, y_k\rangle\, y_k\right)dx + \int_{+0}^{1}\left(f - \sum_{k=1}^{n}\langle f, y_k\rangle y_k\right)dx\right)^2 = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\langle f, y_k\rangle = \int_{-1}^{-0} f(s)y_k(s)ds + \int_{+0}^{1} f(s)y_k(s)ds$$

sayıları f fonksiyonunun (y_n) ortonormal fonksiyonlar sistemine göre Fourier katsayılarıdırlar.

İspat. $g_n(x) = g(x) - \sum_{k=1}^{n}\langle g, y_k\rangle\, y_k$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. (y_n) ortonormal sistem olduğu için her $i = 1,2,\dots,n-1$ için

$$\int_{-1}^{-0} g_n(x)y_i(x)dx + \int_{+0}^{1} g_n(x)y_i(x)dx = 0$$

eşitliği sağlanır. λ_n özdeğerleri ekstremal ilke ile tanımlandığı için

$$\left(\int_{-1}^{0} \left(\ell g_n(x)\right)^2 dx + \int_{0}^{1} \left(\ell g_n(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |\lambda_{n+1}| \left(\int_{-1}^{-0} {g_n}^2(x)dx + \int_{-0}^{1} {g_n}^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. $n \to \infty$ olmakla limite geçersek ve $\lambda_n \to 0$ olduğunu dikkate alırsak

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-0} \left(\ell g_n(x)\right)^2 dx + \int_{+0}^{1} \left(\ell g_n(x)\right)^2 dx\right) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\ell g = \ell g_n + \sum_{k=1}^{n} \langle g, y_k \rangle \, \ell y_k$$

$$= \ell g_n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle g, y_k \rangle \, y_k$$

$$= \ell g_n + \sum_{k=1}^{n} \langle g, \ell y_k \rangle \, y_k$$

$$= \ell g_n + \sum_{k=1}^{n} \langle \ell g, y_k \rangle \, y_k$$

eşitlikleri bulunur. Burada $n \to \infty$ olmakla limite geçersek,

$$\ell g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \ell g, y_k \rangle \, y_k$$

açılımı elde edilir. İspat bitti.

Teorem 7. Her $f \in R(\ell)$ için

$$f = \sum_{n=1}^{\propto} \left(\int_{-1}^{-0} f(x) y_n(x) dx + \int_{+0}^{1} f(x) y_n(x) dx \right) y_n(x) \qquad (61)$$

açılımı sağlanır. Burada $R(\ell)$ ile ℓ operatörünün değer bölgesi gösterilmiştir ve de (61) serisi $C[-1,-0] \oplus C[+0,1]$ Banach uzayının normuna göre yakınsaktır.

İspat. $f = \ell g$ olsun. O halde $\forall\, n, p$ için

$$\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k \langle g, y_k \rangle \, y_k = \ell \left(\sum_{k=n}^{n+p} \langle g, y_k \rangle \, y_k \right) \qquad (62)$$

eşitliği sağlanır. ℓ operatörü $C[-1,-0] \oplus C[+0,1]$ Banach uzayında sınırlı operatör olduğu için öyle $C > 0$ sayısı mevcuttur ki,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k \langle g, y_k \rangle \, y_k \right| \leq C \left(\sum_{k=n}^{n+p} |\langle g, y_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (63)$$

eşitsizliği sağlanır. Bessel eşitsizliği gereği (63) eşitsizliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ olduğunda sıfıra düzgün olarak yakınsıyor. Bu nedenle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \ell g, y_n \rangle \, y_n(x) \qquad (64)$$

serisi $C[-1,-0]\oplus C[+0,1]$ Banach uzayında yakınsaktır. Bu serinin toplamını

$$\widetilde{f}\,(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\langle \ell g, y_n\rangle\, y_n(x) \qquad (65)$$

ile gösterelim. (62) ve (65) gereği

$$\langle \ell g-\widetilde{f}\,, \ell g-\widetilde{f}\,\rangle = 0 \qquad (66)$$

eşitliği bulunur. (66) gereği hemen-hemen her yerde f(x)= $\widetilde{f}\,(x)$ eşitliği sağlanır. f(x) fonksiyonu sürekli olduğu için bu eşitlik ∀ x ϵ $[-1,0)\cup(0,1]$ noktası için sağlanır. Böylece

$$f=\sum_{n=1}^{\propto}\left(\int_{-1}^{-0} f(x)y_n(x)dx+\int_{+0}^{1} f(x)y_n(x)dx\right)y_n(x)$$

açılımı elde edilir. İspat bitti.

Teorem 8. $f\,\epsilon\, C^2[-1,-0]\oplus C^2[+0,1]$ fonksiyonunun (7)-(9) sınır geçiş şartlarını sağladığını kabul edelim. O halde f(x) fonksiyonu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\propto}\left(\int_{-1}^{-0} f(x)y_n(x)dx+\int_{+0}^{1} f(x)y_n(x)dx\right)y_n(x)$$

Fourier serisine açılabilir ve bu seri f(x) fonksiyonuna $C[-1,-0]\oplus C[+0,1]$ Banach uzayında yakınsaktır.

İspat. $g=-f''+q(x)f$ gösterirsek, $g\,\epsilon\, C[-1,-0]\oplus C[+0,1]$ elde edilir. O halde

$$f=\ell g=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-1}^{0}(\ell g_n)y_n dx+\int_{0}^{1}(\ell g_n)y_n dx\right)y_n(x)$$

elde edilir ve bu seri $C[-1,-0]\oplus C[+0,1]$ Banach uzayında yakınsaktır.

Sonuç. $(y_n(x))$ özfonksiyonlar sistemi $L_2[-1,-0]\oplus L_2[+0,1]$ Hilbert uzayında ortonormal baz oluşturur.

Sonuç. Her f ϵ $L_2[-1,-0]\oplus L_2[+0,1]$ için

$$\|f\|^2_{L_2[-1,-0]\oplus L_2[+0,1]} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-1}^{-0} f y_n dx + \int_{+0}^{1} f y_n dx\right)^2$$

Parseval eşitliği sağlanır.

Rayleigh Oranı

Bu bölümde Rayleigh oranı yönteminden yararlanarak (6)-(9) SLSDG-nin özdeğer ve özfonksiyonları incelenecektir.

Teorem 9. Eğer $\forall x \epsilon I$ f için $q(x) \geq 0$ ise (6)-(9) SLSDG-nin hiç bir özdeğeri negatif değildir.

İspat. (6)-(9) SLSDG-nin keyfi bir (λ, y(x)) öz çiftini göz önüne alalım. (1) denklemini $y(x)$ ile çarptıktan sonra elde edilen denklemin her 2 tarafını [-1,0) ve (0,1] aralıklarında integralledikten sonra kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{-0} y(y'' - qy + \lambda y)dx + \int_{+0}^{1} y(y'' - qy + \lambda y)dx \\ &= \int_{-1}^{-0}(-y'^2 - qy^2 + \lambda y^2)dx + \int_{+0}^{1}(-y'^2 - qy^2 + \lambda y^2)dx \\ &\quad + y(-0)y'(-0) - y(-1)y'(-1) + y(1)y'(1) \\ &\quad - y(+0)y'(+0) \end{aligned} \tag{67}$$

eşitliğini elde ederiz. Sınır şartlarından yararlanarak

$$y(-1)y'(-1) = y(1)y'(1) = 0 \tag{68}$$

bulunur. Ayrıca y(x) fonksiyonu özfonksiyon olduğu için

$$y(+0) - \alpha y(-0) = 0 \tag{69}$$

$$y'(+0) - \beta y'(-0) = 0 \tag{70}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda αβ=1 eşitliği gereği

$$y(-0)y'(-0) - y(+0)y'(+0) = y(-0)y'(-0)$$

$$-\alpha y(-0))\,(\beta y'(-0)) = 0 \tag{71}$$

elde edilir. (68)-(71) eşitliklerini (67) eşitliğinin sağ tarafında yazılırsa

$$\int_{-1}^{-0} \left(-y'^2 - qy^2 + \lambda y^2\right)dx + \int_{+0}^{1} \left(-y'^2 - qy^2 + \lambda y^2\right)dx = 0$$

eşitliği bulunur. Buradan Rayleigh oranından yararlanırsak

$$\lambda = \frac{\int_{-1}^{-0}(y'^2 + qy^2)dx + \int_{+0}^{1}(y'^2 + qy^2)dx}{\int_{-1}^{-0} y^2 dx + \int_{+0}^{1} y^2 dx} \geq 0 \tag{72}$$

Bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 10. Kabul edelim ki, $q(x) \not\equiv 0$ ve $\forall x \in I$ için $q(x) \geq 0$ şartları sağlanır. O halde (6)-(9) SLSDG-nin tüm özdeğerleri pozitifdir.

İspat. $q(x) \not\equiv 0$ ve $\forall x \in I$ için $q(x) \geq 0$ olduğu için en az bir $x_0 \in I$ için $q(x_0) > 0$ olur. $q(x)$ fonksiyonu sürekli olduğu için öyle δ_0>0 sayısı mevcuttur ki, $\forall x \in [x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0] \cap I$ için $q(x) > 0$ olur. $x_0 \in (-1,0)$ durumunu inceleyelim. O halde en az bir δ_1>0 için $[x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_1] \subset (-1,0)$ olur. $\delta_2 = min\{\delta_0,\ \delta_1\}$ *gösterilirse,* $\delta_2 > 0$, $[x_0 - \delta_2,\ x_0 + \delta_2] \subset (-1,0)$ *ve* $\forall x \in [x_0 -$

$\delta_2,\ x_0+\delta_2]$ *için* $q(x)>0$ elde edilir. y(x) fonksiyonu özfonksiyon olduğu için öyle $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur ki, $[x_0-\frac{1}{n_0},\ x_0-\frac{1}{n_0}] \subset [x_0-\delta_2,\ x_0+\delta_2]$ ve $\forall x \epsilon [x_0-\frac{1}{n_0},\ x_0-\frac{1}{n_0}]$ için $y(x) \neq 0$ şartları sağlanır. Gerçekten, aksi durumda $t_n \to x_0,\ t_n \neq x_0$ ve her $n \epsilon \mathbb{N}$ için $y(t_n)=0$ olacak biçimde en az bir (t_n) dizisinin mevcut olduğunu kolayca gösterebiliriz. Bu durumda

$$y(x_0)=\lim_{n\to\infty} y(t_n)=0 \tag{73}$$

ve

$$y'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{y(t_n)-y(x_0)}{t_n-x_0}=0 \tag{74}$$

Elde edilir. Bu durumda diferensiyel denklemler teorisinden iyi bilinen varlık ve teklik teoremi gereği $\forall x \epsilon [-1,0)$ için $y(x)=0$ elde edilir. O halde geçiş şartları gereği

$$y(+0)=\alpha y(-0), \qquad y'(+0)=\beta y'(-0) \tag{75}$$

eşitlikleri elde edilir. Yine varlık ve teklik teorimi gereği $\forall x \epsilon (0,1]$ için $y(x)=0$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall x \epsilon I$ için $y(x)=0$ bulunur. Bu ise $y(x)$ fonksiyonunun özfonksiyon olması kabulü ile çelişir. Böylece $\forall x \epsilon [x_0-\frac{1}{n_0},\ x_0-\frac{1}{n_0}]$ için $y(x)\neq 0$ ve $q(x)>0$ sağlanır.

$$m_0:=min\left\{q(x)\middle| x \epsilon [x_0-\frac{1}{n_0},\ x_0-\frac{1}{n_0}]\right\}$$

$$L_0:=max\left\{y^2(x)\middle| x \epsilon [x_0-\frac{1}{n_0},\ x_0-\frac{1}{n_0}]\right\}$$

$$K_0 := min\left\{y^2(x)\middle| x \in [x_0 - \frac{1}{n_0},\ x_0 - \frac{1}{n_0}]\right\}$$

gösterelim. $m_0 > 0$, $L_0 > 0$ ve $K_0 > 0$ olacağı için (73) Rayleigh oranından yararlanarak

$$\lambda = \frac{\int_{-1}^{-0}(y'^2 + qy^2)dx + \int_{+0}^{1}(y'^2 + qy^2)dx}{\int_{-1}^{-0} y^2 dx + \int_{+0}^{1} y^2 dx}$$

$$\geq \frac{\int_{x_0-\frac{1}{n_0}}^{x_0+\frac{1}{n_0}} qy^2 dx}{\int_{x_0-\frac{1}{n_0}}^{x_0+\frac{1}{n_0}} y^2 dx}$$

$$> \frac{m_0\, L_0}{K_0} > 0 \qquad (76)$$

bulunur. İspat bitti.

Şimdi $C^2[-1,-0] \oplus C^2[+0,1]$ uzayının

$$T_1 := \{y(x): y(x) \not\equiv 0 \text{ ve } y \in C^2[-1,-0] \oplus C^2[+0,1],\ y(-1) = y(1) = 0, y(+0) = \alpha y(-0),\quad y'(+0) = \beta y'(-0)\ \},$$

ve

$$T_n := \{y(x): y(x) \not\equiv 0 \text{ ve } y \in C^2[-1,-0] \oplus C^2[+0,1], y(-1) = y(1) = 0, y(+0) = \alpha y(-0),\quad y'(+0) = \beta y'(-0),$$

$$\int_{-1}^{-0} yy_k dx + \int_{+0}^{1} yy_k dx = 0,\ \ k = 1,2, \dots n-1\},\ n \geq 2$$

lineer alt uzaylarını tanımlayalım. Ayrıca Rayleigh lineer fonksiyonelini

$$R(y) := \frac{\int_{-1}^{-0}(y'^2 + qy^2)dx + \int_{+0}^{1}(y'^2 + qy^2)dx}{\int_{-1}^{-0} y^2 dx + \int_{+0}^{1} y^2 dx} \qquad (77)$$

eşitliği ile tanımlayalım.

Teorem 11. Kabul edelim ki $\forall x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için $q(x) \geq 0$ olsun. Ayrıca (6)-(9) SLSDG-nin özdeğerlerini $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ ile gösterelim, $y_1(x), y_2(x), \ldots$ ile bu özdeğerlere sırası ile uygun gelen ve $\forall n, m = 1, 2, 3, \ldots$ için $\delta_{nm} := \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ olmak üzere

$$\int_{-1}^{-0} y_n(x)\ y_m(x)\ dx + \int_{+0}^{1} y_n(x)\ y_m(x)\ dx = \delta_{nm}$$

şartlarını sağlayan özfonksiyonlar sistemini gösterelim. O halde her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\lambda_n := \min\{R(y) | y \in T_n\} = R(y_n)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $y \in \oplus C^2(I)$ olmak üzere $\mathcal{L}_i y = t_i y = 0$, i=1,2 olsun. Bu durumda Teorem 6 gereği

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-1}^{0} y y_n dx + \int_{+0}^{1} y y_n dx \right) y_n(x)$$

serisi I aralığında düzgün yakınsak olur. Daha sonra kısmi integrasyon yapılırsa

$$\int_{-1}^{-0} (-y'' + q(x)y) y_n dx + \int_{+0}^{1} (-y'' + q(x)y) y_n dx$$

$$= \int_{-1}^{-0} y(-y_n'' + q(x)y_n)\, dx + \int_{+0}^{1} y(-y_n'' + q(x)y_n)\, dx$$

$$= \lambda_n \left(\int_{-1}^{-0} y_n\, y dx + \int_{+0}^{1} y_n y dx \right)$$

bulunur. $\{y_n(x)\}$ tam ortormal fonksiyonlar sistemi olduğundan Parseval eşitliğinden c_n(f):= $\int_{-1}^{0} y_n y\, dx + \int_{+0}^{1} y_n y dx$ olmak üzere

$$\int_{-1}^{0} y^2 dx + \int_{+0}^{1} y^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} {c_n}^2(y)$$

elde edilir. (67) eşitliğini kullanarak

$$\int_{-1}^{-0} (y'^2 + qy^2) dx + \int_{+0}^{1} (y'^2 + qy^2) dx$$

$$= \int_{-1}^{-0} y(-y'' + q(x)y)\, dx + \int_{+0}^{1} y(-y'' + q(x)y)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{-0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \right) (-y'' + q(x)y)\, dx$$

$$+ \int_{+0}^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \right) (-y'' + q(x)y)\, dx$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\int_{-1}^{-0} y_n(-y'' + q(x)y) dx + \int_{+0}^{1} y_n(-y'' + q(x)y) dx \right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \left(\int_{-1}^{-0} y\, y_n dx + \int_{+0}^{1} y\, y_n dx \right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n {c_n}^2 \geq \lambda_1 \left(\int_{-1}^{-0} y^2 dx + \int_{+0}^{1} y^2 dx \right) \qquad (78)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{-1}^{-0} (y'^2 + qy^2) dx + \int_{+0}^{1} (y'^2 + qy^2) dx}{\int_{-1}^{-0} y^2 dx + \int_{+0}^{1} y^2 dx}$$

yazılabilir. (78) eşitliğinde $y = y_1$ *alınırsa n=2,3,... için*

$$c_n(y_1) = \int_{-1}^{-0} y_1 y_n dx + \int_{+0}^{1} y_1\, y_n dx \qquad (79)$$

ve

$$\lambda_1 = \frac{\int_{-1}^{-0} ({y_1}'^2 + q{y_1}^2) dx + \int_{+0}^{1} ({y_1}'^2 + q{y_1}^2) dx}{\int_{-1}^{-0} {y_1}^2 dx + \int_{+0}^{1} {y_1}^2 dx} \qquad (80)$$

Bulunur. (79) ve (80) eşitliklerinden

$$\lambda_1 = min\{R(y) | y \in T_1\}$$

elde edilir. Böylece $\lambda_1 = R(y_1)$ *olur.* $y(x) \in \oplus C^2(I)$,

$\mathcal{L}_i y = t_i y = 0$, *i=1,2*

ve

$$\int_{-1}^{-0} y y_n dx + \int_{+0}^{1} y y_n dx = 0$$

n=1,2,...k olacak biçimde keyfi $y(x)$ *fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda*

$$\int_{-1}^{-0}(y'^2+qy^2)dx+\int_{+0}^{1}(y'^2+qy^2)dx=\sum_{n=k+1}^{\infty}\lambda_n c_n(y)^2$$

$$\geq \lambda_{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}c_n(y)^2=\lambda_{k+1}\left(\int_{-1}^{-0}y^2dx+\int_{+0}^{1}y^2dx\right)$$

Bulunur. Yukarıdaki aynı argüment k=1,2,... için uygulanırsa

$$\lambda_{k+1}=min\{R(y)|y\in T_{k+1}\}$$

elde edilir. Böylece minimum fonksiyon $y_{k+1}(x)$ *yani* $\lambda_{k+1}=R(y_{k+1})$ *olur.*

Kaynakça

Allahverdiev, B. P., & Tuna, H. (2019). Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions.

Allahverdiev, B. P., Tuna, H., & Isayev, H. A. (2024). The resolvent of impulsive dynamic singular Sturm–Liouville operators. *Afrika Matematika*, *35*(3), 62.

Aydemir, K., Olğar, H., & Mukhtarov, O. (2019). The principal eigenvalue and the principal eigenfunction of a boundary-value-transmission problem. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 11(2), 97-100.

Aydemir, K., Olğar, H., Mukhtarov, O. S., & Muhtarov, F. (2018). Differential operator equations with interface conditions in modified direct sum spaces. *Filomat*, *32*(3), 921-931.

Cannon, J. R., & Meyer, G. H. (1971). On diffusion in a fractured medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *20*(3), 434-448.

Courant, R., & Hilbert, D. (2008). *Methods of Mathematical Physics, Volume 1* (Vol. 1). John Wiley & Sons.

Gesztesy, F., Macdeo, C., & Streit, L. (1985). An exactly solvable periodic Schrodinger operator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *18*(9), L503.

Gonzalez-Velasco, E. A. (1996). *Fourier analysis and boundary value problems*. Elsevier.

Kandemir, M. (2012). Irregular boundary value problems for elliptic differential-operator equations with discontinuous coefficients and transmission conditions.

Kandemir, M., Mukhtarov, O., & Yakubov, Y. (2009). Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *6*, 317-338.

Kelley, W. G. (2010). *The theory of differential equations*. Springer.

Mukhtarov, O. S., Olgar, H., Aydemir, K., & Jabbarov, I. S. (2018). Operator-pencil realization of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions. *Applied and Computational Mathematics*, *17*(2), 284-294.

Olğar, H. (2023). On completeness of weak eigenfunctions for multi-interval Sturm-Liouville equations with boundary-interface conditions. *Demonstratio Mathematica*, *56*(1), 20220210.

Olğar, H., Mukhtarov, O. S., & Aydemir, K. (2018). Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem. *Filomat*, *32*(3), 911-920.

Petrovsky, I. G. (2012). *Lectures on partial differential equations*. Courier Corporation.

Stikonas, A., & Şen, E. (2023). Asymptotic analysis of Sturm-Liouville problem with Dirichlet and nonlocal two-point boundary conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*.

Şen, E., & Štikonas, A. (2022). Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a non-local boundary value problem with

retarded argument. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *67*(7), 1662-1676.

Titchmarsh, E. C. (2011). *Elgenfunction Expansions Associated With Second Order Differential Equations*. Read Books Ltd.

Titeux, I., & Yakubov, Y. (1997). Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, *7*(07), 1035-1050.

BÖLÜM III

Conformable Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Genelleştirilmiş Homotopi Analiz Yöntemi İle Yarı Analitik Çözümleri

Mehmet ÇOLAEL[1]
Orkun TAŞBOZAN[2]

Giriş

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak bazen imkansızdır. Bundan dolayı bu tür kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik veya yarı analitik çözümleri büyük öneme sahiptir. 1992 yılında Liao, kısmi türevli

[1] Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Enformatik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Mezunu, Orcid: 0000-0002-2813-5922, mehmetcolael@gmail.com
[2] Doç. Dr., Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay/TÜRKİYE, Orcid: 0000-0001-5003-6341, otasbozan@mku.edu.tr
Bu çalışma Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalında Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN tarafından yönetilen ve Mehmet ÇOLAEL tarafından yazılan "Conformable Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Genelleştirilmiş Homotopi Analiz Yöntemi İle Yarı Analitik Çözümleri" başlıklı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümleri için homotopi analiz yöntemini önerdi (Liao, 1992).

Doğada oluşan fiziksel olayların matematiksel modellenmesiyle meydana gelen lineer olmayan adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin homotopi analiz yöntemi ile yarı analitik çözümleri elde edildi (Tasbozan ve Bayaslı, 2018).

Homotopi analiz yönteminde, yüksek derece deformasyon denkleminde yer alan yardımcı parametrelerin yardımıyla, yöntem ile bulunan seri çözümlerinin yakınsaklık bölgesi daha kolay ve hızlı bir şekilde elde edilir. Bunun yanında, lineer olan yardımcı operatör ile denklemin başlangıç şartından analitik çözümüne giden sürekli olan bir fonksiyon tanımlanır. Böylece, lineer olmayan problemler homotopi analiz yöntemi yardımı ile lineer problemlere dönüşür (Liao, 2003).

Homotopi analiz yönteminde, seri çözümlerin yakınsaklığını sağlayan $\hbar$ gömme parametresinin yakınsaklık aralığı, $\hbar$ −eğrileri çizilerek elde edilir. $\hbar$ −eğrilerini çizmek için

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t) \tag{1}$$

seri çözümünde $\hbar$ gömme parametresi bağımsız bir değişken olarak alınır. Örneğin, β, $\hbar$ değişkenine bağlı bir dönüşüm olmak üzere

$$\beta = u_{tt}(x,t)|_{x=0,t=0}$$

eşitliğinde $\beta \sim \hbar$ eğrisi çizilebilir. (1) seri çözümünde, hesaplanan terim sayısına göre farklı $\hbar$ gömme parametrelerinde β

için verilen yakınsak seri çözümleri analitik çözüme yakınsar. Bundan dolayı, $\beta \sim \hbar$ eğrisinin bir bölgesinde $\hbar$ gömme parametresinin eksenine paralel bir doğru parçası görünür. Görünen paralel doğru parçasındaki $\hbar$ gömme parametresinin değerleri geçerlilik bölgesini oluşturur. Homotopi analiz yöntemi ile bulunan seri çözümünde $\hbar$ değeri yerine $\hbar$ gömme parametresinin geçerlilik bölgesinden alınan bir değer için seri çözümü yakınsak olur (Liao, 2003).

Genelleştirilmiş homotopi analiz yöntemi ise, yöntemde yer alan $\left(\frac{1}{n}\right)^m$ teriminden dolayı homotopi analiz yönteminde elde edilen çözümlere göre analitik çözüme daha hızlı yakınsama sağlar. Genelleştirilmiş homotopi analiz yönteminde $n = 1$ alınırsa, yöntem homotopi analiz yöntemine indirgenir (Saad ve ark., 2017). Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş homotopi analiz yöntemi ile yarı analitik çözümleri birçok yazar tarafından elde edildi. Bunlardan bazıları, 2017 yılında Saad ve arkadaşları kesirli mertebeden gaz dinamik denklemini (Saad ve ark.,2017), 2018 yılında Prakash ve Kaur Kdv-Burgers denklemini(Prakash ve Kaur, 2018), 2019 yılında Prakash ve arkadaşları kesirli mertebeden ikili Navler-Stokes denklemlerini (Prakash ve ark.,2019), 2019 yılında Akinyemi kesirli mertebeden Lax Kdv ve Sawada-Kotera denklemlerini (Akinyemi, 2019), 2021 yılında Cheng ve Wang kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemini (Cheng ve Wang, 2021) genelleştirilmiş homotopi analiz yöntemin kullanarak yaklaşık çözümlerini elde ettiler.

Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı

Conformable kesirli türev yaklaşımı ilk olarak 2014 yılında Khalil ve arkadaşları tarafından tanımlandı (Khalil ve ark., 2014). Khalil ve arkadaşları tarafından tanımlanan bu kesirli türev yaklaşımının literatürde yer alan diğer türev yaklaşımlarına göre daha basit bir tanımı vardır. Conformable kesirli türev yaklaşımını en önemli özelliklerinden biri tamsayı mertebenden türev ile ifade edilmesidir. Yani, $h: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonsiyonunun $\alpha -$ inci mertebeden conformable kesirli türevi

$$T_\alpha\big(h(x)\big) = x^{1-\alpha}\frac{dh(x)}{dx}$$

şeklinde tamsayı mertebeden türev ile ifade edilebilir. Bu eşitlik conformable kesirli türev yaklaşımının tanımından kolayca görülmektedir (Khalil ve ark., 2014).

Ayrıca bu kesirli türev yaklaşımı diğer türev yaklaşımlarının sağlamadığı birçok özelliği de sağlamaktadır. Bu özelliklerden bazıları; iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün türev formülleri, matematikte sıkça kullanılan zincir kuralı olarak sıralanabilir. Bu nedenle son zamanlarda analitik ve nümerik olarak çözülen kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler genel olarak conformable kesirli türev yaklaşımını içermektedir (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 1. $x > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere, $h: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu verilsin. h fonksiyonunun $\alpha -$ inci mertebeden conformable kesirli türevi

$$T_\alpha(h(x)) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)}{\varepsilon}$$

şeklindedir (Khalil ve ark., 2014).

Conformable Kesirli Mertebeden Düzenlenmiş Kawahara Denkleminin Yaklaşık Çözümleri

$0 < \delta \leq 1$ şartını sağlayan δ conformable kesirli türev mertebesi, $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ olmak üzere, conformable anlamında kesirli mertebeden düzenlenmiş Kawahara denklemi

$$\frac{\partial^{\delta} u}{\partial t^{\delta}} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{2}$$

ve (2) denklemi ile verilen conformable anlamında kesirli mertebeden düzenlenmiş Kawahara denkleminin analitik çözümü

$$\xi = \frac{\sqrt{-\frac{1}{36\lambda\mu}}\alpha}{\beta} x + \frac{2\sqrt{-\frac{1}{36\lambda\mu}}\alpha^3}{9\beta^2\delta} t^{\delta} \tag{3}$$

olmak üzere

$$u(x,t) = \frac{\alpha}{6}\sqrt{-\frac{6}{\beta}} + \frac{1}{6}\frac{\alpha\sqrt{-\frac{6}{\beta}}}{\sqrt{-\frac{1}{\lambda\mu}}\mu\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}\tanh\left(\sqrt{-\lambda\mu}(\xi + C)\right)} \tag{4}$$

şeklindedir (Bashar ve ark., 2021). Yarı analitik çözümleri elde etmek için (2)-(4) ile verilen denklemlerde $\alpha = 6, \beta = -6, \lambda = -1, \mu = 1$ ve $C = 0$ olarak alındı. Böylece (2) denklemi ile verilen conformable anlamında kesirli mertebeden düzenlenmiş Kawahara denkleminin analitik çözümü

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{\tanh\left(-\frac{1}{6}x + \frac{2t^{\delta}}{9\delta}\right)} \tag{5}$$

formuna dönüşmüş olup, denklemin başlangıç koşulu ise

$$u(x,0) = 1 + \frac{1}{\tanh\left(-\frac{1}{6}x\right)} \tag{6}$$

olarak bulunur.

(6) başlangıç koşulu ile birlikte verilen (2) conformable anlamında kesirli mertebeden düzenlenmiş lineer olmayan Kawahara denkleminin genelleştirilmiş homotopi analiz yöntemi yardımı ile yaklaşık çözümlerini bulmak için c integral sabitini göstermek üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ şartını sağlayan $\mathcal{L}$ operatörü

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;q)] = D_t^{\delta}[\Phi(x,t;q)]$$

olarak seçilsin. $\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)]$ lineer olmayan operatörü ise (2) ile verilen denklemden

$$\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)] = \frac{\partial^{\delta}\Phi(x,t;q)}{\partial t^{\delta}} + \left(\Phi(x,t;q)\right)^2 \frac{\partial\Phi(x,t;q)}{\partial x} + 6\frac{\partial^2\Phi(x,t;q)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^3\Phi(x,t;q)}{\partial x^3}$$

olarak elde edilir. Conformable kesirli mertebeden türev yaklaşımının özelliği kullanılarak, yukarıda verilen lineer olmayan operatör

$$\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)] = t^{1-\alpha}\frac{\partial\Phi(x,t;q)}{\partial t} + \left(\Phi(x,t;q)\right)^2 \frac{\partial\Phi(x,t;q)}{\partial x} + 6\frac{\partial^2\Phi(x,t;q)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^3\Phi(x,t;q)}{\partial x^3}$$

şeklinde yazılır. $H(x,t)$ fonksiyonunun $H(x,t) = 1$ olarak seçilmesiyle sıfırıncı derece deformasyon denklemi

$$(1-pq)\mathcal{L}[\Phi(x,t;q) - u_0(x,t)] = q\hbar\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)] \tag{7}$$

olarak bulunur. (4.6) ile verilen denklemde $q = 0$ ve $q = 1$ değerlerinin seçimiyle

$\Phi(x,t;0) = u_0(x,t) = u(x,0),$
$\Phi(x,t;1) = u(x,t)$

eşitlikleri elde edilir. (7) ile verilen sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde gömme parametresi olan q parametresine göre m kez türevi alınıp $m!$ ile bölünürse ve elde edilen eşitlikte gömme parametresi değeri yerine 0 yazılırsa, m −inci dereceden deformasyon denklemi

$$\vec{u}_{m-1} = \{u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_{m-1}(x,t)\}$$

ve

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ p, & m > 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}[u_m(x,t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1})$$

olarak elde edilir. Burada $R_m(\vec{u}_{m-1})$ eşitliği, $m \geq 1$ olmak üzere,

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = t^{1-\alpha}\frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(x,t)u_{n-k}(x,t)\right)\frac{\partial u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x}$$

$$+6\frac{\partial^2 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^3 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^3}$$

biçimindedir. Yukarıda bulunan $m-$ inci dereceden deformasyon denklemi yardımıyla

$$u_m(x,t) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x,t) + \hbar\mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \tag{8}$$

iterasyon formülü elde edilir. (4.5) ile verilen başlangıç koşulunun kullanılmasıyla (8) iteratif denkleminden

$$u_0(x,t) = 1 + \frac{1}{\tanh\left(-\frac{1}{6}x\right)},$$

$$u_1(x,t) = -\frac{2ht^{\delta}(-1 + 3\coth\left(\frac{1}{6}x\right))\operatorname{csch}\left(\frac{1}{6}x\right)^2}{9\delta},$$

$$u_2(x,t) = -\frac{32e^{x/3}h^2t^{\delta}(-8 - 32e^{x/3} + 45e^{2x/3} + 38e^{x} + 2e^{4x/3})t^{\delta}}{81(-1+e^{x/3})^6\delta^2} - \frac{2hpt^{\delta}\left(-1 + 3\operatorname{Coth}\left(\frac{1}{6}x\right)\right)\operatorname{Csch}\left(\frac{1}{6}x\right)^2}{9\delta} - \frac{144e^{x/3}h^2t^{\delta}(-1+e^{x/3})^3(2+e^{x/3})\delta}{81(-1+e^{x/3})^6\delta^2},$$

değerleri bulunur. Elde edilen bu değerlerden, genelleştirilmiş homotopi analiz yöntemi kullanılarak elde edilen seri çözüm ise

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{p}u_1(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^2 u_2(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^3 u_3(x,t) + \cdots$$

olarak yazılabilir. Mathematica programı yardımıyla, $u_0(x,t)$ başlangıç değerleri kullanılarak (8) eşitliğinin yardımı ile $u_1(x,t), u_2(x,t)u_3(x,t)$ ve $u_4(x,t)$ eşitliklerinin hesaplanmasıyla $u(x,t)$ yaklaşık çözümü

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{p}u_1(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^2 u_2(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^3 u_3(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^4 u_4(x,t)$$

şeklinde olur.

Conformable Kesirli Mertebeden Cahn-Allen Denkleminin Yaklaşık Çözümleri

$x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ve δ, $0 < \delta \leq 1$ şartını sağlayan conformable kesirli türev mertebesi olmak üzere, conformable anlamında kesirli mertebeden Cahn-Allen denklemi

$$\frac{\partial^{\delta} u}{\partial t^{\delta}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 - u = 0 \tag{9}$$

şeklindedir. (9) denklemi ile verilen conformable anlamında kesirli mertebeden düzenlenmiş Cahn-Allen denkleminin analitik çözümü ise

$$u(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{3t^{\delta}}{4\delta}\right) \tag{10}$$

biçimindedir (Zafar ve ark., 2020). Böylece (9) ile verilen denklemin başlangıç koşulu, (10) eşitliğinden

$$u(x,0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \tag{11}$$

olarak elde edilir.

(11) başlangıç koşulu ile birlikte (9) kesirli mertebeden Cahn-Allen denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için c integral sabitini göstermek üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ şartını sağlayan $\mathcal{L}$ operatörü

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;q)] = D_t^{\delta}[\Phi(x,t;q)]$$

olarak alınsın. Lineer olmayan $\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)]$ operatörü ise (9) ile verilen kesirli mertebeden Cahn-Allen denklemden

$$\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)] = \frac{\partial^{\delta}\Phi(x,t;q)}{\partial t^{\delta}} - \frac{\partial^2\Phi(x,t;q)}{\partial x^2} + \left(\Phi(x,t;q)\right)^3 - \Phi(x,t;q)$$

olarak bulunur. Conformable kesirli türev yaklaşımının tanımından, lineer olmayan operatör

$$\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)] = t^{1-\alpha}\frac{\partial\Phi(x,t;q)}{\partial t} - \frac{\partial^2\Phi(x,t;q)}{\partial x^2} + \left(\Phi(x,t;q)\right)^3 - \Phi(x,t;q)$$

şeklinde yeniden yazılır. Sıfırıncı derece deformasyon denkleminde $H(x,t)$ fonksiyonunun $H(x,t) = 1$ olarak seçilmesiyle sıfırıncı derece deformasyon denklemi

$$(1-pq)\mathcal{L}[\Phi(x,t;q) - u_0(x,t)] = q\hbar\mathcal{N}[\Phi(x,t;q)] \qquad (12)$$

şeklinde elde edilir. Sıfırıncı derece deformasyon denkleminde $q = 0$ ve $q = 1$ değerlerinin alınmasıyla

$\Phi(x,t;0) = u_0(x,t) = u(x,0),$
$\Phi(x,t;1) = u(x,t)$

eşitlikleri elde edilir. Böylece sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde gömme parametresi olan q parametresine göre m kez türevi alınıp $m!$ ile bölünürse ve elde edilen eşitlikte gömme parametresi değeri yerine 0 yazılırsa, $m-$ inci dereceden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x,t) - \mathcal{X}_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1})$$

olarak elde edilir. Burada

$$\vec{u}_{m-1} = \{u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_{m-1}(x,t)\}$$

ve

$$\mathcal{X}_m = \begin{cases} 0, & m \le 1 \\ p, & m > 1 \end{cases}$$

şeklindedir. $R_m(\vec{u}_{m-1})$ eşitliği, $m \ge 1$ olmak üzere,

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = t^{1-\alpha}\frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^2} + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(x,t)u_{n-k}(x,t)\right)u_{m-1-n}(x,t) - u_{m-1-n}(x,t)$$

biçimindedir. Yukarıda bulunan $m-$ inci dereceden deformasyon denkleminden

$$u_m(x,t) = \mathcal{X}_m u_{m-1}(x,t) + \hbar\mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \tag{13}$$

iteratif denklemi elde edilir. (11) ile verilen başlangıç koşulunun kullanılmasıyla (13) iteratif denkleminden

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\coth\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{x}\right),$$

$$u_1(x,t) = -\frac{3ht^{\delta}\operatorname{csch}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}{8\delta},$$

$$u_2(x,t) = -\frac{3hpt^{\delta}\operatorname{csch}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}{8\delta} - \frac{3h^2t^{\delta}\left(4\delta + 3t^{\delta}\coth\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)\right)\operatorname{csch}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2}{32\delta^2},$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu eşitliklerden seri çözüm

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{p}u_1(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^2 u_2(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^3 u_3(x,t) + \cdots$$

olarak belirlenir. $u_0(x,t)$ başlangıç değerleri kullanılarak (13) eşitliğinin yardımı ile $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)$ ve $u_4(x,t)$ eşitliklerinin hesaplanmasıyla yaklaşık çözüm

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{p}u_1(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^2 u_2(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^3 u_3(x,t) + \left(\frac{1}{p}\right)^4 u_4(x,t)$$

şeklinde olur.

KAYNAKLAR

Akinyemi, L. (2019). q-Homotopy analysis method for solving the seventh-order time-fractional Lax's Korteweg–de Vries and Sawada–Kotera equations. *Computational and Applied Mathematics*, 38(4), 1-22.

Bashar, M. H., Tahseen, T., Shahen, N. H. (2021). Application of the Advanced exp (-φ (ξ))-expansion method to the Nonlinear Conformable Time-Fractional Partial Differential Equations. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 13(1), 68-80.

Cheng, X., Wang, L., & Hou, J. (2022). Solving time fractional Keller–Segel type diffusion equations with symmetry analysis, power series method, invariant subspace method and q-homotopy analysis method. *Chinese Journal of Physics*, 77, 1639-1653.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70.

Liao, S. J. (1992). A second-order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method.

Liao, S.J. (2009). Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, 14(2009): 983-997.

Prakash, A., Kaur, H. (2018). q-homotopy analysis transform method for space and time-fractional KdV-Burgers equation. *Nonlinear Sci. Lett. A*, 9(1), 44-61.

Prakash, A., Veeresha, P., Prakasha, D. G., Goyal, M. (2019). A new efficient technique for solving fractional coupled Navier–Stokes equations using q-homotopy analysis transform method. *Pramana*, 93(1), 1-10.

