

# Cebirsel Topolojide Yeni Yaklaşımlar

**Editör**  
**KORAY YILMAZ**

## **BİDGE Yayınları**

Cebirsel Topolojide Yeni Yaklaşımlar

**Editör:** Doc. Dr. Koray Yılmaz

ISBN: 978-625-372-303-3

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: 09.08.2024

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

[www.bidgeyayinlari.com.tr](http://www.bidgeyayinlari.com.tr) - [bidgeyayinlari@gmail.com](mailto:bidgeyayinlari@gmail.com)

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /  
Ankara



## İçindekiler

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| Örgülü Kuadratik Modüller .....           | 4  |
| Koray YILMAZ .....                        | 4  |
| Graf Teoride Bir Near Soft Yaklaşım ..... | 15 |
| Elis SOYLU YILMAZ .....                   | 15 |
| Çoklu Kümelere Yeni Bir Yaklaşım .....    | 33 |
| Hatice TAŞBOZAN .....                     | 33 |

# BÖLÜM I

## Örgülü Kuadratik Modüller

Koray YILMAZ<sup>1</sup>

### Giriş

Whitehead, bir uzayın birinci ve ikinci temel grupları arasındaki bağlantıyı tanımlamak için çapraz modüller oluşturmuştur (Whitehead, 1949). Buna ek olarak Whitehead, serbest çaprazlanmış komplekslerin ayrıntılarının belirlenmesinde birinci temel grubun etkisini hesaba katmak için homotopi sistemlerini tanıtmıştır.

Baues (Baues, 1991), bir kuadratik modülün bağlantılı 3-tipli bir modelini ifade etmiştir. Simplisel gruplar, Cat-1 grupları ve çaprazlanmış karelerin kuadratik modüllerle güçlü bir ilişkisi oluşmuştur. Çeşitli kategorik bağlantılar (Soylu Yılmaz&ark., 2022; Yılmaz&ark., 2019; Arvasi& ark.,2006; Ulualan,2007) kaynaklarında yer almaktadır.

---

<sup>1</sup> Doç. Dr., Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya/Türkiye, Orcid: 0000-0002-8641-0603, koray.yilmaz@dpu.edu.tr

Değişmeli cebirler için çaprazlanmış kareler (Guin-Walery, 1981) çalışmasında ve ayrıca (Ellis, 2003) ve (Ellis,1993) yayınlarında tanımlanır. Conduch'e (Conduche, 2003), çaprazlanmış bir karenin eşleme konisinden 2-çaprazlanmış bir modül elde eder. Baues, kuadratik modülleri tanıtmak için, esas olarak nilpotentlik şartlarına sahip 2-çaprazlanmış modüller olan (Grandjean& ark., 1986) simplisel grup kullanmıştır. Böylece limit, kolimit, fibrasyon, geri çekme, çarpım ve ortak çarpım gibi kategorik özellikler çoğu kategoride basit karakterizasyonlarla araştırılır (Soylu Yılmaz, 2022; Soylu Yılmaz&ark., 2020).

Monoidal bir kategori için örgü kavramı, örgülü monoidal kategorilerin özel işlemleriyle çaprazlanmış yarı modüllere eşit olduğunu da gösteren Joyal ve Street (Joyal&ark., 1986; Joyal&ark., 1991) tarafından geliştirilmiştir. (Brown&ark., 1989) yayınında Brown ve Gilbert, Conduch'e'nin 2-çaprazlanmış modülüne benzer, uzunluğu 2 Moore kompleksi ve homotopi 3-tipi olan basit gruplar için cebirsel bir model olarak örgülü, regüler çaprazlanmış modül fikrini sunmuşlardır (Ululalan, 2007).

## Temel Kavramlar

**Tanım 1:**  $\partial: C_1 \rightarrow C_0$  bir nil(2)-modül olmak üzere eğer  $\{-, -\}: C_0 \times C_0 \rightarrow C_1$  örgü dönüşümü her  $c_0, c'_0, c''_0 \in C_0$  ve  $c_1 \in C_1$  için

$$\text{BN1. } \{c_0, c'_0 c_0'''\} = \{c_0, c'_0\}^{c_0'} \{c_0, c_0''\}$$

$$\text{BN2. } \{c_0 c'_0, c_0'''\} = \{c'_0, c''_0\} \{c_0, c_0''\}^{c_0'}$$

$$\text{BN3. } \partial\{c_0, c'_0\} = c_0'^{-1} c_0^{-1} c_0' c_0$$

$$\text{BN4. } \{c_0, \partial c_1\} = c_1^{-1} c_1^{c_0}$$

$$\text{BN5. } \{\partial c_1, c_0\} = c_1^{-1} c_1^{c_0}$$

şartlarını sağlıyorsa  $\partial: C_1 \rightarrow C_0$  dönüşümüne örgülü nil(2)-modül denir.

$\partial: C_1 \rightarrow C_0$  ve  $\partial': C'_1 \rightarrow C'_0$  iki örgülü nil(2)-modül olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 \\ \textcolor{red}{f_1} \downarrow & & \downarrow \textcolor{red}{f_0} \\ C'_1 & \xrightarrow{\delta'_1} & C'_0 \end{array}$$

$f = (f_1, f_0)$  dönüşümü bir nil(2)-modül morfizmi ve

$$\begin{array}{ccc}
C_0 \times C_0 & \xrightarrow{\{-, -\}} & C_1 \\
\downarrow f_0 \times f_0 & & \downarrow f_1 \\
C'_0 \times C'_0 & \xrightarrow{\{-, -\}'} & C'_1
\end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa  $f = (f_1, f_0)$  dönüşümüne bir örgülü nil(2)-modül morfizmi denir.

Örgülü nil(2)-modüllerin kategorisini ***BNil(2)*** ile göstereceğiz.

**Tanım 2:**  $\partial: C_1 \rightarrow C_0$  bir örgülü nil(2)-modül olmak üzere eğer

$\{-, -\}: C_0 \times C_0 \rightarrow C_1$  örgü dönüşümü

$$\{c_0, c'_0\}\{c'_0, c_0\} = 1$$

koşulunu sağlıyorsa  $\partial: C_1 \rightarrow C_0$  dönüşümüne bir simetrik nil(2)-modül denir.

Simetrik nil(2)-modüllerin morfizmi örgülü nil(2)-modüllerin morfizmlerine benzer olarak tanımlanır. Simetrik nil(2)-modüllerin kategorisini ***SNil(2)*** ile göstereceğiz.

**Tanım 3:**

$$\delta := \begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & \omega \swarrow & \downarrow w & & \\ C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 \end{array}$$

aşağıdaki ek özelliklerle birlikte bir kuadratik modül olsun.

$\{-, -\} : C_0 \times C_0 \rightarrow C_1$  örgü dönüşümü olmak üzere

BQ1.  $C_0$  grubunun  $C_2$  üzerine etkisi birim etkidir.

BQ2.  $\omega : C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$  kuadratik dönüşümü simetriktir. Yani her  $c_1, c'_1 \in C_1$  için

$$\omega([c_1, c'_1]) \omega([c'_1, c_1]) = 1$$

eşitliği sağlanır.

BQ3. Her  $c_0, c'_0 \in C_0$  için

$$\delta_1\{c_0, c'_0\} = c_0^{-1} c'_0{}^{-1} c_0 c'_0$$

BQ4. Her  $c_0 \in C_0$  ve  $c_1 \in C_1$  için

$$\{\delta_1 c_1, c_0\} = c_1^{-1} c_1^{c_0}$$

BQ5. Her  $c_0 \in C_0$  ve  $c_1 \in C_1$  için

$$\{c_0, \delta_1 c_1\} = (c_1^{-1})^{c_0} c_1$$

şartları sağlanıyorsa  $\delta$  yapısına örgülü kuadratik modül denir.

$\delta$  ve  $\delta'$  iki örgülü kuadratik modül olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc}
C \otimes C & \xrightarrow{\omega} & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 \\
\downarrow f_1^* \times f_1^* & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
C' \otimes C' & \xrightarrow{\omega'} & C'_2 & \xrightarrow{\delta'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\delta'_1} & C'_0
\end{array}$$

diyagramı ile verilen  $f = (f_2, f_1, f_0)$  dönüşümü bir kuadratik modül morfizmi ve

$$\begin{array}{ccc}
C_0 \times C_0 & \xrightarrow{\{-, -\}} & C_1 \\
\downarrow f_0 \times f_0 & & \downarrow f_1 \\
C'_0 \times C'_0 & \xrightarrow{\{-, -\}'} & C'_1
\end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa  $f = (f_2, f_1, f_0)$  dönüşümüne bir örgülü kuadratik modül morfizmi denir.

Örgülü kuadratik modüllerin kategorisini ***BQuad*** ile göstereceğiz.

**Önerme 4:** ***SNil(2)*** kategorisi ***BQuad*** kategorisinin bir alt kategorisidir.

İspat:  $\delta_1: C_1 \rightarrow C_0$  bir simetrik nil(2)-modül olsun.  $B_0 = C_0$ ,

$B_1 = C_1$  ve  $B_2 = \{1_{c_1}\}$  alınırsa

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B \otimes B & & \\
 & \swarrow q & \downarrow w & & \\
 B_2 & \xrightarrow{\sigma} & B_1 & \xrightarrow{\delta_1} & B_0
 \end{array}$$

diagramının bir örgülü kuadratik modül olduğunu göstereceğiz.

BQ1.  $B_0$  grubunun  $B_2$  üzerine etkisi birim etki eder.

BQ2. Her  $b_1, b'_1 \in B_1$  için

$$\omega([b_1, b'_1]) \omega([b'_1, b_1]) = 1_{c_1} 1_{c_1} = 1_{c_1}$$

elde edilir.

BQ3- BQ5 şartları için  $\{-, -\}_B : B_0 \times B_0 \rightarrow B_1$  dönüşümü simetrik nil(2)-modülün  $\{-, -\} : C_0 \times C_0 \rightarrow C_1$  örgü dönüşümü olarak alınırsa elde edilir.

**Teorem 5:** Örgülü kuadratik modüller kategorisinden simetrik nil(2)-modüller kategorisine

$$F: BQuad \rightarrow SNil(2)$$

funktoru vardır.

**İspat.**  $C_1$  ve  $C_0$  herhangi iki grup olmak üzere  $C_2$  sadece birim elemandan oluşan grup olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
& & C \otimes C & & \\
& \omega \curvearrowright & \downarrow w & & \\
\{1\} & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0
\end{array}$$

diyagramı ile verilen örgülü kuadratik modüle indirgenmiş örgülü kuadratik modül denir. Verilen bir indirgenmiş kuadratik modül için

$$\{-, -\}: C_0 \times C_0 \rightarrow C_1$$

örgü dönüşümü ile birlikte

$$\delta_1: C_1 \rightarrow C_0$$

dönüşümü bir simetrik nil(2)-modül olur.

## Sonuç

Kuadratik modüller homotopi 3-tip yapılar için en ideal cebirsel yapı olduğundan örgü dönüşümünün kuadratik modüller üzerinden tanımlanması diğer homotopi 3-tip yapılar içinde uygulanabilir olduğunu gösterir. İnternal kategoriler ile ilgili (Janelidze, 2003), (Porter, 1987), (Soylu Yılmaz, 2023) çalışmaları mevcuttur. İnternal çaprazlanmış modüllerde örgü dönüşümü tanımlama ve örgülü kuadratik modüller ile denkliği gösterilerek bu çalışmalar örgülü kuadratik modüller için uyarlanabilir.

Bu çalışma 122F127 numaralı Tübitak projesi tarafından desteklenmiştir.

## Kaynaklar

Arvasi Z, Ulualan E. (2006) On algebraic models for homotopy 3-types. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 12 1 (1), 1-27.

Baues HJ. Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1991.

Brown, R., Gilbert, N.D. (1989) Algebraic Models of 3-Types and Automorphism Structures for Crossed Modules. *Proc. London Math.Soc.* (3), 59, 51-73.

Conduché D. (2003) Simplicial crossed modules and mapping cones. *Georgian Mathematical Journal*, 10 (4), 623–636.

Ellis GJ. (2003) Higher dimensional crossed module of algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 52 (3), 277-282.

Ellis GJ. (1993) Crossed squares and combinatorial homotopy. *Mathematische Zeitschrift*. 214 (1), 93-110.

Grandjean A.R., Vale MJ. (1986) 2-Modulos cruzados an la cohomologia de Andr e- Quillen. *Memorias de la Real Academia 2 de Ciencias*, 22, 1-28.

Guin-Walery D, Loday J-L. (1981) Obstruction a l'excision en K-theorie algebrique, in: Algebraic K-Theory. In: *Friedlander EM, Stein MR (editor) Algebraic K-Theory Evanston 1980. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer*, 179-216.

Janelidze, G. (2003). Internal crossed modules. De Gruyter

Joyal, A., Street, R. (1986) Braided Monoidal Categories. Macquarie Mathematics Report 860081, Macquarie University.

Joyal, A., Street, R. (1991) Braided Tensor Categories. *Advances in Math*, (1), 82, 20-78.

Porter, T. (2006). Internal categories and crossed modules. In *Category Theory: Applications to Algebra, Logic and Topology Proceedings of the International Conference Held at Gummersbach, July 6–10, 1981* (pp. 249-255). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Soylu Yılmaz, E., Yılmaz, K. (2020) On relations among quadratic modules. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(18), 12231-12244.

Soylu Yılmaz, E., Yılmaz, K. (2022) On crossed squares of commutative algebras. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes* 8 (2), 32-41.

Soylu Yılmaz, E. (2022) (Co)limit calculations in the category of 2-crossed R-modules. *Turk. J. Math*, 46 (7), 2902-2915.

Soylu Yılmaz, E. (2023). The universal property of commutative algebras' internal crossed modules. *Journal of New Results in Science*, 12(2), 77-85.

Ulualan, E. (2007) Braiding for categorical and crossed Lie algebras and simplicial Lie algebras. *Turkish Journal of Mathematics*, 31(3), 239-255.

Whitehead, J. H. (1949). Combinatorial homotopy II. *Bull. Amer. Math. Soc*, 55(3), 213-245.

Yılmaz, K., Soylu Yılmaz, E. (2019) Baues cofibration for quadratic modules of Lie algebras. *Communications Faculty of*

*Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics,*  
68(2), 1653-1663.

## BÖLÜM II

### Graf Teoride Bir Near Soft Yaklaşım

**Elis SOYLU YILMAZ<sup>1</sup>**

#### Giriş

Graf teori, günlük hayatta karşılaştığımız problemleri bir ağ yapısına benzetme mantığına dayanarak çözmekte ve günümüzde navigasyonun geliştirilmesini sağlayan teknoloji gibi çizim yoluyla görsele dönüştürülen mühendislikte de kullanılan önemli bir matematiksel yapıdır (Euler, 1736). Bunun yanında bir kümede bulunan elemanların birbiri ile olan ilişkilerini elde etmeye de yaramaktadır. Graf teorisinin, Erdos tarafından olasılık teorisinde yer alan çalışmalar (Erdos, 1959), Leeuwen tarafından graf algoritmalar (Leeuwen, 1990) ve Schaeffer tarafından graf kümeler (Schaeffer, 2007) tanımlandı. Daha sonra Rosenfeld tarafından bulanık graf kavramı tanımlandı (Rosenfeld, 1975). Bhattacharya ile Mordeson yaptıkları çalışmalarında bulanık grafların diğer yeni özelliklerini

---

<sup>1</sup> Doç. Dr., Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Eskişehir/Türkiye, Orcid: 0000-0002-0869-310X, esoylu@ogu.edu.tr

tanımladılar (Bhattacharya, 1987; Mordeson & Chang-Shyh, 1994). Bulanık küme teorisi ile esnek graf teorisinin birleştirilmesiyle meydana gelen yeni kavram, Mohinta ve Samanta tarafından tanımlandı (Samanta & ark., 2016). Bu teorisinin tanımlanmasından sonra ise bu kavramın yeni özelliklerini verildi (Akram & Nawaz, 2015; Al-Masarwah & Abu Qamar, 2018). Çelik tarafından, bipolar kavramı ile graf kavramı birleştirilerek bipolar bulanık esnek graf kavramı verildi (Çelik, 2018).

Graflar yönlendirilmiş yapısıyla birlikte bir kategori özelliği taşımaktadır. Herhangi yapıdaki nesneleri, nesneler arasındaki dönüşümleri ve aksiyomları yardımıyla kategorik yapılar elde edilir. Kategori tanımı ilk olarak 1949 yılında tanımlanmıştır (Whitehead, 1949). Daha sonra yapılan çalışmalarda çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış kareler, 2-çaprazlanmış modüller, 4-boyutlu 2-çaprazlanmış modüller, kuadratik modüller gibi yapıların kategoriksel özellikleri incelenmiştir (Soylu Yılmaz & ark., 2020; Soylu Yılmaz & ark., 2019; Yılmaz, 2018; Loday, 1982). Bu yapılardan bazılarının sembolik hesaplama yardımıyla bilgisayar ortamına aktarımı sağlanmıştır (Yılmaz, 2023; Odabaş & ark, 2019).

Zadeh tarafından tanımlanan ve belirsizlik problemlerini çözmek için kullanılan fuzzy küme teorisi verildi (Zadeh, 1979). Sonrasında ise klasik küme teorisindeki yöntemlerle çözülemeyen farklı problemlerin çözülmesi için gerekli olan bir başka küme teorisi olan soft(esnek) küme teorisi Molodtsov tarafından verildi (Molodtsov, 1999). Bu kavram birçok alanda uygulamaya konularak gelişti (Aktas & Cagman, 2007; Ali & ark., 2009; Çağman, Karataş & Enginoglu, 2011). İlerleyen yıllarda bu teoride topolojik yapılar ve ayırma aksiyomları gibi kavramlar verildi. 2013 yılında

Wardowski bu yeni kavramı cebirsel açıdan inceledi (Wardowski, 2013).

Yakın(near) küme kavramı, nesnelerin, birbirlerine yakınlığını incelemektedir. Burada yakınlık diye özellikleri bakımından birbirine yakın olma durumu yani aynı ayırt edilebilir niteliklere sahip nesneleri bulmak için ortaya konan bir kavram vardır. Bu yakınlık durumu özellikleri seçmemize göre değerlendirilerek farklı bilgilere sahip olmamıza ve elimizdeki nesnelerin özelliklerine göre ayırt edilerek kolay sınıflandırılmasına olanak sağlamaktadır (Peters, 2007). 2017 yılında near ve soft küme kavramlarının birlikte kullanılması ile oluşan near soft küme kavramı ve özellikleri verildi (Tasbozan & ark., 2017). Near soft küme üzerinde süreklilik kavramı (Tasbozan & Bagirmaz, 2021) ve ayırma aksiyomları (Tasbozan & Bagirmaz, 2021; Yılmaz, Taşbozan & Güzelkocar, 2022) tanımlandı. Ayrıca bu küme üzerinde bipolar (Taşbozan, 2024a) ve neutrosophik (Taşbozan, 2024b) kümeler üzerindeki tanımları verildi.