Saad, K. M., Al-Shareef, E. H., Mohamed, M. S., Yang, X. J. (2017). Optimal q-homotopy analysis method for time-space fractional gas dynamics equation. *The European Physical Journal Plus*, 132(1), 1-11.

Taşbozan, O., Bayaslı, G. (2018). Conformable Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Nümerik Çözümleri. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 18(3), 842-851.

Zafar, A., Rezazadeh, H., Ali, K. K. (2020). On finite series solutions of conformable time-fractional Cahn-Allen equation. *Nonlinear Engineering*, 9(1), 194-200

BÖLÜM IV

Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Fonksiyonel Değişken Yöntemi İle Tam Çözümleri

Mustafa BATMAZ[1]
Orkun TAŞBOZAN[2]

Giriş

1695 yılında, G.W. Leibnitz'in Hospital'a sorduğu soru ile ortaya çıkan kesirli türev kavramı, bu tarihten itibaren birçok bilim adamının çalışma alanında popüler bir konu haline geldi (Hilfer, 2000).

Kesirli türev kavramı için tanımlanan birçok yaklaşım mevcuttur. Tanımlanan bu kesirli türev yaklaşımlarından bazıları ise

[1] Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Enformatik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Mezunu, Orcid: 0000-0003-2721-1716, mustafabatmaz99@gmail.com
[2] Doç. Dr., Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay/TÜRKİYE, Orcid: 0000-0001-5003-6341, otasbozan@mku.edu.tr
Bu çalışma Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalında Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN tarafından yönetilen ve Mustafa BATMAZ tarafından yazılan "Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Fonksiyonel Değişken Yöntemi İle Tam Çözümleri" başlıklı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Conformable kesirli türev yaklaşımlarıdır. Bu yaklaşımlardan Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı, ünlü matematikçiler olan Riemann ve Liouville tarafından tanımlanan kesirli mertebeden türev yaklaşımıdır (Kilbas & ark., 2006). Diğer bir yaklaşım ise sonlu farklar yardımıyla tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımıdır. Bu kesirli türev yaklaşımlarının denk oldukları, verilen fonksiyonun belli şartları sağlaması durumunda, görüldü (Debnath & Bhatta, 2007). Bazı şartlar altında denk olan bu kesirli türev yaklaşımlarının bazı dezavantajları vardır. Örneğin, bu kesirli türev yaklaşımları için, sabit bir fonksiyonun türevi sıfır değildir. Bu dezavantajı ortadan kaldıran ve diğer yaklaşımlara göre bazı avantajları olan Caputo kesirli türev yaklaşımı ise, 1967 yılında Caputo tarafından tanımlandı. Literatürde sıklıkla kullanılan, burada bahsedilen kesirli türev yaklaşımlara göre daha basit bir tanımı olan ve normal mertebeden türev ile ifade edilebilen Conformable kesirli türev yaklaşımı ise 2014 yılında Khalil ve arkadaşları tarafından tanımlandı (Khalil & ark., 2014). Ayrıca, Conformable kesirli türev yaklaşımı, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo yaklaşımlarının sağlamadığı birçok özelliği de sağlamaktadır (Rezazadeh & ark., 2017).

Diferansiyel denklemler, doğadaki birçok fiziksel olayın modellenmesi ile ortaya çıkmaktadır. Son zamanlarda ise, bu diferansiyel denklemler kesirli mertebeden türev içeren denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi de oldukça önemlidir. (Aminikkah, 2016).

Bu çalışmada, conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kesirli mertebeden kısmı diferansiyel denklem olan kesirli mertebenden genişletilmiş BKP-Boussinesq, genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denklemlerinin analitik çözümleri fonksiyonel değişken yöntemi ile elde edildi.

Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı

Tanım 1. $f_1: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $x > 0$ ve $0 < \gamma < 1$ için $f_1(x)$ fonksiyonunun γ −inci mertebeden conformable kesirli türev yaklaşımı

$$T_\gamma(f_1(x)) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f_1(x + \xi x^{1-\gamma}) - f_1(x)}{\xi}$$

denklemi ile tanımlıdır. Eğer $f_1(x)$ fonksiyonu $k > 0$ olmak üzere $(0, k)$ açık aralığında γ −inci mertebeden diferansiyellenebilir ve

$$\lim_{x \to 0^+} f_1^{(\gamma)}(x)$$

limiti varsa

$$f_1^{(\gamma)}(0) = \lim_{x \to 0^+} f_1^{(\gamma)}(x)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Khalil & ark., 2014).

Fonksiyonel Değişken Analitik Yöntemi

Doğada ki meydana gelen birçok fiziksel olayın matematiksel modelleri genellikle lineer olmayan adi veya kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilebilir. Bu tür denklemlerin analitik çözümlerinin araştırılması uygulamalı matematikte büyük öneme sahiptir. Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin de hızlı gelişimi ile birlikte ortaya çıkan yeni analitik yöntemler lineer olmayan kısmi

diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerinin bulunmasında oldukça sık kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemlerden bazıları homojen denge (Wang, 1995), F-açılımı (Zhou & ark., 2003), hiperbolik tanjant açılımı (Malfeit, 1992), sine-cosine (Yang, 1996), jakobi eliptik fonksiyon (Liu & ark., 2001), varyasyonel iterasyon (He & ark., 2006), $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım (Kutluay ve ark., 2010), homotopi perturbasyon (He, 2005), üstel fonksiyon (He & ark., 2006), fonsiyonel değişken (Zerarka & ark., 2010) vb. yöntemler olarak sıralanabilir.

Bu yöntemlerden biri olan fonksiyonel değişkenken yöntemi, ilk olarak A. Zerarka ve arkadaşları (Zerarka & ark., 2010) tarafından lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için önerildi.

Fonksiyonel değişkenken yönteminin genel bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme uygulanması için,

$$P(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xt}, u_{xy}, u_{ty}, , \dots) = 0 \qquad (1)$$

şeklinde genel bir lineer kısmi diferansiyel denklem ele alınsın. Burada u bağımlı değişken, x, y, z, t bağımsız değişkenlerdir. (1) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme

$$u(x, y, z, t) = U(\xi)$$

ve $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ reel sabitler olmak üzere

$$\xi = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \beta$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa, (1) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem

$$G(U, U_{\xi}, U_{\xi\xi}, \ldots) = 0 \tag{2}$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denkleme indirgenir. Burada U bağımlı değişkeni ve ξ ise bağımsız değişkeni göstermektedir. ξ değişkenine bağlı olan U fonksiyonuna bir dönüşüm yapılması için,

$$U_{\xi} = F(U) \tag{3}$$

formunda bir fonksiyonel değişken ele alınsın. Böylece, (1) ile verilen eşitliğinin kullanılması ile U fonksiyonunun ξ bağımsız değişkenine göre türevleri

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)',$$

$$U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)''\sqrt{F^2}, \tag{4}$$

$$U_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}[(F^2)'''F^2 + (F^2)''(F^2)'],$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Burada "$'$" simgesi $\frac{d}{dU}$ ifadesini göstermektedir. (4) ile verilen denklemlerin (2) ile verilen adi diferansiyel denkleminde kullanılmasıyla, U, F ve F fonsiyonunun türevlerinden oluşan

$$R\left(U, F, F', F'', F''', \dots\right) = 0 \tag{5}$$

denklemi elde edilir. Gerekli integral işlemlerinden sonra, (5) ile verilen diferansiyel denkleminden F fonksiyonu elde edilir. Elde edilen F fonksiyonunun değerinin (3) ile verilen denklemde yerine yazılmasıyla, (1) ile ele alınan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü elde edilir (Zerarka & ark., 2010).

Teorem 1. k_1 ve $k_2 \neq 0$ sabitler ve U bağımlı fonksiyonu (3) ile verilen bir fonksiyonel değişken olmak üzere

$$U_{\xi\xi} = k_1 U - k_2 U^2 \tag{6}$$

şeklinde ikinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi ele alınsın. O halde

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)'$$

eşitliğinin kullanılması ile (6) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri aşağıdaki gibidir (Aminikhah & ark., 2016):

1. **Durum:** $k_1 > 0$ olmak üzere (6) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_1(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right)^2,$$

$$U_2(\xi) = -\frac{3k_1}{2k_2}\left(\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right)^2$$

şeklindedir.

2. **Durum:** $k_1 < 0$ olmak üzere (6) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_3(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2}\left(\sec\left(\frac{\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right)\right)^2,$$

$$U_4(\xi) = \frac{3k_1}{2k_2}\left(\csc\left(\frac{\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right)\right)^2$$

şeklindedir.

Teorem 2. $k_1 \neq 0$ ve k_2 sabitler ve U bağımlı fonksiyonu (3) ile verilen bir fonksiyonel değişken olmak üzere

$$U_{\xi\xi} = k_1[k_2^2 U + 3k_2 U^2 + 2U^3] \tag{7}$$

şeklinde ikinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi ele alınsın. O halde

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)'$$

eşitliğinin kullanılması ile (7) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri aşağıdaki gibidir (Aminikhah & ark., 2016):

1. **Durum:** $k_1 > 0$ olmak üzere (7) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_1(\xi) = -\frac{k_2}{2}\left[1 + \coth\left(\frac{k_2\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right],$$

$$U_2(\xi) = -\frac{k_2}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{k_2\sqrt{k_1}}{2}\xi\right)\right]$$

şeklindedir.

2. **Durum:** $k_1 < 0$ olmak üzere (7) ile verilen adi diferansiyel denklemin analitik çözümleri

$$U_3(\xi) = -\frac{k_2}{2}\left[1 - i\cot\left(\frac{k_2\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right)\right],$$

$$U_4(\xi) = -\frac{k_2}{2}\left[1 + i\tan\left(\frac{k_2\sqrt{-k_1}}{2}\xi\right)\right]$$

şeklindedir.

Conformable Kesirli Mertebeden Genişletilmiş BKP-Boussinesq Denklemi

Conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemi, $0 < \gamma \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial^4 u}{\partial^3 x \partial y} - 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}\left(\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \qquad (8)$$

şeklindedir. (4.1.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denklemine, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ reel sabitler ve

$$u(x,y,z,t) = U(\xi)$$

olmak üzere,

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \beta$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)U_{\xi\xi} - {\alpha_1}^3\alpha_2 U_{4\xi} - 6{\alpha_1}^2\alpha_2 U_\xi U_{\xi\xi} = 0 \qquad (9)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır alınarak, (9) adi türevli diferansiyel denkleminin ξ değişkenine göre bir kez integralinin alınmasıyla, (9) denklemi

$$({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)U_\xi - {\alpha_1}^3\alpha_2 U_{\xi\xi\xi} - 3{\alpha_1}^2\alpha_2 \left(U_\xi\right)^2 = 0 \qquad (10)$$

formunda yazılır. (9) ile verilen adi diferansiyel denkleme

$$U_\xi = V$$

şeklinde dönüşüm yapılırsa, (10) ile verilen denklem

$$({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)V - {\alpha_1}^3\alpha_2 V_{\xi\xi} - 3{\alpha_1}^2\alpha_2 V^2 = 0 \qquad (11)$$

olarak yazılır. Elde edilen bu denklemin düzenlenmesi ile de

$$V_{\xi\xi} = \frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} V - \frac{3}{\alpha_1} V^2 \qquad (12)$$

eşitliği elde edilir. (12) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denkleminde bulunan $V_{\xi\xi}$ ifadesinin yerine, (4) denklemlerinde yer alan

$$V_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)' \tag{13}$$

eşitliği kullanılırsa, $F(V)$ fonksiyonu

$$F(V) = \pm V\sqrt{\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} - \frac{2}{\alpha_1}V} \tag{14}$$

olarak bulunur. (14) ile verilen denklemde (3) eşitliği kullanılırsa, Teorem 1 yardımı ile (12) adi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri,

$$\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} > 0$$

olmak üzere,

$$V_1(\xi) = \frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2,$$

$$V_2(\xi) = -\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2$$

şeklinde olup,

$$\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} < 0$$

olmak üzere ise,

$$V_3(\xi) = \frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\sec\left(\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2,$$

$$V_4(\xi) = \frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\csc\left(\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2$$

şeklinde elde edilir. $U_\xi = V$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} > 0$$

olmak üzere,

$$U_1(\xi) = \frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$U_2(\xi) = \frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\coth\left(\frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

şeklinde olup,

$$\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} < 0$$

olmak üzere ise,

$$U_3(\xi) = \frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan\left(\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$U_4(\xi) = -\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \cot\left(\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

yazılır. Yukarıda verilen $U_1(\xi), U_2(\xi), U_3(\xi), U_4(\xi)$ eşitliklerinde

$$u(x, y, z, t) = U(\xi)$$

değeri kullanılırsa, (8) ile verilen conformable kesirli mertebeden genişletilmiş BKP-Boussinesq denkleminin analitik çözümleri

$$\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} > 0$$

olmak üzere,

$$u_1(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \coth\left(\frac{\sqrt{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

ve

$$\frac{{\alpha_0}^2 + 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} < 0$$

olmak üzere,

$$u_3(x,y,z,t)=\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2+3\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\tan\left(\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2+3\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$u_4(x,y,z,t)=-\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2+3\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\cot\left(\frac{\sqrt{-({\alpha_0}^2+3\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

olarak bulunur. Burada

$$\xi=\alpha_0\frac{t^\gamma}{\gamma}+\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z+\beta$$

şeklindedir.

Conformable Kesirli Mertebeden Genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff Denklemi

δ_1,δ_2 sıfır olmayan reel sabitler ve $0<\gamma\leq 1$ olmak üzere, conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denklemi

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\delta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\delta_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (15)$$

şeklindedir. (15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denklemine, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta$ reel sabitler ve

$$u(x,y,t)=U(\xi)$$

olmak üzere,

$$\xi=\alpha_0\frac{t^\gamma}{\gamma}+\alpha_1x+\alpha_2y+\beta \qquad (16)$$

formunda dalga dönüşümü uygulanırsa

$$(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)U_{\xi\xi} + {\alpha_1}^3\alpha_2 U_{4\xi} + 6{\alpha_1}^2\alpha_2 U_\xi U_{\xi\xi} = 0 \qquad (17)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. İntegral sabiti sıfır alınarak, (17) adi türevli diferansiyel denkleminin ξ değişkenine göre bir kez integralinin alınmasıyla, (17) adi diferansiyel denklemi

$$(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)U_\xi + {\alpha_1}^3\alpha_2 U_{\xi\xi\xi} + 3{\alpha_1}^2\alpha_2\left(U_\xi\right)^2 = 0 (18)$$

olarak yazılır. (18) ile verilen adi diferansiyel denkleminde

$$U_\xi = V$$

formunda dönüşüm yapılırsa, (18) ile verilen diferansiyel denklem

$$(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)V + {\alpha_1}^3\alpha_2 V_{\xi\xi} + 3{\alpha_1}^2\alpha_2 V^2 = 0 \qquad (19)$$

şeklinde yazılır. (19) ile verilen diferansiyel denklemin düzenlenmesi ile

$$V_{\xi\xi} = -\frac{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2}V - \frac{3}{\alpha_1}V^2 \qquad (20)$$

denklemi elde edilir. (20) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde bulunan $V_{\xi\xi}$ ifadesinin yerine, (20) eşitliği kullanılırsa, $F(V)$ fonksiyonu

$$F(V) = \pm V\sqrt{-\frac{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} - \frac{2}{\alpha_1}V} \qquad (21)$$

olarak yazılır. (21) ile verilen denklemde (3) eşitliği kullanılırsa, Teorem 1 yardımı ile (20) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri,

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} < 0$ olmak üzere,

$$V_1(\xi) = \frac{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2,$$

$$V_2(\xi) = \frac{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2$$

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} > 0$ olmak üzere ise,

$$V_3(\xi) = \frac{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\sec\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2,$$

$$V_4(\xi) = \frac{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}{2{\alpha_1}^2\alpha_2}\left(\csc\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)\right)^2$$

şeklinde elde edilir. $U_\xi = V$ olduğu dikkate alınırsa,

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} < 0$ olmak üzere,

$$U_1(\xi) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$U_2(\xi) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\coth\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} > 0$ olmak üzere ise,

$$U_3(\xi) = -\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\tan\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$U_4(\xi) = \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\cot\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

elde edilir. Yukarıda verilen $U_1(\xi), U_2(\xi), U_3(\xi), U_4(\xi)$ eşitliklerinde

$$u(x, y, t) = U(\xi)$$

değer kullanılırsa, (15) ile verilen conformable kesirli mertebeden genelleştirilmiş Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff denkleminin analitik çözümleri

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} < 0$ olmak üzere,

$$u_1(x, y, t) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\coth\left(\frac{\sqrt{-(\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2)}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

$\frac{\alpha_0\alpha_1+\delta_1\alpha_1\alpha_2+\delta_2{\alpha_2}^2}{{\alpha_1}^3\alpha_2} > 0$ olmak üzere,

$$u_3(x, y, t) = -\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\tan\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right),$$

$$u_4(x,y,t) = \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \cot\left(\frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_1 + \delta_1\alpha_1\alpha_2 + \delta_2{\alpha_2}^2}}{2\sqrt{{\alpha_1}^3\alpha_2}}\xi\right)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\xi = \alpha_0 \frac{t^\gamma}{\gamma} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR

Aminikhah, H., Refahi Sheikhani, A., Rezazadeh, H. (2016). Travelling wave solutions of nonlinear systems of PDEs by using the functional variable method, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 34, 213–229.

Debnath, L., Bhatta, D. (2007). Integral transforms and their Applications, *Chapman-Hall/CRC*, 143 s, USA.

He, J.H. (2005). Homotopy perturbation method for bifucation of nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 6, 207-208.

He, J.H., Wu X.H. (2006). Construction of solitary solution and compacton-like solution by a variational iteration method, *Chaos Soliton. Fract.,* 29, 108-113.

He, J.H., Wu X.H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos Soliton. Fract.,* 30, 700-708.

Hilfer, P. (2000). Various Approaches to the Fractional Calculus. (R Hilfer, Editör). Applications of Fractional Calculus In Physics. *World Scientific*, 99-088745, 3 s, Germany.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70.

Kilbas, A.A., Srıvastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *Elsevier Science*, 540 s, New York.

Kutluay, S., Esen, A., Tasbozan, O. (2010). The $\left(\frac{G'}{G}\right)-$expansion method for some nonlinear evolution euations, *Appl. Math. Comput.*, 217, 384-391.

Liu, S., Fu, Z., Zhao, Q. (2001). Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, *Phys. Lett. A*, 289, 69-74.

Malfeit, W. (1992). Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *Am. J. Phys.,* 60, 650-654.

Rezazadeh, H., Khodadad, F.S., Manafian, J. (2017). New structure for exact solutions of nonlinear time fractional Sharma-Tasso-Olver equation via conformable fractional derivative. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 12(1), 405-414.

Wang, M.L. (1995). Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, *Phys. Lett. A*, 199, 169-172.

Wazwaz, A.M. (2007). Analytic study for fifth-order KdV-type equations with arbitrary power nonlinearities, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 12, 904-909.

Yang, C. (1996). A simple transformation for nonlinear waves, *Phys. Lett. A*, 224, 77-84.

Zerarka, A., Ouamane, S. & Attaf, A. (2010). On the functional variable method for finding exact solutions to a class of wave equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217, 2897-2904.

Zhou, Y.B., Wang, M.L., Wang, Y.M. (2003). Periodic wave solutions to coupled KdV equations with variable coefficients, *Phys. Lett. A*, 308, 31-36.

BÖLÜM V

Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Çalışmalara Yönelik Bibliyometrik Analiz Değerlendirilmesi

Ali KÖSE[1]
Özlem YILMAZ[2]

Giriş

Olasılık, [0,1] aralığında değerler alan ve bir olayın ortaya çıkma şansını belirten sayıya olarak tanımlanmaktadır. Olasılığın nesnel (objektif) ve öznel (subjektif) olasılık olmak üzere iki yaklaşımı bulunur. Nesnel olasılık, klasik olasılık ve deneysel olasılık olmak üzere iki kısımda incelenir. Klasik olasılık eşit olasılıklı sonuçlara dayanırken deneysel olasılık göreli sıklıklara

[1] Prof. Dr., Marmara Üniversitesi, Finansal Bilimler Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, İstanbul/Türkiye, ORCID: 0000-0001-6114-1550, akose@marmara.edu.tr
[2] Dr. Öğr. Üyesi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul/Türkiye, ORCID: 0000-0002-8418-0146, ozlem.yilmaz@msgsu.edu.tr

dayanır. Öznel olasılık ise eldeki mevcut bilgilerden elde edilen olasılıktır (Peker, 2018).

Olasılık kuramı 17.yüzyılın ortalarına doğru ortaya çıkmıştır. 1494 yılında Fra Luca Paccioli'nin yazdığı Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalita adlı kitap, olasılığı konu edinen ilk kitap olarak bilinir.

Olasılık kuramının doğuşu, servetini arttırmak isteyen Chevalier de Méré adlı soylu bir Fransız kumarbazı ile başlar. Oyunun kuralı, "Bir zarı dört atışta en az bir kez 6 getiren kazanır." olmasına rağmen, Chevalier oyunun kuralını "Çift zarı 24 atışta bir tane 6-6 getiren kazanır." olarak değiştirerek daha çok kazanmak istemektedir. Ama bu kural Chevalier'e daha az kazandırır. Bunun sebebini dönemin iyi matematikçilerinden biri olan Blaise Pascal (1623-1662) basit ama kesin çözümü ortaya koyarak oyunun ilk kuralında kazanma şansı %51.8 iken yeni kuralda %49.1 olduğunu hesaplamıştır. Blaise Pascal, Pierre de Fermat ile, matematiğin önemli bir dalı olan olasılık kuramını geliştirdiler. Günümüzde olasılık kuramı, bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi alanlarda bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, istatistiksel mekanik, kuantum mekaniği vb. bir çok alanda kullanılmaktadır.

Olasılık kuramı, Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695), Jakob Bernoulli (1645-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782),Comte de Buffon (1707-1788), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustus De Morgan (1806-1871), Thomas Bayes (1702-1761), Andrei Andreyvich Markov (1856-1922), Richard von

Mises (1883-1953) gibi önemli matematikçiler ile gelişmeye devam etmiştir. 1933 yılında Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987)‘un ortaya koyduğu aksiyomlar ile olasılık kuramını, bir ölçüm uzayına taşıyarak olasılıkla ilgili yapılan bütün süreksiz hesaplamaları, özel durumlar olarak içeren çok genel bir yapıya taşımıştır. Richard Threlkeld Cox (1898-1991) ortaya koyduğu aksiyomlar ile olasılık kuramının sağladığı temel özelikleri ortaya koymuştur. 1960’lı yıllarda Ray Solomonoff, Anrey Kolmogorov, Greagory J. Chaitin algoritmik seçkisizlik kavramı ile olasılık kuramının dayandığı rastgelelik kavramına ve enformasyon kuramına yenilikler getirmiştir (Karaçay, 2006).

1.Olasılık Dağılımları

Olasılık içeren tüm problemleri temel olasılık prensiplere göre çözmek yerine, yaygın durumlar için tasarlanmış, olasılık dağılımlarını, fonksiyonlarını ve yoğunluklarını kullanmak mümkündür (Joseph & Reinhold, 2003).

Matematik biliminin alt dalı olan olasılık kuramının içerdiği olasılık dağılımı, olasılığın incelemesi ve olayların olasılığının tanımlanması için kullanılan modellerdir.

Gözlenen olaylar birer deney olarak tanımlanırsa değeri deneyden deneye değişen sonuçlar ile belirtilen değişkene rastgele değişken adı verilir (Erbaş, 2007). Rassal degişkenlerin alabileceği tüm mümkün değerlerin olasılıklarının cebirsel veya grafikler yardımıyla hesaplanmasına "Olasılık Dağılımları" denir. Olasılık dağılımları iki ana başlık altında incelenir. Rassal degişken sürekli ise olasılık dağılımı "Sürekli Olasılık Dağılımı", süreksiz ise

"Süreksiz Olasılık Dağılımı" olarak adlandırılmaktadır (Orhunbilge, 2000).

2.Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Çalışmaların Genel Değerlendirilmesi

Olasılık dağılımları üzerine yapılan çalışmalar, genellikle teorik ve uygulamalı araştırmalarda farklı olasılık dağılımlarının nasıl kullanıldığını ve geliştirildiğini ortaya çıkarmak için yapılmaktadır. Bu çalışmaların yoğunlaştığı temel konular aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1-Normal, Binom, Poisson, Üstel, Gamma gibi klasik dağılımların tarihçesi ve kullanım alanları, farklı disiplinlerdeki uygulamaların incelenmesi.

2-Klasik dağılımların genelleştirilmiş versiyonlarının incelenmesi, performans analizlerinin yapılması.

3-Dağılımların farklı disiplinlerdeki etkisini gösteren bibliyometrik çalışmaların yapılması.

4-Mühendislik, Tıp, Finans, Biyoloji gibi alanlarda kullanılan olasılık dağılımlarının incelenmesi.

5-Büyük veri setleri için dağılımların modelleme performansının analizinin yapılması.

6-Öğretimde kullanılan yöntemler ve materyaller için olasılık dağılımlarının kullanılması.

Bununla birlikte finans, tıp, biyoloji, eğitim, mühendislik, meteoroloji, enerji, hidroloji vb. çok sayıda disiplinin sahip olduğu teorik ve/veya uygulamalı problemlerin çözümünde olasılık

dağılımlarının sıklıkla kullanıldığı görülmektedir (Neti & Howell, 2006), (Kurban, Kantar & Hocaoğlu, 2007), (Amburn, Lang & Buonaiuto, 2015), (Kılıç, Temel & Şenol, 2015), (Aygören & Uyar, 2016), (Katipoğlu & Acar, 2021), (Yu, Gargett & Du, 2023), (Amin vd., 2024).

3.Yöntem ve Veri Seti

Belirli bir alanda, dönemde ve bölgede, kişiler ya da kurumlar tarafından üretilmiş yayınların ve bu yayınlar arasındaki ilişkilerin görsel ve sayısal olarak analiz edilmesini içeren yöntemler bibliyometrik çalışmalar olarak adlandırılmaktadır (Çelikkaya, 2019).

Bibliyometrik analiz, bilimsel eserlerin kategorileri arasında değerlendirilmesine ve bu eserlerin niceliksel özellikleri üzerinden analiz yapılmasına imkân sağlamaktadır (Köse vd., 2017:27).

Bibliyometrik araştırmalarda, çeşitli veri tabanlarından alınan verilerin haritalandırılması, görselleştirilmesi amacıyla birçok programdan istifade edilmektedir (Bak, 2024).

Bibliyometrik analiz, zaman içerisinde oluşan bilgi birikiminin analiz edilerek yorumlanmasına ve bu bilgilerin özetlenmesine imkân tanımaktadır. Bu analiz, ilgilenilen konu alanındaki eğilimleri, potansiyel araştırma konularını ve çalışmalardaki boşlukları ortaya koymaya olanak tanımakla birlikte, ilgili konu alanında var olan yayınların akademik çevredeki etkisini de gösterebilmektedir (Aktaş, 2023).

Bibliyometrik araştırmaların mesafe tabanlı haritalar ve grafik tabanlı haritalar olmak üzere yaygın olarak kullanılan iki türü

bulunmaktadır. Mesafe tabanlı haritalarda, iki öğe arasındaki mesafe öğeler arasındaki ilişkinin gücünü yansıtmakta olup daha küçük bir mesafe genellikle daha güçlü bir ilişkiyi göstermektedir. Bu durum ilgili öğelerin kümelerini tanımlamayı kolaylaştırırken birbiriyle örtüşme durumlarının olmadığı durumlarda haritadaki tüm öğeleri etiketlemeyi zorlaştırabilmektedir. Grafik tabanlı haritalar ise, iki öğe arasındaki mesafenin öğeler arasındaki ilişkinin gücünü yansıtması gerekmeyen haritalardır. Bunun yerine, ilişkileri belirtmek için öğeler arasına çizgiler çizilir. Öğeler genellikle grafik tabanlı haritalarda oldukça düzgün bir şekilde dağıtılır. Bu, örtüşen etiketlerle ilgili daha az sorun olması avantajına sahip olabilir. Ancak mesafe tabanlı haritalara kıyasla grafik tabanlı haritalarda genellikle iki öğe arasındaki ilişkinin gücünü görebilmek daha zor olabilmektedir (Nees ve Waltman, 2010).

Bibliyometrik analiz son yıllarda çok popülerlik kazanan bir analiz türü olmuştur. Bu popülerlik artışında, Gephi, Leximancer, VOSviewer gibi bibliyometrik yazılımların, Scopus ve Web of Science gibi bilimsel veri tabanlarının ilerlemesi, kullanılabilirliği ve erişilebilirliği ile bibliyometrik metodolojinin disiplinler arası yayılması önemli bir etken olmuştur (Naveen, Satish, Debmalya, Nitesh ve Weng, 2021).

Bu çalışmada da *olasılık dağılımları* konusunda yapılmış olan akademik çalışmaların geçmişten günümüze var olan durumunu ortaya koymak ve konu alanındaki yeni yönelimleri belirlemek amaçlanmıştır.

Mühendislik, fen, matematik ve istatistik gibi birçok alanda büyük bir veri tabanına sahip olan Web of Science veri tabanının

uluslararası düzeyde kabul görmüş olması nedeniyle çalışmanın veri seti Web of Science veri tabanından elde edilmiştir. Bu doğrultuda günümüze kadar olasılık dağılımları ekseninde yayınlanan ve Web of Science veri tabanında indekslenen yayın türlerinde yayınlanmış olan eserler çalışmanın veri setini oluşturmaktadır.

Veri seti oluşturulurken araştırmaya herhangi bir kısıtlama getirilmemiş olup tüm alanlarda olasılık dağılımları konusunda yapılan akademik çalışmaların tamamı dikkate alınmıştır. Çalışmada, Web of Science Core Collection'da 1945-2025 döneminde, olasılık dağılımları üzerine yayınlanan 53.549 adet akademik çalışma olduğu tespit edilmiş olup bu veriler ekseninde değerlendirme yapılmıştır. Belirtilen yıllar aralığında olasılık dağılımları üzerine yayınlanan 53.549 adet akademik çalışmanın bibliyometrik analiz görselleştirmesi ile VOSviewer paket programı kullanılarak yapılmıştır. Verilere erişim tarihi 18.12.2024 tarihidir. Elde edilen veri seti göre olasılık dağılımları konusunda en eski akademik çalışmanın 1945 yılına ve en yeni akademik çalışmanın ise 2025 yılında yayınlanacak olduğu tespit edilmiştir.

4.Analiz ve Bulgular

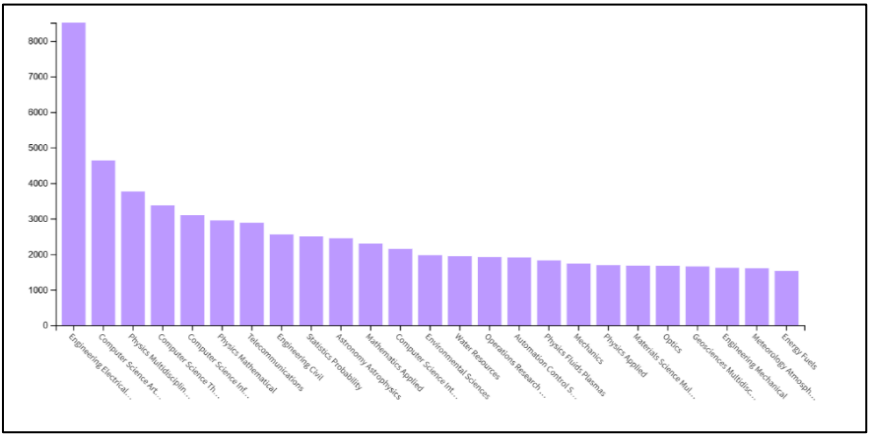
Bu çalışmada, Web of Science Core Collection'da 1945-2025 dönemi içinde, olasılık dağılımları üzerine yayınlanan 53.549 adet akademik çalışmanın verileri, yayın alanlarına, yıllara ve ülkelere göre dağılımlarına, yayın türlerine, yayın dillerine ilişkin sayısal bilgiler ile ortak yazarlık durumlarına, anahtar kelimelere ve atıf sayılarına ait görseller ekseninde değerlendirilmeye çalışılmıştır.

4.1. Akademik Çalışmaların Sayısal Bilgilerine İlişkin Değerlendirme

Bu bölüme ilişkin değerlendirmeler Web of Science Core Collection'un analiz sonuçları bölümünde yer alan veriler ekseninde yapılmıştır.

4.1.1.Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Çalışmaların Yapıldığı Yayın Alanlarına Göre Dağılımının Değerlendirilmesi

Olasılık dağılımları üzerine yapılan çalışmaların yapıldığı yayın alanlarına göre dağılımı ve verileri incelendiğinde (Grafik 1. ve Tablo 1.) 8.513 yayın ile Mühendislik, Elektrik, Elektronik (Engineering Electrical Electronic) alanında en çok yayının yapıldığı görülmüş olup toplam yayın sayısı içinde %15,90'lık bir paya sahip olduğu görülmüştür. Sonrasında sıralanan diğer alanların sayısal ve yüzdesel olarak ağırlıkları ilk sıraya göre düşük kalmış olup azalan bir trend ile yakın sayılarda yayılar üretildiği belirlenmiştir. Olasılık dağılımlarına ilişkin matematik ve istatistik alanlarında üretilen yayınların yaklaşık %9 pay ile orta sıralarda kaldığı görülmektedir. Olasılık dağılımlarının matematiğin ve istatistiğin temel konuları olduğu düşünüldüğünde daha üst sıralarda yayın üretilmesi beklenirken bu alanların orta sıralarda yer alması diğer alanlarda olasılık dağılımlarının önemli bir araç olarak çok sıklıkla kullanıldığını işaret etmektedir.



Grafik 1. Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Çalışmaların Yapıldığı Yayın Alanlarına Göre Dağılımı

Tablo 1. Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Çalışmaların Yapıldığı Yayın Alanları (Sıralamadaki İlk 25 Alan)

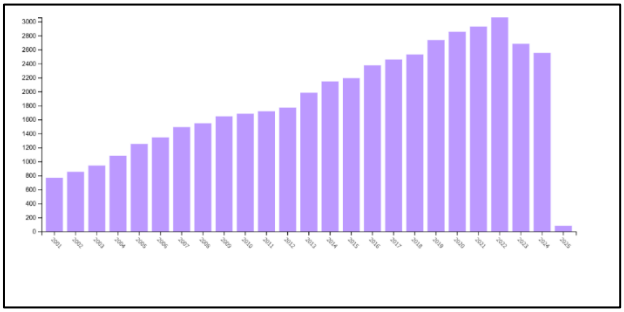
Yapıldığı Yayın Alanı	Frekans	%
Engineering Electrical Electronic	8513	15,90
Computer Science Artificial Intelligence	4638	8,66
Physics Multidisciplinary	3763	7,03
Computer Science Theory Methods	3369	6,29
Computer Science Information Systems	3100	5,79
Physics Mathematical	2951	5,51
Telecommunications	2887	5,39
Engineering Civil	2557	4,78
Statistics Probability	2503	4,67
Astronomy Astrophysics	2448	4,57
Mathematics Applied	2301	4,30
Computer Science Interdisciplinary Applications	2147	4,01
Environmental Sciences	1971	3,68
Water Resources	1942	3,63
Operations Research Management Science	1921	3,59
Automation Control Systems	1906	3,56
Physics Fluids Plasmas	1823	3,40
Mechanics	1736	3,24
Physics Applied	1689	3,15
Materials Science Multidisciplinary	1679	3,14
Optics	1676	3,13
Geosciences Multidisciplinary	1654	3,09
Engineering Mechanical	1617	3,02
Meteorology Atmospheric Sciences	1604	3,00
Energy Fuels	1529	2,86

4.1.2.Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Yıllara Göre Dağılımının Değerlendirilmesi

Olasılık dağılımları üzerine yapılan yayınların yıllara göre dağılımı incelendiğinde, son 25 yıl itibariyle 2022 yılına kadar artan bir trend ile yayın sayılarının 768'den 3.057'ye düzenli bir artış ile yükseldiği görülmektedir. Ancak 2023 ve 2024 yıllarında bu eğilimin düşüşe geçtiği görülmüştür. (Grafik 2. ve Tablo 2.)

Tablo 2. Olasılık Dağılımları Üzerine Yayınların Yıllara Göre Dağılımı (Son 25 Yıl)

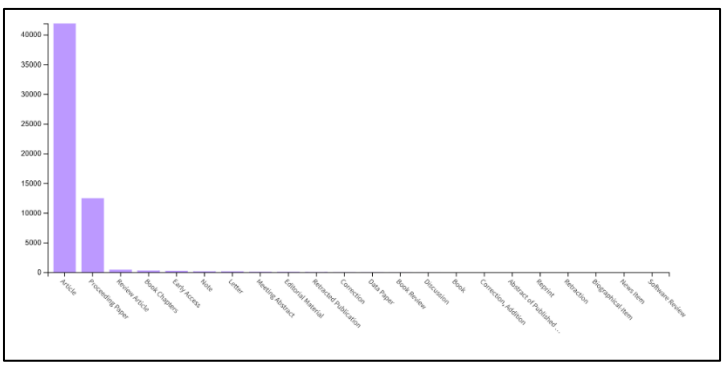
Yıllar	Frekans	%
2025	79	0,148
2024	2552	4,77
2023	2683	5,01
2022	3057	5,71
2021	2930	5,47
2020	2854	5,33
2019	2735	5,11
2018	2529	4,72
2017	2456	4,59
2016	2376	4,44
2015	2193	4,10
2014	2145	4,01
2013	1984	3,71
2012	1770	3,31
2011	1718	3,21
2010	1684	3,15
2009	1646	3,07
2008	1546	2,89
2007	1493	2,79
2006	1345	2,51
2005	1252	2,34
2004	1083	2,02
2003	942	1,76
2002	854	1,60
2001	768	1,43



Grafik 2. Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Yıllara Göre Dağılımı

4.1.3.Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Yayın Türlerine Göre Dağılımının Değerlendirilmesi

Olasılık dağılımları üzerine yapılan yayınların yayın türleri incelendiğinde 41.844 sayı ve %78,14 pay ile makale olarak yayınlanan çalışmaların diğer yayınlanmış çalışmalara nazaran özellikle öne çıktığı görülmektedir. (Grafik 3. ve Tablo 3.) İkinci sırada ise olasılık dağılımları üzerine yapılan çalışmaların 12.478'i %23,30 pay ile bildiri olarak yer almaktadır.



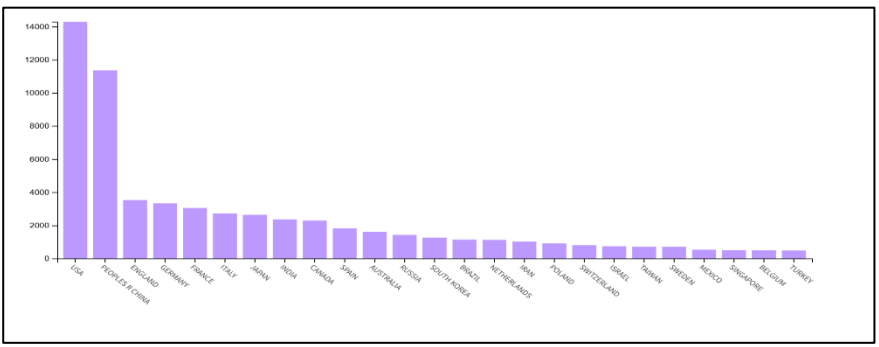
Grafik 3. Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Yayın Türlerine Göre Dağılımı

Tablo 3. Olasılık Dağılımları Üzerine Yayınların Yayın Türlerine Göre Dağılımı

Yayın Türü	Frekans	%
Article	41844	78,14
Proceeding Paper	12478	23,30
Review Article	429	0,801
Book Chapters	294	0,549
Early Access	255	0,476
Note	161	0,301
Letter	156	0,291
Meeting Abstract	87	0,162
Editorial Material	74	0,138
Retracted Publication	36	0,067
Correction	21	0,039
Data Paper	15	0,028
Book Review	8	0,015
Discussion	4	0,007
Book	3	0,006
Correction, Addition	3	0,006
Abstract of Published Item	2	0,004
Reprint	2	0,004
Retraction	2	0,004
Biographical-Item	1	0,002
News Item	1	0,002
Software Review	1	0,002
Toplam	53.549	1.00

4.1.4.Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Ülkelere Göre Dağılımının Değerlendirilmesi

Olasılık dağılımları üzerine yapılan yayınların ülkelere göre dağılımı değerlendirildiğinde Amerika (14.280 adet yayın, %26,67) ve Çin'in (11.352 adet yayın, %21,20) diğer ülkelere göre çok açık olarak daha fazla yayın ürettikleri tespit edilmiştir. Bu ülkeleri sırasıyla İngiltere, Almanya, Fransa, İtalya, Japonya ve Hindistan Takip etmektedir. (Grafik 4. ve Tablo 4.) Bu değerlendirmede Türkiye'nin 479 adet yayın ve %0,9 pay ile 25. sırada yer aldığı belirlenmiştir.



Grafik 4. Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Ülkelere Göre Dağılımı

Tablo 4. Olasılık Dağılımları Üzerine Yayınların Ülkelere Göre Dağılımı (Sıralamadaki İlk 25 Ülke)

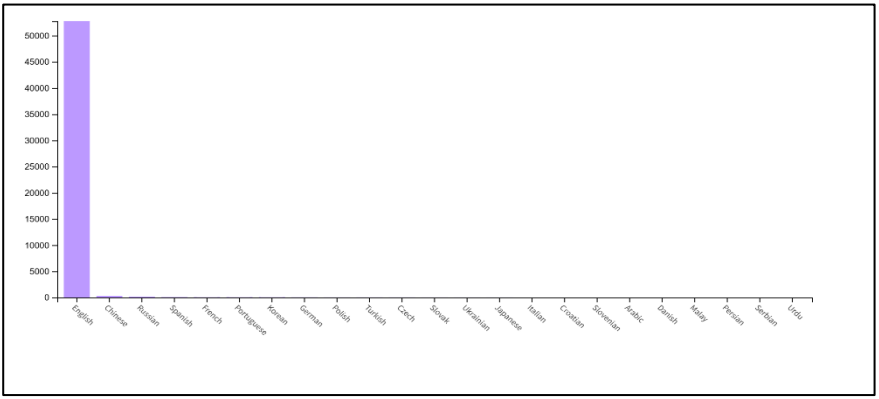
Ülkeler	Frekans	%
USA	14280	26,67
Peoples R. China	11352	21,20
England	3528	6,59
Germany	3330	6,22
France	3042	5,68
Italy	2725	5,09
Japan	2635	4,92
India	2363	4,41
Canada	2294	4,28
Spain	1815	3,39
Australia	1617	3,02
Russia	1425	2,66
South Korea	1257	2,35
Brazil	1139	2,13
Netherlands	1122	2,10
Iran	1023	1,91
Poland	907	1,69
Switzerland	809	1,51
Israel	731	1,37
Taiwan	711	1,33
Sweden	709	1,32
Mexico	522	0,98
Singapore	495	0,92
Belgium	492	0,92
Turkey	479	0,90

4.1.5.Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Yayın Diline Göre Dağılımının Değerlendirilmesi

Olasılık dağılımları üzerine yapılan yayınların yayın diline göre dağılımı incelendiğinde çalışmaların neredeyse tamamının ingilizce olarak yayınlandığı ve bu nedenle de ingilizce yayın sayılarının çok açık bir biçimde diğer dillerle yayınlanmış çalışmalara göre önde olduğu görülmektedir. (52.756 adet yayın, %98,52). (Grafik 5. ve Tablo 5.).

Tablo 5. Olasılık Dağılımları Üzerine Yayınların Dillere Göre Dağılımı

Diller	Frekans	%
English	52.756	98,52
Chinese	310	0,579
Russian	161	0,301
Spanish	75	0,14
French	43	0,08
Portuguese	43	0,08
Korean	42	0,078
German	31	0,058
Polish	19	0,035
Turkish	17	0,032
Czech	16	0,03
Slovak	10	0,019
Ukrainian	8	0,015
Japanese	7	0,013
Italian	4	0,007
Croatian	3	0,006
Slovenian	2	0,004
Arabic	1	0,002
Danish	1	0,002
Malay	1	0,002
Persian	1	0,002
Serbian	1	0,002
Urdu	1	0,002
Toplam	53.549	1.00



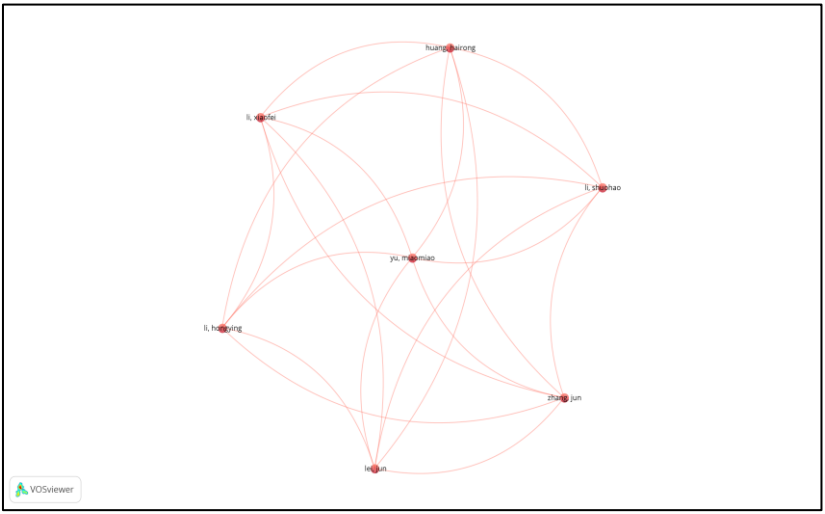
Grafik 5. Olasılık Dağılımları Üzerine Yapılan Yayınların Yayın Diline Göre Dağılımı

4.2. Akademik Çalışmaların Görsellerine İlişkin Değerlendirme

Bu bölüme ilişkin değerlendirmeler VOSviewer paket programı kullanılarak yapılmış olup Web of Science Core Collection'dan temin edilen 53.549 adet akademik çalışmaya ait veri setine ilişkin seçilmiş görsel sonuçları kapsamaktadır.

4.2.1.Ortak Yazarlık İlişkisi Değerlendirilmesi

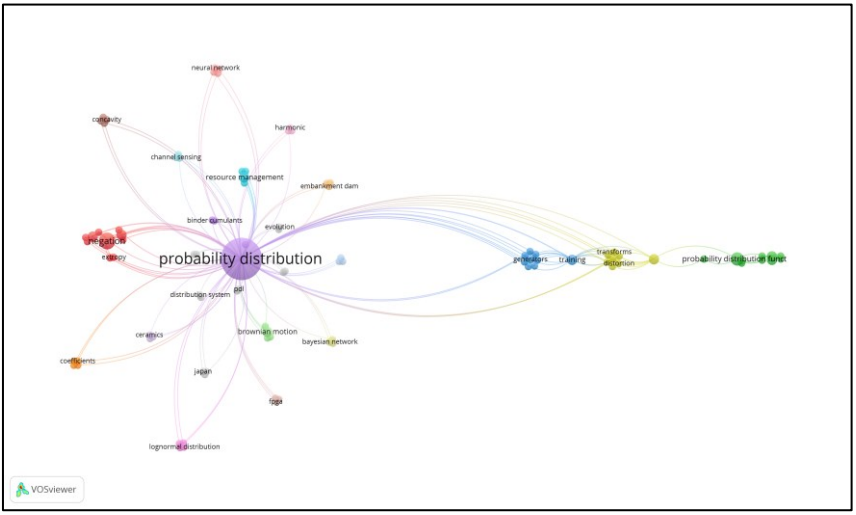
Aralarında en fazla bağlantı olan yazarları tespit etmek amacıyla oluşturulan ağ haritasında (Grafik 6) yazarların en az 1 yayına sahip olması kriteri tercih edilmiştir. Yazarların üretkenlikleri incelendiğinde en fazla (2 adet) çalışmaya sahip yazarlar sırasıyla Dan Feng, Fang Wang, Jun Zhou, E. I., Kuleshov ve Amit Srivastava olduğu tespit edilmiştir. Diğer yazarların ise birer yayını bulunduğu görülmüştür. Yazarlar arasındaki bağlantı durumu incelendiğinde tek bir kümede birleşen Grafik 6'da yer alan 7 yazarın olduğu tespit edilmiştir.



Grafik 6. Ortak Yazarlık İlişkisi

4.2.2.Anahtar Sözcük Analizi Değerlendirilmesi

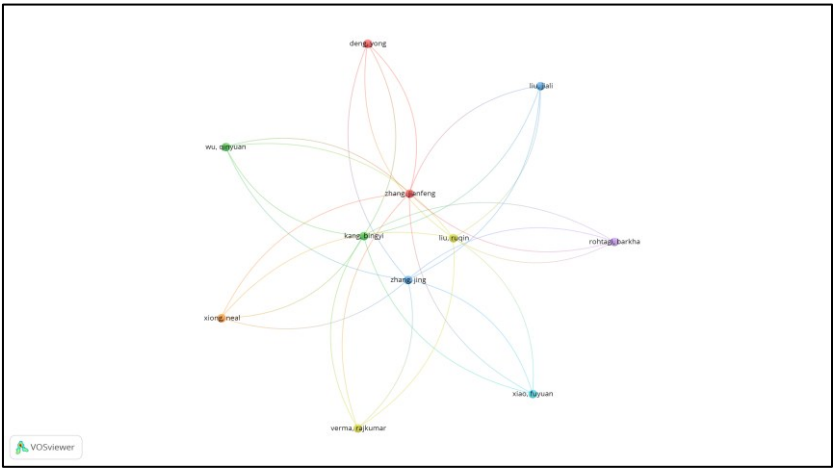
Olasılık dağılımları ile ilgili yayınlarda kullanılan anahtar kelimelerin analizini gösteren Grafik 7'nin verileri incelendiğinde, 30 tekrar ile olasılık dağılımı, 6 tekrar ile olasılık dağılım fonksiyonu, 5 tekrar ile olumsuzlama anahtar kelimelerinin ilk sıralarda yer almakta olduğu görülmüştür. Toplam bağlantı gücü incelendiğinde en güçlü ifadenin olasılık dağılımı anahtar kelimesi olduğu tespit edilmiştir. Anahtar sözcüğün en az 1 defa görülmüş olması kriteri baz alınarak yapılan bu analizde aralarında ilişki bulunan 99 çalışma olduğu belirlenmiş olup ve toplamda 24 küme bulunmuştur.



Grafik 7. Anahtar Sözcük Dağılımı

4.2.3.Yazarların Atıf Analizi Değerlendirilmesi

Yazarların atıf durumlarını tespit etmek amacıyla oluşturulan ağ haritasında (Grafik 8) yazarların en az 1 atıf almış olması kriteri tercih edilmiştir. En fazla atıf alan yazarlar incelendiğinde ise ilk sırada 43 atıf ile dört yazarın bulunduğu görülmüştür. (Bingyi Kang, Rugin Liu, Jianfeng Zhang ve Jing Zhang) Sonrasında 42 atıf ile Michio Hashino ve Sheng Yue yer alırken bunları sıralamada 39 atıf ile Chen-Li Hong, Chen Zu Yu ve Liu Jen Mei izlemiştir. Elde edilen sonuçlara istinaden atıfların 7 küme etrafında yoğunlaştığı belirlenmiştir.



Grafik 8. Yazarların Atıf Analizi Dağılımı

Sonuç

Matematik ve istatistik alanlarında özellikle önemli bir yer tutan olasılık dağılımları diğer disiplinler içinde problemlerin çözümünde önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada olasılık dağılımları konusunda yapılmış olan akademik çalışmaların geçmişten günümüze var olan durumu ortaya konulurken konu alanındaki yeni yönelimler belirlenmeye çalışılmıştır.

Olasılık dağılımı üzerine en fazla yayına sahip yıllar incelendiğinde 3057 adet makale sayısı ile 2022 yılı olduğu görülmektedir. Yıllara ilişkin son 25 yıl değerlendirildiğinde 2022 yılına kadar artış eğilimi içinde olan yayın sayısının 2023 yılı itibariyle düşüş eğilimine girdiği belirlenmiştir. Bu sonuç son yıllarda olasılık dağılımı konunun cazibesini yitirmeye başladığını işaret etmektedir.

Olasılık dağılımı ekseninde en fazla yayının 8.513 adet yayın ile Mühendislik, Elektrik, Elektronik alanında yapıldığı görülmüş olup bu durum olasılık dağılımı konusunun daha çok mühendislik bilimlerinde araştırma konusu olarak ele alındığını göstermektedir.

Yazarların üretkenlikleri incelendiğinde konu ile ilgili en fazla 2 adet çalışma üretildiği belirlenmiş olup genellikle yazarların konu ile ilgili tek yayın yaptıkların gözlenmiştir. 2 adet çalışmaya sahip yazarlar sırasıyla Dan Feng, Fang Wang, Jun Zhou, E. I., Kuleshov ve Amit Srivastava olduğu tespit edilmiştir.

Olasılık dağılımlarını içeren eserler anahtar kelimeler kullanımı bakımından incelendiğinde en fazla tekrar eden kelime 30 tekrar sayısı ile "olasılık dağılımı" olurken sonrasında 6 tekrar sayısı ile "olasılık dağılım fonksiyonu" anahtar kelimesinin geldiği görülmüştür.

En fazla atıf alan yazarlar açısından değerlendirildiğinde ise ilk sırada 43 atıf ile dört yazarın bulunduğu görülmüş olup sonrasında sırasıyla 42 atıf ile iki yazar, 39 atıf ile üç yazarın yer aldığı belirlenmiştir. Olasılık dağılımı konusunda yapılan çalışmaların atıf alma potansiyelinin yüksek olduğu tespit edilmiştir. Yayın türü açısından olasılık dağılımları ile ilgili olarak çoğunluk makale çalışması yapıldığı sonrasında ise bildiri olarak çalışmaların yayınlandığı, diğer yayın türlerinin göreceli olarak ilk iki sırada yer alan yayın türlerine göre hemen hemen olmadığı tespit edilmiştir.

Web of Science veri tabanına kayıtlı çalışmalar içerisinde olasılık dağılımı konusunda en çok yayın yapılan ülkeler sırasıyla Amerika (14.280 adet yayın), Çin (11.352 adet yayın) ve İngiltere (3528 adet yayın) olarak belirlenirken, Türkiye'nin 479 adet yayın

ile 25. sırada yer aldığı belirlenmiştir. Olasılık dağılımları üzerine yapılan yayınların yayın diline göre dağılımı incelendiğinde çalışmaların neredeyse tamamının ingilizce olarak yayınlandığı görülmüştür.

Olasılık dağılımlarının araştırma konusu olarak son yıllarda popülerlik trendinin azalıyor olduğu görülmekle birlikte yayınların çok farklı alanlara yayılmış olması konunun öneminin hala devam ettiğini işaret etmektedir. Son yıllarda yaşanan gelişmeler ekseninde yeni oluşan disiplinler ve alanlarda da olasılık dağılımlarının kullanılabileceği öngörülmektedir. Bu doğrultuda önceki yıllarda var olan yayın artış trendinin önümüzdeki yıllarda da artacağı söylenebilir.

Kaynakça

Aktaş, M. (2023). Ölçek geliştirme üzerine bir bibliyometrik analiz. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*. 14(2). 1273-1292. Doi: 10.51460/baebd.1275572.

Amburn S.A., Lang A.S. & Buonaiuto M.A. (2015). Precipitation forecasting with gamma distribution models for gridded precipitation events in Eastern Oklahoma and Northwestern Arkansas. *Weather and Forecasting*. 30(2). 349-367.

Amin M.S., Attia M.A., Khamees A.K., Mekhamer S.F., Kotb H., AboRas K.M. & Yousef A. (2024), Development of AVR controller performance using exponential distribution and transit search optimization techniques. *Frontiers Energy Resarch*. 12:1356978. Doi: 10.3389/fenrg.2024.1356978

Aygören H. & Uyar U. (2016). The analysis of financial beta behavior via panel quantile. regression approach *Journal of Economics, Finance and Accounting – (JEFA).* 4(3). 255-265. Doi: 10.17261/Pressacademia.2016.342

Bak, G. (2024). Dergicilik konulu akademik çalışmalar: Bir bibliyometrik analiz. *Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*. 26 (4). 1538-1572.

Çelikkaya, S., Ezanoğlu, Z. & Karaçadır, V. (2019). Dergipark veri tabanındaki İİBF dergilerinde yayımlanan "bilim ve teknoloji" konulu makalelerin bibliyometrik analizi. *KAÜİİBFD*. 10(20). 708-725.

Erbaş, S. O. (2007). *Olasılık ve İstatistik: Problemler ve Çözümler ile*. Ankara. Gazi Kitapevi.

Joseph, L. & Reinhold, C. (2003). Introduction to probability theory and sampling distributions. *American Journal of Roentgenology.* 180 (4). 917-923.

Karaçay, T. (2006). Olasılığın matematiksel temelleri. *Mantık, Matematik ve Felsefe IV. Ulusal Sempozyumu*. 5-8 Eylül 2006. Foça-İzmir. 1-22.

Katipoğlu O. M. & Acar R. (2021).Standartlaştırılmış yağış indeksi hesabında kullanılan dağılım fonksiyonu etkisinin ve kuraklık karakteristiklerinin araştırılması. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*. 3(11). 828-844. Doi: 10.17714/gumusfenbil.900408

Kılıç A.S., Temel H. & Şenol A. (2015). Öğretmen adaylarının "nokta, doğru, düzlem ve açı" kavramları hakkında bilgi düzeyleri ve kavram yanılgılarının incelenmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 26, 205-229. Doi: 10.14582/DUZGEF.645

Köse, A., Bülbül E.S. & Tezergil A.S. (2017). Türkiye'de aktüerya bilimleri konusunda yapılan lisansüstü tezlerin değerlendirilmesi. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü/VIII. Uluslararası Lisansüstü Eğitim Sempozyumu*, 11-12 Mayıs 2017. Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti. (ss. 25-33).

Kurban, M., Kantar, M.Y. & Hocaoğlu F.O. (2007). Weibull dağılımı kullanılarak rüzgâr hız ve güç yoğunluklarının istatistiksel analizi. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi.* 2(7). 205-218.

Orhunbilge, N. (2000). *Tanımsal İstatistik Olasılık ve Olasılık Dağılımları*. İstanbul: İstanbul Üniversitesi.

Naveen D., Satish K., Debmalya M., Nitesh P. & Weng M.L. (2021). How to conduct a bibliometric analysis: An overview and guidelines. *Journal of Business Research*. 133, 285-296.

Nees J.E. & Ludo W. (2010). Software survey: VOSviewer, a computer program for bibliometric mapping. *Scientometrics*. 84:523–538. DOI 10.1007/s11192-009-0146-3.

Neti V.S.V.P. & Howell R.W. (2006). Log normal distribution of cellular uptake of radioactivity: ımplications for biologic responses to radiopharmaceuticals. *The Journal of Nuclear Medicine*. 6(47). 1049-1058.

Peker, K.Ö. (2018). Olasılık kuramı. Ahmet ÖZMEN, Berat Fethi ŞENİŞ (Ed.), *İstatistik* içinde (s. 122-153). Eskişehir. T.C. Anadolu Üniversitesi Yayını no: 2590. Açıköğretim Fakültesi Yayını no: 1559.

Yu W., Gargett T. & Du Z. (2023). Poisson distribution-based general model of cancer rates and a cancer risk-dependent theory of aging. *Aging (AlbanyNY)* 17(15). 8537–8551. doi: 10.18632/aging.205016

BÖLÜM VI

Demi-Zayıf* Dunford Pettis Operatörler

Birol ALTIN[1]

Giriş

2013 yılında A.,El Kaddouri, J.,H`michane , K.,Bouras ve M., Moussa tarafından verilen zayıf* Dunford Pettis operatörler sınıfının bir genelliştirmesi olan demi- zayıf* Dunford Pettis Operatörlerin sınıfı tanıtılmıştır ( Kaddouri, H`michane, Bouras & Moussa,2013) Bilindiği gibi Demi gösterimi ilk olarak 1966 yılında Petryshyn'in "Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space " isimli makalesinde kullanılmıştır (Petryshyn, 1966). 2019' da zayıf demi-kompakt lineer operatörler sınıfının bazı sonuçlarını incelediler (Krichen & O'Regan, 2019). Daha sonra Dunford Pettis operatörlerinin bir genellemesi olan demi Dunford-Pettis operatörleri sınıfını tanıttılar (Benkhaled, Hajji & Jeribi, 2022).

[1] Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Teknikokullar, Ankara.

E , F birer Banach uzayı ve $T{:}E \to F$ ye bir sürekli operatör olsun. Eğer E uzayının her $x_n \overset{w}{\to} 0$ dizisi ve F' uzayının her $f_n \overset{w^*}{\to} 0$ dizisi için $f_n(Tx_n) \to 0$ oluyorsa T operatörüne bir zayıf* Dunford Pettis (z*DP) operatör adı verilir (Kaddouri, H`michane, Bouras & Moussa,2013). E den F içine bütün zayıf* Dunford Pettis operatörlerin kümesini $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ ile gösterilecektir Özdeşlik operatörü I ile gösterilecektir. Tanımlanmayan terim ve notasyonlar için (Aliprantis & Burkinshaw,1978)' ye ve (Aliprantis & Burkinshaw,2006)' ya bağlı kalınacaktır.

Temel Sonuçlar

Tanım 1. E bir Banach uzayı ve $T{:}E \to E$ ye bir sürekli operator olsun. Her $x_n \overset{w}{\to} 0$ dizisi ve F' uzayının her $f_n \overset{w^*}{\to} 0$ dizisi için $f_n(x_n) - f_n(Tx_n) \to 0$ olduğunda $f_n(x_n) \to 0$ oluyorsa T ye bir demi- zayıf* Dunford Pettis (dz*DP) operatör adı verilir. E üzerinde tanımlı bütün demi demi- zayıf* Dunford Pettis operatörlerin $\mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ ile gösterecegiz.

Örnek 1 E bir Banach örgüsü olsun. O zaman her $\alpha \neq 1$ için $\alpha I \in \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ olur. Gerçekten, Her $x_n \overset{w}{\to} 0$ dizisi ve F' uzayının her $f_n \overset{w^*}{\to} 0$ dizisi için

$f_n(x_n) - \alpha f_n(x_n) \to 0$ olsun.

O zaman $f_n(x_n) - \alpha f_n(x_n) = (1-\alpha)\, f_n(x_n) \to 0$ bulunurki bu ise $f_n(x_n) \to 0$ olduğunu verir. Dolayısıyla, αI , bir demi- zayıf* Dunford Pettis operatör olur.

Örnek 2 $k \in \mathbb{N}$ olsun. $T_k{:}\, c_0 \to c_0$ operatörü her $x = (x_i) \in c_0$ için $T_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ olarak tanımlansın. Burada c_0 , $\mathbb{R}$. nin sıfıra

yakınsak dizilerinin uzayıdır ve $T_k: c_0 \to c_0$ operatörü demi- zayıf* Dunford Pettis operatördür. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $S_k = I + T_k$ operatörünü tanımlayalım. Kolaylıkla görülebilir ki her $k \in \mathbb{N}$ için S_k operatörü demi- zayıf* Dunford Pettis operator değildir.

Teorem 1 E bir Banach örgüsü olsun. E üzerinde tanımlı her zayıf* Dunford Pettis bir demi- zayıf* Dunford Pettis operatör olur.

İspat T, E üzerinde bir zayıf* Dunford Pettis operatör ve Her $x_n \xrightarrow{w} 0$ dizisi ve F' uzayının

her $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ dizisi için $f_n(x_n) - f_n(Tx_n) \to 0$ olsun. $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f_n(Tx_n) + f_n(Tx_n)$, $f_n(x_n) - f_n(Tx_n) \to 0$ olması ve $f_n(Tx_n) \to 0$ olması dikkate alınırsa, $f_n(x_n) \to 0$ olduğu elde edilir. Bu ise T nin bir zayıf* Dunford Pettis operatör olduğunu verir.

Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin genelde doğru olmadığını verecektir.

Örnek 3 $T: c_0 \to c_0$ ve $T = \frac{1}{2} I$ olsun. (Kaddouri, H`michane, Bouras & Moussa,2013) den T bir zayıf* Dunford Pettis operatör değildir fakat Örnek 1 den T bir demi-zayıf* Dunford Pettis operatördür

Teorem 2 E bir Banach örgüsü, $T: E \to E$ bir zayıf* Dunford Pettis operatör ve

$S: E \to E$ bir demi-zayıf* Dunford Pettis operatör olsun. O zaman $T + S$ bir demi-zayıf* Dunford Pettis operator olur.

İspat Her $x_n \xrightarrow{w} 0$ dizisi ve F' uzayının her $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ dizisi için ($f_n(x_n) - f_n(T+S)(x_n) \to 0$ olsun. $T: E \to E$ bir zayıf* Dunford Pettis operatör olduğundan, $f_n(Tx_n) \to 0$ olur. Diğer taraftan, $f_n(x_n) - f_n(Sx_n) = f_n(x_n) - f_n\big((T+S)(x_n)\big) - f_n(Tx_n)$ eşitliği ve S operatörünün bir demi-zayıf* Dunford operatör olduğu gözönüne alınırsa $f_n(x_n) \to 0$ elde edilirki bu $T+S$ operatörünün bir demi-zayıf* Dunford operatör olduğunu verir.

Ancak, genelde iki demi-zayıf* Dunford Pettis operatörün toplamı bir demi-zayıf* Dunford operatör operatör olmayabilir.

Örnek 4 T_1 , $T_2: c_0 \to c_0$, operatörleri $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}I$ olarak tanımlansın. Örnek1 den T_1 ve T_2 birer demi-zayıf* Dunford Pettis operatör olmasına karşın Bu iki operatörün toplamı olan I özdeşlik operatörü bir -zayıf* Dunford Pettis operatör değildir (Kaddouri, H`michane, Bouras & Moussa,2013).

Tanım 2. E bir Banach uzayı olsun. Her $x_n \xrightarrow{w} 0$ dizisi ve E' uzayının her $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ dizisi için $f_n(x_n) \to 0$ oluyorsa E uzayına zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahip bir Banach uzayı denir. Kaddouri, H`michane, Bouras & Moussa,2013).

Örnek 5 Bütün sonlu boyutlu uzaylar zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki teorem bir Banach uzayının zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahip olmasını karakterize edecektir.

Teorem 3 E bir Banach uzayı olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir

(i) E zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahiptir.

(ii) $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F) = \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$

Proof $(i) \Rightarrow (ii)$ Teorem 1 den $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F) \subset \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ olduğu açıktır. $\mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F) \subset L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ olduğunu görelim. $T \in \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$, $x_n \xrightarrow{w} 0$ dizisi ve F' uzayının her $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ olsun. $T: E \to E$ sürekli olduğundan $T(x_n) \xrightarrow{w} 0$ E uzayında sağlanır. E zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahip olduğundan $f_n(Tx_n) \to 0$ sağlanır. Bu ise $T \in \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ olduğunu verir. Yani, $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F) = \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F) = \mathfrak{D}L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ olsun. $\frac{1}{2}I$ demi-zayıf* Dunford Pettis operatör olduğundan hipotez gereği $\frac{1}{2}I$ operatörü $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$ uzayına ait olur. Dolayısıyla, I operatörü $L_{\mathrm{z*DP}}(E,F)$uzayına ait olur. Bu ise Tanım 2 dikkate alınırsa E zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahip olduğu sonucunu verir.

Tanım2 ve Teorem 1 dikkate alınırsa aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 1 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $T: E \to E$ her operator zayıf* Dunford Pettis operatör

(ii) $I: E \to E$ bir demi- zayıf* Dunford Pettis operatör

(iii) E zayıf* Dunford Pettis özelliğine sahiptir.

KAYNAKÇA

A.El Kaddouri & J.Hmichane & K.Bouros & M.Moussa, On the class of w* Dunford .Pettis Operators, Rend. Circ.Mat.Palermo 62(2), 261-265,2013

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (2006). Positive Operators. Berlin: Springer

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (1978). Locally Solid Riesz Spaces. New York: Academic Press

Benkhaled, H. & Elleuch, A. & Jeribi, A. (2020). The class of order weakly demicompact operators. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 114(2), 1-8. Doi: 10.1007/s13398-020-00808-4

BÖLÜM VII

Arayüz Şartları İle Verilmiş Bir Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri Ve Özfonksiyonları

Kadriye AYDEMİR[1]

Giriş

Sturm-Liouville problemleri ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında J. Sturm ve J. Liouville tarafından tanımlanmış ve birçok özelliği bulunmuştur. Sturm-Liouville problemleri regüler(düzgün) ve regüler olmayan Sturm-Liouville problemleri olarak iki esas sınıfa ayrılmaktadır. Regüler Sturm-Liouville problemi

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = \lambda w(x)u, \qquad x \in [a,b]$$

diferansiyel denkleminden ve ayrılmış

$$\cos\alpha\, u(a) + \sin\alpha u'(a) = 0$$

$$\cos\beta\, u(b) + \sin\beta u'(b) = 0$$

[1] Prof. Dr., Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Amasya/Turkey, Orcid: 0000-0002-8378-3949, kadriyeaydemr@gmail.com

sınır şartlarından oluşmaktadır. Burada $p(x)$, $q(x)$, w(x) fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır, $\forall$ x $\in [a,b]$ için p(x) > 0 ve w(x) > 0, α, β $\in (0,\pi]$ reel sayılar, λ ise özdeğer parametresidir. $[a,b]$ aralığı sonlu değilse (yani $[a,\infty\ )$, $(-\infty,b]$ yada $(-\infty,\infty)$ biçiminde ise) ve/veya $p(x)$, $q(x)$, w(x) fonksiyonları için yukarıdaki ifade edilen şartlardan en az biri sağlanamıyorsa, elde edilen problem irregüler problem olur. Sturm-Liouville teorisinde matematiksel fizik problemlerinin çözümü için etkili yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin uzunluğu s, yoğunluğu ise ρ olan ince homojen çubuğun titreşimi problemini ele alalım. Silindir biçiminde olan çubuğun yarıçapı r (dik kesit alanı $s = \pi r^2$) olsun. Çubuğun sol ucu (koordinat sisteminde OX ekseni üzerine yerleştirilsin; başlangıç noktası $x = 0$, son noktası ise $x = s$ olsun) yani $x = 0$ noktası sabit tutulsun, serbest kalan $x = s$ uç noktasına ise m noktasal kütlesi bağlansın. Bu m kütlesini $\delta > 0$ birim kadar sağa doğru çekerek çubuk boyuna uzatılsın ve bu durum t=0 noktasını başlangıç anı kabul edilerek serbest bırakılsın. Bu durumda çubukta ortaya çıkan titreşimlerin matematiksel modeli

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \theta^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < s,\ \ t > 0$$

kısmi diferensiyel denklemi biçiminde ifade edilir burada α^2 fiziksel bir parametredir. Çubuğun oluştuğu homojen malzemenin young modülü e ile gösterilsin. Bu durum da

$$\psi(0,t) = 0$$

ve

$$m\frac{\partial^2\psi(s,t)}{\partial t^2} + \pi r^2 e\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x} = 0$$

sınır şartları ile

$$\psi(x,0) = \frac{\delta}{s}x, \qquad \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t} = 0$$

başlangıç şartları sağlanmış olur. Bu problemin çözümü değişkenlere ayırma yöntemi ile yani

$$\psi(x,t) = u(x)v(t)$$

biçiminde araştırılsın. O halde bu ifade verilmiş kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$u(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \theta^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} v(t)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \theta^2 \frac{v''(t)}{v(t)}$$

elde edilir. Sol taraf sadece x değişkenine göre, sağ taraf ise sadece t değişkenine bağımlı olduğu için her iki taraf sabit fonksiyondur. Bu sabit $-\lambda$ ile gösterilsin. O halde

$$u'' + \lambda u = 0$$

ve

$$v'' + \theta^2\lambda v = 0$$

Sturm-Liouville diferansiyel denklemleri elde edilir. Sınır şartları dikkate alınırsa $u(x)$ fonksiyonu için

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \ x \in (0,s)$$

$$u(0)=0$$

$$m\lambda u(s) - k\sigma u'(s) = 0$$

Sturm-Liouville problemi elde edilir. λ parametresinin sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ değerleri için bu problemin sıfırdan farklı $u_1(x), u_2(x), \ldots$ çözümleri mevcuttur. Bu özdeğerlerin

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{s}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik formülüne sahip olduğu gösterilebilir. O halde bu özdeğerler için sayılabilir sonsuz sayıda $v_1(t), v_2(t), \ldots$ çözümleri elde edilir. Ayrıca $u_n(x) = \sin(\lambda_n x)$ ve $v_n(t) = \sin(\lambda_n t)$ olduğu gösterilebilir. $f(x) = \frac{\delta}{s}x$ fonksiyonunun $[a, s]$ aralığında $\sin(\lambda_n x), n = 1,2, \ldots$ fonksiyonlarının Fourier serisine açılımının katsayıları c_n ile gösterilirse, verilmiş matematiksel fizik probleminin çözümü için

$$\psi(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, sin(\lambda_n x) \, cos(\theta \lambda_n t)$$

formülü elde edilir. Sturm-Liouville teorisinin matematiksel fizik problemlerinin çözümü için etkin yöntemleri olduğu için 19. yüzyılın ortalarından başlayarak günümüze kadar yoğun ilgi görmüş ve ilgi görmeye devam etmektedir (bak, Gültekin, & Altınışık, 2014b; Mukhtarov, Yücel, & Aydemir, 2020; Mukhtarov, & Yücel, 2020; Mukhtarov, Yücel, & Aydemir, 2021; Mukhtarov, & Aydemir, 2020; Yucel, Mukhtarov, & Aydemir, 2023; Kandemir, 2012; Kandemir, Mukhtarov, & Yakubov, 2009). Özellikle de kuantum fiziğinde ortaya çıkan bir boyutlu Schrödinger denklemi bir Sturm-Liouville denklemi olduğundan Sturm-Liouville teorisinin önemi daha da artmıştır. Regüler olmayan Sturm-Liouville problemleri ilk olarak Weyl tarafından araştırılmıştır. Bu çalışmada incelenen problem regüler olmayan Sturm-Liouville problemidir.

Araştırılan problemin klasik Sturm-Liouville problemlerinden aşağıda ifade edildiği gibi birçok farklı yönü bulunmaktadır.

1. Klasik Sturm-Liouville problemlerinden farklı olarak bu çalışmada araştırılan problem tek bir (a, b) aralığında değil iki ayrık $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında tanımlıdır böyle problemler iki aralıklı veya çok aralıklı problem olarak adlandırılmaktadır.
2. Sınır şartlarının x=0 ortak sınır noktasında iki tane arayüz şartı bulunmaktadır.
3. Özder parametresi sadece diferensiyel denklemde değil, hem de arayüz şartlarının birinde de bulunmaktadır.
4. Sınır şartları periyodik sınır şartları olup, aralığın her iki sınır noktasını içermektedir. Araştırılan problem periyodik Sturm-Liouville problemlerinin bir genelleşmesidir.

Günümüzde periyodik sınır şartları ile verilmiş Sturm-Liouville problemleri ile ilgili olan önemli çalışmalar yapılmıştır (bak, Aydemir, & Mukhtarov, 2021; Binding & Rynne, 2004; Hao, Liu, & Wu, 2010; Öztürk, Mukhtarov, & Aydemir, 2023).

Örneğin, Hao, Liu, & Wu (2010) makalesinde lineer olmayan

$$-y'' + h(s)y = \lambda k(s, y), \qquad s \in [0, \pi]$$

$$y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$$

periyodik Sturm-Liouville problemi için varlık ve katlılık hakkında sonuçlar elde edilmiştir. Burada $k(s, y)$ genel olarak lineer olmayan bir fonksiyondur. Binding & Rynne (2004) çalışmalarında,

$$(-\rho y)''' + \varrho y = ay^+ - by^- + \lambda y, \quad x \in [0,2\pi]$$

$$y(0) = y(2\pi), \qquad (\rho y)'(0) = (\rho y)'(2\pi)$$

biçiminde periyodik Sturm-Liouville problemini araştırmışlardır, burada $\frac{1}{\rho}$, ϱ, a ve b fonksiyonları ($0,2\pi$) aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlardır, ve $\forall\, x \in [0,2\pi]$ için $\rho(x) > 0$ şartı sağlanmaktadır. Ayrıca $y^{\pm}$ fonksiyonları

$$y^{\pm}(x) = max\{\pm y(x), 0\}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Bu çalışmada yarı-özdeğer kavramı tanımlanmış ve varlığı araştırılmıştır. Arayüz şartları (böyle şartlar literatürde geçiş şartları, iletim şartları, impulsive şartları v.s. gibi de adlandırılmaktadır) içeren Sturm-Liouville problemleri birçok doğa bilimlerinde ortaya çıkmaktadır. Son yıllarda böyle problemler yoğun ilgi görmektedir (örneğin; bak, Allahverdiev, Tuna, & Isayev, 2024; Aydemir, Olğar, & Mukhtarov, 2019; Gultekin, & Altinisik, 2014a; Kandemir, 2012; Kandemir, Mukhtarov, & Yakubov 2009; Olğar & Mukhtarov, 2017; Olğar & Muhtarov, 2017; Stikonas, Şen, 2023; Şen, & Štikonas, 2022; Tuna, 2022; Yücel, & Muhtarov, 2023).

ESAS SONUÇLAR

Bu çalışma da

$$-\mathrm{u}'' + \big(\lambda - \mathrm{q(x)}\big)\mathrm{u} = 0,\ \mathrm{x} \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{1}$$

çok-aralıklı diferansiyel denkleminden,

$$\mathrm{u}(-1) = mu(1) \tag{2}$$

$$u'(-1) = \frac{1}{m}u'(1) \tag{3}$$

yardımcı m parametresine bağımlı ayrık olmayan sınır şartlarından, λ özdeğer parametresine bağımlı

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 0}(\alpha_1\, u'(\varepsilon) - \beta_1 \lambda u(\varepsilon)) = 0 \tag{4}$$

ve

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\alpha_2\, u'(\varepsilon) + \beta_2 u(\varepsilon)) = 0 \tag{5}$$

arayüz şartlarından oluşan çok-aralıklı sınır-değer problemi araştırılmıştır. Burada q reel değerli fonksiyon, m reel parametre; α_i, β_i (i=1,2) reel katsayılardır. λ ise kompleks özdeğer parametresidir. Bu çalışma da

1. $q(x)$ fonksiyonu $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında süreklidir ve sonlu $q(\pm 0)=\lim_{\varepsilon\to 0} q(\pm|\varepsilon|)$ limit değerleri mevcuttur.
2. $m > 0$
3. $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$, $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$
4. $\alpha_1\, \beta_1 > 0$

şartlarının sağlandığı kabul edilecektir. $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $L_2[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir ve karesi Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı gösterilsin. $W_2^2(a,b)$ sobolev uzayı

$$W_2^2(a,b)=\{f:(a,b) \to R | f, f', f'' \in L_2[a,b]\}$$

ise eşitliği ile tanımlansın.