Bu çalışmada, yakın yaklaşım uzaylar ve esnek graflar kavramları birlikte ele alınmıştır. Böylece yeni bir kavram olan yakın esnek graflar yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanmıştır. Esnek graflarda köşe ve kenar elemanlar için farklı bağıntılarla verilen alt ve üst yaklaşımlar elde edilmiştir. Böylece near esnek graf kavramı elde edilmiştir. Böylece bu esnek grafların yakın yaklaşımıyla elde edilen kümelerin bazı özelliklerinden bahsedilmiştir.

## Temel Kavramlar

**Tanım 1:**  $U$  kümesinin kümesi kuvvet kümesi  $P(U)$  ve  $E$  kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi  $A$  kümesi olmak üzere  $F: A \rightarrow P(U)$  bir dönüşüm olsun.  $U$  kümesi üzerindeki  $G = (F, A)$  yapısına bir esnek(soft) kümedir (Molodtsov, 1999).

**Tanım 2:**  $NAS = (O, F, B, \sim B_r, N_r, v_{N_r})$  uzay,  $O$  esnek küme ve  $\sigma = (F, B)$  olsun.  $NAS$  uzayında  $\sigma = (F, B)$  kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$N_r * (\sigma) = (F_*, B)$$

$$N_r^* (\sigma) = (F^*, B)$$

soft kümeleridir. Her  $\phi \in B$  için

$$F_*(\phi) = N_r * (F(\phi)) = \{x \in O: [x]_{B_r} \subseteq F(\phi)\},$$

$$F^*(\phi) = N_r^* (F(\phi)) = \{x \in O: [x]_{B_r} \cap F(\phi) \neq \emptyset\}$$

olduğundan,  $N_r *$  ve  $N_r^*$  yakın yaklaşımları esnek kümeler üzerinde alt ve üst yakın yaklaşımlar olurlar. Burada

$$Bnd_{N_r} (B) = (N_r^* (\sigma) - N_r * (\sigma)) \geq 0$$

İlave koşulu sağlanıyorsa, esnek kümeye yakın esnek küme denir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 3:**  $(F, B)^c$ ,  $(F, B)$  yakın esnek kümesinin tümleyeni olup,

$$F^c (\phi) = O - F(\phi), \forall \phi \in B$$

şeklinde (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 4:**  $(O, \tau)$  topolojik uzayı  $(O, B)$  topolojik uzayı üzerinde yakın esnek topolojik uzayı olsun.  $(O, B)$  kümesinin yakın esnek alt kümesinin tümleyeni  $\tau$  topolojisinde yakın esnek açık

küme ise yakın esnek kümeye yakın esnek kapalı küme denir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 5:**  $(O, \tau, B)$  topolojik uzayı  $O$  uzayında bir yakın esnek topolojik uzay,  $(F, B)$  kümesi  $O$  uzayında yakın esnek küme olsun.  $(F, B)$  kümesinin yakın esnek kapanışı  $\overline{(F, B)}$  kümesi  $O$  uzayında  $(F, B)$  kümesini kapsayan en dar yakın esnek kapalı kümedir (Taşbozan, 2020).

**Tanım 6:**  $(F, B)$ ,  $O$ 'da yakın esnek küme olsun. Eğer bir  $B$  kümesinden alınan  $e$  elemanı için  $F(e) = \{x\}$  ve  $\forall e^c \in B - \{e\}$  için  $F(e^c) = \emptyset$  ise  $(F, B)$  yakın esnek kümesine yakın esnek noktadır denir. Bir yakın esnek noktası  $(x_e, B)$  ile ifade edilir (Taşbozan, 2020).

**Tanım 7:**  $\sigma = (F, B)$  kümesi  $(O, B)$  kümesi üzerinde yakın esnek küme ve  $\sigma$  kümesinin yakın esnek alt kümelerinin ailesi  $\tau$  olsun.  $B$  özelliklerin kümesi olmak üzere  $\sigma$  üzerindeki yakın esnek topoloji  $(O, \tau)$  aşağıdaki şartları sağlar.

i)  $(\emptyset, B), (O, B) \in \tau$  ve  $\forall \phi \in B$  için  $\emptyset(\phi) = \emptyset$  ve  $F(\phi) = F$ .

ii)  $\tau$  ailesindeki yakın esnek kümelerin kesişimi  $\tau$  ailesinde olur.

iii)  $\tau$  ailesindeki yakın esnek kümelerin birleşimi  $\tau$  ailesinde olur.

Buradan,  $(O, \tau, B)$  yapısına yakın esnek topolojik uzayı denir.  $(O, \tau, B)$  uzayının elemanları yakın esnek açık kümelerden oluşur (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 8:** Bir  $G$  grafi,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  köşe elemanlarının kümesi ve  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  kenar elemanlarının kümesini göstermek üzere  $G = (V, E)$  ile gösterilir. Eğer  $e = uv$ ,  $G$  grafında bir kenar ve  $u$  ile  $v$  köşe noktalarının bağlantılı olup,  $u \in E(G)$  ve  $v \in E(G)$  yazılır. Burada  $G = (V(G), E(G))$  grafi bir sıralı ikili olup  $V(G)$  köşelerin kümesi,  $E(G)$  ise de  $G$  'nin kenarlarının kümesidir.  $G$  'nin,  $u$  ve  $v$  köşeleri arasındaki mesafe  $d(u, v)$  uzunluğudur.  $G$  grafının çapı ise

$$\text{çap}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$$

şeklinde (Akram & Nawaz, 2015).

**Tanım 9:** Bir grafta bulunan kenarlara çoklu kenar denilebilmesi için birden çok kenarın iki köşeyi birleştirmesi gerekmektedir. Eğer bir graf çoklu kenar içeriyorsa, o grafa çoklu graf adı verilir. Basit graf ise çoklu kenar içermeyen bir graftır. Bütün kenarları, köşe noktaları  $G$  grafi tarafından kapsanan bir grafa,  $G$  grafının alt grafi adı verilir (Akram & Nawaz, 2015).

**Tanım 10:**  $H$  grafi eğer  $V(H) \subseteq V(G)$  ve  $E(H) \subseteq E(G)$  şartlarını sağlıyorsa,  $H$  grafına  $G$  grafının bir alt grafıdır denir (Akram & Nawaz, 2015).

**Tanım 11:**  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  iki basit graf olmak üzere,  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kartezyen çarpımı ve bileşkesi sırasıyla

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 &= (V, E) \\ &= (V_1 \times V_2, E = \{uv_1, uv_2 : u \in V_1, v_1, v_2 \in E_2\} \cup \{u_1 v, u_2 v : v \in V_2, u_1, u_2 \in E_1\}) \end{aligned}$$

ve

$$G_1 o G_2 = (V, E)$$

$$= (V_1 \times V_2, E = \{uv_1, uv_2: u \in V_1, v_1, v_2 \in E_2\} \cup \{u_1 v, u_2 v: v \in V_2, u_1, u_2 \in E_1\} \cup \{uv_1, uv_2: v_1, v_2 \in E_1, v_1 \neq v_2\})$$

şeklinde tanımlıdır (Akram & Nawaz, 2015).

**Tanım 12:** Bir  $G^* = (G, \rho, \kappa, B)$  dörtlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $G^*$ 'a esnek graf denir.

i)  $G = (V, E)$  grafi basit graftır.

ii) Boştan farklı  $B$  kümesi parametre kümesidir.

iii)  $(\rho, B)$  kümesi  $V$  kümesi üzerinde esnek küme olur.

iv)  $(\kappa, B)$  kümesi  $E$  kümesi üzerinde esnek küme olur.

v)  $\forall e \in B$  olmak üzere  $\varphi(e) = (\rho(e), \kappa(e))$ ,  $G = (V, E)$  basit grafının bir alt grafidir.

$(\rho(e), \kappa(e))$  alt grafi  $\varphi(e)$  ile gösterilecektir. Bir esnek graf

$$G^* = (G, \rho, \kappa, B) = \langle \rho, \kappa, B \rangle = \{\varphi(e): e \in B\}$$

şeklinde dir.  $G$  nin tüm esnek graflarının kümesi  $SG(G)$  ile gösterilir.

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  köşe elemanlarının kümesi ve  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  kenar elemanlarının kümesi olmak üzere  $G = (V, E)$  bir tam graf ve  $B \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere  $B \times V$ 'nin  $R$  alt kümesi  $B$  'den  $V$  'ye keyfi bir bağıntı olsun.  $\rho: B \rightarrow P(V), \rho(x) = \{y \in V: xRy\}$  dönüşümü ve  $\kappa: B \rightarrow P(E), \kappa(x) = \{uv \in E: \{u, v\} \subseteq \rho(x)\}$  dönüşümü yazılır. Burada  $(\rho, B)$ ,  $V$  üzerinde esnek küme ve  $(\kappa, B)$ ,  $E$  üzerinde esnek kümedir (Noor, Irshad & Javaid, 2017).

**Tanım 13:**  $G^*$  esnek grafi, Her  $e \in B$  ve  $X \subseteq V$  için

i)  $\varphi(e) = ((\rho(e), \kappa(e))) = \rho(e)$  ise tepe noktası içeren bir graftır

ii)  $\varphi(e) = (\rho(e), \kappa(e)) = \kappa(e)$  ise kenar içeren bir graftır denir (Akram & Nawaz, 2015).