Tanım 1. Eğer verilmiş bir $\lambda_0 \in C$ için $y_0 \in W_2^2(-1,0) \oplus W_2^2(0,1)$ fonksiyonu (1) diferensiyel denklemini (2), (3) sınır şartlarını ve (4), (5) arayüz şartlarını sağlıyor ise λ_0-a (1)-(5) probleminin özdeğeri $u_0(x)$ çözümüne ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir.

Teorem 2. (1)-(5) çok aralıklı sınır-değer probleminin bütün özdeğerleri reel sayılardır.

İspat. λ_0 özdeğer, $u_0(x)$ ise bu özdeğere uygun özfonksiyon olduğu için

$$u_0'' + (\lambda - q(x))u_0 = 0,\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{6}$$

$$u_0(-1) = m u_0(1) \tag{7}$$

$$u_0'(-1) = \frac{1}{m} u_0'(1) \tag{8}$$

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 0} (\alpha_1 u_0'(\varepsilon) - \beta_1 \lambda u_0(\varepsilon)) = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\alpha_2 u_0'(\varepsilon) + \beta_2 u_0(\varepsilon)) = 0 \tag{10}$$

eşitlikleri sağlanır. $q(x)$ fonksiyonunun reel-değerli fonksiyon, m, α_i, β_i (i=1,2) katsayılarının ise reel sayılar olduğu dikkate alınırsa ve (6)-(10) eşitliklerinin kompleks eşleniği alınırsa, sırası ile

$$\overline{u_0}'' + \left(\overline{\lambda} - q(x)\right)\overline{u_0} = 0,\ x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{11}$$

$$\overline{u_0}(-1) = m\overline{u_0}(1) \tag{12}$$

$$\overline{u_0}'(-1) = \frac{1}{m}\overline{u_0}'(1) \tag{13}$$

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 0} (\alpha_1 \overline{u_0}'(\varepsilon) - \beta_1 \lambda \overline{u_0}(\varepsilon)) = 0 \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\alpha_2 \overline{u_0}'(\varepsilon) + \beta_2 \overline{u_0}(\varepsilon)) = 0 \tag{15}$$

eşitlikleri elde edilir. (6) eşitliği $-\overline{u_0}(x)$ ile ve (11) eşitliği $u_0(x)$ ile çarpıldıktan sonra elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$-\overline{u_0}(x) u_0''(x) + u_0(x)\, \overline{u_0}''(x) = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right) |\, u_0(x) \,|^2 \tag{16}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$u_0(x)\overline{u_0}''(x) - \overline{u_0}(x)\, u_0''(x) = \frac{d}{dx} W(u_0, \overline{u_0}; x) \tag{17}$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebir, burada

$$W(u_0, \overline{u_0}; x) = \begin{vmatrix} u_0 & \overline{u_0} \\ u_0' & \overline{u_0}' \end{vmatrix}$$

ile u_0 ve $\overline{u_0}$ fonksiyonlarının Wronskiyeni gösterilmiştir. (16) ve (17) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{d}{dx}W(u_0,\overline{u_0};x) = (\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \mid u_0(x) \mid^2 \tag{18}$$

eşitliği bulunur. (18) eşitliğinin her iki tarafının $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarındaayrı ayrı integralleri alınırsa ve de

$$\int_{a-0}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-|\varepsilon|}^{b} f(x)dx \tag{19}$$

ve

$$\int_{a}^{b+0} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b+|\varepsilon|} f(x)dx \tag{20}$$

gösterimlerinden yararlanırsa sırası ile

$$W(u_0,\overline{u_0};x)\Big|_{-0}^{-1} = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\int_{-1}^{-0} \mid u_0(x) \mid^2 dx \tag{21}$$

ve

$$W(u_0,\overline{u_0};x)\Big|_{+0}^{1} = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\int_{-1}^{-0} \mid u_0(x) \mid^2 dx \tag{22}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$W(u_0,\overline{u_0};-1) - W(u_0,\overline{u_0};-0) + W(u_0,\overline{u_0};1) - W(u_0,\overline{u_0};+0)$$
$$= \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left(\int_{-1}^{-0} \mid u_0(x) \mid^2 dx + \int_{+0}^{1} \mid u_0(x) \mid^2 dx\right) \tag{23}$$

eşitliği elde edilir. (7), (8), (12) ve (13) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned} W(u_0,\overline{u_0};-1) &= u_0(-1)\,\overline{u_0}'(-1) - u_0'(-1)\overline{u_0}(-1) \\ &= m u_0(1)\frac{1}{m}\,\overline{u_0}'(1) - \frac{1}{m}\,u_0'(1) m\overline{u_0}(1) \\ &= W(u_0,\overline{u_0};1) \end{aligned} \tag{24}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca (9), (10), (14) ve (15) eşitlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned} W(u_0,\overline{u_0};-0) &= u_0(-0)\,\overline{u_0}'(-0) - u_0'(-0)\overline{u_0}(-0) \\ &= u_0(-0)\frac{\beta_1}{\alpha_1}\overline{\lambda_0}\overline{u_0}(-0) - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\lambda_0 u_0(-0)\overline{u_0}(-0) \end{aligned}$$

$$= \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\frac{\beta_1}{\alpha_1} \mid u_0\,(\mathrm{x})\mid^2 \tag{25}$$

ve

$$W(u_0, \overline{u_0}\,; +0) = u_0(+0)\,\overline{u_0}'(+0) - u_0'(+0)\overline{u_0}(+0)$$

$$= u_0(+0)(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\overline{u_0}(+0)) + (\frac{\beta_2}{\alpha_2}u_0(+0))\overline{u_0}(+0)$$

$$= 0 \tag{26}$$

eşitlikleri bulunur. Şimdi (24), (25) ve (26) eşitlikleri (23) de yerine yazılırsa

$$\left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\frac{\beta_1}{\alpha_1} \mid u_0\,(-0)\mid^2 = \left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left(\int_{-1}^{-0} \mid u_0\,(x)\mid^2 dx + \int_{+0}^{1} \mid u_0\,(x)\mid^2 dx\right) \tag{27}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\left(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}\right)\left(\int_{-1}^{-0} \mid u_0\,(x)\mid^2 dx + \int_{+0}^{1} \mid u_0\,(x)\mid^2 dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \mid u_0\,(-0)\mid^2\right) = 0 \tag{28}$$

lde edilir. $u_0\,(x)$ özfonksiyon olduğu için

$$\int_{-1}^{-0} \mid u_0\,(\mathrm{x})\mid^2 dx + \int_{+0}^{1} \mid u_0\,(\mathrm{x})\mid^2 dx > 0 \tag{29}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\alpha_1\,\beta_1 > 0$ şartı sağlandığı için

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \mid u_0\,(-0)\mid^2 \geq 0 \tag{30}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde (28) ve (30) gereği

$$\left(\int_{-1}^{-0} |\, u_0\,(x)\,|^2\, dx + \int_{+0}^{1} |\; u_0\,(x)\,|^2\, dx\right.$$

$$\left. + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\; |\, u_0\,(-0)\,|^2\right) > 0 \qquad (31)$$

bulunur. (28) eşitsizliğinden (31) gereği $\lambda_0 - \overline{\lambda_0} = 0$, yani $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ elde edilir. Böylece λ_0 özdeğerinin reel olduğu ispat edildi.

Teorem 3. (1)-(5) çok-aralıklı sınır-değer arayüz probleminin her bir özdeğerine karşılık gelen reel değerli özfonksiyon mevcuttur.

İspat. $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{C}$ bir özdeğer olsun ve $u = u_0(\mathrm{x})$ bu özdeğere uygun özfonksiyon olsun. O halde (11)-(15) eşitlikleri gereği $\overline{u_0(x)}$ eşlenik fonksiyonu $\overline{\lambda_0}$ özdeğerine uygun gelen özfonksiyon olur. $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ olduğu için hem $u_0(\mathrm{x})$ hem de $\overline{u_0(x)}$ fonksiyonları λ_0 özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyondur. Hem (1) denklemi, hem de (2)-(5) şartları homojen oldukları için aynı bir özdeğere uygun gelen özfonksiyonların lineer birleşimleri de aynı özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olur. O halde

$$u_1(x) = \frac{u_0(x) + \overline{u_0(x)}}{2}$$

ve

$$u_2(x) = \frac{u_0(x) - \overline{u_0(x)}}{2i}$$

reel değerli fonksiyonların her ikisi $\lambda = \lambda_0$ için (1)-(5) çok-aralıklı sınır-değer arayüz probleminin çözümüdür. Bu fonksiyonlardan en az biri sıfırdan farklı olduğu için λ_0 öz değerine uygun gelen özfonksiyon olur. İspat bitti.

Tanım 4. f ve g fonksiyonlarının $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarının her birinde integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Eğer bir $\alpha > 0$ reel sayısı için

$$\int_{-1}^{-0} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx + \int_{+0}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx + \alpha f(-0)\,\overline{g(-0)} = 0$$

eşitliği sağlanırsa, o halde f ve g fonksiyonları α-arayüz ağırlıklı ortogonaldir denir.

Teorem 5. (1)-(5) çok-aralıklı sınır-değer arayüz probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ – arayüz ağırlıklı ortogonaldirler.

İspat. Kısalık için aşağıdaki

$$\mathcal{L}u := -u'' + q(x)u$$

gösteriminden yararlanılacaktır. λ_1 ve λ_2 (1)-(5) çok-aralıklı sınır-değer arayüz probleminin iki farklı özdeğeri, $u_1(\mathrm{x})$ ve $u_2(\mathrm{x})$ fonksiyonları ise sırası ile bu özdeğerlere uygun gelen özfonksiyonlar olsun. O halde

$$\mathcal{L}u_1 := \lambda_1 u_1 \tag{32}$$

ve

$$\mathcal{L}u_2 := \lambda_2 u_2 \tag{33}$$

eşitlikleri sağlanır. (32) ve (33) eşitlikleri sırası ile $u_2(\mathrm{x})$ ve $u_1(\mathrm{x})$ ile çarpıldıktan sonra taraf-tarafa çıkarılırsa

$$u_2\mathcal{L}u_1 - u_1\mathcal{L}u_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)u_1u_2 \tag{34}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$u_2\mathcal{L}u_1 - u_1\mathcal{L}u_2 = u_2(-u_1'' + q(x)u_1) - u_1(-u_2'' + q(x)u_2)$$
$$= -u_2u_1'' + u_1u_2''$$

$$= (u_1 u_2' - u_1' u_2)'$$

$$= \frac{d}{dx} W(u_1, u_2; x) \tag{35}$$

eşitliğinden de yararlanılırsa

$$\frac{d}{dx} W(u_1, u_2; x) = (\lambda_1 - \lambda_2) u_1 u_2 \tag{36}$$

bulunur. Sonuncu eşitliğin sol tarafı $[-1,0)$ aralığında integrallenir ve sınır-arayüz şartlarından da yararlanılırsa

$$\int_{-1}^{-0} \frac{d}{dx} W(u_1, u_2; x) dx = W(u_1, u_2; x)\Big|_{-1}^{-0}$$

$$= W(u_1, u_2; -0) - W(u_1, u_2; -1)$$

$$= u_1(-0)\, u_2'(-0) - u_1'(-0) u_2(-0)$$

$$-u_1(-1)\, u_2'(-1) + u_1'(-1) u_2(-1)$$

$$= u_1(-0)\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \lambda_2 u_2(-0)\right)$$

$$-\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \lambda_1 u_1(-0)\right) u_2(-0)$$

$$-m u_1(1)\left(\frac{1}{m}\, u_2'(1)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{m}\, u_1'(1)\right) m u_2(1)$$

$$= \frac{\beta_1}{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda_1) u_1(-0) u_2(-0)$$

$$-u_1(1)\, u_2'(1) + u_1'(1) u_2(1) \tag{37}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (36) eşitliğini $(0, 1]$ aralığında integralledikten sonra sınır-arayüz şartlarını kullanarak

$$\int_{+0}^{1} \frac{d}{dx} W(u_1, u_2; x) dx = W(u_1, u_2; x)\Big|_{+0}^{1}$$

$$= W(u_1, u_2; 1) - W(u_1, u_2; +0)$$

$$= W(u_1, u_2; 1) - u_1(+0)\, u_2{}'(+0)$$

$$-u_1{}'(+0) u_2(+0)$$

$$= W(u_1, u_2; 1) - u_1(+0)\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2} u_2(+0)\right)$$

$$-\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} u_1(+0)\right) u_2(+0)$$

$$= W(u_1, u_2; 1) \qquad (38)$$

Bulunur. (37) ve (38) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa .

$$\int_{-1}^{-0} \frac{d}{dx} W(u_1, u_2; x) dx + \int_{+0}^{1} \frac{d}{dx} W(u_1, u_2; x) dx$$

$$= \frac{\beta_1}{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda_1) u_1(-0) u_2(-0) - W(u_1, u_2; 1)$$

$$+W(u_1, u_2; 1)$$

$$= \frac{\beta_1}{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda_1) u_1(-0) u_2(-0) \qquad (39)$$

eşitliği elde edilir. O halde (36) eşitliğinin her iki tarafı $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında integrallenip taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda_1) u_1(-0) u_2(-0) = (\lambda_2 - \lambda_1)\left(\int_{-1}^{-0} u_1 u_2 dx\right.$$

$$\left. + \int_{+0}^{1} u_1 u_2 dx\right) \qquad (40)$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\int_{-1}^{-0} u_1 u_2 dx + \int_{+0}^{1} u_1 u_2 dx\right.$$

$$+\frac{\beta_1}{\alpha_1}u_1(-0)u_2(-0))=0 \qquad (41)$$

bulunur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için sonuncu eşitlikten direkt olarak

$$\int_{-1}^{-0} u_1 u_2 dx \ + \int_{+0}^{1} u_1 u_2 dx \ + \frac{\beta_1}{\alpha_1}u_1(-0)u_2(-0)=0 \qquad (42)$$

elde edilir. Yani $u_1(\mathrm{x})$ ve $u_2(\mathrm{x})$ özfonksiyonları $\frac{\beta_1}{\alpha_1}-$ arayüz ağırlıklı ortogonaldir. İspat bitti.

Problemin [-1,0) ve (0,1] aralığındaki temel çözümleri

Bu kesimde (1) nolu iki aralıklı Sturm-Liouville denkleminin $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarının her birinde ikişer tane lineer bağımsız çözümleri tanımlanacaktır. Her $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ için (1) nolu denklemin $[-1,0)$ aralığındaki

$$\mathrm{u}(-1) = 1 \qquad (43)$$

ve

$$\mathrm{u}'(-1) = 0 \qquad (44)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün mevcut ve tek olduğu lineer diferensiyel denklemler teorisinden (bak, Tang; 2006) iyi bilinmektedir. Bu çözüm $u_1 = u_1(x, \lambda)$ ile gösterilsin. Bu çözümün her $\forall\ x \in [-1,0)$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ değişkenine göre tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyon olduğu (yani tam fonksiyon olduğu), iyi bilinmektedir(bak, Titchmarsh; 2011). Şimdi ise (1) denkleminin $[-1,0)$ aralığındaki

$$u(-1) = 0 \qquad (45)$$

ve

$$u'(-1) = 1 \qquad (46)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $v_1 = v_1(x,\lambda)$ ile gösterilsin. Bu çözüm fonksiyonu da her $\forall\, x \in [-1,0)$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ değişkenine göre tam fonksiyondur. (1) nolu denklemin (0,1] aralığında tanımlı olan ve sırası ile

$$\mathrm{u}(1) = \frac{1}{\mathrm{m}} \tag{47}$$

$$\mathrm{u}'(1) = 0 \tag{48}$$

ve

$$\mathrm{u}(1) = 0 \tag{49}$$

$$\mathrm{u}'(1) = \mathrm{m} \tag{50}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri sırası ile $u_2(x,\lambda)$ ve $v_2(x,\lambda)$ ile gösterilsin. Bu çözümlerin varlığı, tekliği ve her x için $\boldsymbol{\lambda}$ nın tam fonksiyonu olduğu bilinmektedir (Titchmarsh; 2011).

$u_1(x,\lambda)$ ve $v_1(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskiyeni $x \in [-1,0)$ noktasından bağımsız olduğu için ve de

$$\begin{aligned} W(u_1, v_1; x) &= W(u_1, v_1; -1) \\ &= u_1(-1,\lambda)v_1{}'(-1,\lambda) - u_1{}'(-1,\lambda)v_1(-1,\lambda) \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu çözümler $[-1,0)$ aralığında lineer bağımsızdır. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} W(u_2, v_2; x) &= W(u_2, v_2; 1) \\ &= u_2(1,\lambda)v_2{}'(1,\lambda) - u_2{}'(1,\lambda)v_2(1,\lambda) \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

olduğu için $u_2(x,\lambda)$ ve $v_2(x,\lambda)$ çözümleri (0,1] aralığında lineer bağımsızdırlar. O halde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 6. (1) nolu çok aralıklı Sturm-Liouville denkleminin genel çözümü

$$u(x,\lambda)=\begin{cases} C_1u_1(x,\lambda)+D_1v_1(x,\lambda), & x\in[-1,0) \\ C_2u_2(x,\lambda)+D_2v_2(x,\lambda), & x\in(0,1] \end{cases} \quad (51)$$

biçimindedir; burada C_i, D_i $(i=1,2)$ keyfi reel katsayılardır.

(1)-(5) probleminin özdeğerleri

Kabul edelim ki $\lambda\in\mathbb{C}$ (1)-(5) probleminin bir özdeğeri, $u(x,\lambda)$ ise bu özdeğere uygun özfonksiyon olsun. O halde $u(x,\lambda)$ özfonksiyonu (50) formülü ile ifade edilir. $u(x,\lambda)$ özfonksiyonu (2)-(3) sınır şartlarını sağladığı için

$$C_1u_1(-1,\lambda)+D_1v_1(-1,\lambda)=m(C_2u_2(1,\lambda)+D_2v_2(1,\lambda)) \quad (52)$$

ve

$$C_1u_1'(-1,\lambda)+D_1v_1'(-1,\lambda)=\frac{1}{m}(C_2u_2'(1,\lambda)+D_2v_2'(1,\lambda)) \quad (53)$$

eşitlikleri sağlanır. $u_i(x,\lambda)$ ve $v_i(x,\lambda)$ (i=1,2) çözümlerinin tanımlarından yararlanılırsa, (51) ve (52) eşitliklerinden sırası ile

$C_1=D_1$ ve $C_2=D_2$ eşitlikleri elde edilir. Bu nedenle $u(x,\lambda)$ özfonksiyonu için

$$u(x,\lambda)=C_1\phi(x,\lambda)+D_1\chi(x,\lambda) \quad (54)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\phi(x,\lambda)=\begin{cases} u_1(x,\lambda) & x\in[-1,0) \\ u_2(x,\lambda), & x\in(0,1] \end{cases} \quad (55)$$

ve

$$\chi(x,\lambda)=\begin{cases} v_1(x,\lambda) & x\in[-1,0) \\ v_2(x,\lambda), & x\in(0,1] \end{cases} \tag{56}$$

gösterilmiştir. $u(x,\lambda)$ özfonksiyonu (4)-(5) arayüz şartlarını da sağladığı için

$$\alpha_1(C_1\phi'(-0,\lambda)+D_1\chi'(-0,\lambda))-\beta_1\lambda(C_1\phi'(-0,\lambda)$$
$$+D_1\chi(-0,\lambda))=0 \tag{57}$$

ve

$$\alpha_2(C_1\phi'(+0,\lambda)+D_1\chi'(+0,\lambda))+\beta_2(C_1\phi'(+0,\lambda)$$
$$+D_1\chi(+0,\lambda))=0 \tag{58}$$

eşitlikleri sağlanır. ϕ ve χ çözümlerinin (55) ve (56) tanımlarından yararlanılırsa (57) ve (58) denklemlerinden

$$\alpha_1(C_1\phi'(-0,\lambda)+D_1\chi'(-0,\lambda))-\beta_1\lambda(C_1\phi(-0,\lambda)+D_1\chi(-0,\lambda))$$
$$=\alpha_1\big(C_1u_1{}'(-0,\lambda)+D_1v_1{}'(-0,\lambda)\big)-\beta_1\lambda(C_1u_1(-0,\lambda)$$
$$+D_1v_1(-0,\lambda))$$
$$=C_1(\alpha_1u_1{}'(-0,\lambda)-\beta_1\lambda u_1(-0,\lambda))+D_1(\alpha_1v_1{}'(-0,\lambda)$$
$$-\beta_1\lambda v_1(-0,\lambda))=0 \tag{59}$$

ve

$$C_1(\alpha_2u_2{}'(+0,\lambda)+\beta_2u_2(+0,\lambda))+D_1(\alpha_2v_2{}'(+0,\lambda)$$
$$+\beta_2v_2(+0,\lambda))=0 \tag{60}$$

eşitlikleri elde edilir. $u(x,\lambda)$ özfonksiyon olduğu için

$$|C_1|+|D_1|\neq 0 \tag{61}$$

şartı sağlanır. Aksi halde $C_1 = D_1 = 0, C_2 = C_1 = 0, D_2 = D_1 = 0$ olacağı için $u(x,\lambda) \equiv 0$ olur. Bu ise $u(x,\lambda)$ nın özfonksiyon olması ile çelişir. Eğer (59) ve (60) eşitliklerine C_1 ve D_1 değişkenlerine göre cebirsel lineer homojen denklem sistemi gibi bakılırsa (61) gereği

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} \alpha_1 u_1'(-0,\lambda) - \beta_1\lambda u_1(-0,\lambda) & \alpha_1 v_1'(-0,\lambda) - \beta_1\lambda v_1(-0,\lambda) \\ \alpha_2 u_2'(+0,\lambda) + \beta_2 u_2(+0,\lambda) & \alpha_2 v_2'(+0,\lambda) + \beta_2 v_2(+0,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{62}$$

elde edilir.

Tanım 7. (62) eşitliği ile tanımlı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna (1)-(5) probleminin karakteristik fonksiyonu denir.

Sonuç 8. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyondur.

İspat. $u_i(x,\lambda)$ ve $v_i(x,\lambda)$ (i=1,2) fonksiyonları tam fonksiyonlar olduğu için $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu da tam fonksiyondur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 9. (1)-(5) probleminin probleminin özdeğerler kümesi ile $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfır yerleri kümesi çakışıktır.

Temel Çözümlerin Asimptotiği

Teorem 10. $\lambda = \mu^2$ olsun. $u_1(x,\lambda)$, $u_2(x,\lambda)$, $v_1(x,\lambda)$ ve $v_2(x,\lambda)$ çözümleri için

$$u_1(x,\lambda) = \cos\mu(x+1) + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{x} \sin\mu(x-t)q(t)\,u_1(t,\lambda)dt$$

$$v_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\mu}\sin\mu(x+1) + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{x} \sin\mu(x-t)q(t)\,v_1(t,\lambda)dt$$

$$u_2(x,\lambda) = \frac{1}{m}\left(\cos\mu(x-1) - \frac{1}{\mu}\int_{x}^{1} \sin\mu(x-t)q(t)\,u_2(t,\lambda)dt\right)$$

$$v_2(x,\lambda) = m(-\frac{1}{\mu}\sin\mu(x-1) - \frac{1}{\mu}\int_x^1 \sin\mu(x-t)q(t)\, v_2(t,\lambda)dt\,)$$

integral eşitlikleri sağlanır.

İspat. Bu teoremin Titchmarsh (2011) kaynağındaki uygun teoremin ispatına banzer biçimde yapılabilir.

Teorem 11. $u_i(x,\lambda)$ ve $v_i(x,\lambda)$ (i=1,2) çözümleri için $\lambda \to \infty$ olmak üzere

$$u_1(x,\lambda) = \cos\mu(x+1) + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|\,Im\mu\,|(x+1)}\right)$$

$$v_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\mu}\sin\mu(x+1) + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{|\,Im\mu\,|(x+1)}\right)$$

$$u_2(x,\lambda) = \frac{1}{m}\cos\mu(x-1) + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|\,Im\mu\,|(1-x)}\right)$$

$$v_2(x,\lambda) = -\frac{m}{\mu}\sin\mu(x-1) + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{|\,Im\mu\,|(1-x)}\right)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 9 daki formülleri kullanılarak kolayca elde edilebilir.

Teorem 12. $u_i'(x,\lambda)$ ve $v_i'(x,\lambda)$ (i=1,2) çözümleri için $\lambda \to \infty$ olmak üzere

$$u_1'(x,\mu) = -\mu\sin\mu(x+1) + O\left(e^{|\,Im\mu\,|(x+1)}\right)$$

$$v_1'(x,\mu) = -\cos\mu(x+1) + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|\,Im\mu\,|(x+1)}\right)$$

$$u_2'(x,\mu) = -\frac{\mu}{m}\sin\mu(x-1) + O\left(e^{|\,Im\mu\,|(1-x)}\right)$$

$$v_2'(x,\mu) = -m\cos\mu(x-1) + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|\,Im\mu\,|(1-x)}\right)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 10 daki formülleri kullanılarak kolayca elde edilebilir.

Sonuç 13. $u_i'(x,\lambda)$ ve $v_i'(x,\lambda)$ (i=1,2) çözümleri için $\lambda \to \infty$ olmak üzere

$$u_1(-0,\lambda) = \cos\mu + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right)$$
$$v_1(-0,\lambda) = -\frac{1}{\mu}\sin\mu + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{|Im\mu|}\right)$$
$$u_1'(-0,\lambda) = -\mu\sin\mu + O\left(e^{|Im\mu|}\right)$$
$$v_1'(-0,\lambda) = -\cos\mu + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right)$$
$$u_2(+0,\lambda) = \frac{1}{m}\cos\mu + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right)$$
$$v_2(+0,\lambda) = \frac{m}{\mu}\sin\mu + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{|Im\mu|}\right)$$
$$u_2'(+0,\lambda) = \frac{\mu}{m}\sin\mu + O\left(e^{|Im\mu|}\right)$$
$$v_2'(+0,\lambda) = -m\cos\mu + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Karakteristik Fonksiyonun asimptotiği

Sonuç 12 deki asimtotik ifadelerden yararlanılırsa $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= (\alpha_1 u_1'(-0,\lambda) - \beta_1\lambda u_1(-0,\lambda))(\alpha_2 v_2'(+0,\lambda)\\ &\quad +\beta_2 v_2(+0,\lambda))\text{-}(\alpha_2 u_2'(+0,\lambda) + \beta_2 u_2(+0,\lambda))\\ &\quad \times(\alpha_1 v_1'(-0,\lambda) - \beta_1\lambda v_1(-0,\lambda))\\ &= (-\alpha_1\mu\sin\mu - \beta_1\mu^2\cos\mu + O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right))\\ &\quad \times(-\alpha_2 m\cos\mu + \frac{\beta_2 m}{\mu}\sin\mu + O\left(\frac{1}{\mu^2}e^{|Im\mu|}\right))\\ &\quad -(-\alpha_1\cos\mu - \beta_1\mu\sin\mu + O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right))\end{aligned}$$

$$\times\left(\alpha_2\frac{\mu}{m}\sin\mu+\frac{\beta_2}{m}\cos\mu+O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$=\left(\beta_1\mu^2\cos\mu+O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$\times\left(-\alpha_2 m\cos\mu+O\left(\frac{1}{\mu}e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$-\left(\beta_1\mu\sin\mu+O\left(e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$\times\left(\alpha_2\frac{\mu}{m}\sin\mu+O\left(e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$=\left(\alpha_2\beta_1 m\mu^2\cos^2\mu+O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$-\left(\frac{\alpha_2\beta_1\mu^2}{m}\sin^2\mu+O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right)\right)$$
$$=\alpha_2\beta_1\mu^2\left(m\cos^2\mu-\frac{1}{m}\sin^2\mu\right)+O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right)$$

asimptotik formülü bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 14. $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu için

$$\Delta(\lambda)=\alpha_2\beta_1\mu^2\left(m\cos^2\mu-\frac{1}{m}\sin^2\mu\right)+O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right)$$

asimptotik formülü sağlanır.

Özdeğerlerin Asimptotiği

(1)-(5) probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfır yerleri olduğu için, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin asimptotiği bulunacaktır.

$$\Delta_0(\lambda)=\alpha_2\beta_1\mu^2\left(m\cos^2\mu-\frac{1}{m}\sin^2\mu\right)$$

ve

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=O\left(\mu e^{|Im\mu|}\right)$$

gösterilsin. $\Delta_0(\lambda)=0$ denkleminin çözümleri $\mu_0=\mu_1=0$, $\mu_n{}^{\pm}=\pm\tan^{-1}m+n\pi$, $n=0,1,2,\ldots$ biçiminde elde edilir. Kompleks μ düzleminde

$$\left\{\mu\in\mathbb{C}\,\middle|\,|\mu|=\frac{|\mu_{n+1}{}^{\pm}-\mu_n{}^{\pm}|}{2}\right\},n=0,1,2,\ldots$$

çemberlerini $\Gamma_n^{\pm}$ ile, $\Gamma_n^{\pm}$ çemberi ile $\Gamma_{n+1}^{\pm}$ çemberi arasındaki bölgeyi ise $D_n^{\pm}$ ile gösterilsin. O halde yeteri kadar büyük n-ler için her $D_n^{\pm}$ bölgesinde $\Delta_0(\lambda)$ nın bir tek $\mu_n^{\pm} = \tan^{-1} m + n\pi$ sıfır yeri mevcuttur. Ayrıca yeteri kadar büyük n-ler için her $\Gamma_n^{\pm}$ çemberi üzerinde

$$\Delta_0(\lambda) > \Delta_1(\lambda)$$

olduğu açıktır. O halde Rouche teoremi gereği $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfır yerleri için

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_n = \frac{\pi n^2}{4} + O(n),\ \lambda \to \infty$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 15. (1)-(5) probleminin sayılabilir sonsuz sayıda özdeğeri mevcuttur ve (λ_n) n=0,1,2,… özdeğerler dizisi için (her bir özdeğer katı ile hesaplanır)

$$\lambda_n = \frac{\pi n^2}{4} + O(n), \qquad \lambda \to \infty$$

asimptotik formülü geçerlidir.

Kaynakça

Allahverdiev, B. P., Tuna, H., & Isayev, H. A. (2024). The resolvent of impulsive dynamic singular Sturm–Liouville operators. *Afrika Matematika*, *35*(3), 62.

Aydemir, K., & Mukhtarov, O. S. (2021). Spectrum of periodic Sturm-Liouville problems involving additional transmission conditions. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 1-12.

Binding, P. A., & Rynne, B. P. (2004). Half-eigenvalues of periodic Sturm–Liouville problems. *Journal of Differential Equations*, *206*(2), 280-305.

Aydemir, K., Olğar, H., & Mukhtarov, O. (2019). The principal eigenvalue and the principal eigenfunction of a boundary-value-transmission problem. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 11(2), 97-100.

Gultekin, H., & Altinisik, N. (2014a). Asymptotic expansion formulas for eigenvalues and eigenfunctıons of the discontinuous boundary value problem with transmission condition. *J. Math. Comput. Sci.*, *4*(2), 384-399.

Gültekin, H. & Altınışık, N. (2014b). On solution of two-point fuzzy boundary value problems. *The Bulletin of Society for Mathematical Services and Standards*, *11*, 31-39.

Hao, X., Liu, L., & Wu, Y. (2010). Existence and multiplicity results for nonlinear periodic boundary value problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *72*(9-10), 3635-3642.

Kandemir, M. (2012). Irregular boundary value problems for elliptic differential-operator equations with discontinuous coefficients and transmission conditions.

Kandemir, M., Mukhtarov, O., & Yakubov, Y. (2009). Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *6*, 317-338.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., & Aydemir, K. (2020). Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. *Complexity*, *2020*(1), 8019460.

Mukhtarov, O. S., & Yücel, M. (2020). A study of the eigenfunctions of the singular Sturm–Liouville problem using the analytical method and the decomposition technique. *Mathematics*, *8*(3), 415.

Mukhtarov, O., Yücel, M., & Aydemir, K. (2021). A new generalization of the differential transform method for solving boundary value problems. *Journal of New Results in Science*, *10*(2), 49-58.

Olğar, H., & Mukhtarov, O. S. (2017). Weak eigenfunctions of two-interval Sturm-Liouville problems together with interaction conditions. *Journal of Mathematical Physics*, *58*(4).

Olğar, H., & Muhtarov, F. S. (2017). The basis property of the system of weak eigenfunctions of a discontinuous Sturm–Liouville problem. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *14*, 1-13.

Öztürk, S. N., Mukhtarov, O., & Aydemir, K. (2023). Non-classical periodic boundary value problems with impulsive conditions. *Journal of New Results in Science*, *12*(1), 1-8.

Stikonas, A., & Şen, E. (2023). Asymptotic analysis of Sturm-Liouville problem with Dirichlet and nonlocal two-point boundary conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*.

Şen, E., & Štikonas, A. (2022). Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a non-local boundary value problem with retarded argument. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *67*(7), 1662-1676.

Tang, K. T. (2006). *Mathematical methods for engineers and scientists* (Vol. 2, p. 13). Berlin: springer.

Titchmarsh, E. C. (2011). *Elgenfunction Expansions Associated With Second Order Differential Equations*. Read Books Ltd.

Tuna, H. (2022). Q-Sturm-Liouville Problems With Eigenparameter Dependent Boundary Conditions. Mathematical Reports, 24(3), 377-391.

Yücel, M., & Muhtarov, F. (2023). Parameterized Differential Transform Method and Its Application to Boundary Value Transmission Problems. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *28*(2), 412-423.

Yücel, M., Mukhtarov, O. S., & Aydemir, K. (2023). Computation of eigenfunctions of nonlinear boundary-value-transmission problems by developing some approximate techniques. *Boletim Sociedade Paranaense De Matematica*.

BÖLÜM VIII

Hipergraflar ve Forgotten İndeksi

Eda ESENLER[1]
Gülistan KAYA GÖK[2]

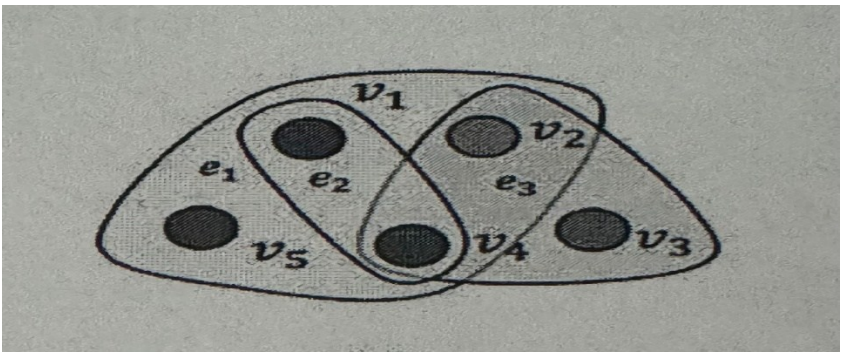
1.GİRİŞ

Matematiksel bir terim olan hipergraf kavramı, bilgisayar bilimlerinin çeşitli alanlarında kullanılan ve bir kenarın çok sayıdaki düğüme bağlanabildiği özel şekillerdir. Hipergraf, grafın bir genellemesi olup iyi bilinen graf tanımıyla birçok hipergraf kavramı tanımlanabilir. Bir hipergraf, hiperköşe ve hiperkenar küme çiftleriyle tanımlanır. Köşe kümesi olarak da adlandırılan hiperköşe kümesi sonlu bir kümedir ve hiperkenar, köşe kümesinin alt kümesini temsil eder. Hiperkenar herhangi bir sayıda köşeyi bağlayabildiğinden, graflar hipergraflar tarafından modellenebilir.

[1] Y.Lisans öğrencisi, Hakkari Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 190108001@hakkari.edu.tr, 0000-0000-0000-0000.
[2] Doç. Dr., Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, gulistankayagok@hakkari.edu.tr, 0000-0001-9059-1606.

Hipergrafın sırası ve boyutu, köşe kümesine ve hiperkenar kümesine göre tanımlanabilir. Yani hipergrafın sırası, köşe kümesinin kardinalitesini temsil eder ve hipergrafın boyutu, hiperkenar kümesinin kardinalitesini gösterir.

Aşağıdaki şekil bir hipergraf örneğidir. [2]



Şekil 1.1

2. TEMEL HİPERGRAF BİLGİLERİ

Hiperköşe ve hiperkenarla belirlenen hipergraflar grafların genel yapısı olarak değerlendirilebilir. Bir grafda bir kenar, iki düğüm arasında tanımlı olup iki düğümü birleştirirken, hipergraflarda istenilen sayıdaki düğümü birleştirebilir. Graflarda, kenarlar iki düğüme bağlı olmalıdır ama hipergraflarda tek bir düğüme, üç ayrı düğüme veya yirmi ayrı düğüme bağlı olabilir. Graflarla ilgili daha fazla bilgi için [1],[3],[4] nolu kaynaklara bakınız.

2.1 Boş Hipergraf ve Aşikar Hipergraf

Boş hipergraf, boş köşe kümesi ve boş hiperkenar kümesi olan hipergraftır. Aşikar hipergraf, boş olmayan köşe kümesi ve boş hiperkenar kümesi olan hipergraftır.

2.2. İzole Hiperköşe

İzole edilmiş hiperköşe, hiçbir hiperkenarda bulunmayan noktayı belirtir. Burada iki köşenin her ikisini de içeren bir hiperkenar varsa, iki köşe komşudur.

2.3. Düzenli ve Düzgün Hipergraf

Düzenli bir hipergraf, tüm köşelerin aynı dereceye sahip olduğu hipergraftır. Düzgün bir hipergraf, tüm hiperkenarların aynı dereceye sahip olduğu hipergraftır.

2.4. Alt Hipergraf ve Kısmi Hipergraf

Belirli bir hipergrafın bir alt hipergrafı, köşe kümesi verilen hipergrafın alt kümesi olan ve hiperkenarların yalnızca bir köşeye sahip olduğu hipergraftır. Kısmi hipergraf, hiperkenarı verilen hipergrafın alt kümesi olan bir hipergraftır.

2.5. Döngü ve Yol

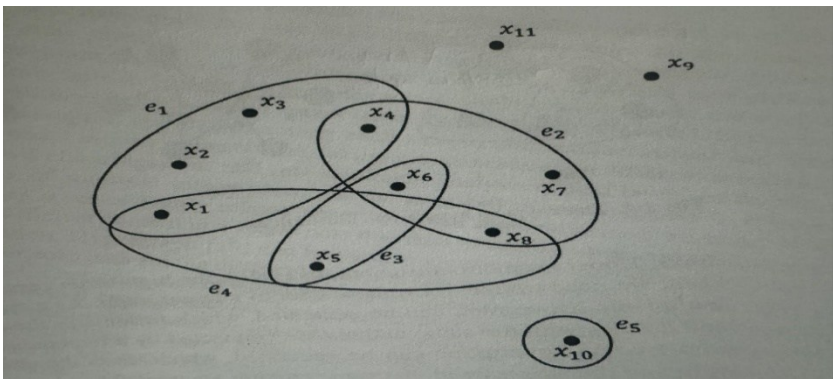
Döngü, ilk noktası son noktasıyla aynı olan bir yoldur. Döngü, hiperkenarı yalnızca bir eleman ile belirtir.

Yol, noktaların ardışık hiperkenara bağlandığı bir dizidir. Bir yolun uzunluğu, yoldaki köşelerin sayısıdır. Herhangi bir köşe çifti bağlantılı ise bir hipergraf bağlantılıdır. İki köşe arasındaki uzaklık, bu iki köşeyi birbirine bağlayan yolun minimum uzunluğudur.

Aşağıdaki şekil bir hipergraf örneğidir. Şekildeki hipergrafta 11 köşe ve 5 hiperkenar vardır. Hiperkenar e_1; x_1, x_2, x_3 ve x_4 köşelerini birbirine bağlar. Hiperkenar e_2; x_4, x_6, x_7 ve x_8'i birbirine bağlar. Hiperkenar e_3; x_5 ve x_6'yı birbirine bağlar. Hiperkenar e_4; x_1, x_5 ve x_8'i birbirine bağlar. Hiperkenar e_5; yalnızca x_{10}'un kendisini birbirine bağlayan bir döngüdür. x_9 ve x_{11}

köşeleri iki izole köşedir. x_{11} başka bir köşe noktasına bağlı olmadığı için hipergraf ile bağlantısı yoktur. Ayrıca,

$x_3 \to e_1 \to x_1 \to e_3 \to x_8 \to e_2 \to x_7$ uzunluğu 4 olan x_3'ten x_7' ye bir yoldur. x_4'ten x_5'e en kısa yol $x_4 \to e_2 \to x_8 \to e_4 \to x_5$'dir.



Şekil 2.1

3.HİPERGRAF ÇEŞİTLERİ

Aşağıdaki tablo, bu bölümde tanımlanan hipergraf kavramlarının notasyonlarını gösterir.

Notasyon	Tanımlama
G	Hipergraf
V	Köşeler kümesi
ε	Hiperkenarlar kümesi
H	Yönlü olmayan grafların yapısı
D_v	Köşe derecelerinin köşegen matrisi
D_e	Hiperkenar derecelerinin köşegen matrisi
d(v)	v köşesinin derecesi
$\delta(e)$	e hiperkenarının derecesi

3.1. Yönlü Olmayan Hipergraf

G, V köşesi ve ε hiperkenarından oluşan bir hipergraf (yönsüz hipergraf) olsun. O halde,

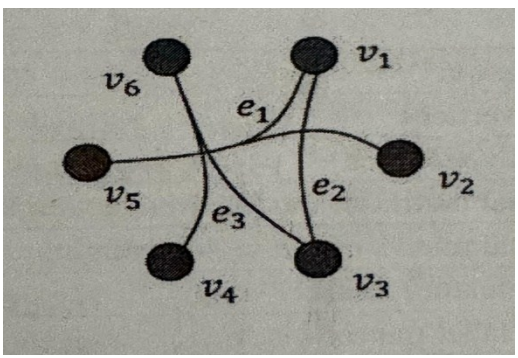
$$\mathbf{H}(v,e) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in e \\ 0 & \text{eğer } v \notin e \end{cases}.$$

Hiperkenar e'nin ve v hiperköşesinin derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\delta(e) = \sum_{v \epsilon V} \mathbf{H}(v,e).$$

$$d(v) = \sum_{e \epsilon \varepsilon} \omega(e) * \mathbf{H}(v,e).$$

Aşağıdaki şekilde hipergraflara bir örnek verilip matrisleri bulunmuştur.



Şekil 3.1. *Yönlü olmayan hipergraf*

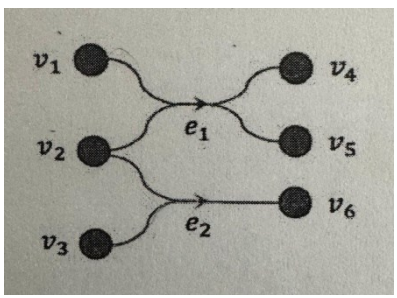
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D_v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{D_e} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.2. Yönlü Hipergraf

Yönlü olmayan hipergraflara yön vererek oluşturulur. Her hiperkenarda, köşe; kaynak nokta kümesi ve hedef nokta kümesi olarak iki kümeye ayrılır. Yönlendirilmiş hipergrafda, etki matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathrm{H}(v,e) = \begin{cases} -1 \text{ eğer } v \in T(e) \\ 1 \text{ eğer } v \in S(e) \\ 0 \text{ diğer durumlarda} \end{cases}.$$

Burada T(e) ve S(e) sırasıyla hiperkenar e için hedef ve kaynak köşelerdir. Etki matrisi H, sırasıyla tüm hiperkenarlar için kaynak ve hedef köşeleri tanımlayan $\mathrm{H_s}$ ve $\mathrm{H_t}$ olmak üzere iki matrise ayrılmıştır. Yönsüz hipergrafın aksine, yönlü hipergrafda geçen iki faklı etki matrisi, $\mathrm{H_s}$ ve $\mathrm{H_t}$ vardır.



$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H_t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Şekil 3.2. *Yönlü Hipergraf*

Şekilde, etki matrisi **H**, kaynak etki matrisi $\mathbf{H}_s$ ve hedef etki matrisi $\mathbf{H_t}$ olmak üzere yönlü hipergraf örneğini gösterilmektedir. Yönlü hipergraf altı köşe içerir. e_1 ve e_2 olmak üzere iki hiperkenar içerir. e_1 dört köşeyi, e_2 üç köşeyi birbirine bağlar. e_1 hiperkenarında kaynak köşeler v_1 ve v_2 , hedef köşeler ise v_4 ve v_5'dir. e_2 hiperkenarı için, kaynak köşeler v_2 ve v_3, hedef köşe sadece v_6'dır.

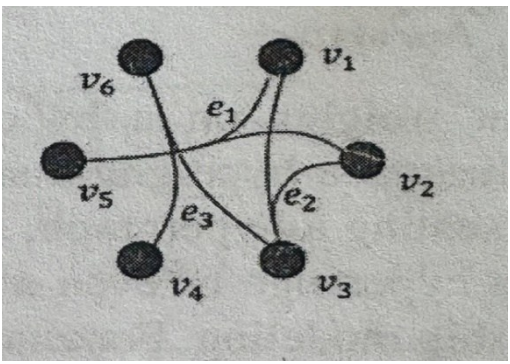
3.3. Olasılıksal Hipergraf

Dünya korelasyonlarında bağlantının yoğunluğu yalnızca ikili bir sayı değil aynı zamanda sıfırdan bire kadar değişen bir sayı da olabilir. Sonuç olarak etki matrisi, olasılıksal bir hipergrafı belirtmek için 0'dan 1'e kadar değişen öğelere sahip sürekli bir matris olabilir. Şekil 3.1'de gösterilen hipergrafın olasılıksal değerleri alınırsa, olasılıksal hipergraf altı köşe ve üç hiperkenarlardan oluşur. Hiperkenar e_1 , üç köşe v_1 , v_2 ve v_5 'i birbirine bağlar. Bu hiperkenardaki bağlantının yoğunluğu aynı değildir. Şekilde gösterildiği gibi, e_1, v_1'i 0.3 yoğunlukta, v_2'yi 0.8 yoğunlukta, v_5'i 0.5 yoğunlukta bağlarsa; hipergrafdaki köşe ve hiperkenar derecesi, aşağıda gösterildiği gibi, hipergraf etki matrisi H'nin satır veya sütununun toplamı ile hesaplanır.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \mathbf{D_v} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \mathbf{D_e} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.9 \end{bmatrix}.$$

3.4. K-Düzgün Hipergraf

Bir hipergraftaki hiperkenarlar, aynı sayıda köşeyi birbirine bağladığında k-düzgün hipergraf olarak adlandırılır. Şekil 3.3'de 3-düzgün hipergraf örneği gösterilmektedir. Şekildeki hipergraf altı köşeden ve 3 hiperkenarlardan oluşur. Her hiperkenar tam olarak 3 köşe içerir. Hiperkenar e_1 , köşeleri v_1 , v_2 ve v_5 'i bağlar. Hiperkenar e_2 , köşeleri v_1 , v_2 ve v_3 'ü birbirine bağlar. Bu tip hipergrafdaki tüm hiperkenarların derecesi k'dır.



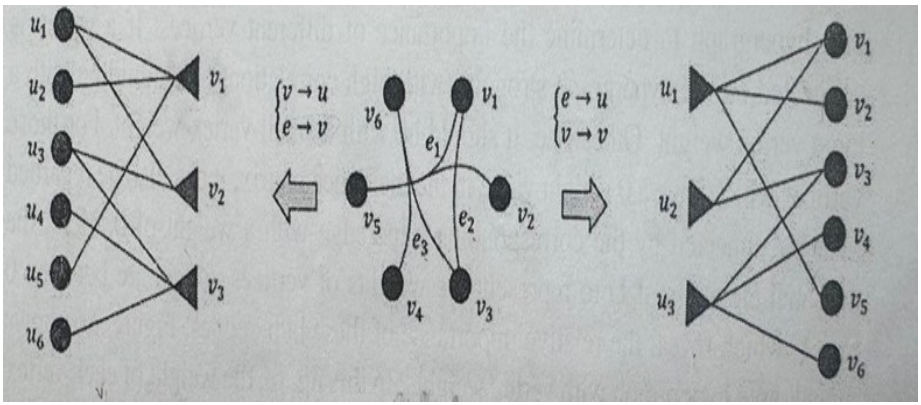
Şekil 3.3. *3-düzgün hipergraf*

Aşağıda, şekildeki hipergrafın matrisleri verilmiştir.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D_v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D_e} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.5. İki Parçalı Hipergraf

İki parçalı graf $G = \{U, V, \varepsilon\}$ ile gösterilir. İki parçalı köşeler ayrık ve bağımsız olan U ve V kümelerine ayrılır. Her kenar, U kümesindeki bir köşeyi, V kümesindeki başka bir köşeye bağlar. Yönlü olmayan bir hipergraf, iki parçalı bir graf olarak kabul edilebilir. Şekil 3.4'de, hipergrafın iki parçalı grafa dönüştürülmesinin örnekleri gösterilmektedir. Buna göre; iki parçalı graf iki durumla oluşturulabilir. Birinci olarak, köşeler ve hiperkernarlar U'da köşeler ve V'de köşeler olarak ele alınır (sol kısımda gösterildiği gibi). İkinci olarak, köşeler ve hiperkenarlar V'de köşeler ve U'da köşeler olarak ele alınır (sağ kısımda gösterildiği gibi). Aşağıdaki şekil hipergraf ve iki parçalı graf arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Burada, ilk şekil iki parçalı graf, ikinci şekil hipergraf ve üçüncü şekil de iki parçalı grafdır.



Şekil 3.4. *Hipergraf ve İki Parçalı Hipergraf*

Aşağıda, şekildeki hipergraf ve grafların matrisleri verilmiştir.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.6. Hipergraf Üzerindeki Ağırlıklar

Bir hipergraf yapısına değer vermek için hipergraf üzerinde farklı ağırlıklar belirtilmektedir. Bu, bir hipergrafı temsil etmenin yoludur. Çünkü bir hipergrafın köşe kümesi veya bir alt hipergraf gibi farklı bileşenler, modelleme üzerinde farklı etkilere sahip olur. Örneğin, bir sistemde, kullanıcı profilindeki ağırlıklar kullanıcı niteliklerinin kategorizasyonunu etkiler. Nitelikler doğru bir şekilde kategorize edilmezse, profile dayalı önerilerin ve pazarlamanın doğruluğu sorgulanabilir. Bir hipergraf üzerindeki ağırlıklar, hiperkenar ağırlıkları ve köşe ağırlıklarıdır. Bu değerlerin büyüklüğü hiperkenarların ve köşelerin önemini gösterir. Bir köşe noktası

hipergrafa güçlü bir şekilde bağlıysa (yüksek korelasyonlarla), büyük bir köşe ağırlığına sahip olmalıdır. Aksi takdirde, küçük bir köşe noktası ağırlığıyla ifade edilir. Hiperkenar ağırlıkları, bir hipergrafta farklı hiperkenarların önemini yansıtır. Köşeler arasındaki bağlantıları temsil etmede farklı hiperkenarlar farklı öneme sahip olabileceğinden, hiperkenarların ağırlıklandırılması çok önemlidir.

3.7. Tam Hipergraf

V en az iki köşesi olan bir hiperköşe kümesi olsun. V'nin tüm hiperköşe kümelerinin birleşmesiyle boştan farklı hiperkenar kümesi tanımlansın. Bu hiperköşe ve hiperkenarlarla oluşan hipergrafa tam hipergraf denir ve H_{K_n} ile gösterilir. H_{K_n}'den derecesi 1 olan tüm hiperkenarların çıkarılmasıyla elde edilen hipergraf da $H^*_{\mathrm{K}_n}$ ile gösterilir [5].

4. HİPERGRAFLARIN FORGOTTEN İNDEKSİ

Tanım 4.1. *H* bir hipergaf olsun. n nokta sayısı, d noktanın derecesi, u hiperköşe, e hiperkenar ve E hiperkenar kümesi olmak üzere, hipergrafların Forgotten indeksi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F(H) = \sum_{e_i \in E} \sum_{u \in e_i} d_u^2.$$

Örnek 4.1 Şekil 3.3'de verilen hipergrafın Forgotten indeksi aşağıdaki şekildedir.

Tüm köşelerin dereceleri $d_{v_1} = 2, d_{v_2} = 2, d_{v_3} = 2, d_{v_4} = 1, d_{v_5} = 1, d_{v_6} = 1$'dır. Buradan,

$$F(H) = \sum_{\substack{e_1 \in E \\ |e_1|=2}} \sum_{u \in e_1} d_u^2 + \sum_{\substack{e_1 \in E \\ |e_1|=3}} \sum_{u \in e_1} d_u^2 + \sum_{\substack{e_2 \in E \\ |e_2|=2}} \sum_{u \in e_2} d_u^2 + \sum_{\substack{e_2 \in E \\ |e_2|=3}} \sum_{u \in e_2} d_u^2 + \sum_{\substack{e_3 \in E \\ |e_3|=2}} \sum_{u \in e_3} d_u^2 + \sum_{\substack{e_3 \in E \\ |e_3|=3}} \sum_{u \in e_3} d_u^2$$

$$= \sum_{\substack{e_1 \in E \\ |e_1|=2}} d_{v_1}^2 + d_{v_2}^2 + d_{v_5}^2 + \sum_{\substack{e_1 \in E \\ |e_1|=3}} d_{v_1}^2 + d_{v_2}^2 + d_{v_5}^2 + \sum_{\substack{e_2 \in E \\ |e_2|=2}} d_{v_1}^2 + d_{v_2}^2 + d_{v_3}^2 + \sum_{\substack{e_2 \in E \\ |e_2|=3}} d_{v_1}^2 + d_{v_2}^2 + d_{v_3}^2 + \sum_{\substack{e_3 \in E \\ |e_3|=2}} d_{v_3}^2 + d_{v_4}^2 + d_{v_6}^2 + \sum_{\substack{e_3 \in E \\ |e_3|=3}} d_{v_3}^2 + d_{v_4}^2 + d_{v_6}^2$$

$$= \binom{3}{2}(4+4+1) + \binom{3}{3}(4+4+1) + \binom{3}{2}(4+4+4) + \binom{3}{3}(4+4+4) + \binom{3}{2}(4+1+1) + \binom{3}{3}(4+1+1) = 108.$$

Teorem 4.1. $n \geq 2$ olmak üzere, H bağlantılı bir hipergraf olsun. H, n köşe üzerinde bir hiperkenar olarak tek elemanlı alt kümesi olmayan bir hipergraf ise

$$n \leq \mathrm{F(H)} \leq (2^{n-1}-1)^2 \sum_{i=2}^{n} i \binom{n}{i}.$$

Burada alt sınıra, kenar kümesi $\mathrm{E} = \{V\}$ olan hipergraf ile üst sınıra da $\mathrm{H}^*_{\mathrm{K_n}}$ hipergrafı ile ulaşılır.

İspat: H bağlantılı olduğundan, H'nin tüm noktalarını içeren yanlızca bir hiperkenar olup alt sınır açıktır. Diğer taraftan, $\mathrm{H}^*_{\mathrm{K_n}}$ ile üst sınırı incelemek kolay olacaktır. $\mathrm{H}^*_{\mathrm{K}_n}$; boş kenar, derecesi 1 olan kenar ve çoklu kenar içermediğinden, i noktasının derecesi $\binom{n}{i}$ olacaktır ($2 \leq i \leq n$). Burada, $\mathrm{H}^*_{\mathrm{K}_n}$ regüler hipergraf olup u noktasının derecesi,

$$d_u = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1} - 1.$$

ve

$$F\left(\mathrm{H}^*_{\mathrm{K}_n}\right) = \sum_{e_i \epsilon E} \sum_{u \in e_i} d_u^2$$

$$= \sum_{\substack{e_i \in E \\ |e_i|=2}} \sum_{u \in e_i} d_u^2 + \sum_{\substack{e_i \in E \\ |e_i|=3}} \sum_{u \in e_i} d_u^2 + \ldots + \sum_{\substack{e_i \in E \\ |e_i|=n}} \sum_{u \in e_i} d_u^2$$

$$= \sum_{\substack{e_i \in \mathrm{E} \\ |e_i|=2}} 2d_u^2 + \sum_{\substack{e_i \in \mathrm{E} \\ |e_i|=3}} 3d_u^2 + \ldots + \sum_{\substack{e_i \in \mathrm{E} \\ |e_i|=n}} nd_u^2$$

$$= \binom{n}{2} 2d_u^2 + \binom{n}{3} 3d_u^2 + \ldots + \binom{n}{n} nd_u^2$$

O halde,

$$F\left(H^*_{\mathrm{K}_n}\right) = (2^{n-1}-1)^2 \sum_{i=2}^{n} i \binom{n}{i}.$$

Sonuç 4.1. $n \geq 1$ olmak üzere, H bağlantılı bir hipergraf olsun. H bir hiperkenar olup tek elemanlı bir alt küme içerirse,

$$\mathrm{F}(H) \leq 2^{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}$$

dir öyleki H tam hipergraf H_{K_n}'dir.

Teorem 4.2. $n \geq 3$ olmak üzere P_n bir hiperyol olsun. O zaman,

$$n \leq F(P_n) \leq 2(1^2+2^2) + (n-3)(2^2+2^2).$$

Üst sınırdaki eşitlik ancak ve ancak P_n'nin köşeli bir yol grafı olması durumunda geçerlidir.

İspat: Hiperyoldaki herhangi bir köşenin derecesi 1 veya 2 olduğundan, bir hipergraftaki kenar sayısını ve derecesi 2'ye eşit olan köşe sayısını artırmak, $F(P_n)$ 'i de artırır. Bir hiperyolda maksimum kenar sayısı n-1 ve derecesi 2'ye eşit olan maksimum köşe sayısı n-2'dir. Bu nedenle;

$$F(P_n) = 2(1^2+2^2) + (n-3)(2^2+2^2).$$

P_n^*, n köşe üzerindeki doğrusal bir hiperyol ve $n > m \geq 3$ hiperkenar olsun, öyle ki derecesi 2'den büyük veya 2'ye eşit olan ve asılı olmayan bir hiperkenar hariç tüm hiperkenarların derecesi 2'dir.

5. Sonuç

Bu çalışmada çok yönlü kullanım alanına sahip olan hipergraf kavramı üzerinde durulmuştur. Hipergraf çeşitleri, özellikleri ve matrisleri tanıtılmıştır. Ayrıca, hipergraflar için Forgotten indeksi tanımlanıp hesaplamaları yapılmıştır. Bu indeks ile ilgili hipergraf açısından sınırlar bulunmuştur.

Kaynaklar

Büyükköse, Ş. 2021. Graf Teori, 3, Baskı., Nobel Akademik Yayıncılık, 208 s., Ankara.

Dai, Q., Gao, Y., Hypergraph Computation, Springer, 1987.

Bapat, R.B., Graphs and Matrices, Springer, 1988.

Janežič, D., Miličević, A., Nikolić, S., Trinajstić N.,Graph-Theoretical Matrices in Chemstry,1987.

Shetty, S., Bhat, A. Sombor Index of Hypergraphs, 2023.

BÖLÜM IX

Ayrık Zamanlı Bir Av-Avcı Popülasyon Modelinde Hasatın Etkisi Ve Kararlılık Analizi

Fatma ETİK[1]
Figen KANGALGİL[2]
Ülkü DİNLEMEZ KANTAR[3]

Giriş

Canlılar birbirleriyle ve bulundukları çevreyle etkileşim içindedir. Ortamdaki canlılar ve bu canlıların etkileşim içinde olduğu dış etkenler ekosistemi oluşturur. Ekosistemler ; çayırlar, çöller ve resifler gibi coğrafi bölgelerden de meydana gelebilir. Belirli alanlar içerisinde karşılıklı etkileşim içinde yaşayan farklı

[1] Gazi University , Institute of Science, Department of Mathematics, 06500 Yenimahalle, Ankara ORCID:0000-0002-1681-9892
[2] Dokuz Eylül University, Bergama Vocational School, 35729, İzmir
ORCID: 0000-0003-0116-8553
[3] Gazi University, Faculty of Science, Department of Mathematics , 06500 Yenimahalle, Ankara ORCID: 0000-0002-5656-3924

türlerin meydana getirdiği biyolojik birime komünite olarak adlandırılır. Komüniteler kendinden daha büyük ekosistemlerin canlı kısmını oluşturur. Antalya Körfezi'nde yayılış gösteren barbunya, orfoz, lüfer gibi balıklar ile midye, ahtapot gibi canlılar birlikte komüniteyi oluşturur.

Komüniteyi oluşturan canlılar belirli bir yaşam alanına sahiptir. Bu yaşam alanlarıyla komşu olabilir, ortak alanları kapsayabilir veya biri diğerini sınırları içine alabilir. Komünitelerin yapısı simbiyotik etkileşimler, beslenme ilişkileri ve barındırdığı tür çeşitlilikleri vardır. Komünitelerin içerdiği tür sayısı bakımından farklılık göstermesi tür çeşitliliği olarak adlandırılır. Tür çeşitliliğini rekabet, av-avcı ilişkisi gibi canlı etkileşimleri ile ışık, sıcaklık, yağış gibi etmenler etkili olur. Bir bölgedeki genlerin, bu genleri taşıyan türlerin, bu türleri barındıran ekosistemlerin ve bunları birbirine bağlayan olayların tamamı biyolojik çeşitlilik olarak isimlendirilir.

Komünitede en çok yer alan veya canlı kütlesi en fazla olan türe baskın tür olarak isimlendirilir. Baskın türler avlanmaya ya da hastalıklara karşı diğer türlere oranla daha başarılıdır. Baskın tür zaman içerisinde yaşam alanlarının bozulması, avlanma gibi sebeplerden dolayı komüniteden ayrılabilir. Böylelikle farklı bir tür baskın hâle gelebilir. Varlığı sona eren baskın tür ona tabi yaşayan türleri de negatif şekilde etkileyebilir.

Rekabet tür içinde veya türler arasında da olabilir. Rekabetten bahsedebilmek için en az iki organizmanın aynı kaynağı kullanıyor olmasıyla birlikte kaynağın kısıtlı olması ve rakiplerin birbirine zarar vermesi gerekir. Bu zarar,

organizmalardan birinin varlığının son bulması veya komüniteden ayrılması şeklinde gerçekleşir.

Bir türe ait bireyler arasında meydana gelen rekabete tür içi rekabet denilir. İki veya daha fazla türden bireylerin kısıtlı kaynaklar için yaptıkları biyolojik etkileşim ise türler arası rekabet olarak isimlendirilir. Türler arası rekabet komünitenin yapı ve dinamikleri üzerinde etkilidir. Bu olay türü engelleme ve türün kaynak paylaşımı şeklinde ortaya çıkar. Aynı kısıtlı kaynaklar için rekabet eden iki tür sürekli olarak bir arada bulunamaz. Dışardan bir etki yapılmadığında türlerden biri sınırlı kaynakları daha etkin kullanırken diğer türden daha hızlı çoğalır. Türleri birinin diğer türden daha hızlı çoğalması, diğer türün yok olmasına sebep olabilir. Bu durum rekabette elenme olarak adlandırılır.

Komünitelerde canlılar arası av-avcı ilişkileri, en fazla görülen etkileşim türlerindendir. Bir canlı türü, başka canlı türlerini besin olarak tüketmek için saldırıp yaralıyor veya öldürüyorsa **avcı**; yaralanan ya da ölen tür **av** olarak isimlendirilir. Av-avcı arasında "- / +" ilişki tipi vardır. Avcı kendisi için fayda sağlarken av zarar görür. Bu durum av-avcı ilişkisinin dengede olabilmesi için çok önemlidir. Av sayısı ne kadar fazlaysa avcı için yiyecek kaynağı o kadar fazladır. Av miktarının fazla olması avcı miktarını arttırır. Bundan dolayı av sayısında azalma meydana getirir. Av miktarı azaldığında avcı için yeterli miktarda av olmaz ve avcı türün bir bölümü komüniteden ya göç eder ya da varlığı son bulur. Böylelikle av-avcı arasında birbirlerini takip eden inişler ve çıkışlar ortaya çıkar.

Belirli bir zamanda ve belirli bir alanda birbirleriyle etkileşim içinde yaşayan aynı türe ait canlılardan oluşan topluluğa popülasyon denir.

Popülasyon yoğunluğu belli bir zaman diliminde birim alan veya hacimde yaşayan canlı sayısıdır. Popülasyon yoğunluğundaki değişiklikler besin kaynağını bulmayı kolaylaştırır veya zorlaştırır. Bu durum canlılar arasında rekabete yol açar.

Popülasyon büyüklüğünde zaman içerisinde artma veya azalma olabilir. Popülasyonda üreme sonucu birey sayısı artabileceği gibi iç göçler de popülasyondaki birey sayısını arttırır. Popülasyon dışına gerçekleşen göçler ve popülasyondaki ölümler ise birey sayısını azalmasına sebep olan etkilerdir. Bu etkiler beraber değerlendirildiğinde popülasyonun büyüklüğü belirlenir. Doğum oranı ile içe göçün toplamı, ölüm oranı ile dışa göçün toplamına eşit ise popülasyon dengede olduğunu gösterir. Doğum ve içe göç oranı daha fazlaysa popülasyonun büyüdüğünü gösterir. Ölüm ve dışa göç daha fazlaysa, popülasyonun gittikçe küçüldüğünü gösterir. İstenilen her popülasyonun denge durumunu korumasıdır. Bu durumda canlı yaşamı en düşük riskle devamlılığını koruyabilir. Bunun için son zamanlarda pek çok bilim insanı, matematiksel modellerle doğadaki olayları anlamaya ve onları yorumlamaya çalışmaktadır.

Matematiksel modellemeler, genel olarak iki kategoride incelenirler. Ayrık zamanlı modellerde fark denklemleri veya denklem sistemleri, değişimin sürekli olduğu modellerde ise

diferansiyel denklem ya da denklem sistemleri kullanılır. Bir olay matematiksel olarak modellenirken, ilk olarak basit kabuller ile modellenir. İleriki süreçlerde de modeli daha gerçekçi kılmak için yeni değişkenler ve fonksiyonlar eklenir.

1920'li yıllarda İtalyan fizikçi Vito Volterra ve Amerikalı matematikçi Alfred J. Lotka ve tarafından hesaplanan iki denklem Lotka-Volterra denklemleri olarak bilinir. Av-avcı denklemleri olarak bilinen bu denklemler en eski ve en çok kullanılan ekolojik modellerin ilk örneklerindendir.

Lotka -Volterra denklemleri, biri yırtıcı, diğeri av olmak üzere iki türün etkileşimini ve biyolojik dinamiklerini tanımlamak için kullanılan birinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. Diferansiyel denklemler, popülasyonların zaman içindeki değişimini ve benzer diğer süreçleri tanımlayan denklemlerdir.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -\gamma y + \delta xy$$

Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ katsayıları pozitiftir.

Avların sınırsız bir besin kaynağına sahip oldukları ve avlanmadıkları sürece üstel olarak üredikleri varsayılır; bu üstel büyüme yukarıdaki denklemde αx terimi ile gösterilir. Av üzerindeki avlanma oranının, avcılar ile avın karşılaşma oranına orantılı olduğu varsayılır; bu yukarıda βxy ile gösterilir. x veya y sıfırsa, o zaman avlanma olamaz. Bu iki terimle

yukarıdaki av denklemi şu şekilde yorumlanabilir: avın popülasyonunun değişim oranı, kendi büyüme oranından avlanma oranının çıkarılmasıyla elde edilir.

δxy terimi avcı popülasyonunun büyümesini temsil eder. (Avlanma oranına benzerliğine dikkat edin; ancak, avcı popülasyonunun büyüme oranı avını tüketme oranına eşit olmadığı için farklı bir sabit kullanılır). γy terimi avcıların doğal ölüm veya göç nedeniyle kayıp oranını temsil eder; av olmadığında üstel bir azalmaya yol açar. Dolayısıyla denklem, avcı popülasyonunun değişim oranının avını tüketme oranından içsel ölüm oranının çıkarılmasına bağlı olduğunu ifade eder. Daha sonraki süreçlerde Lotka-Volterra modeline yeni özellikler eklenerek model geliştirilmiş, böylece gerçek yaşamda gözlemlenen olaylar modele yansıtılmaya çalışılmıştır.

Hasat etkisine sahip av-avcı modellerinin analizi, dinamik sistemlerde önemli bir yere sahiptir. Matematiksel modellemede hasat, popülasyon dinamiklerini etkileyen önemli bir parametredir. Hasat oranı ve türü, popülasyonların büyüme hızlarını, denge noktalarını ve sürdürülebilirliklerini doğrudan etkiler. (Mohdeb, N.,2023) Çoğu durumda, amaç yalnızca popülasyon kontrolü değil; aynı zamanda popülasyondan önemli bir hasat kazancı elde etmektir. Hasat popülasyonu yok olmaya iterse, bu süreç belirli bir süre durdurulmalıdır. Bu tür modeller, doğal kaynakların yönetimi, biyolojik koruma ve sürdürülebilir avcılık uygulamaları gibi alanlarda kullanılır. Avcı üzerindeki hasat faktörü, avcı popülasyonunun büyüme oranını etkileyecektir. (Ak Gümüş, Ö., 2022) Bu çalışmada amacımız, hasat faktörünün avcı

popülasyonunun üzerindeki etkisini inceleyerek av-avcı dinamiklerini araştırmaktır.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

Fark denklemlerinde, bir sistemdeki değişiklikler ayrık aralıklar üzerinden modellenir. Çoğu durumda, ayrık aralıklar zaman aralıklarını temsil eder ve bu nedenle zaman değişkenini belirtmek için t harfi kullanılır. (Allen, 2007). Bu kısımda fark denklemleri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1.2.1: Bir $y: N \to R$

fonksiyonu için Δ fark operatörü şu şekilde ifade edilir.

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

ve Δy fonksiyonuna , y nin birinci mertebeden farkı denir. Burada R reel sayılar ve N doğal sayılar kümesini ifade eder. O halde y nin ikinci mertebeden farkı,

$$\begin{aligned}(\Delta^2 y) &= \Delta(\Delta(y(t))) \\ &= y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)\end{aligned}$$

ve genel olarak y nin k. mertebeden farkı,

$$\Delta^k y(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} y(n+k-1)$$

ile hesaplanır.

Tanım 1.2.2: Bir $S \subseteq N = \{0,1,2,\ldots\}$ sayı cümlesi üzerinde tanımlı olan bir x fonksiyonunun değerlerini ve onun Δx, $\Delta^2 x, \ldots$ gibi farklarını içeren bir denkleme S cümlesi üzerinde tanımlı olan bir **fark denklemi** denir (Bereketoğlu & Kutay, 2010).

Tanım 1.2.3: Fark denklemlerinin indisleri arasındaki farkının maksimum değerine bu **denklemin mertebesi** denir. **(**Agarwal, 2000) Örneğin:

$$x_{k+3} + 3x_{k+2} - x_k = 0$$

denkleminin mertebesi

(k+3)-(k)=3

şeklindedir.

Tanım 1.2.4: a_1(n); a_2(n); ...; a_k(n) katsayıları ile g(n), n $\geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. a_k(n) $\neq$ 0 olmak üzere

$$x(n + k) + a_1(n); x(n + k - 1) + \cdots + a_k(n)x(n) = g(n)$$

şeklindeki bir fark denklemine k'ıncı basamaktan lineer fark denklemi denir.

Eğer $g(n) \equiv 0$ ise, denkleme **homojen fark denklemi** denir. Aksi durumda denir. k'ıncı basamaktan bir lineer homojen fark denklemi

$$x(n + k) + a_1(n)x(n + k - 1) + \cdots + a_k(n)x(n) = 0$$

Bütün $a_i(n)\ katsayıları\ a_i(n) = a_i$ seklinde sabitse , denkleme **sabit katsayılı denklem denir**. Aksi durumda değişken katsayılı fark denklemi denir (Haskan,2023).

Tanım1.2.5: x_i'ler t'ye bağlı fonksiyon ve i=1,2,3,…,n reel değerli olmak üzere;

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2(t+1) = f_2\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) \\ \dots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

n tane 1.mertebeden fark denkleminden oluşan sisteme n denklemli **1.mertebeden fark denklemi sistemi** denir. n denklemli 1.mertebeden fark denklemi sistemi genel olarak

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(t)\, x_j(t) + b_i(t),$$
$$i = 1,2,3, \dots k \qquad (1.2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ve $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)^T$,

$B = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_k(t))^T$ vektörleri ile $A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$ tipinde bir matris olarak alınırsa

$$X_{t+1} = A(t)x(t) + B(t)$$

matris notasyonu şekline de dönüştürülebilir. Eğer (1.2.1) ifadesinde j=1,2,3,…,k için a_{ij} ve b_i katsayıları durum değişkeni olan x_i fonksiyonlarına bağlı değil ise sisteme **lineerdir** denir. Aksi halde **lineer olmayan** adını alır. Eğer b_i =0 ise sisteme **homojen** , $b_i \neq 0$ ise **homojen olmayan** sistem denir (Bereketoğlu & Kutay, 2010).

Tanım 1.2.6:

$$\mathrm{x(n + k)} + a_1(\mathrm{n})\, \mathrm{x(n + k - 1)} + \cdots + \mathrm{a}_k(\mathrm{n})\mathrm{x(n)} = 0$$

Fark denkleminde t=0,1,2,… için denklemi sağlayan x_t reel değerli fonksiyonuna denklemin çözümü denir.

Bir fark denklem sisteminde ise sistemi sağlayan

$$X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))^T$$

vektörüne **sistemin çözümü** denir. f ve g sürekli iki fonksiyon olmak üzere,

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t)$$
$$y_{t+1} = g(x_t, y_t)$$

sistemi 1.mertebeden iki boyutlu bir fark denklem sistemidir. Sistemin lineerleştirilmiş hali $X_{t+1} = JX_t$ olmak üzere sistemin

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

matrisine **Jakobiyen** matris denir (Allen and L. Slinda , 2007)

Tanım1.2.7: A ve I sırasıyla nxn şeklinde reel değerli herhangi bir matris ve birim matris olsun. Bu durumda

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ifadesine A matrisinin karakteristik denklemi, bu denklemi sağlayan λ değerlerine A matrisinin **özdeğerleri** denir. Bu λ değerini

$$Ax = Ix$$

veya

$$(A - \lambda I)x = 0$$

da yerine koyarak elde edilen sıfırdan farklı çözümler, A matrsinin λ özdeğerine karşılık gelen **özvektörüdür.**

Özdeğerleri bulmak için kullandığımız determinantı açmak istersek en genel haliyle aşağıdaki polinomu elde ederiz.

$$(-1)^n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

Bu polinoma **karakteristik polinom** denir **(**Başoğlu, 2016).

1.3. Kararlılık

Tanım 1.3.1: Birinci basamaktan $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminde

$$x^* = f(x^*)$$

eşitliğini sağlayan x^* sabit çözümüne **denge noktası** denir.

$$X_{t+1} = f(X_t)$$

fark denklem sisteminde

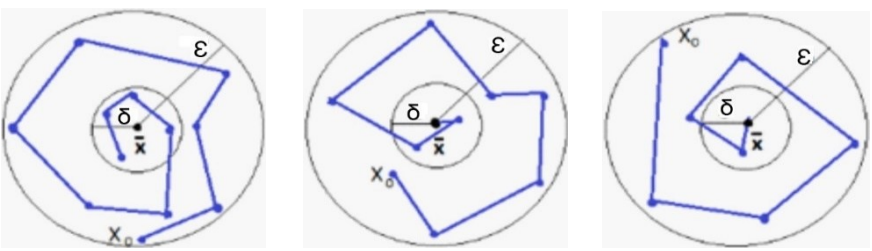
$$X^* = f(X^*)$$

eşitliğini sağlayan X^* vektörüne sistemin **denge noktası** adı verilir **(**Demir , 2019).

Tanım 1.3.2: Her $\varepsilon > 0\ için\ |x_0 - \bar{x}| < \delta$ koşulunu sağlayan bütün x değerleri için $|x_t - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına **kararlı** denge noktası denir. Aksi takdirde **kararsız** denge noktası denir (Sucu, 2016 ; Merdan, H. & Duman, O.**,** 2009).

Tanım 1.3.3: Öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki her $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ için $\lim_{t\to\infty} x_t = \bar{x}$ koşulu sağlanıyorsa $\bar{x}$ denge noktasına **çekici** denir (Allen, 2007).

Tanım 1.3.4: Eğer denge noktası hem kararlı hem de çekici denge noktası ise o denge noktasına **asimptotik kararlı** denge noktası denir (Allen, 2007).



Kararlı Denge Noktası Çekiçi Denge Noktası Asimptotik Denge Noktası

Şekil 1.3 : Kararlı denge noktası çeşitleri

1.4.Topolojik Sınıflandırma

Tanım 1.4.1: Lineer olmayan iki boyutlu birinci mertebeden bir fark denklem sisteminin denge noktasındaki karakteristik polinomu,

$$F(\lambda) = \lambda^2 - B\lambda + C \ , \ \ B, C \in N$$

olsun. $\lambda_1 \ ve \ \lambda_2$, F(λ) polinomunun kökleri olmak üzere dinamik sisteminin denge noktası;

1. $|\lambda_1| < 1 \ ve \ |\lambda_2| < 1 \ ise$, çukur (sink),
2. $|\lambda_1| > 1 \ ve \ |\lambda_2| > 1 \ ise$, kaynak (source),
3. $|\lambda_1| < 1 \ ve \ |\lambda_2| > 1 \ \ veya \ |\lambda_1| > 1 \ ve \ |\lambda_2| < 1 \ ise$, yayvan-geniş(saddle),
4. $|\lambda_1| = 1 \ veya \ \ |\lambda_2| = 1 \ ise,$ hiperbolik olmayan(non-hyberbolic),

dengesi olarak adlandırılır (Çelik, Merdan, Duman & Akın, 2008 ; Kılıç, H. , Topsakal, N. & Kangalgil, F., 2020).

Lemma 1.4.1: Lineer olmayan iki boyutlu birinci mertebeden bir fark denklem sisteminin denge noktasındaki karakteristik polinomu,

$$F(\lambda) = \lambda^2 - B\lambda + C \ , \ \ B, C \in N$$

olsun. $\lambda_1 \ ve \ \lambda_2$, F(λ) polinomunun kökleri ve F(λ) > 0 olsun.Aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

1. $|\lambda_1| < 1 \ ve \ |\lambda_2| < 1$ ancak ve ancak F(-1)>0 ve F(0)<1
2. $|\lambda_1| > 1 \ ve \ |\lambda_2| > 1$ ancak ve ancak F(-1)>0 ve F(0)>1
3. $|\lambda_1| < 1 \ ve \ |\lambda_2| > 1$ veya $|\lambda_1| > 1 \ ve \ |\lambda_2| < 1$ ancak ve ancak $F(-1) < 0$,
4. $|\lambda_1| = 1 \ ve \ |\lambda_2| \neq 1$ ancak ve ancak $F(-1) = 0$ ve $F(0) \neq \mp 1$,

(Kangalgil, 2019 ; Işık, S.& Kangalgil, F**.,** 2021)

Teorem 1.4.1 : Birinci mertebeden iki boyutlu lineer olmayan bir dinamik sistemin denge noktasındaki karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - B\lambda + C$$

ve λ_1 ve λ_2 $F(\lambda)$ polinomunun kökleri olsun.Bu durumda

$$F(1) > 0 \ , F(-1) > 0 \ ve \ C < 1$$

ise denge noktası kararlıdır (Çelik, Merdan, Duman & Akın, 2008).