**Tanım 14:**  $G^*$ 'ın iki esnek grafi  $G_1^* = \langle \rho_1, \kappa_1, A \rangle, G_2^* = \langle \rho_2, \kappa_2, B \rangle$  olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan  $G_2^*$  ye  $G_1^*$  in esnek alt grafi denir.

i)  $B \subseteq A$ ,

ii)  $\forall x \in B$  olmak üzere  $\varphi_2(x), \varphi_1(x)$ 'in alt grafidir (Akram & Nawaz, 2015).

### Near Yaklaşım Uzaylarında Esnek Graflar

**Tanım 15:**  $NAS = (O, F, B, \sim B_r, N_r, v_{N_r})$  uzayı ve boştan farklı  $B \subseteq F$  parametrelerin kümesi ve kümesi  $\emptyset \neq X \subseteq U$  olsun. Bir  $G$  grafi  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  köşe elemanlarının kümesi ve  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  kenar elemanlarının kümesi ile  $G^* = (G, \rho, \kappa, B)$  esnek grafi verilsin.  $\rho: B \rightarrow P(V)$  ve

$$\rho(u) = \{v \in V: uRv\} \approx \{(u \in \rho(b)) = [u]_{\rho(b)} \subseteq X\}$$

olmak üzere  $(\rho_*, \rho^*, B), V$  üzerinde bir yakın esnek küme olup alt ve üst yaklaşımları sırasıyla,

$$\rho_*(X) = \{u \in V: \exists b \in B \text{ için } [u]_{\rho(b)} \subseteq X\}$$

ve

$$\rho^*(X) = \{u \in V: \exists b \in B \text{ için } u \in \rho(b) \text{ ve } [u]_{\rho(b)} \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklindedir.  $(\rho, B), V$  üzerinde bir esnek kümedir. Benzer şekilde

$$\kappa: B \rightarrow P(E), \kappa(b) = \{[u]_{\kappa(b)} = (uv = e) \in E: \{u, v\} \subseteq \rho(b)\}$$

olmak üzere  $(\kappa_*, \kappa^*, B), V$  üzerinde bir yakın esnek küme olup alt ve üst yaklaşımları sırasıyla,

$$\kappa_*(X) = \{e \in E: \exists b \in B \text{ için } e \in [u]_{\kappa(b)} \subseteq X\}$$

ve

$$\kappa^*(X) = \{e \in E : \exists b \in B \text{ için } [u]_{\kappa(b)} \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklindedir. Ayrıca  $(\kappa, B), E$  üzerinde esnek kümedir.

$$Bnd_{\rho}(X) = \rho^*(X) - \rho_*(X) \geq 0$$

ve

$$Bnd_{\kappa}(X) = \kappa^*(X) - \kappa_*(X) \geq 0$$

şartları sağlanıyorsa  $(G, \rho, \kappa, B)$  esnek grafına yakın esnek graf adı verilir ve

$$NG^*(X) = N(G, \rho_*, \rho^*, \kappa_*, \kappa^*, B, X)$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 16:** Bir  $NG^*(X) = N(G, \rho, \kappa, B, X)$  aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $NG^*(X)$ 'a yakın esnek graf denir.

- i)  $G = (V, E)$  grafi basit graf olur.
- ii) Boştan farklı  $B$  kümesi parametre kümesidir.
- iii)  $(\rho_*(X), \rho^*(X), B)$ ,  $V$  üzerinde yakın esnek küme olur.
- iv)  $(\kappa_*(X), \kappa^*(X), B)$ ,  $E$  üzerinde yakın esnek küme olur.
- v)  $\varphi_*(X) = (\rho_*(X), \kappa_*(X))$ ,  $\varphi^*(X) = (\rho^*(X), \kappa^*(X))$  ile  $(\varphi_*(X), \varphi^*(X))$ ,  $G = (V, E)$  basit grafının alt grafıdır.

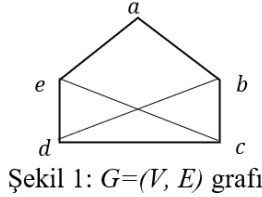
Yakın esnek graf

$$NG^*(X) = N(G, \rho_*, \rho^*, \kappa_*, \kappa^*, B, X) = (\varphi_*(X), \varphi^*(X))$$

şeklindedir.  $NG^*$ 'nin tüm esnek graflarının kümesi  $SNG^*(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 1:**  $V = \{a, b, c, d, e\}$  köşe elemanları kümesi ve  $E = \{ab, cd, bc, de, ea, ce, bd\}$  kenar elemanları kümesi ve  $B =$

$\{a, c\} \subseteq V$  parametrelerin kümesi olsun.  $G = (V, E)$  grafi Şekil 1 ile verilsin:



$V$  üzerinde bir  $(\rho, B)$  soft küme her  $x \in B$  için,;

$$\rho : B \rightarrow P(V), \rho(x) = \{y \in V : xRy \Leftrightarrow d(x, y) = 1\}$$

dönüşümü ile

$$\rho(c) = \{b, d, e\}, \rho(a) = \{b, e\}$$

elde edilir.

$E$  üzerinde bir  $(\kappa, B)$  soft kümesi:

$$\kappa : B \rightarrow P(E), \kappa(x) = \{(uv = e) \in E : \{u, v\} \subseteq \rho(x)\}, \forall x \in B$$

dönüşümü ile

$$\kappa(a) = \{\}, \kappa(c) = \{bd, de\}$$

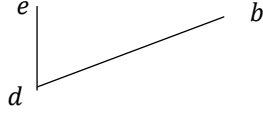
olarak bulunur. Burada

$$\varphi(a) = (\rho(a), \kappa(a)), \varphi(c) = (\rho(c), \kappa(c))$$

grafları  $G$  grafinin alt graflarıdır. Ayrıca  $G^* = \{\varphi(a), \varphi(c)\}$ ,  $G$  nin esnek grafidir.



Şekil 2.  $a$  köşe noktasına karşılık gelen  $\varphi(a)$



Şekil 3.  $c$  köşe noktasına karşılık gelen  $\varphi(c)$

Esnek grafın tablo temsili Tablo 1 ve Tablo 2 ile verildi.

Tablo 1:  $V$ 'de esnek graf tablosu

| $B \setminus V$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $a$             | 0   | 1   | 0   | 0   | 1   |
| $c$             | 0   | 1   | 0   | 1   | 1   |

Tablo 2.  $E$ 'de esnek graf tablosu

| $B \setminus E$ | $ab$ | $bc$ | $cd$ | $de$ | $ea$ | $bd$ | $ce$ |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $a$             | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| $c$             | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    |

$X = \{a, b, e\} \subseteq V$  olsun.  $V$ 'nin alt ve üst yakın yaklaşımları:

$$[b]_{\rho(a)} = \{b, e\}, [e]_{\rho(c)} = \{b, d, e\}$$

ve

$$[b]_{\kappa(a)} = \{be\} \notin E = \emptyset, [d]_{\kappa(c)} = \{bd, de\}$$

eşitliklerinden

$$\rho_*(X) = \{b, e\}, \rho^*(X) = \{b, d, e\}$$

ve

$$\kappa_*(X) = \{\square\}, \kappa^*(X) = \{bd, de\}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$Bnd_\rho(X) = \rho^*(X) - \rho_*(X) \geq 0$$

ve

$$Bnd_\kappa(X) = \kappa^*(X) - \kappa_*(X) \geq 0$$

şartları sağlandığından,

$$\begin{aligned} NG^*(X) &= N(G, \rho_*, \rho^*, \kappa_*, \kappa^*, B, X) \\ &= N(G, \{b, e\}, \{b, d, e\}, \{\}, \{bd, de\}, B, X) \end{aligned}$$

ifadesine yakın esnek graf denir.

**Tanım 17:**  $NG^*(X)$  yakın esnek grafi,  $X \subseteq V$  olmak üzere

**i)**  $\varphi_*(X) = (\rho_*(X), \kappa_*(X)) = \rho_*(X)$  ise alt tepe noktası içeren bir graftır.

**ii)**  $\varphi^*(X) = (\rho^*(X), \kappa^*(X)) = \rho^*(X)$  ise üst tepe noktası içeren bir graftır.

**iii)**  $\varphi_*(X) = (\rho_*(X), \kappa_*(X)) = \kappa_*(X)$  ise alt kenar içeren bir graftır.

**iv)**  $\varphi^*(X) = (\rho^*(X), \kappa^*(X)) = \kappa^*(X)$  ise üst kenar içeren bir graftır.

denir.

**Tanım 18:**  $G^*$  ın iki yakın esnek grafi

$$NG_1^*(X) = N(G, \rho_{1*}, \rho_1^*, \kappa_{1*}, \kappa_1^*, A, X)$$

ve

$$NG_2^*(X) = N(G, \rho_{2*}, \rho_2^*, \kappa_{2*}, \kappa_2^*, B, X)$$

olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan  $G_2^*$ 'ye  $G_1^*$ 'in yakın esnek alt grafi denir.

i)  $B \subseteq A$ .

ii)  $\forall x \in B$ ,

$$\varphi_{2*}(X) = (\rho_{2*}(X), \kappa_{2*}(X)), \varphi_{1*}(X) = (\rho_{1*}(X), \kappa_{1*}(X))$$

ifadesinin yakın esnek alt grafıdır.

iii)  $\forall x \in B$ ,

$$\varphi_2^*(X) = (\rho_2^*(X), \kappa_2^*(X)), \varphi_1^*(X) = (\rho_1^*(X), \kappa_1^*(X))$$

ifadesinin yakın esnek alt grafıdır.

**Tanım 19:**  $G^*$ ın iki yakın esnek grafi

$$NG_1^* = N(G\rho_{1*}\rho_{1*}^*\kappa_{1*}\kappa_{1*}^*, A, X)$$

ve

$$NG_2^* = N(G\rho_{2*}\rho_{2*}^*\kappa_{2*}\kappa_{2*}^*, B, Y)$$

olsun.  $NG_1^*(X)$ ve  $NG_2^*(X)$  yakın esnek graflarının kesişimi

$$NG_1^* \cap NG_2^* = N(G, \rho_*, \rho_*^*, \kappa_*, \kappa_*^*, A \times B, X \times Y)$$

olur. Burada

$$\rho_*(X \times Y) = \rho_{1*}(X) \cap \rho_{2*}(X),$$

$$\rho^*(X \times Y) = \rho_{1*}^*(X) \cap \rho_{2*}^*(X),$$

$$\kappa_*(X \times Y) = \kappa_{1*}(X) \cap \kappa_{2*}(X),$$

$$\kappa^*(X \times Y) = \kappa_{1*}^*(X) \cap \kappa_{2*}^*(X)$$

eşitlikleri geçerlidir.

**Tanım 20:**  $G^*$  ın iki yakın esnek grafi

$$NG_1^* = N(G\rho_{1*}\rho_1^*\kappa_{1*}\kappa_1^*, A, X)$$

ve

$$NG_2^* = N(G\rho_{2*}\rho_2^*\kappa_{2*}\kappa_2^*, B, X)$$

olsun.  $NG_1^*(X)$  ve  $NG_2^*(X)$  yakın esnek graflarının birleşimi

$$NG_1^* \cup NG_2^* = N(G, \rho_*, \rho^*, \kappa_*, \kappa^*, A \times B, X \times Y)$$

olur. Burada

$$\rho_*(X \times Y) = \rho_{1*}(X) \cup \rho_{2*}(X),$$

$$\rho^*(X \times Y) = \rho_1^*(X) \rho_2^*(X),$$

$$\kappa_*(X \times Y) = \kappa_{1*}(X) \kappa_{2*}(X),$$

$$\kappa^*(X \times Y) = \kappa_1^*(X) \kappa_2^*(X)$$

şeklindedir.

## Sonuç

Graf teori bilgisayar bilimlerinin uygulamalarında, esnek teori ise belirsizlik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu makalede ise yakın esnek graf kavramı ile uygulamada karşılaşılan bu problemlerin çözümüne katkı sağlayacak bazı yeni tanımlar ile birlikte özellikler ve örnek de verildi. Yakın esnek grafların birleşim, kesişim, kartezyen çarpım gibi bazı özellikleri verildi. Bu çalışmadan sonra ise yakın esnek bağıntı ve yakın esnek kümelerin cebirsel özellikleri ile ilgili çalışmaların yapılması amaçlanmaktadır.

## Kaynaklar

Akram, M. & Nawaz, S. (2015). Operations on Soft Graphs. *Fuzzy Information and Engineering*, 7(4), 423–449.

Aktas, H. & Cagman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Inform. Sci.*, 177, 2726- 2735.

Al-Masarwah, A. & Abu Qamar, M. (2018). Certain types of fuzzy soft graphs. *New Mathematics and Natural Computation*, 14, 145-156.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Bhattacharya, P. (1987). Some Remarks on Fuzzy Graphs. *Pattern Recognition Letters*, 6(5), 297–302.

Çağman, N., Karataş, S. & Enginoglu, S. (2011). Soft topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.

Çelik, Y. (2018). On bipolar fuzzy soft graphs. *Creative Mathematics and Informatics*, 27(2), 123–132.

Erdos, P. (1959). Graph Theory and Probability. *Canadian Journal of Mathematics*, 11, 34–38.

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128–140.

Imrich, W., Klavzar, S. & Rall, D. F. (2008). Topics in graph theory: Graphs and their Cartesian product. CRC Press.

Leeuwen, J.V. (1990). Graph Algorithms. In *Handbook of Theoretical Computer Science*, 525–631.

Loday, J. L. (1982) Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24(2), 179-202.

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19-31.

Mordeson, J. N., & Chang-Shyh, P. (1994). Operations on fuzzy graphs. *Information sciences*, 79(3-4), 159-170.

Odabaş, A., Soyly, E. (2019). Relationships between category theory and functional programming with an application, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1566-1577

Peters, J.F. (2007). Near sets: General theory about nearness of objects. *Applied Mathematical Sciences*, 1, 2609-2029.

Rosenfeld, A. (1975). Fuzzy Graphs. Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, *Academic Press*, 77–95.

Samanta, S., Sarkar, B., Shin, D. & Pal, M. (2016). Completeness and regularity of generalized fuzzy graphs. *SpringerPlus*, 5, 1979.

Schaeffer, S.E. (2007). Graph Clustering, *Computer Science Review*, 1(1), 27–64.

Soyly Yılmaz, E., Yılmaz, K. (2020). On crossed squares of commutative algebras, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes* 8 (2), 32-41.

Soylu Yılmaz, E. (2022). 4-Dimensional 2-Crossed Modules, *Journal of New Theory*, 40, 46-53.

Tasbozan, H., Icen, I., Bagirmaz, N. & Ozcan, A.F. (2017). Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces. *Filomat*, 31, 4117-4125.

Taşbozan, H. (2020). Near soft bağlantılılık. *Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering*, 20, 815-818.

Tasbozan, H., & Bagirmaz, N. (2021). Soft separation axioms on nearness approximation Spaces. *Sohag Journal of Mathematics*, 8(2), 57-60.

Tasbozan, H. & Bagirmaz, N. (2021). Near soft continuous and near soft JP-continuous functions. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 9(2), 166-171.

Yılmaz, K., Taşbozan, H. & Güzelkokar, A. (2022). Yakın esnek ayırma aksiyomları ve kuratowski kapanış operatörü üzerine. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 24(2), 728-737.

Tasbozan, H. (2024a). Application of Bipolar Near Soft Sets. *Ikonion Journal of Mathematics*, 6 (1), 21-29.

Tasbozan, H. (2024b). Near neutrosophic soft set. *AIMS MATHEMATICS*, 9(4), 9447-9454.

Wardowski, D. (2013). On a soft mapping and its fixed points. *Fixed point theory and applications*, 1-11.

Whitehead, J.H.C. (1949) Combinatorial homotopy II. *Bull. American Mathematical Society* 55, 453--496.

Yılmaz, K., Soylu Yılmaz, E. (2019) Baues cofibration for quadratic modules of Lie algebras. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1653-1663.

Yılmaz, K. (2018) A fibration application for crossed squares. *Cumhuriyet Science Journal*, 39(1), 1-6.

Yılmaz, K. (2023) A note on 4-dimensional 2-crossed modules. *Journal of New Theory*, 42, 86-93.

Zadeh, L.A. (1979). Fuzzy sets and information granularity. *Advances in fuzzy set theory and applications*, 11, 3-18.

## BÖLÜM III

### Çoklu Kümelere Yeni Bir Yaklaşım

Hatice TAŞBOZAN<sup>1</sup>

#### Giriş

Belirsizlik içeren problemleri çözmek için önce Zadeh tarafından tanımlanan fuzzy küme teorisi verildi (Zadeh, 1979). Daha sonra bu problemlere yönelik klasik yöntemlerle çözülemeyen farklı bilim dallarındaki problemlerin çözümlenmesinde kullanılacak olan, Molodtsov tarafından tanımlanan, soft(yumuşak) küme teorisi verildi (Molodtsov, 1999). Böylece, bu kavram birçok alanda başarıyla uygulandı (Aktas & Cagman, 2007; Ali & ark., 2009; Çağman, Karataş & Enginoglu, 2011). Sonraki yıllarda ise esnek kümeler teorisinde topolojik yapılar ve ayırma aksiyomları gibi kavramlar çalışıldı. Cebirsel olarak ise bu kavram 2013 yılında Wardowski tarafından incelendi (Wardowski, 2013).

---

<sup>1</sup> Doç. Dr., Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay/Türkiye, Orcid: 0000-0002-6850-8658, htasbozan@mku.edu.tr

Nesnelerin, birbirlerine yakınlığının incelendiği yakın(near) küme kavramı, özellikleri bakımından birbirine yakın, yani aynı ayırt edilebilir niteliklere sahip nesneleri bulmaya dayanan bir kavramdır. Near küme teorisi, nitelik seçimine göre incelenerek farklı ölçülebilir bilgi içeriğine sahip olur ve topluluklarda nesnelerin özelliklerine göre ayırt edilerek kolay sınıflandırılmasını sağlar (Peters, 2007). Ayrıca, near ve soft küme tanımlarının birlikte kullanılmasıyla meydana gelen near soft küme tanımı tanımlandı (Tasbozan & ark., 2017).

Klasik cümle teorisinde cümlede yer alan elemanların tekrarı olmazken, bir cümlede yer alan elemanların tekrarına olanak sağlayan bir cümle teorisi olan çoklu küme kavramı bazı durumlarda kullanışlı olabilmektedir. Cerf ve arkadaşları tarafından tanımlanan bu küme teorisi, birçok kişi tarafından çalışıldı (Cerf & ark., 1971; Peterson, 1976; Yager, 1986; Jena, Ghosh & Tripathy, 2001; Manjunath & Jhon, 2006). Daha sonra, çoklu küme teorisinde bağıntı ve fonksiyon tanımlandı (Girish & Jhon, 2009, 2012). Esnek çoklu küme teorisi ise John ve Babitha tarafından tanımlandı (Babitha & Jhon, 2013). Sonrasında ise bu küme teorisinde esnek çoklu topolojisi tanımlandı.