BÖLÜM 2

2.1. Hasat Etkili Ayrık Zamanlı Av-Avcı Popülasyon Modelinin Denge Noktalarının Topolojik Sınıflandırılması ve Kararlılık Analizi

Abbas ve Khaliq tarafından 2023 yılında aşağıdaki ayrık zamanlı model çalışılmıştır.

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1-a){x_t}^2 + x_t(a - y_t) \\ y_{t+1} = \frac{1}{\beta} x_t y_t \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Burada ;

x_t: av popülasyonunun belirli bir zamandaki büyüklüğünü

y_t: avcı popülasyonunun belirli bir zamandaki büyüklüğünü

$\boldsymbol{a}$: av popülasyonunun büyüme oranı

β: avcı popülasyonunun büyüme oranını

göstermektedir. (2.1.1) av-avcı popülasyon modeli avcı popülasyonu üzerinde , hasat etkisi altında aşağıdaki forma dönüşür.

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1-a){x_t}^2 + x_t(a - y_t) \\ y_{t+1} = \frac{1}{\beta} x_t y_t - h y_t \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

Burada h hasat etkisi ve $0 < \mathrm{h} < 1$ 'dir. α, β, h parametreleri pozitif değerlerdir ve (2.1.1) sistemi ile aynı anlamdadır.

2.2. İnvaryant Küme

Çözümlerin ilk çeyrek bölgede kalması için aşağıdaki analizi yapabiliriz.

1. x_{t+1} $için$ $(1-a){x_t}^2 + x_t(a - y_t) > 0$ olmalıdır.

$$x_t[(1-a)x_t + a - y_t] > 0$$

$x_t > 0$ olduğundan $(1-a)x_t + a > y_n$ olur.

2. y_{t+1} için $\frac{1}{\beta} x_t y_t - h y_t > 0$ olmalıdır.

$$y_t\left(\frac{x_t}{\beta} - h\right) > 0$$

$$\frac{x_t}{\beta} - h > 0$$

$$\frac{x_t}{\beta} > h$$

Bundan dolayı y_{t+1} 'in pozitif olması için

$$\frac{x_t}{\beta} > h$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$(1-a)x_t + a > y_n \;\; ve \;\; \frac{x_t}{\beta} > h$

Şartları sağlandığında $x_{t+1} \;\; ve \;\; y_{t+1}$ pozitif bulunur.

2.3. Pozitif Denge Noktalarının Varlığı

Sistemin denge noktaları,

$$\begin{aligned} x^* &= (1-a)x^* + x^*(a - y^*) \\ y^* &= \frac{1}{\beta}x^*y^* - hy^* \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

sistemini sağlayan (x^*, y^*) değerleridir (Kangalgil, Topsakal & Öztürk, 2022).

Bu sistem Maple programı ile çözüldüğünde aşağıdaki gibi E_1 , E_2 , E_3 şeklinde üç tane denge noktası elde edilir.

$E_1 = (0\,,0\,)$

$E_2 = (\,1\,,0\,)$

$E_3 = (\,(1+h)\beta\,,(1-a)[\,(1+h)\beta - 1]$

Lemma 2.3.1: Av-avcı popülasyon modeli (2.3.1) tüm parametre değerleri için,

i) $E_1 = (0\,,0\,)$ denge noktasına sahiptir.

ii) $E_2 = (\,1\,,0)$ pozitif denge noktasına sahiptir.

iii) $0 < a < 1 \; ve \; \beta > \frac{1}{1+h}$ veya $a > 1 \; ve \; \beta < \frac{1}{1+h}$ için $E_3 = (\,(1+h)\beta\,,(1-a)[\,(1+h)\beta - 1]$ pozitif denge noktasına sahiptir.

2.4. Denge Noktalarının Karakteristik Polinomu

Bu bölümde (2.3.1) modelimizin (x^*, y^*) denge noktasına karşılık gelen karakteristik polinomları elde edilecektir.

$$f_1(x,y) = (1-a)x^2 + x(a-y)$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{\beta}xy - hy \qquad (2.4.1)$$

olmak üzere ;

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} f_{1_x}(x,y) & f_{1_y}(x,y) \\ f_{2_x}(x,y) & f_{2_y}(x,y) \end{pmatrix} \qquad (2.4.2)$$

matrisine (x^*, y^*) denge noktasının jakobiyen matrisi denir. (x^*, y^*) denge noktasının karakteristik polinomu,

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{izJ(x,y)}\lambda + \mathrm{detJ(x,y)} \qquad (2.4.3)$$

şeklindedir. (2.4.2) sistemine karşılık gelen Jakobiyen matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-a)x + (a-y) & -x \\ \frac{y}{\beta} & \frac{x}{\beta} - h \end{pmatrix} \qquad (2.4.4)$$

Şimdi denge noktalarının topolojik sınıflandırmasını gösterelim.

2.5. E_1 Denge Noktası için Topolojik Sınıflandırma

(2.4.4) Jakobiyen matrisinde x=0, y=0 yazılırsa $E_1 = (0,0)$ denge noktasına karşılık gelen jakobiyen matris;

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \qquad (2.5.1)$$

şeklinde bulunur.(2.5.1) matrisine karşılık gelen karakteristik polinom ,

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{a-h})\lambda - \mathrm{ah} \qquad (2.5.2)$$

şeklindedir. Karakteristik polinom kökleri karakteristik değerleri vereceğinden , bu karakteristik değerleri ;

$$\lambda_1 = a \quad , \quad \lambda_2 = -h$$

şeklinde bulunur. Tanım 2.2.1 kullanılarak

$$|\lambda_1| < 1 \,,$$

$$|a| < 1,$$

$$-1 < a < 1$$

parametreler pozitif olduğundan $0 < a < 1$ için $|\lambda_1| < 1$ olur.

$$|\lambda_1| > 1,$$

$$|a| > 1,$$

$$a > 1 \; veya \; a < -1$$

$a > 1 \; için \; |\lambda_1| > 1$ olur.

$$|\lambda_1| = 1,$$

$$|a| = 1,$$

$$a = 1 \text{ veya } a = -1$$

$a > 0$ olduğundan $a = 1$ için $|\lambda_1| = 1$ sağlanır. Benzer şekilde;

$0 < h < 1$ olduğundan $|\lambda_2| < 1$ olur. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.5.1: Sistem (2.1.2) in $E_1 = (0\,,0\,)$ denge noktası için aşağıdaki topolojik sınıflandırma geçerlidir:

i. $0 < a < 1$ için E_1 denge noktası çukur (sink)

$ii.$ $a > 1$ için E_1 denge noktası yayvan-geniş (saddle)

$iii.$ $a = 1$ için E_1 denge noktası hiperbolik olmayan (non-hyberbolic)

2.6. E_2 Denge Noktası için Topolojik Sınıflandırma

(2.1.2) sistemine karşılık gelen (2.4.4) ile gösterilen Jakobiyen matrise x=1, y=0 yerine yazılırsa ; E_2 denge noktasına karşılık gelen Jakobiyen matris,

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} 2-a & -1 \\ 0 & \frac{1}{\beta} - h \end{pmatrix} \qquad (2.6.1)$$

şeklinde elde edilir.(2.6.1) matrisine karşılık gelen karakteristik polinom:

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \left(2 - \mathrm{a} + \frac{1}{\beta} - \mathrm{h}\right)\lambda + (2-\mathrm{a})\left(\frac{1}{\beta} - \mathrm{h}\right) \quad (2.6.2)$$

olup karakteristik polinomun kökleri ;

$$\lambda_1 = 2 - a \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\beta} - h$$

dır.

$$|\lambda_1| < 1,$$

$$|2 - a| < 1,$$

O halde $1 < a < 3$ için $|\lambda_1| < 1$ sağlanır.

$$|\lambda_1| > 1,$$

$|2 - a| > 1,$

Buradan $1 > a \; veya \; 3 < a$ için $|\lambda_1| > 1$ olur.

$|\lambda_1| = 1,$

$|2 - a| = 1,$

$a = 1 \; veya \; a = 3 \; için \;\; |\lambda_1| = 1 \; olur.$ Benzer şekilde

$|\lambda_2| < 1,$

$$\left|\frac{1}{\beta} - h\right| < 1,$$

$$\frac{1}{h-1} < \beta < \frac{1}{h+1}$$

$$\beta > 0 \; olduğundan \; 0 < \beta < \frac{1}{h+1} \; için \; |\lambda_2| < 1 \; olur.$$

$$|\lambda_2| > 1,$$

$$\left|\frac{1}{\beta} - h\right| > 1$$

$$\beta < \frac{1}{h+1} \; için \; |\lambda_2| > 1 \; olur.$$

$$|\lambda_2| = 1,$$

$$\left|\frac{1}{\beta} - h\right| = 1$$

$\beta = \frac{1}{h+1}$ için $|\lambda_2| = 1 \; olur.$

Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.6.1 : Sistem (2.1.2) in $E_2 = (1\,,0\,)$ denge noktası için ,

i. $1 < a < 3$ ve $0 < \beta < \frac{1}{h+1}$ için E_2 denge noktası çukurdur.

ii. $0 < a < 1 \; veya \; a > 3 \; ve \; \beta < \frac{1}{h+1}$ için E_2 denge noktası kaynak(source)

iii. $1 < a < 3$ veya $0 < a < 1 \; veya \; a > 3$ ve $\beta < \frac{1}{h+1}$ E_2 denge noktası eyer(saddle)

iv. $a = 1{,}3$ veya $\beta = \frac{1}{h+1}$ için E_2 denge noktası hiperbolik olmayan(non-hyberbolic)'dir.

2.7. Her İki Türün Bir Arada Bulunduğu Pozitif Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması

$E_3 = \big((1+h)\beta\ , (1-a)[(1+h)\beta - 1]\big)$ denge noktasına karşılık gelen jakobiyen matris;

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} (1-a)(1+h)\beta + 1 & -(1+h)\beta \\ \frac{(1-a)[(1+h)\beta-1]}{\beta} & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.7.1)$$

$dir.$ (2.7.1) jakobijen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \big((1-a)(1+h)\beta + 2\big)\lambda + (1-a)(1+h)[(2+h)\beta - 1] + 1 \qquad (2.7.2)$$

$dir.$

$$F(1) = 1 - (1-a)(1+h)\beta + 2) + (1-a)(1 + h)[(2+h)\beta - 1] + 1$$

$$= 1 - (1-a)(1+h)\beta - 2 + (1-a)(1+h)(2+h)\beta - (1-a)(1+h) + 1$$

$$= (1-a)(1+h)(-\beta + 2\beta + h\beta - 1$$

$$= (1-a)(1+h)(\beta(h+1) - 1)$$

$F(1) > 0$ için $\quad (1-a)(1+h)(\beta(h+1) - 1) > 0$

$$(1-a)(\beta(h+1) - 1) > 0$$

Buradan da $a < 1\ , \beta > \frac{1}{h+1}$ veya $a > 1\ , \beta < \frac{1}{h+1}$ olmalıdır.

Aynı zamanda Lemma 2.3.1'den dolayı E_3 denge noktasının pozitif denge noktası olması için gereken koşuldur.

Bu durumda $a < 1\,, \beta > \frac{1}{h+1}$ veya $a > 1\,, \beta < \frac{1}{h+1}$ koşulları için $F(1) > 0$ $sağlanır.$

$$F(-1) = 1 + (1-a)(1+h)\beta + 2 + (1-a)(1+h)(2+h)\beta - (1-a)(1+h) + 1$$

$$= 4 + (1-a)(1+h)(\beta + 2\beta + h\beta - 1)$$

$$= 4 + (1-a)(1+h)(\beta(h+3) - 1)$$

$F(-1) = 0$ $k$ökü

$$\beta_1^* = \frac{-4 + (1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+3)}$$

$\beta_1^* > 0$ $olması\ için\ a > 1\ olmalıdır.$

elde edilir. Böylece F (-1) fonksiyonun işaret tablosu

	0		$\beta_1{}^*$	
$F(-1)$		$-$		$+$

şeklinde olur.

Bu durumda

- $0 < \beta < \beta_1^*$ iken F(-1)<0 sağlanır.

- $\beta > \beta_1^*$ iken F(-1) > 0 sağlanır.

$$F(0) - 1 = (1 - \mathrm{a})(1 + \mathrm{h})[(2 + \mathrm{h})\beta - 1] + 1 - 1$$
$$= (1 - \mathrm{a})(1 + \mathrm{h})[(2 + \mathrm{h})\beta - 1]$$

olarak elde edilir.

$F(0) - 1 = 0$ *kökü*

$$\beta_2^* = \frac{1}{h + 2}$$

elde edilir. Bu fonksiyonun işaret tablosu

	0		$\beta_2{}^*$	
$F(0) - 1$		$-$		$+$

şeklinde olur.Bu durumda

$0 < \beta < \beta_2^*$iken $F(0) < 1$ sağlanır.

$\beta > \beta_2^*$ *iken* $F(0) > 1$ sağlanır.

E_3 denge noktasının topolojik sınıflandırmasını yapmak için **Lemma 1.4.1**'i uygulayabiliriz.

Teorem 2.7.1: Kabul edelim ki $a > 1$ *ve* $\beta < \frac{1}{h+1}$ olsun.Bu durumda E_3 denge noktası için aşağıdaki koşullar geçerlidir.

i. E_3 denge noktası aşağıdaki koşul altında çukur (sink)'dur.
$\frac{1}{h+2} < \beta < \frac{-4+(1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+3)}$,

ii. E_3 denge noktası aşağıdaki koşul altında kaynak (source)' dır.

$$\beta > max\left\{\frac{-4+(1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+3)}, \frac{1}{h+2}\right\} ,$$

iii. E_3 denge noktası aşağıdaki koşul altında yayvan-geniş(saddle)'dir.

$$\beta < \frac{-4+(1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+3)} ,$$

iv. E_3 denge noktası aşağıdaki koşul altında hiperbolik olmayan (non-hyberbolic) ,

$$\beta = \frac{-4+(1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+3)} \text{ ve } \beta \neq \frac{1}{h+2}, \frac{-2+(1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+2)},$$

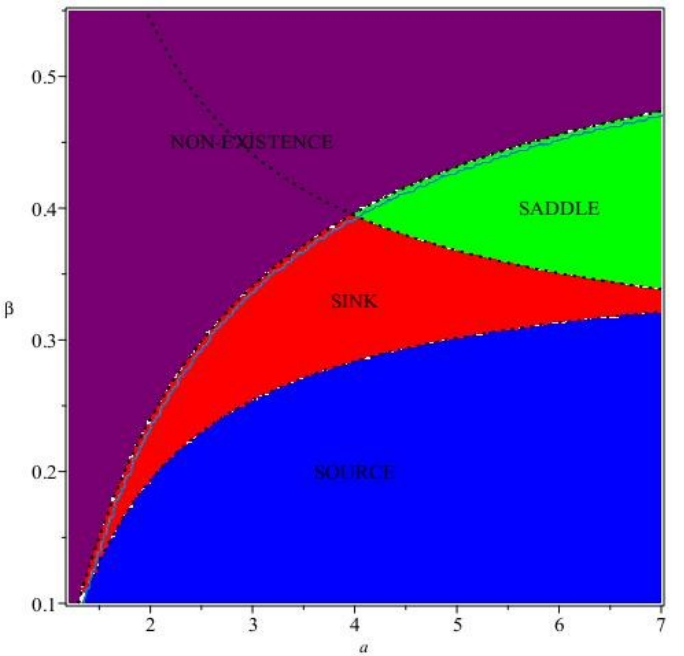
dir.

Teorem 1.4.1'e göre E_3 denge noktasının kararlı olabilmesi için sağladığı koşullar dikkate alarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.7.2: Kabul edelim ki $a > 1$ ve $\beta < \frac{1}{h+1}$ olsun.

Eğer $\frac{1}{h+2} < \beta < \frac{-4+(1-a)(1+h)}{(1-a)(1+h)(h+3)}$ koşulu sağlanırsa (2.1.2) modelinin

$E_3 = \left((1+h)\beta\ , (1-a)[(1+h)\beta - 1]\right)$ pozitif denge noktası kararlıdır.



Şekil 2.1.1: E_3 denge noktasının topolojik sınıflandırılma grafiği

Şekil 2.1.1 ‘ de $a \in [1.2,7]$ ve $\beta \in [1.2,7]$ ve h=0.7 değerleri için E_3 denge noktasının topolojik sınıflandırılma grafiği çizdirilmiştir. Kırmızı bölge çukur (sink), mavi bölge kaynak (source) ve yeşil bölge yayvan geniş (saddle) bölgeyi temsil etmektedir. Mor renkli bölgede, pozitif denge noktası bulunmamaktadır.

BÖLÜM 3

NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde teorik çalışmaların doğruluğunu göstermek için Maple ve Matlab programları kullanılarak nümerik çalışmalara ve grafik çizimlerine yer verilmiştir. (2.1.1) ayrık zamanlı av avcı popülasyon modeli için iki türün bir arada olduğu

$$E_3 = \big((1+h)\beta \ , (1-a)[(1+h)\beta - 1]\big)$$

pozitif denge noktasının kararlılık aralığı belirlenip ve av-avcı popülasyon yoğunluk grafikleri çizilmiştir.

Örnek 3.1.1: (2.1.1) ayrık zamanlı av-avcı modelinde parametre değerleri

$$a = 1.2$$

$$\beta = 0.5$$

$$h = 0.7$$

olarak alınırsa, (2.1.1) sisteminin her iki türün bir arada bulunduğu pozitif denge noktası $E_3 = (0.85{,}0.030)$ şeklinde bulunur. Bu parametre değerleri için Jakobiyen matris ise

$$J = \begin{pmatrix} 0.830 & -0.85 \\ 0.060 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.1.1)$$

şeklindedir. (3.1.1) Jakobiyen matrisinin karakteristik değerleri

$$\lambda_1 = 0.9150000000 - 0.2092247596i$$

$$\lambda_2 = 0.9150000000 + 0.2092247596i$$

olarak bulunur. Buradan da

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{(0.915000)^2 + (0.2092247596)^2} = 0.9386160023$$

elde edilir. Açıkça görülür ki $|\lambda_1| < 1 \; ve \; |\lambda_2| < 1$ dir.

Parametre değerleri için

$$\beta_1 = 3.449920508$$

$$\beta_2 = 0.3703703704$$

olarak elde edilir. Burada E_3 denge noktasının kararlı olması için Teorem 2.7.2 gereğince

$$0.3703703704 < \beta < 3.449920508 \qquad (3.1.2)$$

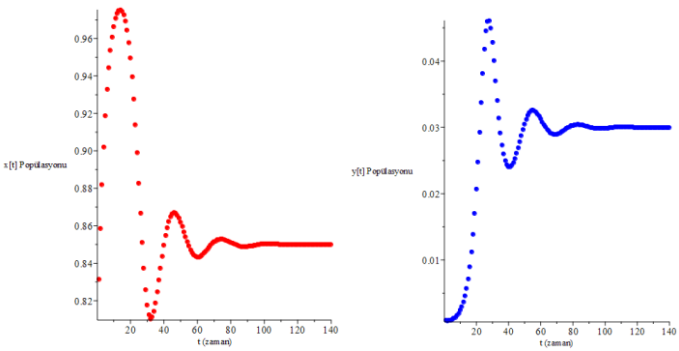
olmalıdır. (3.1.1) aralığında olacak şekilde $\beta = 0.5$ olarak seçilmiştir.Yapılan nümerik çalışmada başlnagıç koşulu (0.8 ,0.001) olarak alınmıştır. Ayrıca kararlılık kriterinden

$$\mathrm{F}(1) = 0.0510 > 0 \;\; , \qquad \mathrm{F}(-1) = 3.7110 > 0$$

$$\text{ve } \mathrm{F}(0) - 1 = -0.1190 < 0$$

koşullarının sağlandığı görülür.

Şekil 3.1.1 de sırasıyla $x_t(av)$ ve $y_t(avcı)$ popülasyon yoğunluğunu gösteren grafikleri verilmiştir.



Şekil 3.1.1: $x_t(av)$ ve $y_t(avcı)$ popülasyon yoğunluğu

Örnek 3.1.2: (2.1.1) ayrık zamanlı av-avcı modelinde parametre değerleri

$$a = 1.7$$

$$\beta = 0.487$$

$$h = 0.99$$

olarak alınırsa, (2.1.1) sisteminin her iki türün bir arada bulunduğu pozitif denge noktası

$E_3 = (0.96913, 0.021609)$ şeklinde bulunur. Bu parametre değerleri için Jakobiyen matris ise

$$J = \begin{pmatrix} 0.321609 & -0.96913 \\ 0.04437166324 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.1.3)$$

şeklindedir. (3.1.3) Jakobiyen matrisinin karakteristik değerleri

$$\lambda_1 = 0.3923800652$$

$$\lambda_2 = 0.9292289348$$

olarak bulunur. Açıkça görülür ki

$$|\lambda_1| < 1 \; ve \; |\lambda_2| < 1 \quad \text{dir.}$$

Parametre değerleri için

$$\beta_1 = 0.9703008420$$

$$\beta_2 = 0.3344481605$$

olarak elde edilir. Burada E_3 denge noktasının kararlı olması için Teorem 2.7.2 gereğince

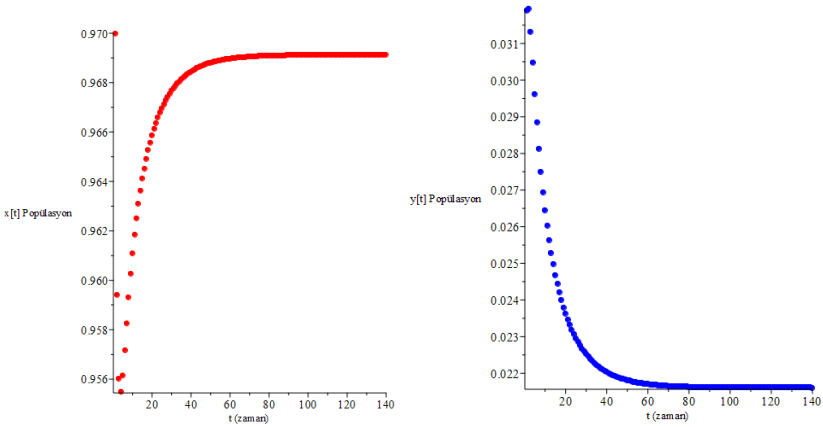
$$0.3344481605 < \beta < 0.9703008420 \qquad (3.1.4)$$

olmalıdır. (3.1.4) aralığında olacak şekilde $\beta = 0.487$ olarak seçilmiştir. Yapılan nümerik çalışmada başlangıç koşulu (1 ,0.03) olarak alınmıştır. Ayrıca kararlılık kriterinden

$$F(1) = 0.04300191 > 0, F(-1) = 2.68621991 > 0 \; ve$$

$$\mathrm{F}(0) - 1 = -0.63538909 < 0$$

koşullarının sağlandığı görülür.



Şekil 3.1.2 de sırasıyla $x_t(av)$ ve $y_t(avcı)$ popülasyon yoğunluğunu gösteren grafikleri verilmiştir.

Şekil 3.1.2: $x_t(av)$ ve $y_t(avcı)$ popülasyon yoğunluğu

Örnek 3.1.3: (2.1.1) ayrık zamanlı av-avcı modelinde parametre değerleri

$$a = 2.9$$

$$\beta = 0.72$$

$$h = 0.15$$

olarak alınırsa, (2.1.2) sisteminin her iki türün bir arada bulunduğu pozitif denge noktası

$E_3 = (0.8280, 0.32680)$ şeklinde bulunur. Bu parametre değerleri için Jakobiyen matris ise

$$J = \begin{pmatrix} -0.57320 & -0.8280 \\ 0.4538888889 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.1.5)$$

şeklindedir. (3.1.5) Jakobiyen matrisinin karakteristik değerleri

$$\lambda_1 = -0.2794687046$$

$$\lambda_2 = 0.7062687046$$

olarak bulunur. Açıkça görülür ki

$|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ dir.Parametre değerleri için

$$\beta_1 = 0.8986233700$$

$$\beta_2 = 0.4651162791$$

olarak elde edilir. Burada E_3 denge noktasının kararlı olması için Teorem 2.7.2 gereğince

$$0.4651162791 < \beta < 0.8986233700 \qquad (3.1.6)$$

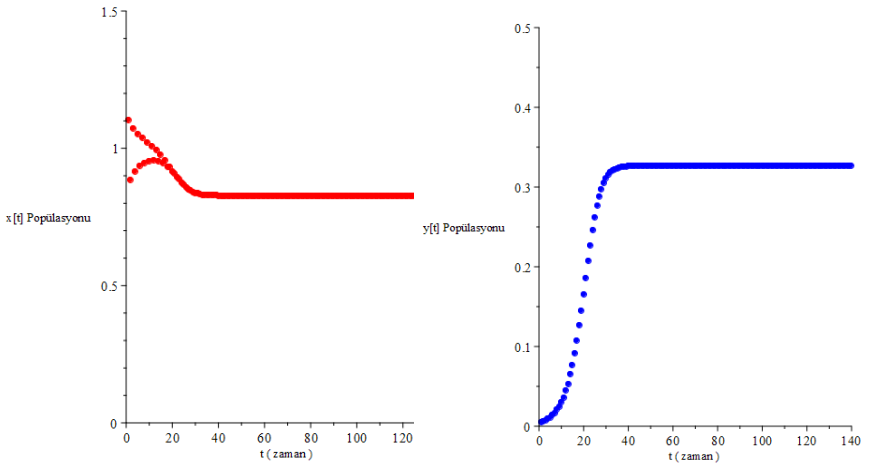
olmalıdır. (3.1.6) aralığında olacak şekilde $\beta = 0.72$ olarak seçilmiştir. Yapılan nümerik çalışmada başlangıç koşulu (0.79 ,0.005) olarak alınmıştır. Ayrıca kararlılık kriterinden

$$F(1) = 0.3758200 > 0\,, F(-1) = 1.2294200 > 0 \text{ ve}$$

$$F(0) - 1 = -1.1973800 < 0$$

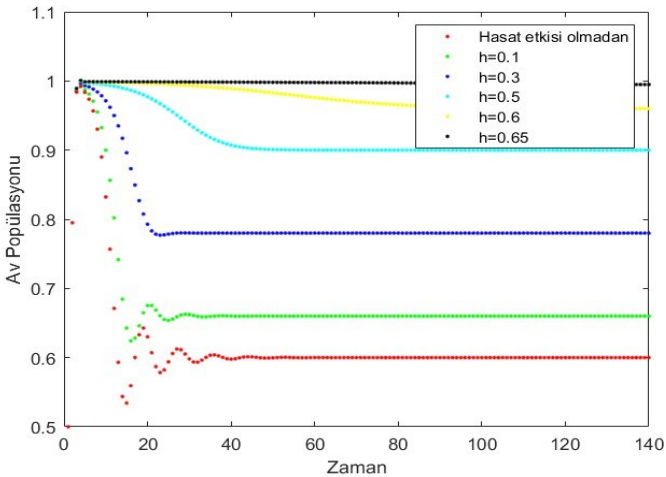
koşullarının sağlandığı görülür.

Şekil 3.1.3 de sırasıyla $x_t(av)$ ve $y_t(avcı)$ popülasyon yoğunluğunu gösteren grafikleri verilmiştir.

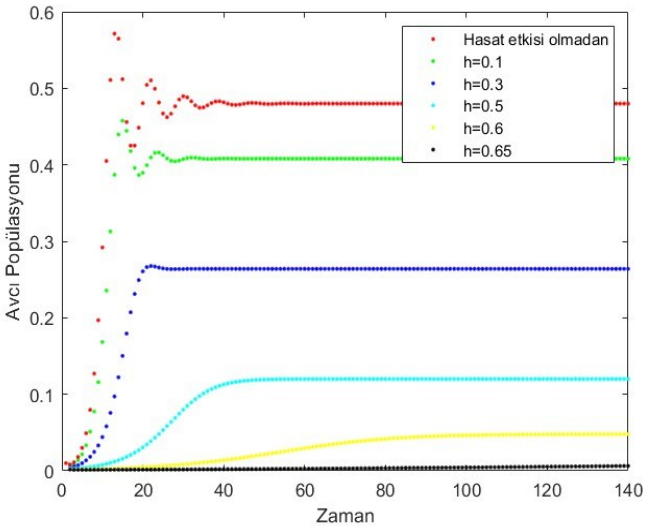


Şekil 3.1.3: $x_t(av)$ ve $y_t(avcı)$ popülasyon yoğunluğu

Örnek 3.1.4: Hasat etkisinin ele alınan av-avcı popülasyon model üzerinde etkilerini araştırmak için, avın büyüme parametresi a=1.2, avcının büyüme parametresi β =0.6 ve başlangıç koşulu (x_0,y_0)=(0.5,0.01) alınarak hasat etkisi olmadan yani *h=0* için ve farklı hasat değerleri için sırasıyla h=0.1, h=0.3, h=0.5, h=0.6 ve h=0.65 alınarak av- avcı popülasyon yoğunluklarının grafikleri Şekil 3.1.4 ve Şekil 3.1.5 çizdirilmiştir. Elde edilen bu sonuçlara göre hasat etkisi arttıkça, av popülasyonunun yoğunluğu artarken avcı popülasyonun yoğunluğu azalmıştır. Avcı türünün avlanma oranının azalmasıyla birlikte türde ortaya çıkan azalma, beklediğimiz bir sonuçtur. Ayrıca hasat etkisi arttıkça, av popülasyonunda denge noktasına ulaşmak daha hızlı iken avcı popülasyonunda denge konumuna ulaşmak gecikmektedir.



Şekil 3.1.4: Değişen hasat değerlerine göre Av popülasyonun yoğunluğu



Şekil 3.1.5: Değişen hasat değerlerine göre Avcı popülasyonun yoğunluğu

Örnek 3.1.5: Neimark-Sacker çatallanma, dinamik sistemler teorisinde bir çatallanma (bifurcation) türüdür ve ayrık zamanlı modellerde oluşur. Neimark-sacker çatallanma, sistemin sabit bir noktası kararsız hale geldiğinde ve bu noktanın etrafında kapalı bir yörünge (limit döngüsü) oluştuğunda meydana gelir. Bu çatallanma türünde, s**abit noktanın kararlılığı değişir:** Sistem, sabit noktasından uzaklaşarak yeni bir dinamik davranışa geçer. Sabit noktanın çevresinde bir yarı-periyodik hareket ya da kapalı bir yörünge (torus) oluşur. Bu çatallanmada, sabit noktanın çöküşünü belirleyen jakobiyan matrisinin özdeğerleri, karmaşık (kompleks) birim çember üzerindedir.

Bu tür çatallanma, pek çok fiziksel, biyolojik, ekonomik ve mühendislik sistemlerinde gözlemlenir. Örneğin, ekonomik modellerde piyasa dalgalanmalarının incelenmesinde, **e**kosistem modellerinde popülasyonların periyodik davranışlarının incelenmesinde ve **e**lektrik devrelerinin **k**ararlılık analizlerinde karşımıza çıkmaktadırlar. Neimark-Sacker çatallanmasında, sistemin sabit noktasında jacobiyan matrisinin özdeğerleri incelenir, Birim çember üzerinde karmaşık eşlenik bir çift özdeğer bulunur ve çatallanma sırasında bu özdeğerlerin büyüklüğü 1'dir.

Neimark-Sacker çatallanma, ayrık zamanlı sistemler için **Hopf çatallanması**'na benzer. Sürekli zamanlı sistemlerde Hopf çatallanması, sabit bir noktadan periyodik bir limit döngüsüne geçişi ifade eder. Neimark-Sacker çatallanma ise bu sürecin ayrık zamanlı versiyonudur. Sistemde bulunan parametrelerin önemlidir ve bir parametre değişirken sistemin dinamiği değişebilir. Yani, sistemde yeni denge noktalar ortaya çıkabildiği gibi denge noktalarının kararlılık yapıları da değişebilir. Bu niteliksel değişimlere **çatallanma** ve bu değişimin meydana geldiği parametre değerine de **çatallanma noktası** denir. Bu çalışmada çatallanma parametresi β

olarak seçilmiştir. Kritik β = 1/(h+2) değerinde h=0.7, a=1.4 değerleri için çatallanma değeri $\beta = 0.3703703704$, denge noktası (0.6296296297,0.148148148) olarak elde edilmiştir. Bu değerler için karakteristik polinom

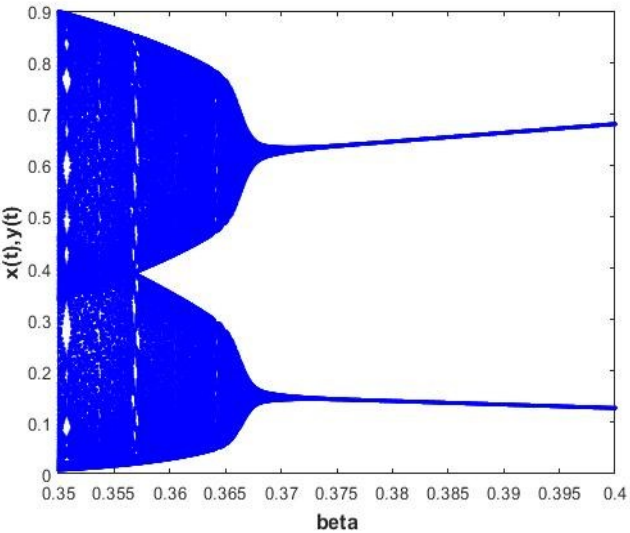
$$F(\lambda) = \lambda^2 - 1.748148148\,\lambda + 1$$

şeklindedir. Karakteristik değerler

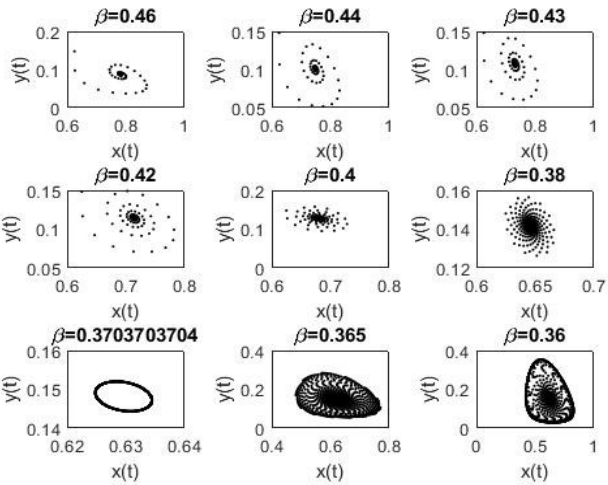
$$\lambda_1 = 0.8740740740 + 0.4857926648i,$$

$$\lambda_2 = 0.8740740740 - 0.4857926648i$$

şeklinde hesaplanır. Dikkat edilirse bu karakteristik değerlerin büyüklüğü $|\lambda_{1,2}| = 1$ dir. Şekil 3.1.6 da β parametresine göre av-avcı popülasyonunda görülen çatallanma grafiği verilmektedir.



Şekil 3.1.6: Av-Avcı popülasyonundaki çatallanma grafiği



Şekil 3.1.7: β nın farklı değerleri için faz diyagramları

BÖLÜM 4

Sonuçlar

Canlılar, etraflarında yer alan diğer canlılarla fiziksel olarak sürekli olarak bir etkileşim halindedir. Popülasyon dinamikleri, popülasyonların zaman içinde meydana gelen değişiklikleri ifade eder ve av-avcı etkileşimleri birçok türün popülasyon dinamiklerini açıklamada önemli bir rol oynar. Av-avcı ilişkileri için geliştirilen matematiksel modeller av ve avcı popülasyonlarında birbiri ardına dalgalanma eğiliminin doğal olarak bulunduğunu göstermektedir. Başka etkenler av ve avcıların fazla olmasını kararlı hale getirebileceğinden, bu popülasyonlarda dalgalanma görülmeyebilir; fakat bunlar bir dalgalanma eğilimine sahiptir. Eğer kararlılığı sağlayan etmenler kaldırılırsa, dalgalanma eğilimi kendini gösterecektir.

Bu çalışmada hasat etkili ayrık zamanlı av-avcı popülasyonun kararlılık analizi çalışıldı. Av-avcı (predator-prey) popülasyon modellerinde "hasat," av veya avcı popülasyonuna dışarıdan yapılan bir müdahale olarak ele alınır. Bu terim, genellikle popülasyondan belirli bir miktar bireyin çeşitli amaçlarla (beslenme, ticaret, popülasyon kontrolü gibi) alınması anlamına gelir. Hasat işlemi, av popülasyonunun kontrol altına alınması veya avcı türlerin besin ihtiyaçlarının karşılanması amacıyla yapılabilmektedir. Av-avcı popülasyon modelinde avın büyüme oranı olan *a* parametresi 1.2, avcının büyüme oranı olan *beta* parametresi 0.6 ve başlangıç koşulu (0.5, 0.01) alınarak, farklı hasat değerleri için av- avcı popülasyon yoğunluklarının hasat etkisi altındaki grafikleri çizilmiştir. Şekil 3.1.4 ve Şekil 3.1.5 grafiklerinde görüldüğü gibi, hasat etkisi arttıkça av popülasyonunun yoğunluğu artarken avcı popülasyonun yoğunluğu azalmıştır. Avcı türünün avlanma oranının

azalmasıyla birlikte türde ortaya çıkan azalma, beklediğimiz bir sonuçtur. Ayrıca hasat etkisi arttıkça denge noktasına ulaşma süresi azalmaktadır.

Neimark-Sacker çatallanması, popülasyonun düzenli ve periyodik davranıştan uzaklaşarak daha karmaşık ve öngörülemez bir hale geçişini ifade eder. Bu çatallanma ekosistemlerin dinamiklerini ve popülasyon büyüklüklerini öngörmeyi zorlaştırır; avcı ve av popülasyonları arasındaki ilişkiyi daha belirsiz ve karmaşık hale getirir. Bu, ekolojik dengeyi etkileyebilecek ve türlerin hayatta kalma stratejilerini değiştirebilecek önemli bir biyolojik olgudur. Sistemde β parametresi çatallanma parametresi olarak seçildiğinde, Neimark-Sacker çatallanması görülmektedir. Sistem, β 'nın kritik değerine geldiğinde sabit noktasından uzaklaşarak yeni bir dinamik davranışa geçmektedir. Sabit noktanın çevresinde bir yarı-periyodik hareket ya da kapalı bir yörünge (torus) oluşmaktadır. Şekil 3.1.7 de β 'nın farklı değerleri için faz diyagramlarında da oluşan kapalı görüngeler açıkça görünmektedir.

KAYNAKLAR

Kangalgil, F., Topsakal, N., Öztürk, N., (2022), Analyzing bifurcation, stability, and chaos control for a discrete-time prey-predator model with Allee effect. Turkish Journal of Mathematics. 46. 2047-2068. 10.55730/1300-0098.3253.

Agarwal, R. P., (2000), Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, Second Edition Revised and Expanded, Marcel Dekker Inc., New York.

Demir, O. (2019), Popülasyon modellerinin dinamigi üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Universitesi, Sivas.

Sucu, G. (2016), Bir ayrık av-avcı modelinin kararlılık ve çatallanma analizi üzerine, Yüksek Lisans Tezi, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara.

Çelik, C., Merdan, H., Duman, O., Akın Ö., (2008), Allee effects on popülation dynmics in countinuous (overlapping) case, Chaos, Solitons & Fractals Chaos, 37, 65-74.