Bu çalışmada, esnek çoklu kümeleri yakın yaklaşım uzaylarında kullanılacak olan yöntemlere öncülük edecek tanım ve örnekler verildi.

## **Materyal ve Metot**

**Tanım 1:**  $P(U)$  kümesi  $U$  kümesinin kuvvet kümesi, boştan farklı bir  $A$  kümesi  $E$  kümesinin bir alt kümesi ve  $F: A \rightarrow P(U)$  bir

dönüşüm olsun.  $G = (F, A)$ ,  $U$  kümesi üzerinde bir esnek(soft) kümedir (Molodtsov, 1999).

**Tanım 2:**  $NAS = (O, F, B, \sim B_r, N_r, v_{N_r})$  yakın yaklaşım uzayı ve  $O$  kümesi üzerinde bir esnek küme  $\sigma = (F, B)$  olsun.  $NAS$  uzayındaki  $\sigma = (F, B)$  kümesinin alt yaklaşımı

$$N_r * (\sigma) = (F_*, B)$$

ve üst yaklaşımı

$$N_r^*(\sigma) = (F^*B)$$

şeklinde birer soft kümedir. Ayrıca, her  $\phi \in B$  için

$$F_*(\phi) = N_r * (F(\phi)) = \{x \in O : [x]_{B_r} \subseteq F(\phi)\}$$

ve

$$F^*(\phi) = N_r^*(F(\phi)) = \{x \in O : [x]_{B_r} \cap F(\phi) \neq \emptyset\}$$

olup,  $N_r *$  ve  $N_r^*$  yakın yaklaşımları esnek kümeler üzerinde alt ve üst yakın yaklaşımlardır. Eğer

$$Bnd_{N_r}(B) = (N_r^*(\sigma) - N_r * (\sigma)) \geq 0$$

şartı sağlanıyorsa, bu esnek kümeye yakın esnek kümedir denir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 3:**  $(F, B)^c$ ,  $(F, B)$  yakın esnek kümesinin tümleyeni olup,

$$F^c(\phi) = O - F(\phi), \forall \phi \in B$$

şeklindedir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 4:**  $(O, \tau)$ ,  $(O, B)$  üzerinde bir yakın esnek topolojik uzay olsun.  $(O, B)$ 'nin bir yakın esnek alt kümesinin tümleyeni  $\tau'$ 'da bir yakın esnek açık küme ise yakın esnek kümeye yakın esnek kapalı küme denir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 5:**  $(O, \tau, B)$ ,  $O$  üzerinde bir yakın esnek topolojik uzay ve  $(F, B)$ ,  $O$  üzerinde bir yakın esnek küme olsun.  $(F, B)$  kümesinin yakın esnek kapanışı  $\overline{(F, B)}$ ,  $O$  üzerinde  $(F, B)$ 'yi

kapsayan en dar yakın esnek kapalı kümedir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 6:**  $(F, B)$ ,  $O$  kümesi üzerinde bir yakın esnek küme olsun. Eğer bir  $e \in B$  için  $F(e) = \{x\}$  ve  $\forall e^c \in B - \{e\}$  için  $F(e^c) = \emptyset$  ise  $(F, B)$  yakın esnek kümesine yakın esnek noktadır denir. Bir yakın esnek noktası  $(x_e, B)$  ile ifade edilir (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 7:**  $\sigma = (F, B)$ ,  $(O, B)$  kümesi üzerinde bir yakın esnek küme ve  $\tau$ ,  $\sigma$ 'nın bütün yakın esnek alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun.  $B$  özelliklerin kümesi olmak üzere  $(O, \tau)$ 'ye  $\sigma$  üzerinde bir yakın esnek topolojisi aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

i)  $(\emptyset, B), (O, B) \in \tau$  olmak üzere  $\forall \phi \in B$  için  $\emptyset(\phi) = \emptyset$  ve  $F(\phi) = F$  şeklindedir.

ii)  $\tau$ 'da bulunan tüm yakın esnek kümelerin kesişimi  $\tau$ 'da bulunur.

iii)  $\tau$ 'da bulunan tüm yakın esnek kümelerin kesişimi  $\tau$ 'da bulunur.

Bu durumda,  $(O, \tau, B)$ 'ye yakın esnek topolojik uzayı denir. Bu topolojik uzayının tüm elemanları yakın esnek açık kümelerden oluşmaktadır (Tasbozan & ark., 2017).

**Tanım 8** Çoklu küme olan  $M$ ,  $U$  kümesinden seçilsin ve bir  $C_M: U \rightarrow \mathbb{N}$  fonksiyonu ile ifade edilsin. Bu durumda  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  kümesinde bir  $M$  çoklu kümesi

$$M = \left\{ \frac{k_1}{x_1}, \frac{k_2}{x_2}, \dots, \frac{k_n}{x_n} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Burada  $k_i$ ,  $x_i$ 'nin tekrar sayısıdır. Bu durum  $x_i \in^{k_i} M$  şeklinde gösterilir.  $M$  kümesinde  $C_M(x)$ ,  $x$ 'in

tekrar sayısını göstermektedir ve  $M$  kümesinde yer almayan elemanlar için sıfırdır. Bu durum  $x \notin U$  için  $C_M(x) = 0$  ile ifade edilir (Tokat, 2013).

**Tanım 9:**  $M$  ve  $N$  çoklu kümeleri  $U$  kümesinden alınsın. O halde  $\forall x \in U$  için

- i)  $C_M(x) = C_N(x)$  ise  $M = N$  dir.
- ii)  $C_M(x) \leq C_N(x)$  ise  $M \subseteq N$  dir.
- iii)  $C_P(x) = \max \{C_M(x), C_N(x)\}$  ise  $P = M \cup N$  dir.
- iv)  $C_P(x) = \min \{C_M(x), C_N(x)\}$  ise  $P = M \cap N$  dir (Tokat & Osmanoğlu, 2013).

**Tanım 10:** Çoklu evrensel küme  $U$  ve özelliklerin kümesi  $E$  olmak üzere  $A \subseteq E$  olsun. Bu durumda  $(F, A)$  esnek çoklu küme olup  $F$  dönüşümü  $F: A \rightarrow P^*(U)$  olup,  $\forall e \in A$  için  $F(e)$  çoklu kümesi  $C_{F(e)}: U^* \rightarrow \mathbb{N}$  dönüşümü ile gösterilir.  $U$  çoklu küme evrenseli, çoklu kümelerin oluşturduğu kümedir.  $P^*(U)$ ,  $P(U)$  kümesinin destek kümesini ifade etmektedir. Yani, bir

$$U = \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, \frac{3}{z}, \frac{4}{w} \right\}$$

esnek kümesinin destek kümesi

$$U^* = \{x, y, z, w\}$$

şeklinde ifade edilir (Tokat & Osmanoğlu, 2013).

**Örnek 1:**  $U = \left\{ \frac{3}{x}, \frac{2}{y}, \frac{1}{z}, \frac{4}{w} \right\}$  ve  $E = \{p, q, r\}$  verilsin.  $F: A \rightarrow P^*(U)$  fonksiyonu

$$F(p) = \left\{ \frac{2}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{w} \right\},$$

$$F(q) = \left\{ \frac{2}{x} \right\},$$

$$F(r) = \left\{ \frac{2}{x}, \frac{2}{y}, \frac{1}{w} \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $(F, A)$  bir esnek çoklu küme olup,  $\forall e \in A$  için  $F(e)$  çoklu kümesi

$$C_{F(e)}: U^* \rightarrow \mathbb{N}$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned} C_{F(p)}(x) &= \{2\}, \\ C_{F(p)}(y) &= \{1\}, \\ C_{F(p)}(z) &= \{0\}, \\ C_{F(p)}(w) &= \{1\}, \\ C_{F(q)}(x) &= \{2\}, \\ C_{F(q)}(y) &= \{0\}, \\ C_{F(q)}(z) &= \{0\}, \\ C_{F(q)}(w) &= \{0\}, \\ C_{F(r)}(x) &= \{2\}, \\ C_{F(r)}(y) &= \{2\}, \\ C_{F(r)}(z) &= \{0\}, \\ C_{F(r)}(w) &= \{1\} \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. O halde esnek çoklu kümesi

$$(F, A) = \{F(p), F(q), F(r)\} = \left\{ \left\{ \frac{2}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{w} \right\}, \left\{ \frac{2}{x} \right\}, \left\{ \frac{2}{x}, \frac{2}{y}, \frac{1}{w} \right\} \right\}$$

şeklindedir.

**Tanım 11:**  $U$  üzerinde tanımlanan  $(F, A)$  ve  $(G, B)$  esnek çoklu kümeleri için

i)  $A \subseteq B$ ,

ii)  $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x), \forall x \in U^*, \forall e \in A$

şartları sağlanırsa  $(F, A)$  ifadesine  $(G, B)$  ifadesinin esnek çoklu alt kümesi adı verilir ve

$$(F, A) \subseteq (G, B)$$

ile ifade edilir (Tokat & Osmanoğlu, 2013).

**Tanım 12:** Çoklu evrensel  $U$  kümesi ve özelliklerin  $E$  kümesi verilsin.  $U$  kümesinde bulunan tüm esnek çoklu kümelerin ailesi  $U_E$  ile ifade edilir (Tokat & Osmanoğlu, 2013).