Başoğlu, M. (2016), Bir Popülasyon Modelinin Kararlılık Analizi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, 33s

Bereketoğlu, H., Kutay, V., (2010) Lineer fark denklem sistemleri, Gazi Kitap evi Ankara.

Merdan, H., Duman, O., (2009) On the stability analysis of a general discrete-time population model involving predation and Allee effects Chaos Solutions Fract., 40, 1169-1175.

Kılıç, H., Topsakal, N., Kangalgil, F., (2020), Stability analysis of a discrete-time prey-predator population model with immigration, Cumhuriyet Science Journal, 41 (4) (2020) 884-900

Kangalgil, F., (2019), Flip bifurcation and stability in a discrete-time prey-predator model with allee effect. Cumhuriyet Science Journal, 40(1), 141-149.

Abbas, A., Khaliq,A.(2023). Analyzing Predator-Prey Interaction in Chaotic and Bifurcating Environments. Chaos Theory and Applications, 5 (3), 207-218. https://doi.org/10.51537/chaos.1357543

Işık, S., Kangalgil, F., (2021). On the Analysis of Stability, Bifurcation, and Chaos Control of Discrete-Time Predator-Prey Model with Allee Effect on Predator. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. 51. 1-21. 10.15672/hujms.728889.

Mohdeb, N. (2023), "A dynamic analysis of a prey–predator population model with a nonlinear harvesting rate", Arab Journal of Mathematical Sciences, Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. https://doi.org/10.1108/AJMS-03-2022-0052

Ak Gümüş, Ö., (2022). Dynamics of a Prey-Predator System with Harvesting Effect on Prey. Chaos Theory and Applications, 4(3), 144-151. https://doi.org/10.51537/chaos.1183113

Allen and J. SLinda. (2007). An Introduction to Mathematical Biology, Texas Tech. University.

BÖLÜM X

Demi-Semikompakt Operatörler

Birol ALTIN[1]

Giriş

Demi gösterimi ilk olarak 1966 yılında Petryshyn'in "Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space " isimli makalesinde kullanılmıştır (Petryshyn, 1966). 2020 yılındada Benkhaled, H., Elleuch ,A.,Jeribi, A. sıra zayıf demi-kompakt lineer operatörler sınıfını incelediler (Benkhaled, H. & Elleuch, A. & Jeribi, A. 2020). Daha sonra Dunford Pettis operatörlerinin bir genellemesi olan demi Dunford-Pettis operatörleri sınıfını tanıttılar (Benkhaled, Hajji & Jeribi, 2022).

Bu çalışmada, ilk defa 1983 yılında A. C. Zaanen tarafından verilen semikompakt operator sınıfının bir genelliştirmesi olan demi- semikompakt operatörlerin sınıfı tanıtılmış ve özellikleri incelenmiştir..

[1] Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Teknikokullar, Ankara.

E bir Banach uzayı , F bir Banach örgüsü ve $T{:}E \to F$ ye bir sürekli operatör olsun. E ve F uzaylarının kapalı birim yuvarları sırasıyla U, V olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için $T(U) \subset [-x, x] + \epsilon V$ olacak şekilde $x \in F^+$ var ise T operatörüne bir semikompakt operatör denir. (A.C. Zaanen, 1983).

E den F içine bütün semikompakt operatörlerin kümesini $L_{sk}(E, F)$ ile gösterilecektir. E bir Banach uzayı ve F bir Banach örgüsü olmak üzere

$$S \leq T \text{ sıralaması her } x \in E^+ \text{ için } S(x) \leq T(x)$$

anlamına gelecektir. Özdeşlik operatörü I ile gösterilecektir. Tanımlanmayan terim ve notasyon-lar için (Aliprantis & Burkinshaw,1978)' ye ve (Aliprantis & Burkinshaw,2006)' ya bağlı kalına-cakcaktır.

Temel Sonuçlar

Tanım 1. E bir Banach örgüsü ve $T{:}E \to E$ ye bir sürekli operator olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için
$(I - T)(U) \subset [-x, x] + \epsilon U$ olacak şekilde bir $x \in F^+$ var olduğunda $U \subset [-y, y] + \epsilon U$ olacak şekilde $y \in E^+$ var ise T ye bir demi-semicompakt operatör denir. E üzerinde tanımlı bütün demi-semikompakt operatörlerin sınıfını $\mathfrak{D}L_{sk}(E)$ ile gösterecegiz.

Örnek 1 E bir Banach örgüsü olsun. O zaman her $\alpha \neq 1$ için $\alpha I \in \mathfrak{D}L_{sk}(E)$ olur.

Gerçekten, $\alpha \neq 1$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $(I - \alpha I)(U) \subset [-x, x] + \epsilon V$ olacak şekilde bir $x \in E^+$var olduğunu kabul edelim. . O zaman

$\frac{1}{|1-\alpha|}\epsilon$ pozitif sayısı için de $(I-\alpha I)(U) \subset [-y,y] + \frac{\epsilon}{|1-\alpha|} U$ olacak şekilde bir $y \in E^+$ vardır.

Buradan, $(1-\alpha)(U) \subset [-x,x] + \frac{\epsilon}{|1-\alpha|} U$ Böylece $, U \subset \frac{1}{|1-\alpha|}\epsilon \left[[-y,y] + \frac{\epsilon}{|1-\alpha|} U\right] \subset [\frac{-y}{|1-\alpha|}, \frac{y}{|1-\alpha|}] + \epsilon U$ olur. Bu ise $\alpha I \in \mathfrak{D}L_{sk}(E)$ olduğunu verir.

Önerme 1. E bir Banach örgüsü olsun. I özdeşlik dönüşümünün bir semikompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul E nin bir birimli AM-uzayı olmasıdır.(A. C. Zaanen 1983).

Örnek 2 $k \in \mathbb{N}$ olsun. $T_k: c_0 \to c_0$ operatörü her $x = (x_i) \in c$ için $T_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ olarak tanımlansın. Burada c_0 , $\mathbb{R}$. nin sıfıra yakınsak dizilerinin uzayıdır ve $T_k: c_0 \to c_0$ operatörü demi-semikompakt operatördür. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $S_k = I + T_k$ operatörünü tanımlayalım. c_0 uzayı sıra birime sahip olmadığından, Önerme 1 den kolaylıkla görülebilir ki her $k \in \mathbb{N}$ için S_k operatörü demi-semikompakt operator değildir.

Teorem 1 E bir Banach örgüsü olsun. E üzerinde tanımlı her semikompakt operator bir demi-semikompakt operatör olur.

İspat T, E üzerinde bir semikompakt operatör olsun. O zaman herhangi bir $\epsilon > 0$ verilsin. T semicompakt operatör olduğundan $T(U) \subset [-x,x] + \frac{\epsilon}{2} U$ olacak şekilde $x \in E^+$vardır. $(I - T)(U) \subset [-y,y] + \frac{\epsilon}{2} U$ olacak şekilde bir $y \in E^+$ var olsun. U nun mutlaj konveks bir küme olduğu kullanılırsa, $U \subset (I-T)(U) + T(U) \subset [-y,y] + \frac{\epsilon}{2} U + [-x,x] + \frac{\epsilon}{2} U \subset [-(x+y),(x+y)] + U$ elde edilir. Bu ise T nin bir demi-semikompakt operatör olduğunu verir.

Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin genelde doğru olmadığını verecektir.

Örnek 3 $T: c_0 \to c_0$ ve $T = \frac{1}{2}\, I$ olsun.c_0 sıra birime sahip Önerme 1 den T bir semikompakt operator değildir.

Teorem 2 E bir Banach örgüsü, $T: E \to E$ bir semikompakt operator ve $S: E \to E$ bir demi semikompakt operator olsun O zaman $T + S$ bir demi semikompakt operator olur.

İspat Eğer her $\epsilon > 0$ için $(I - (S + T))(U) \subset [-x, x] + \frac{\epsilon}{2} U$ olacak şekilde bir $x \in E^+$ var olsun. T operatörü de bir semikompakt operatör olduğundan $T(U) \subset [-y, y] + \frac{\epsilon}{2} U$ olacak şekilde bir $y \in E^+$ var olsun. Her $u \in U$ için
$(I - S)(u) \subset (I - S)(u) + T(u) - T(u) = \big(I - (S + T)\big)(u) + T(u) \in [-x, x] + \frac{\epsilon}{2} U + [-y, y] + \frac{\epsilon}{2} U \subset [-(x + y), (x + y)] + \epsilon U$
bulunur. Bu ise $(I - S)(U) \subset [-(x + y), (x + y)] + \epsilon U$ olduğunu verir. operatörü demi-semikompakt operatör olduğundan $U \subset [-z, z] + \epsilon U$ olacak şekilde bir $z \in E^+$ vardır. Bu ise $S + T$ bir demi-semi kompakt operatör olduğunu verir.

Ancak, genelde iki demi-semikompakt operatörün toplamı bir demi- semikompakt operatör olmayabilir.

Örnek 4 T_1 , $T_2: c_0 \to c_0$ ve $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}\, I$, operatörleri birer demi-semikompakt operatör olmalarına rağmen, Önerme1 den T_1+$T_2 = I$ bir demi-semikompakt operatör değildir.

Aşağıdaki teorem bir Banach örgüsünün sıra birime sahip bir AM-uzay olmasının karakterizasyonun verecektir.

Teorem 3 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir

(i) E birimli AM-uzayıdır.

$(ii)\ L_{mk}(E,F) = \mathfrak{D}L_{mk}(E)$

Proof $(i) \Rightarrow (ii)$ Teorem 1 den $L_{sk}(E,F) \subset \mathfrak{D}L_{sk}(E)$ olduğu açıktır. $\mathfrak{D}L_{sk}(E) \subset L_{sk}(E,F)$

olduğunu görelim. $T \in \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ ve E nin sıra birimi e olsun. O zaman E nin kapalı birim yuvarı $U = [-e, e]$ olur. (Aliprantis & Burkinshaw, 2006)

$\epsilon > 0$ keyfi pozitif sayısı verilsin. $T: E \to E$ bir sürekli operatör olduğundan

$T(U) \subset \|T\|U$=[-$\|T\|e, \|T\|e$] $\subset$[-$\|T\|e, \|T\|e$]+ ϵU

Elde edilirki bu da T nin bir semikompakt operatör olduğunu verir. Yani $\mathfrak{D}L_{sk}(E) \subset L_{sk}(E,F)$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $L_{mk}(E,F) = \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ olsun. $\frac{1}{2}I$ demi semikompakt operator olduğundan hipotezden, $\frac{1}{2}I$, $L_{sk}(E,F)$ uzayına ait olur. semikompakt operatör tanımından I , $L_{sk}(E,F)$ uzayına ait olur. Bu ise Önerme1 den E Banach örgüsünün bir sura birimli AM-uzayı olduğunu verir.

Önerme 1 yukarıdaki önerme birlikte gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $T: E \to E$ her operator demi semikompakt operatördür.

(ii) $I: E \to E$ bir demi semikompakt operatördür.

(iii) E sıra birimli bir AM-uzayıdır.

Dikkat edilmelidir ki T bir demi Semi-kompakt operatör ve $0 \leq S \leq T$ olduğunda S bir demi Semi-kompakt operatör olmayabilir

Örnek 6 T ve S reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı olan c_0, üzerinde tanımlı $S = I$ ve $T = 2I$ olacak şekilde iki operatör olsunlar. $0 \leq S \leq T$ ve T, $\mathfrak{D}L_{sk}(E)$ sınıfına ait olur. Fakat c_0 uzayının sıra birimi olmadığından S, $\mathfrak{D}L_{mk}(E)$ sınıfına ait değildir.

KAYNAKÇA

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (2006). Positive Operators. Berlin: Springer

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (1978). Locally Solid Riesz Spaces. New York: Academic Press

Benkhaled, H. & Elleuch, A. & Jeribi, A. (2020). The class of order weakly demicompact operators. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 114(2), 1-8. Doi: 10.1007/s13398-020-00808-4

Benkhaled, H. & Hajji, M. & Jeribi, A. (2022). On the class of Demi Dunford- Pettis Operators. Circolo Matematico di Palermo Ser 2, 1-11. Doi: 10.1007/s12215-021-00702-x

Petryshyn, W.V. (1966). Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 14(2), 276-284. Doi: 10.1016/0022-247X(66)90027-8

Zaanen, A. C. (1983). Riesz Spaces II, North Holland Publishing Company Amsterdam, New York, Oxford

BÖLÜM XI

Ricci Solitonlu ϕ-Rekürent α-Kenmotsu Manifoldlar

Hakan ÖZTÜRK[1]

Giriş

Hemen hemen değme metrik manifoldların bir sınıfı olan, Kenmotsu manifoldlar ilk olarak Kenmotsu tarafından tanıtılmıştır (Kenmotsu, 1972). Kenmotsu manifoldları Levi-Civita konneksiyonu vasıtasıyla karakterize edilebilir. Kenmotsu, tensör denklemleri ile karakterize edilen, katlı çarpımla yakından ilişkili bir yapıdan oluşur. Başka bir değişle, keyfi $X, Y \in \chi(M)$ için, aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi, \tag{1}$$

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X. \tag{2}$$

[1] Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, hakser23@gmail.com

(1) ve (2) denklemleriyle belirtilen (ϕ, ξ, η, g) -yapısı normaldir. Kenmotsu yapılar için Killing vektör alanı mevcut olmadığından Kenmotsu yapılar Sasakian yapıda değildirler. Aynı zamanda, bu koşulları sağlayan Kenmotsu manifoldları kompakt bir yapıya da sahip değildir. Pek çok yazar Kenmotsu ve hemen hemen Kenmotsu manifoldları hakkında çalışmalar kaleme almışlardır (De & Pathak, 2004), (Kim & Pak, 2005), (Jun & ark., 2005), (Öztürk & ark., 2017-2021), (Öztürk, 2022).

Riemann geometrisinde ilgi çekici konulardan biri de Einstein manifoldlarıdır. Bir Riemann manifoldunda, eğer Ricci tensörü metrik ile orantılı ise yani, $S = tg$ olacak şekilde bir t fonksiyonu varsa, o zaman Riemann manifoldu Einstein manifoldu olarak adlandırılır. Bu manifoldlar, uzay-zamanda bir kütle tarafından üretilen yerçekimi etkilerini açıklamaya çalışan Einstein'ın alan denklemleriyle çok bağlantılıdır (Besse, 1987).

Poincaré, 20. yüzyılın başlarında her basit bağlantılı, kapalı 3-boyutlu manifoldun S^3 küresine homeomorfik olduğunu iddia etmiştir. Yani, bu iddia ; 3-kürenin her bir ilmeğinin sürekli olarak bir noktaya küçülebildiği tek 3-boyutlu uzay olduğunu ifade etmektedir. Bu varsayım Poincaré hipotezi olarak adlandırılmıştır. Önceleri ispatı kolay olarak düşünülse de ancak bir sonraki yüzyılda ispatlanmıştır. Poincaré'i takiben Thurston, kompakt 3-boyutlu manifoldların tam sınıflandırılmasıyla ilgili olan geometrizasyon varsayımını ortaya atmıştır. Dolayısıyla, artık Poincaré varsayımına da en azından bir cevap verilebilmiş oldu. Poincaré hipotezini ispatlamak için en büyük adımı Hamilton yaptı. Hamilton meşhur makalesinde Ricci akışınını literature kazandırarak büyük bir iş başardı (Hamilton, 1982). Bu çalışmasından sonra yazar yüzeyler

üzerinde Ricci akışı incelemiştir (Hamilton, 1988). Ancak Ricci akışı tekillikler oluşturma eğiliminden uzak değildi. Bu durum akışın durmasına sebep oluyordu. Daha sonra Perelman, yeni bir yöntemle akışı tekilliklerden kurtardı (Perelman, 2002). Sonuç olarak, Poincaré hipotezi çözüme kavuşmuş oldu.

Rekürent manifold, özellikle dinamik sistemler teorisi ve diferensiyel geometride, belirli noktaların veya yörüngelerin düzenli veya öngörülebilir bir şekilde tekrar ettiği bir geometrik uzay türünü tanımlayan bir kavram olarak ele alınmaktadır. Dinamik sistemler bağlamında, belirli noktalar (veya yörüngeler) için sistem bir süre sonra başlangıç durumuna keyfi olarak yaklaşıyorsa, bir sistemin tekrarlı olduğu anlamına gelir. Yani, dinamik bir sistemdeki bir y noktası, eğer bir süre sonra sistemin durumunu tekrar gözlemliyorsa ya da y noktasına tekrar yaklaşıyorsa kendini tekrarlıyor demektir. Genel anlamda rekürent manifold, dinamik davranışların tekrarlama sergilediği, yani sistemdeki yörüngelerin veya durumların belirli bir süre sonra belirli bölgeleri veya durumları tekrar ziyaret ettiği bir manifoldu ifade etmek için kullanılır. Tek bir duruma bağlı kalmaksızın önceki durumlara veya formlara dönmeye devam eden sistemlerde rastlanabilir. ϕ-rekürent manifold, dinamik sistemler ve geometri çalışmalarında, özellikle diferensiyel geometri ve ergodik teori bağlamında kullanılan bir kavramdır. "ϕ-rekürent" terimi, bir vektör alanı tarafından oluşturulan bir akış altındaki noktaların davranışını ifade eder ve dinamik sistemlerdeki yinelenme kavramıyla doğrudan bağlantılıdır. Kısaca, ϕ-rekürent manifoldlar, bir vektör alanının akışının tekrarlama özellikleri sergilediği manifoldlardır, yani noktalar akış altında sonsuz sıklıkta kendi komşuluklarına geri dönerler.

Bir Riemann manifoldu için lokal simetri kavramı birçok yazar tarafından çeşitli şekillerde farklı ölçülerde çalışılmıştır. Lokal simetrinin daha zayıf bir versiyonu Takahashi tarafından Sasakian manifoldlar üzerinde lokal ϕ -simetri anlamında incelenmiştir (Takahashi, 1977). Daha sonra bazı araştırmacılar ϕ -simetri kavramını genelleştirerek, ϕ-rekürent Sasakian manifold kavramını tanıtmışlardır (De & ark., 2003). Ayrıca, ϕ -rekürent Kenmotsu manifoldları ve 3-boyutlu lokal ϕ- rekürent Kenmotsu manifoldları bazı yazarlar tarafından araştırılmıştır (De & ark., 2009). Bundan başka, değme geometrisinde, ϕ-simetri kavramı Boeckx, Buecken ve Vanhecke tarafından çeşitli örneklerle tanıtılmış ve incelenmiştir (Boeckx & ark., 1999).

Manifold teorisinde Ricci solitonların tanımlanmasından sonra bir çok bilim adamı bu ana başlık üzerinde çalışmalar yapmışlardır (Tripathi, 2008), (Chen, 2015 & 2019), (Kumar & Mourya, 2018), (Nagaraja & Venu, 2016), (Yadav & Öztürk, 2019), (Öztürk & Yadav, 2023), (Öztürk & Bektaş, 2023).

İşte bu bilgiler ışığında, bu çalışmada ele alacağımız Ricci solitonlar süreç boyunca Ricci akışından ortaya çıkmıştır. Ricci solitonlar, Ricci akışında tekilliklerin oluşumunu gösterir ve öz benzer çözümler olarak karşımıza çıkar. Literatüre baktığımızda Ricci solitonlarına örnek bulmak için Einstein benzeri yapıya sahip Riemann manifoldlarının araştırıldığını görürüz. Ricci solitonlar özellikle fizikte önemli bir yere sahiptir. Genellikle quasi Einstein şeklinde ifade edilirler.

Bu çalışmada, ϕ -rekürent şartını sağlayan α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir.

Temel Kavramlar

M, $(2n+1)$-boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi,\ \eta(\xi) = 1,\ \phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \phi = 0 \qquad (3)$$

şartlarını sağlayan (1,1)-tipli bir tensör alanı ϕ, bir vektör alanı ξ ve η 1-formuna sahip ise o zaman M manifolduna bir hemen hemen değme manifold denir (Blair, 1976).

Eğer bir hemen hemen değme manifoldu

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \qquad (4)$$

olacak şekilde bir g ile donatılmış ise bu durumda (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold olarak adlandırılır. O halde,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \qquad (5)$$ ve

$$\eta(X) = g(X, \xi) \qquad (6)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bir hemen hemen değme metrik yapı için $g(\xi, \xi) = 1$ olduğu aşikardır.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldun temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \qquad (7)$$

ve R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \tag{8}$$

şeklinde tanımlıdırlar. Ayrıca, Q Ricci operatörü Ricci tensörü yardımıyla

$$S(X,Y) = g(QX,Y) \tag{9}$$

ile tanımlıdır (Yano & Kon, 1984).

$(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold (ϕ,ξ,η) -yapısı ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünürsek, her vektör alanı X için, $(X, f\frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{10}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer J integrallenebilir ise hemen hemen değme metrik (ϕ,ξ,η)-yapısının normal olduğu açıktır. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi,\phi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0 \tag{11}$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). Bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu

$$d\eta = 0,\ d\Phi = 2(\eta \wedge \Phi) \tag{12}$$

şartlarını sağlayan bir hemen hemen değme metrik manifolddur. Bir normal hemen hemen Kenmotsu manifoldun bir Kenmotsu manifold olduğunu hatırlayalım. (M,ϕ,ξ,η,g) bir

hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere,

$$d\eta = 0,\ d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \tag{13}$$

şartları sağlanıyorsa, M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold denir (Kim & Pak, 2005). Özel olarak, $\alpha = 1$ için, M bir hemen hemen Kenmotsu manifoldudur (Kenmotsu, 1972). Normal hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu da α-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Önerme 1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$-\phi\big(\nabla_{\phi X}\phi\big)Y + (\nabla_X \phi)Y = -2\alpha\eta(Y)\phi X + (g(\alpha\phi X + hX, Y)\xi \tag{14}$$

önermesi geçerlidir (Öztürk, 2021).

Önerme 2. M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için, M nin bir α-Kenmotsu manifoldu olması için aşağıda verilen önermenin sağlaması gerek ve yeterdir:

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \tag{15}$$

(Öztürk, 2021).

Önerme 3. M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X + h\phi X \tag{16}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(hX, \phi Y) \tag{17}$$

(Öztürk, 2021).

Önerme 4. M , $(2n+1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha\eta(X)\xi \tag{18}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)] \tag{19}$$

$$R(X,Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \tag{20}$$

$$R(X,\xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y,X)\xi - \eta(Y)X] \tag{21}$$

$$R(X,\xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \tag{22}$$

$$\eta(R(X,Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y,Z) + \eta(Y)g(X,Z)] \tag{23}$$

$$S(X,\xi) = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\eta(X) \tag{24}$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \tag{25}$$

$$S(\phi X, \phi Y) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))S(X,Y) + 2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X)\eta(Y) \tag{26}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada α, $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Önerme 5. M , $(2n+1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$div\eta = -2n\alpha,\ div\xi = 2\alpha n,\ K(\xi, Y) = \alpha^2 \tag{27}$$

Burada $\{e_1, \cdots, e_n, \phi e_1, \cdots, \phi e_n, \xi\}$, M üzerinde bir lokal ϕ-tabanı olarak alınmıştır. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak seçilmiştir. (Öztürk, 2021).

Tanım 1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = \mu_1 g(X,Y) + \mu_2 \eta(X)\eta(Y) \tag{28}$$

koşulu sağlanıyorsa, M ye bir η-Einstein manifoldu denir, burada μ_1 ve μ_2, M üzerindeki keyfi fonksiyonlardır. Özel olarak, $\mu_2 = 0$ alındığında M bir Einstein manifoldu olur (Blair, 1976).

Önerme 6. M , $(2n+1)$ -boyutlu bir η -Einstein α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\mu_1 + \mu_2 = -2n\alpha^2 \tag{29}$$

$$r = \mu_1(2n+1) + \mu_2 \tag{30}$$

$$\mu_1 = \frac{r+2n\alpha^2}{(2n+1)-1} \tag{31}$$

$$\mu_2 = \left[\frac{2n(\alpha^2+r)+r}{(2n+1)-1}\right] \tag{32}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada r, M nin skalar eğriliği ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Ricci Solitonlar

Bu bölümde, α-Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci soliton kavramını araştıracağız. Öncelikle, Çalışmamıza Ricci solitonları tanıtabilmek için, Ricci akışını tanımlayarak başlayalım:

Tanım 2. (M, g_0) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Aşağıda verilen kısmi türevli diferensiyel denkleme g metrik tensörünü değiştiren Ricci akışı denir:

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(g(s)\big) + 2S\big(g(s)\big) = 0,\ \ g(0) = g_0 \tag{33}$$

(Hamilton, 1982).

Tanım 3. (M,g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfi vektör alanları X,Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X,Y) + 2S(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) = 0 \tag{34}$$

denklemi sağlanıyorsa, (M,g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M,g,V,λ) ile sembolize edilir. (M,g,V,λ) Ricci solitonuna λ nın $\lambda < 0, \lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M,g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X,Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \tag{35}$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 5. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde (g,V,λ) Ricci solitonu mevcutsa, (M,g,V,λ) ya Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 7. (M,g,V,λ), $(2n+1)$-boyutlu bir Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold olsun. Eger V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g,ξ,λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X,Y) = -(\alpha+\lambda)g(X,Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \tag{36}$$

denklemini sağlar. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 8. (M, g, V, λ), $(2n+1)$-boyutlu bir Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold olsun. Eger V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \tag{37}$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \tag{38}$$

$$Q\xi = -\lambda\xi, \tag{39}$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \tag{40}$$

$$r = \alpha - (2n+1)(\alpha + \lambda). \tag{41}$$

Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Sonuçlar

Bu bölümde, ϕ -rekürent şartı yardımıyla α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 6. (M, g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. ∇, M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere,

$$(\nabla_Z S)(Y, \xi) = \nabla_Z S(Y, \xi) - S(\nabla_Z Y, \xi) - S(Y, \nabla_Z \xi) \tag{42}$$

dır (Blair, 1976).

Tanım 7. (M, g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. ∇, M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki şartı sağlıyorsa M bir ϕ -rekürent manifoldu olarak adlandırılır:

$$\phi^2((\nabla_Z R)(X, Y)W) = B(Z)R(X, Y)W. \tag{43}$$

Burada B 1-formdur (De & ark., 2009).

Lemma 1. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$-boyutlu bir ϕ-rekürent Kenmotsu manifold olsun. Karakteristik vektör alanı ξ ve bir keyfi vektör alanı ρ ile ilişkili B 1-formu eş yönlüdürler. Ayrıca, B 1-formu

$$B(Z) = \eta(\rho)\eta(Z) \tag{44}$$

ile tanımlıdır. Burada $Z = \xi$ alınırsa,

$$B(\xi) = \eta(\rho) \tag{45}$$

dır (De & ark., 2009).

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g), B 1-formu ile verilen $(2n+1)$-boyutlu bir ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifold olsun. O zaman M bir Einstein manifoldudur. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. Tanım 7 gereğince M nin bir ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldu olduğunu kabul edelim. Ayrıca, hipotezden dolayı $\nabla_\xi \alpha = 0$ olsun. Bu durumda (43) eşitliği kullanılarak

$$B(Z)R(X,Y)W = \eta((\nabla_Z R)(X,Y)W)\xi - (\nabla_Z R)(X,Y)W) \tag{46}$$

elde edilir. (46) eşitliğinin her iki tarafı U vektör alanı ile iç çarpılırsa,

$$B(Z)g(R(X,Y)W,U) = \eta((\nabla_Z R)(X,Y)W)\eta(U) - g((\nabla_Z R)(X,Y)W),U) \tag{47}$$

yazılır. (47) eşitliğinin her iki tarafına $X = U = E_i$ için kontraksiyon uygulanırsa,

$$B(Z)S(Y,W) = -(\nabla_Z S)(Y,W) \tag{48}$$

bulunur. $W = \xi$ için (18) ve (24) eşitlikleri yardımıyla

$$(\nabla_Z S)(Y,\xi) = -\alpha[S(Y,Z) + 2n\alpha^2 g(Y,Z)] \tag{49}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak, (48) ve (49) eşitlikleri beraber düşünülürse,

$$S(Y,Z) = -2n\alpha^2 g(Y,Z) + 2n\alpha B(Z)\eta(Y) \tag{50}$$

olduğu görülür. Burada Y ve Z yerine sırasıyla, ϕY ve ϕZ vektör alanları alınarak, (3), (4) ve (26) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa,

$$S(Y,Z) = -2ng(Y,Z) \tag{51}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2. (M,ϕ,ξ,η,g), B 1-formu ile verilen $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer $n \geq 1$ olmak üzere, M bir ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldu ise o zaman M üzerinde (g,ξ,λ) Ricci soliton aşağıdaki şartları sağlar:

(i) Eğer $\alpha > 0$ için, $B(\xi) < \alpha$ veya $\alpha < 0$ için, $B(\xi) > \alpha$ ise genişleyendir,

(ii) Eğer $\alpha > 0$ için, $B(\xi) > \alpha$ veya $\alpha < 0$ için, $B(\xi) < \alpha$ ise daralandır,

(iii) Eğer $B(\xi) = \alpha$ ise değişmeyendir.

Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. Hipotez gereğince M nin bir ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldu olduğunu varsayalım. Yani, Teorem 1

yardımıyla (50) eşitliği geçerlidir. Bundan başka, $\nabla_\xi \alpha = 0$ dır. (50) eşitliğinde Y yerine ξ vektör alanını seçersek,

$$S(\xi, Z) = -2n\alpha^2\eta(Z) + 2n\alpha B(Z) \tag{52}$$

yazılır. Lemma 1 göz önüne alınarak, $Z = \xi$ seçilirse,

$$S(\xi, \xi) = -2n\alpha[\alpha - B(\xi)] \tag{53}$$

elde edilir. Buradan (37), (40) ve (53) eşitliklerinden dolayı

$$\lambda = -2n\alpha(B(\xi) - \alpha) \tag{54}$$

bulunur. Böylece $\alpha \neq 0$ ve $n \geq 1$ olduğundan tüm şıkların ispatı (54) eşitliği ve Tanım 3 yardımıyla açıktır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3. (M, ϕ, ξ, η, g), B 1-formu ile verilen $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer $n \geq 1$ ve $B(\xi) \neq -\alpha$ olmak üzere, M bir pseudo projektif ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldu ise o zaman M üzerindeki (g, ξ, λ) Ricci solitonu $\alpha > 0$ ve $B(\xi) > -\alpha$ ise genişleyendir. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. Öncelikle ispata başlamadan pseudo projektif eğrilik tensör alanının tanımını verelim. Bir $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde P^* pseudo projektif eğrilik tensör alanı

$$P^*(Y, Z)W = cR(Y, Z)W + d[S(Z, W)Y - S(Y, W)Z] \tag{55}$$
$$-(r/2n+1)(c/2n+d)[g(Z, W)Y - g(Y, W)Z]$$

ile tanımlıdır. Burada c ve d sıfırdan farklı sabitlerdir (Prasad, 2002). Bundan başka, bir α-Kenmotsu manifoldu pseudo projektif ϕ-rekürent ise

$$\phi^2((\nabla_Z P^*)(X,Y)W) = B(Z)P^*(X,Y)W \tag{56}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B 1-formu vardır. Hipotez uyarınca M nin bir pseudo projektif ϕ -rekürent α -Kenmotsu manifoldu olduğunu varsayalım. Bu durumda, (56) eşitliğinden

$$B(Z)P^*(X,Y)W = \eta((\nabla_Z P^*)(X,Y)W)\xi - (\nabla_Z P^*)(X,Y)W) \tag{57}$$

bulunur. (57) eşitliğinin her iki tarafı U ile iç çarpılırsa,

$$B(Z)g(P^*(X,Y)W,U) = \eta((\nabla_Z P^*)(X,Y)W)\eta(U) - g((\nabla_Z P^*)(X,Y)W),U) \tag{58}$$

yazılır. (58) eşitliğinin her iki tarafına $X = U = E_i$ için kontraksiyon uygulanırsa,

$$B(Z)[S(Y,W) - (r/2n+1)g(Y,W)] = -(\nabla_Z S)(Y,W) \tag{59}$$

elde edilir. $W = \xi$ alınarak (59) eşitliği

$$B(Z)[S(Y,\xi) - (r/2n+1)\eta(Y)] = (\nabla_Z S)(Y,\xi) \tag{60}$$

şekline dönüşür. $\nabla_\xi \alpha = 0$ için, (24) eşitliğinin (60) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

$$-B(Z)[2n\alpha^2 + (r/2n+1)]\eta(Y) = (\nabla_Z S)(Y,\xi) \tag{61}$$

elde edilir. Ayrıca, (49) ve (61) eşitliği birlikte düşünülürse,

$$\alpha S(Y,Z) = -2n\alpha^3 g(Y,Z) - B(Z)[2n\alpha^2 + (r/2n+1)]\eta(Y) \tag{62}$$

denklemine ulaşılır. (62) eşitliğinin düzenlenmesiyle,

$$S(Y,Z) = -2n\alpha^2 g(Y,Z) - [2n\alpha^2 + (r/(2n+1)]B(Z)\eta(Y) \tag{63}$$

bulunur. (63) eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa,

$$S(Z,\xi) = -2n\alpha^2\eta(Z) - [2n\alpha + (\frac{r}{\alpha(2n+1)})]B(Z) \qquad (64)$$

dır. (64) eşitliği $Z = \xi$ ve Lemma 1 yardımıyla

$$S(\xi,\xi) = -2n\alpha^2 - [2n\alpha + (\frac{r}{\alpha(2n+1)})]B(\xi) \qquad (65)$$

elde edilir. Son olarak, (40) eşitliği (65) eşitliğinin kullanılmasıyla,

$$\lambda = 2n\alpha^2 + [2n\alpha + (\frac{r}{\alpha(2n+1)})]B(\xi) \qquad (66)$$

şeklinde yazılabilir. (41) eşitliği ve (66) eşitliğinin birlikte ele alınmasıyla,

$$\lambda = \frac{2n\alpha[\alpha^2(2n+1) + (2n-1+\alpha)B(\xi)]}{(2n+1)[\alpha + B(\xi)]}$$

(67)

yazılır. Burada $B(\xi) \neq -\alpha$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\alpha > 0$ ve $B(\xi) > -\alpha$ olduğunda λ pozitiftir. O halde, M üzerindeki (g,ξ,λ) Ricci solitonu $\alpha > 0$ ve $B(\xi) > -\alpha$ ise genişleyen durumundadır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4. (M,ϕ,ξ,η,g), B 1-formu ile verilen $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer $n \geq 1$ ve $B(\xi) \neq \alpha$ olmak üzere, M sabit skalar eğrilikli bir konsirküler ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldu ise o zaman M üzerindeki (g,ξ,λ) Ricci solitonu $\alpha > 0$ ve $B(\xi) > -\alpha$ olduğunda genişleyendir. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. İlk olarak, ispatta kullanacağımız konsirküler eğrilik tensör alanının tanımını verelim. Bir $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde $\bar{C}$ konsirküler eğrilik tensör alanı

$$\bar{C}\,(X,Y)W = R(X,Y)W - \left(\frac{r}{2n(2n+1)}\right)[g(Y,W)X - g(X,W)Y] \qquad (68)$$

ile tanımlıdır (Blair, 1976). Bu tanım gereğince, bir α-Kenmotsu manifoldu konsirküler ϕ-rekürent olduğunda

$$\phi^2((\nabla_Z\bar{C}\,)(X,Y)W) = B(Z)\bar{C}\,(X,Y)W \qquad (69)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B 1-formu mevcuttur. Hipotezimize göre, M nin bir konsirküler ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldu olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (69) eşitliğinden

$$B(Z)\bar{C}\,(X,Y)W = \eta((\nabla_Z\bar{C}\,)(X,Y)W)\xi - (\nabla_Z\bar{C}\,)(X,Y)W) \qquad (70)$$

dır. (70) eşitliğinin her iki tarafı U ile iç çarpılırsa,

$$B(Z)g(\bar{C}\,(X,Y)W,U) = \eta((\nabla_Z\bar{C}\,)(X,Y)W)\eta(U) - g((\nabla_Z\bar{C}\,)(X,Y)W),U) \qquad (71)$$

bulunur. (71) eşitliğinin her iki tarafına $X = U = E_i$ için kontraksiyon yapılırsa, $1 \leq i \leq 2n+1$ olmak üzere,

$$-B(Z)\left[S(Y,W) - \left(\frac{r}{2n+1}\right)g(Y,W)\right] \qquad (72)$$

$$+\left(\frac{dr(Z)}{2n+1}\right)g(Y,W) = (\nabla_Z S)(Y,W)$$

elde edilir. (72) eşitliğinde $W = \xi$ alınırsa,

$$-B(Z)\left[S(Y,\xi) - \left(\frac{r}{2n+1}\right)\eta(Y)\right] \qquad (73)$$

$$+\left(\frac{dr(Z)}{2n+1}\right)\eta(Y) = (\nabla_Z S)(Y,\xi)$$

dır. (24) eşitliğinde (73) eşitliği kullanılırsa

$$\left[2n\alpha^2 + \left(\frac{r}{2n+1}\right)\right] B(Z)\eta(Y) \tag{74}$$

$$+\frac{dr(Z)}{2n+1}\eta(Y) = (\nabla_Z S)(Y,\xi)$$

elde edilir. (74) eşitliğinin düzenlenmesiyle sabit bir r değeri için,

$$(\nabla_Z S)(Y,\xi) = \left[2n\alpha^2 + \left(\frac{r}{2n+1}\right)\right] B(Z)\eta(Y) \tag{75}$$

bulunur. Buna ilaveten, (49) ve (75) eşitlikleri birlikte hesaplanırsa,

$$-\alpha S(Y,Z) - 2n\alpha^3 g(Y,Z) = \left[2n\alpha^2 + \left(\frac{r}{2n+1}\right)\right] B(Z)\eta(Y) \tag{76}$$

yazılır ve buradan

$$\alpha S(Y,Z) = -2n\alpha^3 g(Y,Z) - \left[2n\alpha^2 + \left(\frac{r}{2n+1}\right)\right] B(Z)\eta(Y) \tag{77}$$

ve

$$S(Y,Z) = -2n\alpha^2 g(Y,Z) - \left[2n\alpha + \left(\frac{r}{\alpha(2n+1)}\right)\right] B(Z)\eta(Y) \tag{78}$$

dır. (78) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa,

$$S(\xi,Z) = -2n\alpha^2\eta(Z) - \left[2n\alpha + \left(\frac{r}{\alpha(2n+1)}\right)\right] B(Z)\eta(Y) \tag{79}$$

dır. (79) eşitliğinde Lemma 1 uygulanır ve $Z = \xi$ seçilirse,

$$S(\xi,\xi) = -2n\alpha^2 - \left[2n\alpha + \left(\frac{r}{\alpha(2n+1)}\right)\right] B(\xi) \tag{80}$$

elde edilir. Son olarak, (80) eşitliğinde (40) ve (41) eşitlikleri beraber hesaba katılırsa,

$$\lambda = \frac{2n\alpha\left[\alpha^2(2n+1)+(2n-1+\alpha)B(\xi)\right]}{(2n+1)[\alpha+B(\xi)]} \tag{81}$$

yazılır. Bu sonuç (67) eşitliğiyle çakışmaktadır. Burada $B(\xi) \neq -\alpha$ dır. Bu nedenle, $\alpha > 0$ ve $B(\xi) > -\alpha$ olduğunda $\lambda > 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 1. (M, ϕ, ξ, η, g), B 1-formu ile verilen $(2n+1)$-boyutlu bir ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifold olsun. Burada α, $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyon ve $\nabla_\xi \alpha = 0$ olmak üzere, M üzerindeki (g, ξ, λ) Ricci solitonu için aşağıdaki tablo verilebilir:

Eğrilik tensör alanı	**Sağlayan tensör koşulu**	**λ nın değeri**
Riemann	$\phi^2\big((\nabla_Z R)(X,Y)W$ $- B(Z)R(X,Y)W$ $= 0$	$-2n\alpha(B(\xi)-\alpha)$
Pseudo projektif	$\phi^2\big((\nabla_Z P^*)(X,Y)$ $- B(Z)P^*(X,Y)W$ $= 0$	$\frac{2n\alpha[\alpha^2(2n+1)+(2n-1+\alpha}{(2n+1)[\alpha+B(\xi)]}$
Konsirküler	$\phi^2\big((\nabla_Z \bar{C})(X,Y)$ $- B(Z)\bar{C}(X,Y)W$ $= 0$	$\frac{2n\alpha[\alpha^2(2n+1)+(2n-1+\alpha}{(2n+1)[\alpha+B(\xi)]}$

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, Ricci solitonlu ϕ-rekürent α-Kenmotsu manifoldlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Burada yapılan hesaplamalarda α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyon ve ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır. Bulunan yeni sonuçlar literatürde daha önce bulunan sonuçları da kapsayan daha genel niteliktedir. Gelecek çalışmalarımız; (κ, μ, ν)-uzayları, D-homotetik deformasyon ve bazı paralel tensör alanları yardımıyla hemen hemen α-Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlarla ilgili daha genel sonuçlar bulmaya adanacaktır. Bu çalışma çeşitli uzaylarda diğer farklı Ricci soliton çeşitleri için genelleştirilebilir.

KAYNAKÇA

Besse, A. L. (1987). *Einstein manifolds*. New York: Springer Science and Business Media, USA.

Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Lecture Notes in Math., Vol. 509, New York: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

Boeckx, E., Buecken P. & Vanhacke, L. (1999). ϕ-symmetric contact metric spaces, *Glasgow Math. J. 41,* 409-416.

De, U. C, Shaikh, A. A. & Biswas, S. (2003). On ϕ-recurrent Sasakian manifolds, *Novi Sad J. Math*., *33,* 13-48.

De, U. C. & Pathak, G. (2004). On 3-dimensional Kenmotsu manifolds. *Ind. J. Pure Applied Math., 35,* 159-165.

De, U. C, Yıldız, A. & Yalınız, A. F. (2009). On ϕ-Recurrent Kenmotsu Manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, *33*, 17-25. Doi: https://doi.org/10.3906/mat-0711-10

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry, 17(2)*, 255-306. Doi: 10.4310/jdg/1214436922

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and General Relativity (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math*, *71*, 301-307.

Jun, J. B. & De, U. C. & Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *J. Korean Math. Soc., 42,* 435-445. Doi: https://doi.org/10.4134/JKMS.2005.42.3.435

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Math. J., 24,* 93-103. Doi: 10.2748/tmj/1178241594

Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21,* 841-846. Doi: https://doi.org/10.1007/s10114-004-0520-2

Nagaraja, H. G. & Venu, K. (2016). Ricci Solitons in Kenmotsu Manifold, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences, 8*, 29-36.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Almost α-cosymplectic pseudo metric manifolds. *Journal of Mathematics, 2021,* Article ID 4106025, 10 pages. Doi: https://doi.org/10.1155/2021/4106025

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α-cosymplectic manifolds, *Journal of Mathematics, 2021,* Article ID 9277175, 9 pages. Doi: https://doi.org/10.1155/2021/9277175

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2021). Certain Results for α-Cosymplectic Manifolds, Fen ve Matematik Bilimleri, Teori, Güncel Araştırmalar ve Yeni Eğilimler, Bölüm V, 63-77, İvpe Yayınları, Montenegro.

Öztürk, H., Mısırlı, İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α-Cosymplectic Manifolds with η-Parallel Tensor Fields, *Academic Journal of Science, 7(3),* 605-612.

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2018). Some Results on D-Homothetic Deformation, *AKU Journal of Science and Eng., 18,* 878-883. Doi: 10.5578/fmbd.67760

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2018). On Almost Alpha Kenmotsu (k,μ)-Spaces, *Journal of Advances in Mathematics*, *14(2)*, 7905-7911. Doi: https://doi.org/10.24297/jam.v14i2.7662

Öztürk, S. (2022). A Study on α-Kenmotsu Manifolds, Science and Mathematics Sciences, *Theory, Current Researches and New Trends 5, Chapter V*, 45-58, Ivpe, Montenegro.

Öztürk, H. & Yadav, S. K. (2023), A Note on Ricci and Yamabe Solitons on Almost Kenmotsu Manifolds, *Novi Sad Journal of Maths., 53(2),* 223-239. https://doi.org/10.30755/NSJOM.13375

Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). α-Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar, Modern Matematikte Yeni Yaklaşımlar, Chapter III, 22-43, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-065-0, Ankara.

Perelman, G. (2002). The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications, *arXiv preprint math/0211159.*

Prasad, B. (2002). A Pseudo Projective Curvature Tensor on Riemannian Manifold, *Bull.Cal. Math. Soc., 94,* 163-169.

Kumar, R. & Mourya, A. (2018). Certain Results on Ricci Solitons in α-Kenmotsu Manifolds, *Science Vision, 18*, 11-15.

Tripathi, M. M. (2008). Ricci solitons in contact metric manifolds, *arXiv:0801.4222v1 [math.DG]*.

Takahashi, T. (1977). Sasakian ϕ-symmetric Spaces, *Tôhoku Mathematical Journal*, *29*, 91-113.

Yadav, S. K. & Öztürk, H. (2019). On (ε)-Almost Paracontact Metric Manifolds with Conformal η-Ricci Solitons, *Diff. Geo. Dynamical Systems, 21,* 202-215.

Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Series in Pure Math., Vol. 3, Singapore: World Scientific Publishing Co.

BÖLÜM XII

Bazı Tensör Şartlarını Sağlayan Ricci Solitonlu α-Kenmotsu Manifoldlar

Hakan ÖZTÜRK[1]

Giriş

Hemen hemen değme yapılar, $U(n) \times 1$ yapısal grubunun indirgenmesiyle tek boyutlu uzaylar üzerinde Gray tarafından ele alınmıştır (Gray, 1959). Daha sonra elde edilen bu yapıya metrik tensörün ilave edilmesiyle hemen hemen değme metrik yapılar bulunmuştur (Sasaki & Hatakeyama 1962). Bu çalışmayı takiben, aynı yazarlar tarafından hemen hemen değme metrik yapılar üzerinde normallik şartı sunulmuştur. $J^2 = -I$ şartını sağlayan bu koşul J kompleks yapısının integrallenebilmesi anlamına gelir. Hemen hemen değme metrik yapıların bir alt sınıfı olarak nitelendirebileceğimiz kosimplektik manifoldlar ilk kez Goldberg ve

[1] Prof. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, hakser23@gmail.com

Yano tarafından literatüre eklenmiştir (Goldberg & Yano, 1969). Bu temel çalışmanın ardından kosimplektik manifoldlar üzerinde değerli çalışmalar Olszak tarafından kaleme alınmıştır (Olszak, 1981 & 1989).

Simetrik uzaylar Riemann manifoldları için çok değerlidir. Bu uzay sınıfları matematiğin birçok disiplini için belirgin örnekleri kapsar. Kompakt Lie gruplar, Grassmann ve sınırlı simetrik bölgeler örnek olarak verilebilir. Herhangi bir simetrik uzay kendine has özel bir geometrik özelliğe sahiptir. Öklid, eliptik ve hiperbolik geometri hemen akla gelen ilk örnekler arasındadır. Bunun yanısıra, bu tür uzaylar çok fazla ortak özellik ve zengin bir teoriyle donatılmıştır. Simetrik uzaylar için oldukça fazla bir bakış açısı vardır. Bu uzaylar Riemann manifoldları için noktasal yansımalı veya paralel eğrilik tensörüne sahip bir Lie grubu olarak düşünülebilir.

Yarı simetrik uzaylar lokal simetrik uzayların doğal bir genelleştirmesi olarak tanımlanır. M üzerinde tüm keyfi X, Y vektör alanları için, bir (M, g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü $R(X, Y).R = 0$ şartını sağlıyorsa (M, g) bir yarı simetrik uzaydır denir. Burada $R(X, Y), R$ Riemann eğrilik tensörü üzerinde bir türev gibi davranır. Belli bir uzay bir $q \in M$ noktasında (M, g) nin R_p eğrilik tensörü bir simetrik uzayın eğrilik tensörü ile aynı olduğundan (verilen q noktasına göre değişebilir) "yarı simetrik" uzay olarak adlandırılır. Lokal simetrik uzaylar diferensiyel geometri, topoloji, sayılar teorisi, kompleks analiz, cebirsel geometri gibi bir çok farklı alandan ortaya çıkmıştır.

Bir (M, g) Riemann manifoldunun eğrilik tensörü R, $\nabla R = 0$ şartını sağlıyorsa (M, g) bir lokal simetrik Riemann manifoldudur denir. Burada ∇, Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonudur.

Yarı simetrik uzaylar ile ilgili önemli bir sınıflama Szabó tarafından yapılmıştır (Szabó 1982). Aslında tarihsel literatüre baktığımızda Nomizu şartı olarak bilinen $R \cdot R = 0$ ilk kez Nomizu tarafından dile getirilmiştir (Nomizu, 1968). Eğer M^{n} $R^{\mathrm{n+1}}$ Öklid uzayının bir tam bağlantılı yarı simetrik hiperyüzeyi $(n > 3)$ yani, $R \cdot R = 0$ ise M^{n} lokal simetriktir. Yani, $\nabla R = 0$ dır. Ayrıca, Ogawa bir kompakt Kaehler manifoldunun yarı simetrik olduğunda lokal simetrik şartını sağladığını göstermiştir (Ogawa, 1977). Bundan başka, değme yapılar düşünüldüğünde, Tanno tam yarı simetrik veya Ricci yarı simetrik K-değme manifoldların mevcut olmadığını ispatlamıştır (Tanno, 1969).

Kenmotsu tarafından hemen hemen değme metrik Riemann manifoldların bir alt sınıfı olarak yeni bir tanım ortaya koyuldu (Kenmotsu, 1972). Günümüzde, bu manifoldlar Kenmotsu manifoldlar olarak adlandırılmaktadır. Bir $(2n + 1)$-boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için, $(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$ eşitliği geçerli ise, (ϕ, ξ, η, g) -dörtlü yapısı normaldir. Buna karşın, ξ karakteristik vektör alanı Killing vektör alanı olmadığından Sasakian yapıya sahip değildir. Ayrıca, Kenmotsu manifoldlar kompakt değildir $(div\xi = 2n)$. Kenmotsu manifoldlar pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (De & Pathak, 2004), (Özgür, 2007), (Jun & ark., 2005), (Dileo & Pastore, 2007).

Bundan başka, hemen hemen Kenmotsu yapılar genelleştirilerek hemen hemen α -Kenmotsu manifoldlar tanımlanmıştır (Janssens & Vanhecke, 1981). Daha sonra, hemen hemen α -Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılar birleştirilerek, hemen hemen değme metrik manifoldların bir alt sınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar tanımlanmıştır (Kim & Pak, 2005).

Diferensiyel geometri ve genel görelilikte önemli bir araç olarak kullanılan Ricci akışı, bir manifold üzerindeki metrik tensör alanının zamanla evrimini tanımlayan bir süreçtir. İlk kez Hamilton tarafından tanıtılmıştır (Hamilton, 1982). Hamilton Poincaré hipotezini ispatlamak için en büyük adımı ortaya koymuştu. Bu çalışmasından sonra Hamilton yüzeyler üzerinde Ricci akışı araştırmıştır (Hamilton, 1988). Fakat Ricci akışı sırasında metrik, "tekillikler" oluşturabiliyordu. Örnek olarak, bir bölgenin eğriliği sonsuza yakınsayabilir. Bu tür durumları anlamak ve yönetmek, Ricci akışının matematiksel teorisinin önemli bir parçasıdır. Bu tekillikleri çözmek için "cerrahi" adı verilen özel yöntemler geliştirilmiştir. İşte bu durum akışın durmasına sebep oluyordu. Bu problemi çözmek için özellikle Perelman 3-boyutlu manifoldlarda bir sınıflandırmaya gitti. Yani, Perelman, yeni bir yöntemle akışı tekilliklerden kurtardı (Perelman, 2002). Sonuç olarak, Poincaré hipotezi çözüme kavuşmuş oldu.

Ricci akışı, bir manifoldun eğrilik yapısını "düzleştirmek" için kullanılır. Zamana bağlı olarak metrik tensör, eğrilik dağılımını düzenler ve bazı durumlarda manifoldun topolojik yapısı hakkında bilgi verir. Bu süreç, ısı denklemiyle analoji kurularak düşünülebilir. Tıpkı ısı denkleminin sıcaklık farklarını zamanla dengelemesi gibi,

Ricci akışı da manifoldun eğrilik farklarını zamanla sabitleştirmektedir. Ricci solitonlar süreç boyunca Ricci akışından ortaya çıkmıştır. Ricci solitonlar, Ricci akışında tekilliklerin oluşumunu gösterir ve öz benzer çözümler olarak karşımıza çıkar. Literatüre baktığımızda Ricci solitonlarına örnek bulmak için Einstein benzeri yapıya sahip Riemann manifoldlarının araştırıldığını görürüz. Ricci solitonlar özellikle fizikte önemli bir yere sahiptir. Genellikle quasi Einstein şeklinde ifade edilirler. Böylece Ricci solitonlar konusu önemli bir araştırma alanına dönüşmüş oldu (Tripathi, 2008), (Yadav & Öztürk, 2019), (Öztürk & Yadav, 2023), (Öztürk & Bektaş, 2023).

Bu çalışmada, bazı simetrik tensör özellikleri ve eğrilik tensör alanları yardımıyla α -Kenmotsu manifoldları üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir. Özellikle, yarı simetrik, Ricci yarı simetrik, D -konformal ve η -paralel tensör alanları Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçları geçerli kılan 3-boyutlu bir Ricci solitonlu α-Kenmotsu manifold örneği inşa edilmiştir.

Ricci Solitonlu α-Kenmotsu Yapılar

Bir $(2n+1)$ -boyutlu türevlenebilir manifold M olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için; ϕ, (1,1)-tipli bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η 1-form olmak üzere,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \tag{1}$$

$$\eta(\xi) = 1,\ \phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \phi = 0 \tag{2}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3}$$

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \tag{4}$$

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{5}$$

denklemlerini sağlayan g metriği ile donatılmış (M, ϕ, ξ, η, g) ye bir hemen hemen değme metrik manifold denir (Blair, 1976). Burada $g(\xi, \xi) = 1$ dır. Bir hemen hemen değme metrik manifoldun temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \tag{6}$$

ile tanımlıdır. R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \tag{7}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, Q Ricci operatörü Ricci tensörü yardımıyla

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \tag{8}$$

ile verilir (Yano & Kon, 1984). Bir hemen hemen değme metrik (M, ϕ, ξ, η, g) manifoldunun $1 \leq i \leq n$ için her zaman bir özel lokal ortonormal $\{E_i, \phi E_i, \xi\}$ tabanı vardır. Bu tabana bir lokal ϕ-tabanı adı verilir (O'neil, 1983). Bir $(2n + 1)$-boyutlu hemen hemen değme metrik manifold M (ϕ, ξ, η)-yapısı ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünürsek, her vektör alanı X için, $(X, f\frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t, $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{9}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer J integrallenebilir ise hemen hemen değme metrik (ϕ, ξ, η)-yapısının normal olduğu açıktır. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \tag{10}$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). Bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu

$$d\eta = 0,\ d\Phi = 2(\eta \wedge \Phi) \tag{11}$$

şartlarını sağlayan bir hemen hemen değme metrik manifolddur. Bir normal hemen hemen Kenmotsu manifoldun bir Kenmotsu manifold olduğunu hatırlayalım. (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere,

$$d\eta = 0,\ d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \tag{12}$$

şartları sağlanıyorsa, M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold denir (Kim & Pak, 2005). Özel olarak, $\alpha = 1$ için, M bir hemen hemen Kenmotsu manifoldudur (Kenmotsu, 1972). Normal hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu da α-Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Önerme 1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için, M nin bir α-Kenmotsu manifoldu olması için aşağıda verilen önermenin sağlaması gerek ve yeterdir:

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \tag{13}$$

(Öztürk, 2021).

Önerme 2. M, $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha\eta(X)\xi \tag{14}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] \tag{15}$$

$$R(X, Y)\xi = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \tag{16}$$

$$R(X, \xi)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \tag{17}$$

$$R(X,\xi)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X \tag{18}$$

$$\eta(R(X,Y)Z) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))[-\eta(X)g(Y,Z) + \eta(Y)g(X,Z)] \tag{19}$$

$$S(X,\xi) = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\eta(X) \tag{20}$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))n\xi \tag{21}$$

$$S(\phi X,\phi Y) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))S(X,Y) + 2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X)\eta(Y) \tag{22}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada α, $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyondur (Öztürk & ark., 2017).

Tanım 1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = \mu_1 g(X,Y) + \mu_2 \eta(X)\eta(Y) \tag{23}$$

koşulu sağlanıyorsa, M ye bir η-Einstein manifoldu denir, burada μ_1 ve μ_2, M üzerindeki keyfi fonksiyonlardır. Özel olarak, μ_2=0 alındığında M bir Einstein manifoldu olur (Blair, 1976).

Önerme 3. M, $(2n+1)$-boyutlu bir η-Einstein α-Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\mu_1 + \mu_2 = -2n\alpha^2 \tag{24}$$

$$r = \mu_1(2n+1) + \mu_2 \tag{25}$$

$$\mu_1 = \frac{r+2n\alpha^2}{(2n+1)-1} \tag{26}$$

$$\mu_2 = \left[\frac{2n(\alpha^2+r)+r}{(2n+1)-1}\right] \tag{27}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada r, M nin skalar eğriliği ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Tanım 2. (M, g_0) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Aşağıda verilen kısmi türevli diferensiyel denkleme g metrik tensörünü değiştiren Ricci akışı denir:

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(g(s)\big) + 2S\big(g(s)\big) = 0,\ \ g(0) = g_0 \tag{28}$$

(Hamilton, 1982).

Tanım 3. (M, g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfi vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \tag{29}$$

denklemi sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ değerinin $\lambda < 0, \lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M, g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \tag{30}$$

dır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 5. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n + 1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa, (M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu α-Kenmotsu manifold denir (Hamilton, 1988), (Kenmotsu, 1972).

Önerme 4. (M, g, V, λ), $(2n + 1)$-boyutlu bir Ricci solitonlu α-Kenmotsu manifold olsun. Eger V potansiyel vektör alanı

ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X,Y) = -(\alpha + \lambda)g(X,Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \tag{31}$$

denklemini sağlar. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Önerme 5. (M, g, V, λ), $(2n+1)$-boyutlu bir Ricci solitonlu α-Kenmotsu manifold olsun. Eger V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X,\xi) = -\lambda\eta(X) \tag{32}$$

$$QX = \alpha\eta(X)\xi - (\alpha + \lambda)X \tag{33}$$

$$Q\xi = -\lambda\xi, \tag{34}$$

$$S(\xi,\xi) = -\lambda \tag{35}$$

$$r = \alpha - (2n+1)(\alpha + \lambda). \tag{36}$$

Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır (Öztürk & Bektaş, 2023).

Ana Bulgular

Bu bölümde, yarı Ricci simetrik, yarı simetrik, D-konformal ve η-paralel tensör alanları yardımıyla Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer $n \geq 1$ için, M Ricci yarı simetrik şartını

sağlıyorsa, M üzerinde (g,ξ,λ) Ricci solitonu daima genişleyendir. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. Öncelikle, özel bir tensörel çarpım olan, $R.S=0$ ile gösterilen Ricci yarı simetrik koşulu keyfi vektör alanları için,

$$R(X,\xi)S(Y,W)=S(R(X,\xi)Y,W)+S(Y,R(X,\xi)W) \tag{37}$$

ile tanımlıdır (Öztürk & ark., 2010). O halde, M üzerinde Ricci yarı simetrik şartının sağladığını kabul edelim. Ayrıca, hipotezden dolayı $\nabla_\xi\alpha=0$ olsun. Bu durumda, (37) eşitliği $W=\xi$ seçildiğinde,

$$-\alpha^2[-g(X,Y)S(\xi,\xi)+\eta(Y)S(X,\xi)-\eta(X)S(Y,\xi)+S(X,Y)]=0 \tag{38}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (38) eşitliği

$$-2n\alpha^2 g(X,Y)-S(X,Y)=0 \tag{39}$$

şekline dönüşür. Yani, bir Ricci yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldu Einstein yapıdadır (Öztürk & ark., 2010). Bu son eşitlikle birlikte (20), (32) ve (35) eşitlikleri yardımıyla $X=Y=\xi$ olmak üzere,

$$\lambda=2n\alpha^2 \tag{40}$$

elde edilir. Bu nedenle, $\alpha\neq 0$ olmak üzere, $\nabla_\xi\alpha=0$ olduğundan α değeri ξ boyunca sabittir. Başka bir ifadeyle, $\alpha^2>0$ olduğundan λ değeri daima pozitiftir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer $n\geq 1$ için, M yarı simetrik şartını sağlıyorsa, M üzerinde (g,ξ,λ) Ricci solitonu daima genişleyendir. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. Öncelikle, $R.R=0$ denklemiyle verilen yarı simetrik koşulu keyfi vektör alanları için,

$$0 = R(X,\xi)R(Y,Z)W - R(R(X,\xi)Y,Z)W \tag{41}$$
$$-R(Y,R(X,\xi)Z)W - R(Y,Z)R(X,\xi)W$$

ile tanımlıdır (Yano & Kon, 1984). O halde, M üzerinde yarı simetrik şartının sağladığını kabul edelim. Bu durumda, (41) eşitliğinin her iki tarafı için gerekli kontraksiyon yapılırsa, keyfi vektör alanları için,

$$S(X,Y) = -2n\alpha^2 g(X,Y) \tag{42}$$

yazılır. Burada $\nabla_\xi \alpha = 0$ dır. (42) eşitliğinin yardımıyla bir yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldunun Einstein yapıda olduğu görülür. Burada (20), (32) ve (35) ve (42) eşitlikleri $X = Y = \xi$ için birlikte hesaba katılırsa, $\lambda = 2n\alpha^2$ sonucuna ulaşılır. Gerçekten, Ricci yarı simetri yarı simetriyi kapsadığından ispat Teorem 1 den dolayı da açıktır.

Teorem 3. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M nin D-konformal eğrilik tensör alanı irrotasyonel ise, bu takdirde sabit skalar eğrilikli M üzerinde (g,ξ,λ) Ricci solitonu daima genişleyen durumundadır. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. Bir $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde ($n \geq 2$ için) D-konformal eğrilik tensör alanı $k = \frac{r+4n}{2n-1}$ olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B(X,Y)Z - R(X,Y)Z - \frac{1}{2n-2}[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X$$
$$+ g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX$$
$$-S(X,Z)\eta(Y)\xi + S(Y,Z)\eta(X)\xi - \eta(X)\eta(Z)QY + \eta(Y)\eta(Z)QX]$$

$$+\frac{k-2}{2n-2}[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X] \tag{43}$$

$$-\frac{k}{2n-2}[g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi+\eta(X)\eta(Z)Y$$
$$-\eta(Y)\eta(Z)X]=0$$

(Yano & Kon, 1984). Ayrıca, Öztürk & ark. (2010) da verilen Lemma 1 ve Lemma 2 yardımıyla, M nin D-konformal eğrilik tensörü B irrotasyonel ise, D-konformal eğrilik tensörü

$$B(X,Y)Z=\omega[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X] \tag{44}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\omega=-2\left(\frac{\alpha^2-1}{2n-2}\right)$ dır. O halde, $\nabla_\xi\alpha=0$ olmak üzere, (43) ve (44) eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$$R(X,Y)Z-\omega[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X]+\frac{1}{2n-2}[S(X,Z)Y$$
$$-S(Y,Z)X+g(X,Z)QY$$

$$-g(Y,Z)QX-S(X,Z)\eta(Y)\xi+S(Y,Z)\eta(X)\xi-\eta(X)\eta(Z)QY$$
$$+\eta(Y)\eta(Z)QX]$$

$$-\frac{k-2}{2n-2}[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X] \tag{45}$$

$$+\frac{k}{2n-2}[g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(Z)\xi+\eta(X)\eta(Z)Y$$
$$-\eta(Y)\eta(Z)X]=0$$

yazılır. Bu son eşitliğin her iki tarafı U vektör alanına göre iç çarpılarak, $1\leq i\leq 2n+1$ olmak üzere, $X=U=E_i$ için kontraksiyon yapılırsa,

$$r=-2(\alpha^2-1)(2n+1)+\left(\frac{r+4n}{2n-1}-2\right)(2n+1) \tag{46}$$

$$+\left(\frac{r+4n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n+1}{2n}\right)-\left(\frac{r+4n}{2n-1}\right)\left(\frac{-2n+1}{-2n}\right)+2\alpha^2$$

elde edilir. (36) ve (46) eşitlikleri kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\alpha - (2n+1)(\alpha+\lambda) = -4n^2\alpha^2 - (2n+1)^2 + 1 \tag{47}$$

bulunur. (47) eşitliğinde λ çekilirse,

$$\lambda = \frac{2n}{2n+1}[2n\alpha^2 - \alpha + 2(n+1)] \tag{48}$$

formunda yazılır. Yukarıdaki eşitlik yardımıyla α değeri ξ boyunca sabit olacağından λ her zaman $n \geq 2$ için pozitif kalacaktır. Böylece ispat sonlanır.

Teorem 4. $(M, \phi, \xi, \eta, g), (2n+1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer M de η-paralel Ricci tensör alanı mevcutsa, o zaman M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu daima genişleyendir. Burada α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır.

İspat. M nin η-paralel Ricci tensör alanına sahip α-Kenmotsu manifold olduğunu kabul edelim. O halde, M üzerinde keyfi vektör alanları için Ricci tensörü S aşağıdaki denklemi sağlar:

$$(\nabla_Z S)(\phi Y, \phi X) = 0 \tag{49}$$

(Jun & ark., 2005). Bundan başka,

$$(\nabla_Z S)(\phi Y, \phi X) = \nabla_Z S(\phi Y, \phi X) \tag{50}$$
$$-S(\nabla_Z \phi Y, \phi X) - S(\phi Y, \nabla_Z \phi X)$$

eşitliği geçerlidir. (13), (14) ve (22) eşitlikleri $\nabla_\xi \alpha = 0$ için, (50) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(\nabla_Z S)(\phi Y, \phi X) = \nabla_Z S(Y, X) + 2n\alpha^2[\eta(X)\nabla_Z \eta(Y) + \eta(Y)\nabla_Z \eta(X)]$$

$$+\alpha\eta(Y)[S(Z,X)+2n\alpha^2\eta(Z)\eta(X)] \tag{51}$$

$$+\alpha\eta(X)[S(Y,Z)+2n\alpha^2\eta(Z)\eta(Y)]-S(\nabla_Z Y,X)$$

bulunur. Bundan sonraki hesaplamalar Öztürk & ark., (2010) da Önerme 1 göz önüne alınarak $X=\xi$ için,

$$(\nabla_Z S)(Y,\xi) = -2n\alpha^3[g(Z,Y)+\eta(Y)\eta(Z)] \tag{52}$$

$$-\alpha[S(Y,Z)+\eta(Y)S(Z,\xi)]$$

yazılır. Ayrıca,

$$(\nabla_Z S)(Y,\xi)=\nabla_Z S(Y,\xi)-S(\nabla_Z Y,\xi)-S(Y,\nabla_Z\xi) \tag{53}$$

eşitliği mevcuttur. (52) eşitliği ile birlikte (22), (32) ve (53) eşitlikleri beraber hesaba katılırsa,

$$-4n\alpha^3+2\alpha\lambda=\alpha\lambda-2n\alpha^3 \tag{54}$$

elde edilir. (54) eşitliğinin düzenlenmesiyle, α değeri ξ boyunca sabit olduğundan $\lambda=2n\alpha^2$ eşitliği yardımıyla istenen ispata ulaşılır.

Örnek 1. 3-boyutlu bir M manifoldunu $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$ şeklinde alalım. Burada (x,y,z), $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart koordinatlardır. M üzerinde keyfi vektör alanlarını

$$E_1=\mu_2 e^{-2\alpha z}\frac{\partial}{\partial x}+\mu_1 e^{-2\alpha z}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$E_2=-\mu_1 e^{-2\alpha z}\frac{\partial}{\partial x}+\mu_2 e^{-2\alpha z}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$E_3=\frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde seçelim. Bundan sonraki hesaplamalarda kısalık için, m_1 ve m_2 fonksiyonlarını

$$m_1(z) = \mu_2 e^{-2\alpha z}, \qquad m_2(z) = \mu_1 e^{-2\alpha z}$$

olarak alalım. Burada μ_1, μ_2 sabitler ve α değeri ξ vektör boyunca paralel olduğundan sabit olarak alabiliriz. Yani, ${\mu_1}^2 + {\mu_2}^2 \neq 0$ ve $\alpha \neq 0$ olacaktır. M nin her bir noktasında $\{E_1, E_2, E_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu aşikardır. Ayrıca, M üzerinde g Riemann metrik tensör çarpımı

$$g = ({m_1}^2 + {m_2}^2)^{-1}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz.$$

ile tanımlansın. M üzerinde keyfi vektör alanı X olmak üzere, η 1-formu

$$g(X, E_3) = \eta(X)$$

ve (1,1)-tipli tensör alanı ϕ,

$$\phi(E_1) = E_2, \phi(E_2) = -E_1, \phi(E_3) = 0$$

şeklinde tanımlı olsun. Bundan başka,

$$[E_1, E_3] = \alpha E_1, [E_2, E_3] = \alpha E_2, [E_1, E_2] = 0$$

ve

$$\nabla_{E_1} E_1 = -\alpha E_3, \nabla_{E_2} E_1 = -E_3, \nabla_{E_3} E_1 = 0$$

$$\nabla_{E_1} E_2 = -E_3, \nabla_{E_2} E_2 = -\alpha E_3, \nabla_{E_3} E_2 = 0$$

$$\nabla_{E_1} E_3 = \alpha E_1, \nabla_{E_2} E_3 = \alpha E_2, \nabla_{E_3} E_3 = 0$$

elde edilir. O halde, yapıyı kontrol etmek için M nin temel 2-formu Φ nin sıfırdan farklı bileşenlerini incelemek yeterli olacaktır:

$$\Phi(\partial/\partial x, \partial/\partial y) = -({m_1}^2 + {m_2}^2)^{-1} = -({\mu_1}^2 + {\mu_2}^2)^{-1} e^{4\alpha z}.$$

$\eta = dz$ olduğundan yukarıdaki eşitlik M üzerinde $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ denklemini gerektirir. Böylece kurduğumuz (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen α-Kenmotsu yapısıdır. Burada ϕ tensör alanının Nijenhuis tensörü özdeş olarak sıfırdır. Başka bir ifadeyle, M bir α-Kenmotsu manifoldudur.

Bundan başka, Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri Riemann eğrilik tensörü tanımından

$$R(E_1, E_2)E_1 = \alpha(\alpha E_2 - E_1), R(E_1, E_3)E_2 = \alpha E_3, R(E_1, E_2)E_2 = \alpha(E_2 - \alpha E_1)$$

$$R(E_1, E_3)E_1 = \alpha^2 E_3, R(E_1, E_3)E_3 = -\alpha^2 E_1, R(E_2, E_3)E_1 = \alpha E_3$$

$$R(E_2, E_3)E_3 = -\alpha^2 E_2, R(E_2, E_3)E_2 = \alpha^2 E_3, R(E_3, E_2)E_1 = -\alpha E_3$$

biçiminde yazılabilir. Ricci tensörü tanımı gereğince, $1 \leq i, j \leq 3$ için,

$$S_{ij} = S(E_i, E_j)$$

olduğundan sadece $i = j$ durumunda $S_{ii} = -2\alpha^2$ dır. Aksi halde, $i \neq j$ durumunda ise $S_{ij} = 0$ dır. Yani,

$$S(E_1, E_1) = g(R(E_1, E_3)E_3, E_1) + g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) = -2\alpha^2$$

ve

$$S(E_3, E_3) = S(E_2, E_2) = -2\alpha^2$$

dır. Ayrıca, M nin skalar eğriliği de

$$r = S(E_1, E_1) + S(E_2, E_2) + (E_3, E_3) = -6\alpha^2$$

olur. Şimdi, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonunu göz önüne alalım. $X = Y = E_j$ ve $1 \leq j \leq 3$ için,

$$(L_\xi g)(E_1, E_1) = g(\nabla_{E_1}\xi, E_1) + g(\nabla_{E_1}\xi, E_1)$$

$$(L_\xi g)(E_1, E_1) = 2\alpha[g(E_1, E_1) - \eta(E_1)\eta(E_1)] = 2$$

$$(L_\xi g)(E_2, E_2) = 2\alpha[g(E_2, E_2) - \eta(E_2)\eta(E_2)] = 2\alpha$$

$$(L_\xi g)(E_3, E_3) = 2\alpha[g(E_3, E_3) - \eta(E_3)\eta(E_3)] = 0$$

dır. Bu nedenle, (33) eşitliği yardımıyla $j = 1$ için,

$$(L_\xi g)(E_1, E_1) + 2S(E_1, E_1) + 2\lambda g(E_1, E_1) = 0$$

denklemine ulaşılır. Buradan yukarıdaki denklem düzenlenirse, $\lambda = \alpha(2\alpha - 1)$ elde edilir. Benzer olarak, $j = 2$ için,

$$(L_\xi g)(E_2, E_2) + 2S(E_2, E_2) + 2\lambda g(E_2, E_2) = 0$$

eşitliği kullanılarak yukarıda bulunan λ değerine ulaşılır. Son olarak, $j = 3$ için,

$$(L_\xi g)(E_3, E_3) + 2S(E_3, E_3) + 2\lambda g(E_3, E_3) = 0$$

denklemi sayesinde $\lambda = 2\alpha^2$ bulunur. Burada α değeri ξ vektör boyunca paralel olduğundan sabit alınabilir. Yani, $\alpha^2 \neq 0$ ve $\alpha^2 > 0$ olduğundan α değerinin pozitif veya negatif durumlarında λ daima pozitif olacaktır. Böylece (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu genişleyendir.

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, bazı tensör şartlarını sağlayan Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Burada yapılan hesaplamalarda α, $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan dif.bilir bir fonksiyon ve ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olarak alınmıştır. Gelecek çalışmalarımızda amacımız; farklı Ricci solitonlar üzerinde yarı simetrik uzaylar, lokal simetri, (κ, μ, ν)-uzayları ve D-homotetik deformasyon şartları

altında hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerinde daha genel sonuçlar elde etmek olacaktır.

KAYNAKÇA

Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Lecture Notes in Math., Vol. 509, New York: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

De, U. C. & Pathak, G. (2004). On 3-dimensional Kenmotsu manifolds. *Ind. J. Pure Applied Math., 35,* 159-165.

Dileo, G. & Pastore, M. (2007). Almost Kenmotsu Manifolds and Local Symmetry, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 14,* 343-354.

Goldberg, S. I. & Yano, K. (1969). Integrability of Almost Cosymplectic Structure, *Pacific J. Math., 31,* 373-382.

Gray, J. W. (1959), Some global properties of contact structures, *Ann. of Math., 69,* 421-450.

Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry, 17(2)*, 255-306. Doi: 10.4310/jdg/1214436922

Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and General Relativity (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math*, *71*, 301-307.

Janssens, D. & Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal, 4,* 1-27.

Jun, J. B. & De, U. C. & Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *J. Korean Math. Soc., 42,* 435-445. Doi: https://doi.org/10.4134/JKMS.2005.42.3.435

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Math. J., 24,* 93-103. Doi: 10.2748/tmj/1178241594

Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21,* 841-846. Doi: https://doi.org/10.1007/s10114-004-0520-2

Nomizu, K. (1968). On Hypersurfaces Satisfying a Certain Condition on the Curvature Tensor, *Tôhoku Mathematical Journal, 20,* 46-69.

Ogawa, Y. (1977), A Condition for a Compact Kaehlerian Space to be Locally Symmetric, *Natural Science Report. Ochanomizu University, 28,* 21-23.

Olszak, Z. (1981). On Almost Cosymplectic Manifolds, *Kodai Mathematical Journal*, 4, 239-250.

Olszak, Z. (1989). Locally Conformal Almost Cosymplectic Manifolds, *College Math. J., 57,* 73-87.

O'Neil, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. New York: Academic Press Inc., USA.

Özgür, C. (2007). On Generalized Recurent Kenmotsu Manifolds, *World Appl. Sci. J., 2,* 9-33.

Öztürk, H., Aktan, N. & Murathan, C. (2010). On α-Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Conditions, *Applied Sciences, 12,* 115-126.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2020). On Alpha Kenmotsu Pseudo Metric Manifolds, *AKU Journal of Science and Eng., 20,* 975-982.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α-cosymplectic manifolds, *Journal of Mathematics, 2021,* Article ID 9277175, 9 pages. Doi: https://doi.org/10.1155/2021/9277175

Öztürk H., Mısırlı İ. & Öztürk, S. (2017). Almost α-Cosymplectic Manifolds with η-Parallel Tensor Fields, *Academic Journal of Science, 7(3),* 605-612.

Öztürk, S. (2022). A Study on α-Kenmotsu Manifolds, Science and Mathematics Sciences, *Theory, Current Researches and New Trends 5, Chapter V*, 45-58, Ivpe, Montenegro.

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2022). D-Konformal Eğrilik Tensör Alanına Sahip α-Kenmotsu Pseudo Metrik Manifoldlar, *Doğa ve Mühendislik Bilimlerinde Güncel Tartışmalar 7*, 274-284, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-7799-74-4, Ankara.

Öztürk, H. & Öztürk, S. (2022). Certain Curvature Tensor Fields on α-Kenmotsu Pseudo Metric Manifolds, *Current Debates on Natural and Engineering Sciences 5*, 384-395, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-7799-69-0, Ankara.

Öztürk, S. & Öztürk, H. (2023). Three-Dimensional Semi-Symmetric Almost α-Cosymplectic Manifolds, *Symmetry, 15, 2022.* Doi: https://doi.org/10.3390/sym15112022

Öztürk, H. & Yadav, S. K. (2023). A Note on Ricci and Yamabe Solitons on Almost Kenmotsu Manifolds, *Novi Sad J. of Maths., 53(2),* 223-239. Doi: https://doi.org/10.30755/NSJOM.13375

Öztürk, H. & Bektaş, E. (2023). *α-Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar,* Modern Matematikte Yeni Yaklaşımlar, Chapter III, 22-43, BİDGE Yayınları, ISBN: 978-625-372-065-0, Ankara.

Perelman, G. (2002). The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications, *arXiv preprint math/0211159.*

Sasaki, S. & Hatakeyama, Y. (1962). On differentiable manifolds with contact metric structures. *Journal of the Mathematical Society of Japan, 14,* 249-271.

Szabó, Z. I. (1982). Structure Theorem on Riemannian Spaces Satisfying $R.R = 0$, *Journal of Differential Geometry, 17,* 531-582.

Tanno, S. (1969). The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tôhoku Mathematical Journal, 21,* 21-38.

Tripathi, M. M. (2008). Ricci solitons in contact metric manifolds, *arXiv:0801.4222v1 [math.DG]*.

Yadav, S. K. & Öztürk, H. (2019). On (ε)-Almost Paracontact Metric Manifolds with Conformal η-Ricci Solitons, *Diff. Geo. Dynamical Systems, 21,* 202-215.

Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Series in Pure Math., Vol. 3, Singapore: World Scientific Publishing Co.

5
+
3
6
+
4
10
−
5
12
−
6
×
2
3