**Tanım 13:**  $A \subseteq E$  ve  $\tau \subseteq U_E$  olmak üzere,

i)  $\emptyset, (U_E, B) \in \tau$ ,

ii)  $\tau$  da bulunan sonlu sayıdaki esnek çoklu kümelerin kesişimi yine  $\tau$  ya aittir,

iii)  $\tau$  da bulunan esnek çoklu kümelerin birleşimi yine  $\tau$  ya aittir,

şartlarını sağlayan  $\tau$  ya  $U$  üzerinde bir topoloji,  $(U_E, \tau)$  ise  $U$  üzerinde bir topolojik uzaydır.

$(U_E, \tau)$  uzayında  $\tau$  daki elemanlara esnek çoklu açık kümeler ve tümleyeni açık olan esnek çoklu kümelere esnek çoklu kapalı kümeler denir (Tokat & Osmanoğlu, 2013).

**Örnek 2:**  $U = \left\{ \frac{3}{x}, \frac{2}{y}, \frac{1}{z}, \frac{4}{w} \right\}$ ,  $B = \{p, q\}$  ve  
 $\tau = \{\emptyset, U, (F_1, B), (F_2, B), (F_3, B)\}$   
olsun. Buradaki

$(F_1, B), (F_2, B), (F_3, B)$   
esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$F_1(p) = \left\{ \frac{2}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{w} \right\},$$

$$F_1(q) = \left\{ \frac{2}{x} \right\},$$

$$F_2(p) = \left\{ \frac{2}{x}, \frac{1}{y} \right\},$$

$$F_2(q) = \left\{ \frac{2}{x}, \frac{1}{z} \right\},$$

$$F_3(p) = U,$$

$$F_3(q) = \left\{ \frac{2}{x} \right\}.$$

Bu durumda  $\tau$  ,  $U$  kümesinde esnek çoklu topoloji tanımladığından dolayı  $(U_B, \tau)$  bir esnek çoklu topolojik uzayı olur.

**Tanım 14:** Esnek çoklu topolojik uzay  $(U_E, \tau)$  ve esnek çoklu açık kümelerin bir sınıfı  $\mathcal{B}$  olmak üzere  $\tau$  daki her eleman,  $\mathcal{B}$  deki bazı kümelerin birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa  $\mathcal{B}$  ye  $\tau$  topolojisinin bir esnek çoklu tabanı denir.

i)  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ .

ii) Her  $(F, A) \in \tau$  için  $(F, A) = \cup_{i \in I} (G_i, B)$  olacak şekilde  $(G_i, B) \in \mathcal{B}$  vardır (Tokat ve Osmanoğlu 2013).

**Tanım 15:** Esnek çoklu topolojik uzay  $(U_E, \tau)$  ve  $U$  evrensel kümesinin bir  $Y$  alt kümesi verilsin. Bu durumda

$$\tau_Y = \{(\overset{Y}{\square} F, E) : (F, E) \in \tau\}$$

İfadesine  $Y$  de esnek çoklu topoloji olup,  $(Y_E, \tau_Y)$  topolojik uzayına ise  $(U_E, \tau)$  topolojik uzayının esnek çoklu alt uzayıdır (Tokat & Osmanoğlu, 2013).

## Bulgular

**Tanım 16:**  $NAS = (O, F, B, \sim B_r, N_r, v_{N_r})$  yakın yaklaşım uzayı ve  $\sigma = (F, B)$ ,  $O$  kümesi üzerinde bir esnek küme olsun.  $O$  kümesinden seçilen bir  $M$  çoklu kümesi  $C_M: O \rightarrow \mathbb{N}$  dönüşümü ile ifade edilir.  $O = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  kümesinde bir  $M$  çoklu kümesidir. Çoklu evrensel  $U$  kümesi, çoklu kümelerin oluşturduğu bir kümedir.  $P^*(U)$ ,  $P(U)$  kümesinin destek kümesini ve  $U^*$  ise  $U$  kümesinin destek kümesini ifade etmektedir. Böylece

$$U = \left\{ \frac{k_i}{x_i} : k \in \mathbb{N}, x_i \in^{k_i} M \right\}$$

olup,  $k_i$ ,  $x_i$  'nin tekrar sayısıdır. Bu  $x_i \in^{k_i} M$  şeklinde gösterilir.  $M$  kümesindeki  $x$  'in tekrar sayısı  $C_M(x)$  ile gösterilir.  $M$  kümesinde bulunmayan elemanlar için  $C_M(x) = 0$  eşitliği geçerlidir. Bu durumda  $x \notin O$  için  $C_M(x) = 0$  olduğunda  $C_M(x)$  'in aldığı değerlerle oluşturulacak denklik bağıntısında  $C_M(x) = 0$  olan denklik sınıfları dahil edilmemektedir. Özelliklerin kümesi  $E$  olmak üzere  $B \subseteq E$  ve  $(F', B)$  bir esnek çoklu küme olsun. Burada  $F'$  dönüşümü  $F': B \rightarrow P(U)$  ile tanımlı olup  $\forall \phi \in B$  için  $F'(\phi)$  kümesi  $C_{F'(\phi)}: O \rightarrow \mathbb{N}$  dönüşümü ile ifade edilir.  $\forall \phi \in B$  ve  $C_M(x) \neq 0$  için  $X \subseteq O$  kümesinin  $NAS$  yakın yaklaşım uzayındaki  $\sigma = (F, B)$  esnek çoklu kümesinin alt yaklaşımı

$$N * (F', B)(X) = \left\{ \frac{k_i}{x_i} : [x]_{\phi_i} \subseteq X \text{ ve } F'(\phi_i) \subseteq U \right\}$$

ve üst yaklaşımı

$$N^*(F', B)(X) = \left\{ \frac{k_i}{x_i} : [x]_{\phi_i} \cap X \neq \emptyset \text{ ve } F'(\phi_i) \cap U \neq \emptyset \right\}$$

şeklindedir. Eğer

$$Bnd_{N_r}(B) = (N_r^*(\sigma) - N_r * (\sigma)) \geq 0$$

şartı sağlanıyorsa

$$N(F', B) = (N * (F', B)(X), N^*(F', B)(X))$$

esnek çoklu kümesine yakın esnek çoklu küme(near soft multiset) denir.

**Tanım 17:** çoklu evrensel  $U$  kümesi ve özelliklerin  $E$  kümesi verilsin.  $U$  kümesinde tanımlı tüm yakın esnek çoklu kümelerin ailesi  $U_E$  ile gösterilir.

**Tanım 18:**  $\tau \subseteq U_E$  ve  $B \subseteq E$  olsun.  $\tau$ ,  $N(F', B)$  yakın esnek çoklu kümeler olmak üzere;

i)  $\emptyset, N(U_E, B) \in \tau$ ,

ii)  $\tau$  da bulunan sonlu sayıda yakın esnek çoklu kümenin kesişimi  $\tau$  ya aittir,

iii)  $\tau$  daki yakın esnek çoklu kümelerin birleşimi  $\tau$  ya aittir,

şartları sağlanıyorsa  $\tau$ ,  $U$  kümesinde yakın esnek çoklu kümelerin topolojisi olup  $(U_B, \tau)$  ise  $U$  kümesinde bir yakın esnek çoklu topolojik uzay olur.

**Örnek 3:**  $O = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  nesnelerin kümesi ve

$$B = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subseteq F = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$$

özelliklerin kümesi olmak üzere,  $O$  üzerinde bir  $\sigma = (F', B)$  esnek çoklu küme

$$U = \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{4}{x_2}, \frac{3}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\}$$

ve

$$F': B \rightarrow P^*(U)$$

dönüşümü

$$F'(\phi_1) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{2}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$F'(\phi_2) = \left\{ \frac{2}{x_1} \right\},$$

$$F'(\phi_3) = \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\}$$

olmak üzere  $\forall \phi_i \in B$  için  $F'(\phi_i)$  kümesi  $C_{F(\phi_i)}: U^* \rightarrow \mathbb{N}$  dönüşümü ile

$$C_{F'(\phi_1)}(x_1) = \{2\},$$

$$C_{F'(\phi_1)}(x_2) = \{1\},$$

$$C_{F'(\phi_1)}(x_3) = \{0\},$$

$$C_{F'(\phi_1)}(x_4) = \{1\},$$

$$C_{F'(\phi_2)}(x_1) = \{2\},$$

$$C_{F'(\phi_2)}(x_2) = \{0\},$$

$$C_{F'(\phi_2)}(x_3) = \{0\},$$

$$C_{F'(\phi_2)}(x_4) = \{0\},$$

$$C_{F'(\phi_3)}(x_1) = \{2\},$$

$$C_{F'(\phi_3)}(x_2) = \{2\},$$

$$C_{F'(\phi_3)}(x_3) = \{0\},$$

$$C_{F'(\phi_3)}(x_4) = \{1\}$$

şeklinde tanımlıdır. O halde esnek çoklu küme ise

$$\begin{aligned} (F', B) &= \{F'(\phi_1), F'(\phi_2), F'(\phi_3)\} \\ &= \left\{ \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_4} \right\}, \left\{ \frac{2}{x_1} \right\}, \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde olup, Tablo 1 yardımı ile denklik sınıfları

$$[x_1]_{\phi_1} = \{x_1\},$$

$$[x_2]_{\phi_1} = \{x_2, x_4\},$$

$$[x_3]_{\phi_1} = \{x_3\},$$

$$[x_1]_{\phi_2} = \{x_1\},$$

$$[x_2]_{\phi_2} = \{x_2, x_3, x_4\} = 0,$$

$$[x_1]_{\phi_3} = \{x_1\},$$

$$[x_2]_{\phi_3} = \{x_2, x_4\},$$

$$[x_3]_{\phi_3} = \{x_3\}$$

şeklinde dir.

$$[x_i]_{\phi_i} = 0$$

olan denklik sınıfları ele alınmamaktadır.

*Tablo 1:*  $O = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  algılanabilir nesneler kümesinin çıkarım fonksiyonlarındaki değer tablosu

|          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| $\phi_1$ | 0     | 1     | 2     | 1     |
| $\phi_2$ | 2     | 0     | 0     | 0     |
| $\phi_3$ | 2     | 1     | 3     | 1     |

Yakın yaklaşım uzayında bir

$$X = \{x_1, x_2, x_4\}$$

kümesinin esnek çoklu kümesi

$$N * (F', B)(X) = \left\{ \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\}, \left\{ \frac{2}{x_1} \right\}, \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\} \right\}$$

ve

$$N^*(F', B)(X) = \left\{ \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_4} \right\}, \left\{ \frac{2}{x_1} \right\}, \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\} \right\}$$

olup,  $\phi_1, \phi_2 \in B$  için

$$Bnd_{N_r}(B) \geq 0$$

şartı sağlanmaktadır. Böylece

$$N(F', B) = (N * (F', B)(X), N^*(F', B)(X))$$

esnek çoklu kümesi yakın esnek çoklu kümedir.

Ayrıca, bu  $\sigma = N(F', B)$  yakın esnek çoklu kümesinde bir  $N(U_E, \tau)$  yakın esnek topolojik uzayı;

$$N(G', B) = (N * (G, B), N^*(G, B))$$

$$= \left\{ \left\{ \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}, \emptyset, \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{3}{x_3} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}, \emptyset, \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{3}{x_3} \right\} \right\} \right\}$$

ve

$$N(H', B) = \left\{ \left\{ \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}, \emptyset, \left\{ \frac{2}{x_1} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}, \emptyset, \left\{ \frac{2}{x_1} \right\} \right\} \right\}$$

olmak üzere;

$$\tau = \{N(F', B), N(G', B), N(H', B), (\emptyset, B), N(O, B)\}$$

şeklinde olur. Sonuç olarak  $N(U_E, \tau)$ ,  $U$  üzerinde bir yakın esnek çoklu topolojik uzaydır.

**Tanım 19:** Yakın esnek çoklu topolojik uzayı  $N(U_E, \tau)$  ve yakın esnek çoklu açık kümelerin sınıfı  $\mathcal{B}$  olmak üzere  $\tau$  da bulunan elemanlar  $\mathcal{B}$  da bulunan bazı kümelerin birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa  $\mathcal{B}$  ya  $\tau$ 'nın bir yakın esnek çoklu tabanı denir.

i)  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ .

ii)  $\forall N(F', A) \in \tau$  için  $N(F', A) = \cup_{i \in I} N(G'_i, B)$

eşitliğini sağlayan  $N(G'_i, B) \in \mathcal{B}$  vardır.

**Örnek 4:**  $U = \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{4}{x_2}, \frac{3}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\},$

$$B = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subseteq F = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$$

ve

$$\tau = \left\{ \begin{array}{l} N(F', B), N(G', B), N(H', B), N(K', B), \\ N(L', B), (\emptyset, B), N(U, B) \end{array} \right\}$$

olsun. Buradaki

$$N(F', B), N(G', B), N(H', B)$$

yakın esnek çoklu kümeleri

$$F'(\phi_1) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{2}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$F'(\phi_2) = \left\{ \frac{2}{x_1} \right\},$$

$$F'(\phi_3) = \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$G'(\phi_1) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$G'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$G'(\phi_3) = \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$H'(\phi_1) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$H'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$H'(\phi_3) = \left\{ \frac{2}{x_1} \right\},$$

$$K'(\phi_1) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$K'(\phi_2) = \left\{ \frac{2}{x_1} \right\},$$

$$K'(\phi_3) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$\begin{aligned} L'(\phi_1) &= \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}, \\ L'(\phi_2) &= \emptyset, \\ L'(\phi_3) &= \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}. \end{aligned}$$

ile verilsin. Bu durumda  $\tau$ ,  $U$  da bir yakın esnek çoklu topoloji olup  $N(U_B, \tau)$  ise yakın esnek çoklu topolojik uzaydır. Ayrıca

$$\mathcal{B} = \{N(H', B), N(K', B), N(L', B), (\emptyset, B), N(U, B)\}$$

ise

$$\begin{aligned} N(H', B) \cup N(K', B) &= N(F', B), \\ N(H', B) \cup N(L', B) &= N(G', B) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Sonuç olarak  $\mathcal{B}$ ,  $\tau$  yakın esnek çoklu topolojisi için bir yakın esnek çoklu tabandır.

**Tanım 20:** Yakın esnek çoklu topolojik uzay  $N(U_E, \tau)$  ve çoklu evrensel küme  $U$  nun boştan farklı bir alt kümesi  $Y$  olmak üzere

$$\tau_Y = \{N_{\square}^Y(F', E) : N(F', E) \in \tau\}$$

olarak tanımlanan  $\tau_Y$ ,  $Y$  üzerinde bir yakın esnek çoklu topoloji olup  $N(Y_E, \tau_Y)$  yakın esnek çoklu topolojik uzayı ise  $N(U_E, \tau)$  yakın esnek çoklu topolojik uzayının yakın esnek çoklu alt uzayıdır.

**Örnek 5:**  $U = \left\{ \frac{2}{x_1}, \frac{4}{x_2}, \frac{3}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\},$

$$B = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subseteq F = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$$

ve

$$\tau = \left\{ \begin{array}{c} N(F', B), N(G', B), N(H', B), N(K', B), \\ N(L', B), (\emptyset, B), N(U, B) \end{array} \right\}$$

olsun.  $(U_B, \tau)$  yakın esnek çoklu topoloji ve

$$Y = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{2}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\}$$

olsun. O halde

$$\tau_Y \left\{ \begin{array}{c} N_{\square}^Y(F', B), N_{\square}^Y(G', B), N_{\square}^Y(H', B), N_{\square}^Y(K', B), \\ N_{\square}^Y(L', B), (\emptyset, B), N(Y, B) \end{array} \right\}$$

yakın esnek çoklu topolojisi ve

$$N_{\square}^Y(F', B), N_{\square}^Y(G', B), N_{\square}^Y(H', B), N_{\square}^Y(K', B), N_{\square}^Y(L', B)$$

yakın esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\square F'(\phi_1) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{2}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$\square F'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$\square F'(\phi_3) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$\square G'(\phi_1) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$\square G'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$\square G'(\phi_3) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$\square H'(\phi_1) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$\square H'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$\square H'(\phi_3) = \emptyset,$$

$$\square K'(\phi_1) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$\square K'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$\square K'(\phi_3) = \left\{ \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_4} \right\},$$

$$\square L'(\phi_1) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\},$$

$$\square L'(\phi_2) = \emptyset,$$

$$\square L'(\phi_3) = \left\{ \frac{2}{x_3} \right\}.$$

Sonuç olarak  $\tau_Y$ ,  $Y$  kümesinde bir yakın esnek çoklu topoloji olup,  $N(Y, \tau_Y)$  yakın esnek çoklu topolojik uzayı ise  $N(U_B, \tau)$  yakın esnek çoklu topolojik uzayının yakın esnek çoklu alt uzayıdır.

## **Sonuç**

Bu çalışmada, yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan ve yeni bir kavram olan esnek çoklu kümeler üzerinde yeni bazı tanım ve örneklerden oluşan kavramlar verildi. Bu küme üzerinde topoloji, taban, alt küme gibi bazı kavramlar tanımlanmıştır. Bu çalışmada geliştirilen bu kavram uygulanan diğer yöntemlerin geliştirilmesinde önemli rol oynayacaktır.

## KAYNAKÇA

Aktas, H. & Cagman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Inform. Sci.*, 177, 2726- 2735.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers & Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Babitha, K.V. & Jhon S.J. (2013). On soft multisets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5, 35-44.

Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow, K. & Volausky, S. (1971). Formal control and low properties of a model of computation. *Report ENG 7178*, Los Angeles, CA, December, p. 81.

Çağman, N., Karataş, S. & Enginoglu, S. (2011). Soft topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.

Girish, K.P. & Jhon, S.J. (2009). Relations and functions in multiset context. *Information Sciences*, 179, 758-768.

Girish, K.P. & Jhon, S.J. (2012). Multiset topologies induced by multiset relations, *Information Sciences*, 188, 298-313.

Jena, S.P., Ghosh S.K. & Tripathy B.K. (2001). On the theory of bags and lists. *Information Sciences*, 132, 241-254.

Manjunath, A.S. & Jhon, S.J. (2006). On bagrelations. *Bulletin of Kerala Mathematics Association*, 3, 15-22.

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19-31.

Peters, J.F. (2007). Near sets: General theory about nearness of objects. *Applied Mathematical Sciences*, 1, 2609-2029.

Peterson, J. (1976). Computation sequence sets. *Journal of Computer System Science*, 13, 1-24.

Tasbozan, H., Icen, I., Bagirmaz, N. & Ozcan, A.F. (2017). Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces. *Filomat*, 31, 4117-4125.

Tokat, D. (2013). Some results on soft multi topology. *Sakarya University Journal of Science*, 17, 371-379.

Tokat ,D. & Osmanoğlu, İ. (2013). Connectedness on soft multi topological spaces. *J New Results Sci.*, 2, 8-18.

Wardowski, D. (2013). On a soft mapping and its fixed points. *Fixed point theory and Applications*, 182, 1-11.

Yager, R.R. (1986). On the theory of bags. *International Journal General System*, 13, 23-37.

Zadeh, L.A. (1979). Fuzzy sets and information granularity. *Advances in fuzzy set theory and applications*, 11, 3-18.

